UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

HUSITSKÁ TEOLOGICKÁ FAKULTA

Myšlenkové průniky filozofie a matematiky

Thought intersections of philosophy and mathematics

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Autor :

Prof. PhDr. Anna Hogenová, CSc. RNDr. Ilona Hlavešová

Praha 2016

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí bakalářské práce paní Prof. PhDr. Anně Hogenové, CSc. za odborné vedení, manželovi Josefovi za podporu a inspiraci, synovi Vojtěchovi za pomoc při grafické úpravě práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předkládanou bakalářskou práci " Myšlenkové průniky filozofie a matematiky" vypracovala samostatně s použitím níže uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 29.2.2016 RNDr. Ilona Hlavešová

Anotace

Bakalářská práce "Myšlenkové průniky filozofie a matematiky" se zabývá vzájemným ovlivňováním filozofie a matematiky v období od antického Řecka až do dnešních časů. I když příčiny vzniku matematiky a filozofie byly rozdílné, docházelo vzájemnému protínání těchto vědních disciplin. Práce je tematicky rozdělena do šesti kapitol, v to nepočítaje úvodní a závěrečnou kapitolu. První kapitola se zabývá vlivem číselných poměrů na starořeckou filozofii. Druhá kapitola pojednává o vývoji názorů na nekonečno. Třetí kapitola je věnována dělitelnosti kontinua. Čtvrtá kapitola rozebírá zkoumání pojmu prostor. Determinismus, pravděpodobnost a svobodná vůle jsou témata páté kapitoly. Náplní šesté kapitoly je pak úporný pokus o rigorizaci matematiky a přesah tohoto úsilí do filosofie.

Annotation

The thesis "Thought intersections of philosophy and mathematics" explores reciprocal interactions between philosophy and mathematics in the period since the ancient Greece to the present. Although the reasons for formation of mathematics and philosophy were different, the sciences were mutually influenced. The thesis is thematically divided into six chapters excluding the initial and final chapters. The first chapter focuses on the influence of numerical rations on the ancient Greek philosophy. The second chapter discusses the evolution of views on infinity. The third chapter is dedicated to the concept of continuum portioning. The fourth chapter explores the definition of space. Determinism, probability and free will are the themes of the fifth chapter. The content of the sixth chapter is a fierce attempt to establish rigorous foundations of mathematics and ramifications of this effort for philosophy.

Klíčová Slova

Matematika, Filozofie, Průnik, Ovlivňování, Číselný poměr, Kosmos, Konečný, Nekonečný, Kontinuum, Prostor, Determinismus, Pravděpodobnost, Svobodná vůle, Logika.

Keywords

Mathematics, Philosophy, Intersections, Influencing, Numeral ratio, Universe, Finite, Infinite, Continuum, Space, Determinism, Probability, Free will, Logic.

Obsah

"The eternal essence of number is the most providential cause of the whole heaven, earth and the region in between. Likewise it is the root of the continued existence of the gods and diamonds, as well as that of divine men."

ARIGNOTE (cca 500 př. n. l.) - pythagorejská filozofka - údajně dcera Pythagora. [1]

Úvod

Předkládaná práce se zabývá vzájemným ovlivňování dvou způsobů lidského uvažování, a sice matematiky a filozofie. Ačkoliv důvody vzniku matematiky a filozofie byly rozdílné[1], docházelo počínaje antickým Řeckem k jejich vzájemnému protínání.

Učencům Pythagorejské školy učarovaly objevy v akustice založené na číselných poměrem natolik, že se domnívali, že veškeré fungování světa je určováno poměry čísel. Geometrie vzniklá abstrakcí zeměměřických úloh vedla k matematické formulaci prostoru, kterou posléze postuloval starořecký matematik Euklides. Tento geometrický prostor pak přijali filozofové a zastávali prakticky až do 30. let předminulého století tezi, že reálný prostor je Euklidův a dokonce, že jiné prostory nemá smysl ani uvažovat.

Vedle výše zmíněných prvotně matematických oborů existují dnes discipliny v matematice, které prvotně matematickými nebyly a náležely výhradně filozofům. Například, až do novověku se zdálo být nemožné, že by se přesná věda jako matematika vůbec kdy mohla zabývat zdánlivě z podstaty tak neurčitou záležitostí, za jakou byla považována náhoda. O tom, zda náhoda vůbec existuje anebo zda je veškeré dění předurčeno, se přeli filozofové od nepaměti. Rovněž dilema, zda existuje nekonečný soubor objektů, a je-li takovým souborem vesmír, anebo zda lze na nějakou hromadu neustále přidávat další a další objekty bez toho, že by byla tato hromada nekonečná, zaměstnávalo filozofy po dlouhou dobu. Matematikům se pojem nekonečna podařilo zformulovat až ve druhé polovině 19. století. V neposlední řadě zmiňme ještě otázku některých filozofů ohledně dělení či rozdělení celku. Souběžně probíhaly diskuze matematiků, když zpřesňovali aproximační výpočetní metody využívající metodu postupného dělení.

---

[1] Matematika se zrodila z potřeby měřit a počítat, filozofie pak z touhy pochopit a vysvětlit fungování světa.

Matematici a filozofové se navzájem ovlivňovali hledajíce odpovědi na stejné, blízké anebo podobné úlohy, před něž je vývoj lidského uvažování stavěl. Takovou úlohou byla i rigorizace - snaha o zpřesnění uvažování. Tento proces začal v 19. století v matematice, když matematici nahlédli, že matematika vůbec není tak přesná věda, za kterou byla považována, nýbrž že je plná nepřesností a vágních zdůvodnění typu, že tvrzení či pojem jsou "na první pohled zřejmé" nebo, že "je patrné z obrázku". Vybudování formálně přesných základů matematiky mělo metodický přesah do filozofie, což lze doložit vznikem analytické filozofie, která programově usilovala o přesnější vymezení zkoumaných pojmů.

Podívejme se nyní na to, co je oběma disciplínám společné a v čem se naopak liší. Společné mají to, že se k výsledkům zkoumání dochází "pouhým" uvažováním. Zatímco filozof své soudy objasňuje a obhajuje, matematik je musí dokázat. Předloží-li matematik či filozof nějaké tvrzení, je toto podrobeno analýze a je považované za správné, dokud není zpochybněno, popřeno či vyvráceno. To tedy znamená, že jistotu absolutní pravdivosti nemáme jak ve filozofii, tak dokonce ani v matematice, která je považovaná za exaktní vědu.[2]

Hlavní rozdíl mezi matematikou a filozofií spočívá v přesnosti vymezení předmětů zkoumání. Zatímco filozofie je disciplínou nekonečných polemik prakticky o "čemkoliv", tak matematici zkoumají vztahy mezi přesně definovanými objekty, které si sami konstruují. Je ovšem pravda, že část filozofů se drží Wittgensteinova imperativu *"...O čem se nadá mluvit, k tomu je třeba mlčet"* [2 str. oddíl 7]

[2] Věta matematické logiky od brněnského rodáka Kurta Goedela (1906-1978) o nedokazatelnosti říká, že ve formálním systému obsahujícím aritmetiku přirozených čísel, nelze dokázat jeho bezespornost [14 str. 133]

1. Vliv číselných poměrů na starořeckou filozofii

V antickém Řecku byl vliv matematiky na filozofii velmi patrný snad ve všech starořeckých školách. Zaujatost čísly stimulovala zájem o matematiku a vědomí její důležitosti.

Za Pythagorova života (kolem 580-500 př. n. l.) byl kladen velký důraz na číselné poměry ve strukturách všeho druhu, jako například v metalurgii slitin, výtvarných uměních, anebo v hudbě[3]. Pythagorejci měli za to, že vládne-li někde řád, lze tam také najít soulad a harmonii. Věřili, že harmonii lze převést na poměry celých kladných čísel, a že právě proto jsou čísla tím skutečným počátkem všech věcí. Snažili se proto poznat svět na základě zkoumání čísel a jejich poměrů. Doufali, že až poznají všechny možné poměry mezi celými čísly, rozpoznají zároveň, kde je v pozemském světě řád porušován a kam je třeba upřít pozornost, aby se věci mohly zlepšit.

Velké pozdvižení však nastalo, když jeden z nich, a sice Hyppasus z Metapontum, objevil[4] kolem roku 500 př. n. l., že odmocnina z čísla dvě nelze vyjádřit jako poměr celých čísel.[5] Hyppasus si za svůj objev či vyzrazení vysloužil věčné zatracení a údajně se utopil[6].

Zmíněný objev iracionálních čísel vedl k tomu, že řečtí učenci posléze uznali, že svět nelze postihnout jenom racionálními čísly. Lze dokonce konstatovat, že pro generace antických filozofů následující po Pythagorejské škole nepředstavovala iracionalita čísel žádné "stresující trauma". Sám Aristoteles říká, že z počátečního podivení nad skutečností, že odmocnina ze dvou není racionální číslo (neboli, že úhlopříčka čtverce se nadá změřit stranami) přichází obrat k poznání, že tomu ani jinak být nemůže.[7]

Významnou roli v matematice sehrál starořecký filozof Eudoxos z Knidu (kolem 408–355 př. n. l.). Zavedl učení o proporcích (tzn. úměrách geometrických

---

[3] [19 str. 337] Pythagorovi je připisován objev číselné závislosti výšky tónu na délce struny.

[4] (a) nebo vyzradil po Pythagorově smrti tajemství Pythagorejců

[5] Objevením iracionálního čísla významně stoupla důležitost geometrie. Zatímco v aritmetice není možné přesně vyjádřit iracionální odmocninu, geometrie to umožňuje.

[6] Nelze ovšem doložit, jestli to byl čistě trest boží anebo jestli někdo z Pythagorejců s bohy spolupracoval vykonav jejich vůli. (Pythagorejci byli totiž tím, co dnes nazýváme sektou.)

[7] [47 str. 39]

veličin), které bylo použitelné i na nesouměřitelné velikosti[8]. Eudoxova teorie proporcí se dochovala v páté knize Euklidových Základů pojednávající o poměrech. Je pozoruhodná mimo jiné tím, že nastiňuje konstrukci reálných čísel. Ta však nebyla v té době použita, což je nikterak překvapující skutečnost, vezmeme-li v úvahu, že za platnou byla tehdy pokládána filozofická doktrína popírající aktuální nekonečno[9]. Odmítání tohoto typu nekonečna totiž znemožňovalo úvahy o číselném oboru všech reálných čísel, včetně jejich podmnožin racionálních a iracionálních čísel. Z těchto důvodů nebylo možno postihnout spojitost (resp. úplnost) číselné struktury reálných čísel. Eudoxovu myšlenku využil ve druhé polovině 19. století německý matematik a filozof Richard Dedekind (1831–1916)[10] a více něž dvě tisíciletí po Eudoxovi zkonstruoval reálná čísla.

Myšlení v proporcích bylo jedním z charakteristických znaků starořecké filozofie. Ani Platón (427-347 př. n. l.) se v tomto ohledu nijak nevymykal ze zavedeného způsobu uvažování. Po Platónovi jsou pojmenovány pravidelné mnohostěny považované za ideální tělesa. Platónské jsou nikoliv proto, že by je Platón odhalil nebo matematicky zkoumal, ale patrně z toho důvodu, že čtyři z nich považoval za reprezentanty živlů (země, vzduchu, ohně, vody), a pátý (dvanáctistěn) měl přestavovat podobu univerza[11]. Platón našel ve své filosofii, konkrétně v podobenství o úsečce[12], uplatnění i pro poměry nestejných velikostí.

---

[8] V antickém Řecku matematici pracovali pouze s kladnými čísly, která bylo možné znázorňovat jako délky úseček. Zpočátku se domnívali, že každé dvě úsečky jsou souměřitelné, což znamenalo, že je možné pro ně najít úsečku, kterou lze beze zbytku do každé z nich naskládat. To ovšem nelze provést například pro stranu čtverce a jeho přeponu, jak zjistil Hyppasus.

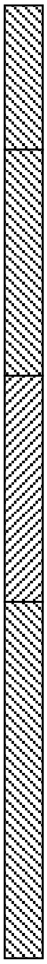
[9] Aktuální nekonečno je pojednáno ve druhé kapitole této práce.

[10] Ve stejném roce (1872) jako Dedekind uveřejnil konstrukci reálných čísel také Georg Cantor (1845–1918) - německý matematik, který měl rovněž blízko k filozofii.

[11] Aristoteles korigoval Platóna prohlásiv dvanáctistěn za představitele éteru.

[12] [15 stránky 509d-514e]

Podobenství je prezentováno svislou úsečkou rozdělenou na čtyři úseky:



Epistémé (έπιστήμη) - nazíráme myslí. Poznávané objekty nevznikají ani nezanikají. Jedná se o oblast poznání.

Noézis (νόησις) - oblast rozumového poznání. Obsahuje neměnné a věčné ideje. Je to doména filozofie.

Dianoia (διάνοια) - oblast myšlení. Oblast poznání exaktních věd jako jsou aritmetika, geometrie a astronomie. Objekty sem náležející jsou například číslo dvě, čtverec nebo rovnice.

Doxa (δόξα) - vnímáme smysly. Objekty mohou vznikat a zanikat. Není to pravé poznání.

Pistis (πίστις) - oblast věření. Reprezentuje jsoucna přímo vnímatelná našimi smysly. Oblast představuje běžný život tak, jak se nám jeví prostřednictvím našich smyslů.

Eikasia (εικασία) - oblast domněnek. Obsahuje nelátkové obrazy předmětů z části Pistis. Jsou to stíny, představy, klamy, charakterizované velkou proměnlivostí a nestálost. Proto jsou nejméně skutečné ve s rovnání s tím, co náleží do ostatních částí úsečky.

Platón přiřadil poměru délek úseček Epistémé a Doxa stejnou hodnotu jako poměru délek úseček Noézis a Dianoia. A tutéž hodnotu přiřadil i poměru délek úseček Pistis a Eikasia. Za těchto podmínek pak nutně docházíme ke shodnosti délek středních členů původní úsečky - délka Dianoia se rovná délce úsečky Pistis

Matematicky prokazatelné vztahy mezi jednotlivými délkami úseček mají své hlubší filozofické zdůvodnění:

- v části Dianoia jsou myšlenkové konstrukce těch smyslově vnímaných předmětů, které náleží do části označené jako Pistis. Proto se velikostně rovnají.
- rozdílná velikost částí Noezis a Eikasia spočívá v tom, že tyto dvě části jsou naprosto obsahově odlišné.
- poznání prostřednictvím exaktních věd - Dianoia - se nemůže vyrovnat pravému poznání[13], kterým je dle Platóna poznání filozofické - Noézis. Tato teze vyplývá

[13] [19 str. 161]

z Platonova přesvědčení, že matematická řešení vycházejí z pevně daných předpokladů. Ve filozofii se však postupuje od nastolené otázky nejprve k prapočátkům tématu. Tato východiska je možné kritizovat a případně je i odmítnout. Teprve poté se filozof vrací k původnímu zadání. Takto však v matematice postupovat nelze - v matematice se předpoklady nezpochybňují.

Filozofie v antickém Řecku vytvářela příhodný rámec pro rozvoj věd a zvláště pak matematiky, která byla součástí vzdělání, a to nejen z hlediska poznatků a jejich důkazů, ale také jako nástroj tříbící mysl. Nelze ovšem říci, že by tehdejší filozofové měli vztah k matematice vždy pozitivní[14], respektive, že by jejich teze vždy napomáhaly rozvoji matematiky. V této kapitole jsme zmínili obavy filozofů z objevu iracionálního čísla a možných důsledků tohoto objevu na stávající představy o uspořádání světa. V následující kapitole uvedeme případ neblahého vlivu filozofie na matematiku, když filozofové popírali existenci aktuálního nekonečna.

[14] Například Platon matematiku považoval za druhořadou ve srovnání s filozofií a údajně matematiky pohrdal.

2. Filozofové se přeli o to, zda je vesmír konečný

Vesmír, jakožto souhrn všeho co reálně existuje, je v nejstarších dochovaných náboženských a mytologických pojednáních považován za konečný a mající hranici. Staročečtí filozofové byli patrně první, kteří explicitně uvažovali o nekonečnu a to nejen v souvislosti s vesmírem[15].

2.1. Starověk

Filozofové, kteří mezi prvními zastávali tezi nekonečného vesmíru, byli atomisté (5.stol. př. n. l.). Byli přesvědčeni, že nekonečný vesmír obsahuje nekonečný počet atomů, které se pohybují v nekonečném prázdnu. Srážkami atomů vzniká nekonečný počet světů - možná i obydlených [3] .

Nekonečnem se rovněž zabýval Archytas z Tarentu (428–347 př. n. l.), významný představitel Pythagorejské školy. Oponoval představě konečného ohraničeného vesmíru úvahou: *"...Hodíme-li oštěp přes hranici vesmíru,co se s ním stane? Odrazí se? Nebo zmizí ze světa*?"[16]

Nicméně, proti nekonečnosti vesmíru se postavily dvě z dnešního hlediska nejvýznamnější osobnosti antické filozofie: Platón a Aristotelés. Platón (427–347 př. n. l.) dokonce tak důsledně, že se údajně pokoušel skoupit spisy zastánců nekonečného vesmíru, aby je mohl spálit. Naštěstí tento svůj záměr nezrealizoval [4].

Aristotelés (384–322 př. n. l.) zastával koncepci geocentrického vesmíru - kulatá Země je středem věčného vesmíru a kolem Země v soustředných sférách obíhají planety. Byl přesvědčen, že vesmír je konečný, pevně ohraničený poslední sférou - sférou stálic, za kterou již nic není. Aristoteles se zabýval nekonečnem nejen ve spojitosti s vesmírem, zkoumal ho hlouběji jako samostatnou entitu. Rozlišoval mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem.[17] Odmítal aktuální nekonečno[18] a proti tomuto nekonečnu v matematice vystupoval velmi kategoricky s tím, že ono

---

[15] Ve následující kapitole bude pojednáno o nekonečnu v souvislosti s dělením kontinua.

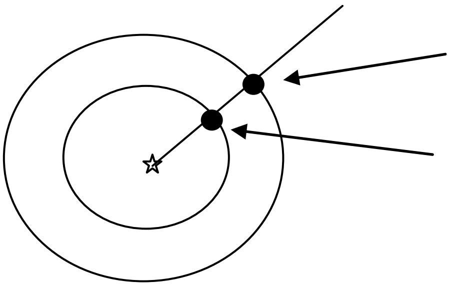
[16] [4 str. 29]

[17] [10 str. 289] Potenciální nekonečno není nikdy úplné, neboť další a další prvky mohou být přidávány, avšak nikdy nekonečně mnoho. Aktuální nekonečno je kompletní a definitivní, a sestává z nekonečně mnoha prvků.

[18] [21 str. Kniha III. 207b30]

nekonečno není potřeba ani v geometrii a ani v aritmetice[19]. Nic však nenamítal proti potenciálnímu nekonečnu, jako například, že existuje nekonečný počet bodů na přímce nebo, že existuje nekonečný počet úseček; ovšem za předpokladu, že nejsou uvažovány všechny na ráz.

Připuštěním existence aktuálního nekonečna by se vyjevila řada paradoxů, s nimiž si antičtí (a později i středověcí) matematici a filozofové nevěděli rady. Pro tyto paradoxy bylo typické to, že vizuálně větší nekonečná množina bodů obsahovala stejný počet bodů, jako "evidentně" menší množina. Viz například obrázek níže:



- Větší kružnice má intuitivně větší počet bodů, které ji tvoří, než kružnice menší.
- Přímka vedená středem kružnic přiřazuje každému bodu z větší kružnice bod na menší kružnici. Tedy bodů, kterými je tvořena jak malá, tak velká kružnice, musí být stejně.

Po staletí většina filozofů akceptovala Aristotelův názor, který popíral existenci aktuálního nekonečna. Takže například Euklides (325–260 př. n. l.), drže se Aristotelova dogmatu, důsledně zmiňoval nekonečno pouze opisem prostřednictvím potenciálního nekonečna. Například svůj objev, že prvočísel je nekonečně mnoho, zformuloval následovně: "*Kmenných čísel jest více než jakékoliv dané množství kmenných čísel*."[20] Je třeba poznamenat, že Aristotelovo "zapovězení" aktuálního nekonečna mělo limitující vliv na rozvoj starořecké matematiky[21].

Ne všichni antičtí filozofové sdíleli Platónovu a Aristotelovu tezi o konečnosti vesmíru. V prvním století před Kristem představitel pozdního epikureismu, římský filozof a básník Titus Lucretius Carus (97–55 př. n. l.) podporoval ideu nekonečného

---

[19] [21 str. Kniha III. 206a] *"...matematikové nemají zapotřebí neomezena ve skutečnosti a neužívají ho. Jim dostačuje, že neomezená čára jest libovolně veliká. V témže poměru jako největší velikost, může být rozdělená každá jiná velikost. Pro matematické důkazy tak není třeba mít nekonečno, neboť jeho existence je v oblasti jsoucích velikostí."*

[20] [20 str. 19]

[21] Viz kapitola 1 této práce: Odmítání aktuálního nekonečna znemožňovalo úvahy o číselném oboru všech reálných čísel.

vesmíru. Ve své básni *O přírodě* se vyslovuje ve prospěch nekonečného vesmíru a argumentuje podobně jako Archytas z Tarentu.[22]

Na proti tomu na Aristotelově představě konečného vesmíru je postaven patrně nejznámější antický model uspořádání vesmíru a sice tzv. geocentrická soustava Claudia Ptolemaia (85-165). Ač byl model postaven na chybné premise - Země jako středobod vesmíru, umožňoval předpovídat pohyb nebeských těles na tehdejší dobu s velkou přesností. Úspěšně byl využíván při námořní navigaci, což utvrzovalo přesvědčení o správnosti tohoto systému. Ptolemaiova geocentrická představa konečného vesmíru přetrvala více než jedno tisíciletí, a především přičiněním Tomáše Akvinského (1225–1274) se prakticky stala i součástí středověké církevní doktríny.

Ptolemaiův nebeský systém ovlivňoval významně nejen Evropu, ale též arabský svět. Pořízení arabského překladu[23] Ptolemaiova učení lze považovat za počin dokládající jeho důležitost.

2.2. Středověk

Odmítání aktuálního nekonečna pokračovalo i ve středověku. Zřetelně to můžeme vidět například u Tomáše Akvinského(1225–1274) v sedmé otázce *Teologické sumy*, kde nalezneme jeho zdůvodnění, proč žádná množina věcí nemůže být ze své podstaty aktuálně nekonečná[24], a ani se aktuálně nekonečnou nemůže

---

[22] [48 str. 12] "*...Dejme tomu, že veškerý prostor má nějaké hráze, a někdo doběhne na kraj, na samý konec a vymrští házecí oštěp. Jsa veliký silák, co myslíš, poleží kopí kam on je vrhne? A bude daleko letět? Nebo je zadrží něco a zastaví v cestě? Vyber si to nebo ono a nějak se vyslov! Octneš se pokaždé v úzkých a tak nebo onak shledáš, že vesmír se táhne do nekonečna. Ať už je něco v cestě, co zadrží oštěp, aby se nedostal dál a nedošel cíle, či letí*-li *pořád, tak jako tak nevzletěl z konce. Stejně ti budu v patách a budu se tázat, co je s tím kopím, ať kam chceš umístíš konec, nakonec shledáš, že konec nebude nikde a s možností letět dál bude přibývat dálky.*"

[23] [16] "*... Astronomická bádání uložil Ptolemias ve velikém spise μεγάλη σύνταξις τῆς ἀστρονομίας o 13 knihách, které bylo až do vystoupení Koperníkova studnou všech vědomostí astronomických a kosmických. V IX. století bylo s nadpisem Tabrír al magesthi (odtud obvyklý název Almagest) přeloženo do arabštiny.*"

[24] Akvinský připouští aktuální nekonečno ve spojitosti s Bohem.

stát.[25] Akvinský (stejně jako Aristoteles) však souhlasí s existencí potenciálního nekonečna.[26]

Německý filozof, teolog a astrolog Mikuláš Kusanský (1401-1464) byl toho názoru, že univerzum nemůže být prezentováno jako "vymezené", protože není dohledatelná žádná jeho hranice, že chybí přesnost v jeho vymezení a tudíž nastává problém s jeho poznatelností.[27] Zároveň říká, že z této neohraničenosti nevyplývá nekonečnost vesmíru. Podle Kusanského jedině Bohu náleží pravá nekonečnost[28]. Představa neohraničeně-konečného vesmíru byla v 15. století velmi ojedinělá. Většina vědců a filozofů té doby se domnívala, že vesmír je buďto konečný a současně ohraničený, anebo neohraničený a zároveň nekonečný. Pro Kusanského tvrzení byly nalezeny vědecké důkazy teprve ve druhé polovině 20. století.[29]

Kusanský byl ve své době velmi nekonvenční i svými dalšími názory na uspořádání vesmíru. Více než půl století před tím, než polský astronom a matematik Mikuláš Koperník (1473-1543) vytvořil první náčrt heliocentrické teorie, Kusanský tvrdil, že Země není středobodem světa a že není v klidu[30], jak by se na první pohled mohlo zdát, ale že se pohybuje. Ve svých úvahách tak nahradil tehdy platný Ptolemaiův a Aristotelův geocentrický obraz světa, nikoli systémem heliocentrickým, nýbrž představou neohraničeného vesmíru, který nemá střed;

---

[25] [30 stránky / otázka 7, článek 4]*"...Každé množství musí být v nějakém druhu množství. ...Žádný druh čísla není nekonečný, neboť každé číslo jest množství odměřené jednotkou. Proto jest nemožné, aby bylo množství nekonečné v uskutečněnosti. Rovněž všechno stvořené musí být obsaženo v nějakém počtu. Tedy jest nemožné, aby bylo množství v uskutečnění nekonečné."*

[26] [30 stránky / otázka 7, článek 4] *"....Nekonečno se shledává v možnosti při přidávání množství....Cokoliv je v možnosti, neuvádí se do uskutečnění celé zároveň, nýbrž postupně."*

[27] "Poučená nevědomost" - Konstatování omezenosti poznání rozumem bylo pro Kusanského velké téma.

[28] [9 str. 18] Kusanský považoval neohraničený leč konečný svět a nekonečného Boha za neporovnatelné entity, a to na základě úvahy, že mezi nimi neexistuje proporcionalita.

[29] Jedná se zejména o důkaz existence zbytkového záření, který potvrzuje vznik vesmíru velkým třeskem. Díky velkému třesku se vesmír neustále rozpíná - tedy je neohraničený. Zároveň je konečný - vznikl ze singularity asi před čtrnácti miliardami let. [26]

[30] [16] "...Ve svém díle De docta ignorantia (O učené nevědomosti) praví *" terra non potest esse fixa, sed movetut ut aliae stellae"*. Tím vyznává své přesvědčení o pohybu země a jest v jistém smyslu slova předchůdcem Koperníkovým."

hvězdy považoval za vzdálená slunce. Mikuláš Kusanský ke svým závěrům nepoužíval empirii ani tehdejší astronomické poznatky. Jeho úvahy byly vedeny čistě na základě metafyziky. Z tohoto důvodu nemůže být považován za předchůdce Koperníka, ale je možné, že Koperník byl jeho myšlenkami ovlivněn, ostatně jako mnozí další filozofové a vědci.

Odmítané aktuální nekonečno začalo postupně pronikat do uvažování křesťanských a židovských filozofů, protože uznávaná nekonečnost Boží zpochybňovala Aristotelovo naprosté popírání absolutního nekonečna. Čekalo se však, až některý z odvážnějších myslitelů "snese absolutní nekonečno z nebe na zem". A to učinil v 16. století Goirdano Bruno.

2.3. Novověk

Téma nekonečnosti vesmíru přibralo další rozměr v 16. století. Vyostřily se debaty mezi teologií a přírodními vědami, a měly dramatické konsekvence. Goirdano Bruno (1548–1600), italský dominikánský mnich a filozof, ovlivněn Mikulášem Kusanským měl velmi kritický postoj k Aristotelově pojetí konečného vesmíru. Na rozdíl od Kusanského, který měl vesmír bez mezí, ale konečný, Bruno zastával nekonečnost vesmíru.[31] Svůj názor obhajoval před Benátskou inkvizicí v červnu 1592.[32] Později byl vydán do Říma a odsouzen k upálení. Tato skutečnost však již nezabránila, že aktuální nekonečno bylo v nezastřené podobě uvedeno do reálného světa a byla tak připravena půda pro jeho další zkoumání.

Italský astronom, filozof a matematik Galileo Galilei (1564–1642) se zabýval jak povahou vesmíru, tak nekonečnem samotným. Znal tragický osud Giordana Bruna, a tak jeho vyjádření o konečnosti či nekonečnosti vesmíru a vymezenosti či neohraničenosti vesmíru jsou nejednoznačná a leckdy si i odporují.[33] Nicméně, nekonečno není pro Galilea sporným pojmem za předpokladu, že se na porovnávání nekonečných množství nepoužívají pravidla, která jsou používána pro porovnávání

---

[31] [9 str. 42] "...*Bůh není oslavován jedním nýbrž nespočetnými Slunci, nikoliv jedinou Zemí a jedním světem, ale tisícem tisíců, co pravím nekonečností světů...*"

[32] [63 str. 367] "*...považuji za věc nehodnou božské dobroty a moci, aby božstvo dalo vznik konečnému světu, když vedle tohoto světa mohlo dát vznik jinému a nekonečně mnoha jiným..*"

[33] Pěkně dokumentuje Koyré [9] na citacích z děl Galilea.

množství konečných.[34] Použitím "konečných" pravidel na nekonečná množství se totiž dostaneme do sporu[35] s osmým Euklidovým axiomem.

Mezi zastánce nekonečného vesmíru patřil v 17. století i španělský teolog a filozof Rodrigo de Arriaga[36] (1592–1667). Uváděl dokonce tři typy nekonečna:

"... *nekonečno co do množství jednotek, množství které nelze spočítat tak, aby počítání skončilo,*

... nekonečno co do velikosti, nekonečno, které se skládá z nekonečně mnoha částí, které jsou rozlehlé prostorově či časově,

... nekonečno co do intenzity, například úsilí, láska." [37]

Jako první kdo úspěšně uchopil aktuální nekonečno označující velikost či početnost byl český matematik, filozof a teolog Bernard Bolzano (1781–1848). Bolzano upozorňoval, že rozvoj věd je omezen skutečností, že důležité matematické pojmy nejsou exaktně popsány, a že se matematici na místo přesně definovaný pojmy často odkazují na obrázky podložené intuicí, a nebo dokonce pojmové vymezení zcela chybí. Ve své knize "*Paradoxy nekonečna*" se pak snaží ukázat, že když jsou matematické pojmy dobře definovány, tak vlastně žádné paradoxy nekonečna neexistují.

Bolzanovi se podařilo korektně zpřesnit, či formálně přesně zavést do matematiky dosud vágně uváděné pojmy. A to jak pro nekonečno potenciální, tak pro nekonečno aktuální. Za tím účelem jako první zavedl pojem množiny[38], což je nezbytný aparát k matematickému uchopení nekonečna. Ukázal, že pro nekonečné množiny neplatí osmý Euklidův axiom, že "celek je větší než část"[39], a že základní

---

[34] [49 str. 32]*"...the attributes equal, greater and less are not applicable to infinite, but only to finite, quantities"*

[35] [24] Příklad: Každému přirozenému číslu lze přiřadit jeho čtverec (jeho druhou mocninu). Z toho plyne, že čtvercových čísel musí být stejně jako přirozených čísel. Zároveň však platí, že čtvercová přirozená čísla jsou částí přirozených čísel (jsou jejich vlastní podmnožina). Podle osmého Euklidova axiomu (celek je větší než část) by, však čtvercových čísel mělo být méně!

[36] Rodrigo de Arriaga byl od roku 1624 profesorem na jezuitské univerzitě v Praze.

[37] [22 str. 156]

[38] [25 str. 17] "*...Souhrn, vzhledem k němuž je uspořádání částí lhostejné (na němž se tedy nic pro nás podstatného nemění, mění-li se jeho uspořádání) jmenuji množinou."*

[39] Srov. Galileo

charakteristikou nekonečných množin tedy je, že vlastní podmnožina může být ekvivalentní množině samé. Dále věnoval pozornost porovnávání velikostí neboli mohutností nekonečných množin, čímž připravil půdu zakladateli teorie množin Georgu Cantorovi.

2.4. Moderní dějiny

Německý matematik, logik a později i teolog Georg Cantor (1845–1918) zahájil systematický výzkum nekonečných množin a dokázal, že množina reálných čísel má větší mohutnost[40] než množina čísel přirozených. Tento objev lze považovat za zrození teorie množin. Vývoj teorie množin se pak na nějakou dobu zadrhnul na množině, jejímiž prvky jsou právě ty množiny, které neobsahují sami sebe. Zmíněný paradox byl objeven v roce 1901 britským matematikem, filozofem a logikem Bernardem Russellem (1872–1970) a způsobil krizi v matematické teorii pojednávající o nekonečnu. Tento a další podobné paradoxy z oblasti teorie množin se podařilo vyřešit [5] v roce 1930 zavedením osmi axiomů teorie množin[41]. Jestli je tato teorie už paradoxů prostá se nikdy nedozvíme, pokud je bezesporná. V její bezespornost však všichni matematici věří, neboť ji nemohou z podstaty věci dokázat.[42]

2.5. Závěr kapitoly

V 60. létech minulého století byly vytvořeny další teorie množin, které jsou bezesporné za předpokladu, že původní axiomatická teorie množin je bezesporná. V některých z nich určitá tvrzení týkající se nekonečna platí, zatímco v jiných nikoli. Tím se ovšem relativizuje zkoumání nekonečna, neboť mnohá k němu se vážící tvrzení jsou platná anebo neplatná v závislosti na zvoleném axiomatickém systému. Takže absolutní není ani absolutní nekonečno.

Co se týče otázky konečnosti či nekonečnosti vesmíru, tak ta je současnou fyzikou zodpovězena následovně: Vesmír je sice konečný (ve vesmíru lze vše

[40] počet prvku množiny

[41] Axiomy zpřesněná teorie se nazývá axiomatická teorie množin. Původní Cantorovu teorii množin označujeme jako intuitivní teorie množin.

[42] Goedlova věta o nedokazatelnosti bezespornosti netriviální teorie říká, že ve formálním systému obsahujícím aritmetiku přirozených čísel, nelze dokázat jeho bezespornost. [14 str. 213]

spočítat), ale je neohraničený, neboť se rozpíná, přičemž dvě dostatečně vzdálené galaxie[43] se mohou vzájemně vzdalovat dokonce rychleji než rychlostí světla.[44] Otázkou ovšem je, do čeho se vlastně náš vesmír rozpíná. Existuje snad nějaký nekonečný a věčný meta-vesmír, v němž jednotlivé vesmíry vznikají, rozpínají se a posléze zanikají? Takto se však můžeme tázat pouze filozoficky, neboť filozof se může tázat na cokoliv. Z hlediska současné fyziky však taková otázka nemá smysl. Ta říká, že při Velkém třesku vznikl s hmotou čas i prostor. Co bylo před a co je za vesmírem není pro současnou fyziku relevantní téma k diskusi. I když i to se může časem změnit, neboť poslední výsledky částicové fyziky vedou k domněnce, že náš vesmír je časově omezený a to jak směrem do minulosti, tak i do budoucnosti. Co bude po jeho eventuálním zániku, je však zatím čirá spekulace. Možné, že dalším velkým třeskem vznikne na ruinách našeho vesmíru nový vesmír?

---

[43] Rychlost vzdalování neboli unášení (recession velocity) jednotlivých galaxií (a jejich předchůdců - kvasarů) od naší galaxie závisí lineárně na vzdálenosti těchto galaxií od nás. Je-li jejich vzdálenost větší než tzv. Hubblova vzdálenost, pak jsou předmětné galaxie unášeny nadsvětelnou rychlostí. [11]

[44] Je však třeba si uvědomit, že toto vzdalování způsobené rozpínáním prostoru není totéž, jako rychlost v klasickém smyslu. Na rozpínání vesmíru se nevztahuje speciální teorie relativity. Stále však platí, že ve vesmíru nic nemůže být rychlejší než světlo. To ovšem neplatí o vesmíru samém. On se rychleji než světlo rozpínat může. Budou-li se tedy dvě galaxie v důsledku rozpínání vesmíru vzdalovat vůči sobě nadsvětelnou rychlostí, pak žádný signál z první z nich nikdy nedoputuje k tomu druhé a naopak. Z nadsvětelné rychlosti rozpínání též vyplývá, že k hypotetickému okraji vesmíru se zevnitř vesmíru nelze v současnosti žádným způsobem dostat. To by se mělo teoreticky někdy v budoucnosti změnit, neboť od nějakého (v současnost nespecifikovatelného) časového okamžiku by nic ve vesmíru nemělo být unášeno nadsvětelnou rychlostí. Stávající kosmologické modely poskytují pouze existenci, nikoliv však konstrukci takového okamžiku. [11]

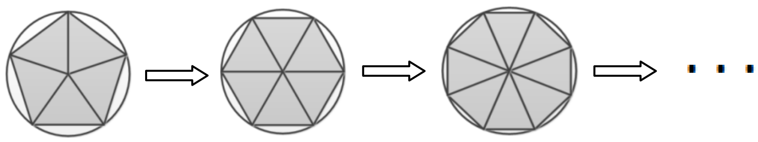
3. Filozofové a matematici řešili problémy dělitelnosti kontinua

Zatímco předchozí kapitola hovořila o množstvích nekonečně velkých, tato kapitola se bude zabývat rozměry nekonečně malými, na které lze rozdělit kontinuum. Kontinuum[45] je entita, která "nemá mezery" a je tedy spojitá. Spojitost je jeho základní vlastnost. Opakem kontinuity je diskrétnost neboli oddělenost. Další vlastností kontinua může být - ovšem jen dle některých filozofů - jeho dělitelnost bez omezení, čili kontinuum je nekonečně dělitelné. Znamená to, že proces jeho dělení na stále menší a menší části neskončí u dále nedělitelných atomů.[46]

3.1. Starověk

Protiklad kontinuity a diskrétnosti hrál významnou roli již ve starořecké filozofii. Jedním z prvních filozofů, který neomezené dělení kontinua ve svých úvahách využíval, byl přední zástupce Elejské školy Zénón (kolem 490–430 př. n. l.). Zénón předkládal paradoxy - byly postaveny na předpokladu neomezené dělitelnosti prostoru (a času) - za účelem obhajoby nauky svého učitele a přítele Parmenida (kolem 510-450 př. n. l.) o nemožnosti pohybu[47]. Zénón se snažil ukázat, že přijetí možnosti pohybu vede ke konfliktu mezi smyslovým vnímáním, myšlenkovou abstrakcí a idealizací. Pravděpodobně nejznámější Zénónův paradox je závod Achilla se želvou, kdy pomalejší tvor nemůže být nikdy dostižen tvorem rychlejším.

Filozofové Elejské školy se jako první pokoušeli aproximovat kruh pravidelnými mnohoúhelníky sestávajícími z rovnoramenných trojúhelníků. Usuzovali, že pro stanovení přesného obsahu kruhu je třeba nekonečně mnoho takových trojúhelníků.



[45] Aristotelovu definice kontinua: "*Nepřetržitým se něco nazývá, když spolu splývají meze dvou věcí, jimiž se dotýkají a spolu souvisí.*" [47 str. 1069a7]

[46] nepřijatelné pro atomisty

[47] [12] "*....dle Parmenidova chápání jsoucna, toto může být jen jedno a je neměnné a nehybné v čase.*"

Tato metoda výpočtu ploch postupnými aproximacemi kruhu, a posléze zakřivených obrazců, vepsanými / opsanými mnohoúhelníky, byla později nazvaná exhaustivní (plocha obrazce byla vyčerpávána pomocí mnohoúhelníků). Matematicky korektní formu jí dal kolem roku 370 př. n. l. Eudoxos z Knidu (408–355 př. n. l.)[48].

Zakladatel atomismu Leukippos (kolem 500–440 př. n. l.) a jeho žák Démokritos (kolem 460-370 př. n. l.) tvrdili, že hmota není nekonečně dělitelná, neboť vše hmotné je složeno z nedělitelných atomů. Demokritos odmítal neomezenou dělitelnost kontinua, protože neomezeným dělením kontinua by se dospělo k diskrétní entitě sestávající z nehmotných bodů. A jak bychom z nehmotných neprostorových bodů získali prostorové těleso, když bychom jsoucno nekonečným dělením rozdrobili v nejsoucno?

Aristotelés (384–322 př. n. l.) zastával názor, že fyzická realita je spojitě vyplněný prostor, jenž sice lze do nekonečna dělit (dělení lze do nekonečna zjemňovat)[49], ale nelze redukovat na nějakou diskrétní strukturu neboli kompletně rozdělit[50]. Důkaz tohoto tvrzení najdeme v jeho knize *O vzniku a zániku*.[51] Rozdělení na dále nedělitelné entity je pro Aristotela popírajícího nejen atomismus, ale i aktuální nekonečno nepřijatelné, neboť takové rozdělení by bylo aktuálním nekonečnem.

Povšimněme si, že Aristotelova teze o neomezené dělitelnosti kontinua splňuje předpoklady Zénónových paradoxů. Aristoteles však popírá Zénónův paradox o

[48] viz první kapitola této práce

[49] [33 str. 64] *"...Je-li něco přirozeně zcela dělitelné a bude opětovaně děleno, nestane se nic nemožného, neboť ani kdyby bylo něco rozděleno v desettisíckrát tisíců částí, není to nijak nemožné."*

[50] Rozlišení mezi potenciální dělitelností a absolutní rozdělenosti.

[51] Používá důkaz sporem: *"...Řekněme, že by těleso bylo skutečně rozděleno. Co pak bude zbývat? Velikost? To není možné, neboť by tu bylo ještě něco, co není skutečně rozděleno* (popírá atomismus, neboť atomy - mají rozměr - jsou dle atomistů nedělitelné),..... , *nezůstane-li těleso, ani velikost, buď se těleso bude skládat z bodů, a to, z čeho se skládá bude bez velikosti, anebo nebude vůbec nic. Potom i celek, ať vzniká z ničeho, nebo je složen, nebude nic než zdání."* [33 str. 65]

závodu Achilla se želvou.[52] Tvrdí, že Zénón vychází z chybného předpokladu, že není možné, aby nějaký objekt prošel nekonečně mnoha úseky v konečném čase. Aristoteles říká, že je sice nemožné, aby objekt prošel nekonečně mnoha jednotkami, jsou-li skutečné. Jsou-li však jen potenciální, možné to je.[53]

Nový prvek do problematiky dělení kontinua vnesl řecký matematik, fyzik a filozof Archimédes (287–212 př. n. l.) tím, že explicitně pracoval s nekonečně malými (infinitezimálními)[54] veličinami, a to v souvislosti s rozvojem Eudoxovy exhaustivní metody. Archimédem rozpracovaná exhaustivní metoda byla jedním ze zdrojů, jež vedly v druhé polovině 17. století ke vzniku infinitezimálního kalkulu. Své poznatky týkající se jím obohacené exhaustivní metody Archimédes zaznamenal ve spise *Metoda - Dopis Eratosthenovi o mechanicky odvoditelných větách*.[55]

Archimédes a 2000 let po té i fyzikové a matematici rozvíjející v 17. století klasickou mechaniku měli na základě Archimédových výsledků za to, že spojité křivky jsou tvořeny infinitezimálními úsečkami.[56]

---

[52] *"...Tomu, kdo se táže zda je možné neomezené projití buď v čase nebo v délce, je třeba říci, že v jistém smyslu je to možné, v jistém však nikoli. Je-li totiž neomezené ve skutečnosti, není to možné, je-li v možnosti, je to možné."* [21 stránky 263b3-6]
Z citace vidíme, že k Zénonově problému Aristoteles nepřistupuje jako k teoretické úloze. Tu lze vyřešit pouze na základě znalosti, že součet nekonečné řady může být konečný. Ovšem po dobu, kdy Aristoteles platil za nezpochybnitelnou autoritu, tak svým popíráním aktuálního nekonečna dosažení takového řešení znemožňoval.

[53] [21 str. 243] *"... Rozdělí-li někdo spojitou čáru.....ve spojitém je nesčetně mnoho polovin, ale ne ve skutečnosti, nýbrž jenom v možnosti."*

[54] Infinitesimálně malý znamená být nenulový a současně menší než jakákoliv konečná velikost. Infinitezimální veličina je nenulová a současně menší než jakékoliv přirozené číslo. Jakýkoliv konečný součet infinitezimálních veličin je opět infinitezimální veličina. Kontinuum lze nahlížet jako entitu složenou z nekonečně jednotek infinitezimální velikosti.

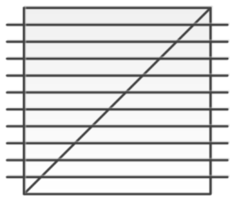
[55] [28] Uvedený spis ve 12. století zmizel, neboť pergamen, na kterém byl text napsán, byl použit pro zapsání biblických textů. Na tento pergamen náhodou narazil v roce 1906 v tehdejším Cařihradu dánský historik Jan Heiberg, když si všiml prosvítajícího původního textu.

[56] Jedná se v zásadě o ranou formu integrovaní. (Integrování míněno jako metoda matematické analýzy.)

3.2. Středověk

V období scholastiky středověcí filozofové byli pod značným vlivem Aristotelovy autority. Nemůže být proto překvapením, že se většinově hlásili k jeho tezi, že se kontinuum nemůže sestávat z dále nedělitelných objektů. Na geometrii postavená argumentace těchto popíračů atomismu, konkrétně konečného rozdělení kontinua, byla postavena na všeobecně přijímaném matematickém názoru o nesouměřitelnosti diagonály a stran čtverce: Předpokládejme, že strany čtverce sestávají z *n* bodů (tj. nechť platí pozice atomistů). Vedeme-li těmito body rovnoběžky, protínající protilehlou stranu čtverce, pak diagonála, jež má průsečík s každou z nich, je v důsledku toho souměřitelná[57] se stranou tohoto čtverce. A dospěli tak ke sporu se všeobecným názorem.

Strana čtverce je tvořená konečným počtem bodů



Atomisté však důkaz oponovali tím, že geometrické metody nejsou relevantní ve věci dělení kontinua. Podle nich nerozdělitelné entity musí být nahlíženy jako elementární komponenty reality a ne jako pouhé bezrozměrné body.

Jiný pohled na problematiku dělitelnosti kontinua přinesl zastánce aktuálního nekonečna Mikuláš Kusanský (1401–1464) a sice tím, že rozlišoval mentální neboli geometrické kontinuum a fyzické neboli reálné kontinuum. Zatímco podle Kusanského geometrické kontinuum lze dělit bez omezení, reálné lze rozdělit na dále nedělitelné částice, které nazýval atomy.[58]

3.3. Novověk

Počátkem novověku se po Evropě rozšířila znalost antické geometrie a rozvolnil se Aristotelův vliv na myšlení. Co se týká kontinua, pozornost se posunula od metafyziky k reálným operacím, od otázky co nedělitelné objekty jsou, k tomu, co lze pomocí nich dosáhnout. Infinitezimální kalkulus rozvíjený v 16. a 17. století byl

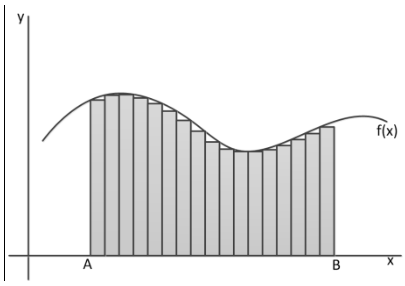
---

[57] Úsečky jsou souměřitelné znamená, že je možné pro ně najít úsečku, kterou lze beze zbytku do každé z nich naskládat.

[58] [29 str. 61]

pak primárně zaměřen na počítání úloh, které se týkají spojitých změn. Poskytoval prostřednictvím infinitezimálních veličin syntézu protikladů spojitého a diskrétního. Ačkoliv formální ukotvení infinitezimálních veličin a počítání s nimi bylo zcela "na vodě"[59], jejich používání v matematice a mechanice přinášelo pozoruhodné výsledky.

Matematika významně ovlivnila filozofii německého učence Gottfrieda Wilhelma von Leibnize (1646-1716). Jako matematik se především proslavil objevením infinitezimálního kalkulu[60] a to (byť s pochybnostmi)[61] nezávisle na svém vrstevníkovi Isaacu Newtonovi (1643-1727). Oba objevitelé však postupovali stejně. Plochu mezi částí křivky a vodorovnou osou rozdělili na nekonečně mnoho pravoúhelníků nekonečně malé šířky.



Sečíst obsahy obdélníků bylo již snadné.

Toto se stalo principem integrálního počtu jakožto nauky o určování součtem (neboli integrací) nekonečného počtu nekonečně malých částí. Opačným postupem pak dospěli k diferenciálnímu počtu, v němž se zjišťují přírůstky funkčních hodnot

---

59 Jediným ideovým zdůvodněním tohoto kalkulu byla filozofická heuristika, kterou Leibniz nazval „zákon kontinuity“ a formuloval ho takto: *„The rule of the finite remains valid in the domain of the infinite“* [13].

60 Infinitezimální kalkulus sestává z diferenciálního a integrálního počtu. Diferenciální počet zkoumá, jak rychle se mění funkční hodnoty funkce v závislosti na změně nezávislé proměnné. Tento proces se nazývá derivování a výsledkem je funkce, jež změny funkčních hodnot zkoumané/výchozí funkce popisuje. Integrální počet naopak hledá pro nějakou funkci jinou(é) funkci(e), jejíž(jejichž) změny funkčních hodnot popisuje, tj. jejíž(jejichž) derivací dostaneme výchozí funkci. Integrování se používá k výpočtu ploch a objemů.

61 Newton objevil infinitezimální počet v letech 1665-1666. Leibniz začal pracovat na tomto kalkulu až v roce 1674, poté co se vrátil z Londýna, kde r. 1673 pobýval. Lze předpokládat (nikoliv ovšem doložit), že se prostřednictvím Newtonových přednášek s jeho výpočetní metodou seznámil. Je však jisté, že Leibniz byl první, kdo článek o infinitezimálním počtu v r.1684 publikoval. Newton zveřejnil svůj objev o tři roky později v prvním vydání díla *Principia*. Dlužno podotknout, že Leibnizem zavedený způsob zápisu integrálů se používá dodnes, zatímco Newtonovo vyjádření kalkulu bylo těžkopádné a neujalo se.

(diferenciály) pro jednotlivé nekonečně malé úsečky. Newton a Leibniz navazovali na práce matematiků Archiméda (287–212 př. n. l.), svých učitelů Isaaca Barrowa (1630-1677), Christiana Huygense (1629–1695) či a Johna Wallise[62] (1616–1703). Nicméně až Newton a Leibniz jsou považováni za objevitele infinitezimálního počtu[63], zejména proto, že nalezli vztah mezi derivací a integrováním: Jedná se o navzájem inverzní postupy.

Infinitezimální počet a vynález mikroskopu[64] byl inspirací Leibnizova filozofického pojmu monáda. Pojem monáda používali již starořečtí filozofové pro Boha či první bytí, Pytagorejci pro počátek, ze kterého jsou postupně odvozena všechna čísla. Ideu monády můžeme rovněž nalézt v novověké filozofii, například u Giordana Bruno[65]. Je velmi pravděpodobné, že sečtělý Leibniz byl s ideou monády obeznámen. Ve spise *Monadologie* [6] předává čtenáři svoji představu o monádách: Monáda je jednoduchá nemateriální substance, nedělitelná základní jednotka univerza[66], jejich

---

[62] Zavedl pro nekonečno symbol ∞.

[63] Leibnizovy infinitezimální přírůstky, neboli fluxe v Newtonově terminologii, byly na jedné straně nenulové, takže jimi bylo možno dělit, a na straně druhé byly zase tak malé, že jejich druhé mocniny bylo možno zanedbat (tzn. prohlásit je za nulové). A právě toto zanedbání mocnin nenulových veličin umožnilo derivovat a integrovat. Osobně si myslím, že pokud hledáme nápady, jež v minulosti vedly k převratným objevům, tak nenulovost infinitezimálů ve jmenovateli a faktická nulovost jejich druhých (a vyšších) mocnin je jedním z nich.

[64] Vynález mikroskopu udělal na Leibnize velký dojem, protože zpřístupnil oblasti reality, které byly pod rozlišovací úrovní oka. Leibniz nadšeně píše: "*...Každý kus hmoty může být chápán jako zahrada plná rostlin nebo rybník plný ryb. Ale každý výhonek rostliny, každý úd živočicha, každá kapka jeho šťáv je opět taková zahrada nebo takový rybník...... Podle toho neexistuje ve vesmíru nic pustého, nic neplodného, nic mrtvého, žádný chaos a žádný zmatek, leda podle zdání. Asi v témž smyslu jako v rybníce, který jsem zahlédli u dálky a v němž jsem viděli jen zmatený pohyb a hemžení ryb, aniž jsme mohli rozeznat jednu od druhé."* [6 str. čl.67 a čl.69]

[65] monády jako substance, ze kterých se skládá univerzum [3 str. 217]

[66] Infinitezimální kalkulus měl v Leibnizově uvažování filozofický přesah, neboť dělení oblasti na nekonečně mnoho části se promítlo do jeho konceptu universa rozděleného na infinitezimální monády.

agregováním vznikají všechny věci.[67] Monáda vzniká jako celek a pokud zaniká, tak opět jako celek. Monáda je z vnějšku neměnitelná, může se však měnit ze svého vnitřního principu. Jednotlivé monády nezabírají prostor (to znamená, že jsou infinitezimálně malé, neboť nemohou být nulové, tzn. ničím, s ohledem na jejich vlastnosti), ani nemají tvar. Jsou vybaveny funkcí žádostivost a percepce, které jsou vnitřním zdrojem jejich pohybu. Monád je nekonečně mnoho. Každá monáda je jedinečná a nezávislá na ostatních monádách. Monády jsou však navzájem perfektně synchronizované, což zajišťuje předzjednaná harmonie, kterou zajišťuje Bůh - nejvyšší božská monáda.

V Leibnizově knize *Monadologi*e rovněž nalezneme jeho názor na dělitelnost kontinua s ohledem na monády: kontinuum se aktuálně dělí bez konce s limitou dělení monády[68].

V průběhu 18. století se matematici snažili objasňovat pojmy infinitesimálního počtu pomocí názorných představ, což vedlo k tomu, že i věhlasní matematici vykládali infinitezimální veličiny zcela protichůdně[69]. Jako příklad protichůdných interpretací infinitezimálního počtu uveďme stanoviska dvou špičkových matematiků té doby, a sice Eulera a d'Alemberta. Leonhard Euler (1707–1783) odmítal názor, že infinitezimální veličiny jsou nenulové a současně menší než jakákoliv konečná velikost. Tvrdil, že jsou to vlastně nuly. A tudíž poměr přírůstku závislé proměnné spojité funkce vůči přírůstku nezávisle proměnné je ve skutečnosti 0/0 [70]. A s tím se nemohli srovnat ani mnozí matematici tehdejší doby rozvolnění matematické exaktnosti.Eulerův současník Rond d'Alembert (1717–1783) odmítal nazírat tyto veličiny jako fixní velikosti. Infinitezimální veličiny vnímal ve smyslu limity, to znamená ve smyslu přibližování se přírůstku závislé proměnné spojité funkce k nule, pokud se přírůstek nezávislé proměnné blíží k nule.

---

[67] [6 str. 156] *"...Monády jsou opravdové atomy přírody a jedním slovem počátky věcí."* Monády jsou sice atomy a počátky věcí ale s tím, že nemohou být jejich reálnými částmi, neboť jsou nedělitelné.

[68] [6 str. 168] *"...Tvůrce přírody jediný mohl vytvořit toto božské, podivuhodné umělecké dílo, v němž nejenže je každá část hmoty dělitelná do nekonečna, jak staří správně poznali, nýbrž dokonce je aktuálně dělena bez konce, přičemž se každá část člení v další části."*

[69] Toto ukazuje, že "nekonečně malé" či "nekonečně velké" nelze korektně objasnit na základě názorné představy

[70] Dnes se podíl 0/0 obchází limitou.

Díky tomu, že infinitezimální počet přinášel hmatatelné výsledky, tak matematici, i když si infinitezimálními veličinami nebyli jisti, infinitezimální počet používali a zdržovali se jeho kritiky. Ne tak ovšem filozofové. Nejvýznačnější představitel kritiků infinitezimálů byl ve své době filozof a teolog George Berkeley (1685–1753). Jeho kritika v díle *The Analyst* byla namířena proti Newtonovskému infinitezimálnímu kalkulu. Poukazoval na to, že Newton na jedné straně přiřazuje fluxím velikost, a na straně druhé je pokládá za nulové.[71] Berkeleyho konflikt s matematiky a fyziky vycházel z jeho idealistické filozofie, podle které je svět tvořen vědomím a jeho představami. Vzhledem k tomu, že odmítal abstrakce vytvořené člověkem, popíral také existenci abstrakcí v matematice. Matematika je podle něj jen systém znaků, které reprezentují počítané objekty smyslového vnímání.[72]

Immanuel Kant (1724–1804) měl na rozdíl od Berkeleyho k infinitezimálnímu počtu pozitivní vztah. Byl patrně inspirován Newtonovou metodou fluxí, když popisoval počitek jako něco, co může, jak spojitě růst od nuly, tak i spojitě mizet neboli klesat k nule[73]. Lze se dokonce domnívat, že právě infinitezimální počet té doby budovaný nekorektně na představách a tudíž na mimo pojmovou oblast stojících prostředcích, přispěl ke Kantovu přesvědčení, že matematika je založena na

---

[71] Na otázku, co tedy fluxe jsou, Berkeley odpověděl: "*...They are neither finite quantities nor quantities infinitely small, nor yet nothing."* [32 str. 18].

[72] [65 str. 159] *"...Věci považované za abstraktní pravdy a teorémy, týkající se čísel, se ve skutečnosti nezaobírají ničím jiným než jmény, která byla původně uvažována jen proto, že to jsou znaky výstižně vystihující jednotlivé věci, které bylo třeba spočítat. Studovat je pro ně samé by bylo stejně smysluplné, jako přehlížet správné používání či původní záměr a účel jazyka a současně ztrácet čas nemístnou kritikou slov nebo čistě verbálními úvahami."*

[73] [60 str. 75] *"...každého počitku může ubývat nekonečnými mezistupni až k jeho zániku, anebo zase přibývat od nuly nekonečně malými přírůstky, až za jistou dobu vznikne určitý počitek."*

názoru[74]. V důsledku Kantovy autority se pak toto přesvědčení stalo na nějakou dobu všeobecně uznávanou doktrínou, která měla vliv na rozvoj matematiky[75].
Co se týče dělení kontinua, tak Kant soudil, že zkušeností nelze zjistit, zda je hmota do nekonečna dělitelná, nebo zda se skládá z jednoduchých částí.[76]

Pionýrem snahy o přesné vyjasnění pojmů používaných v matematické analýze byl pražský rodák, matematik a filozof Bernard Bolzano (1781–1848). Bolzano odmítal Eulerovo tvrzení, že infinitezimální veličiny lze považovat za formální nuly v podílu přírůstku závisle proměnné vůči přírůstku nezávisle proměnné. Poukazoval na to, že matematické postupy postavené na názorných prostředcích postrádající přesné pojmově vymezené ukotvení, vedou ke zmatkům, o nichž hovořil již Berkeley.
Bolzano vytvořil základy nového konceptu rigorózních definic a tvrzení matematické analýzy, které nahradily Leibnizem a Newtonem zavedené infinitezimály. Tento koncept založený na pojmu limity v plném rozsahu nezávisle na Bolzanovi[77] rovněž vytvořil jeho vrstevník francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).[78] Jimi vytvořený "epsilon-delta kalkul" pro definování

---

[74] [60 str. 48]"*...Shledáváme, že veškeré matematické poznání má tu zvláštní vlastnost, že musí zachytit svůj předmět předem a to v apriorním názoru,....a bez tohoto prostředku nemůže udělat jediný krok. Proto jsou matematické soudy vždy intuitivní.... Toto zjištění o povaze matematiky dává nám vodítko k první a nejvyšší podmínce její možnosti; musí mít základ v nějakém čistém názoru, v němž může podat všechny své pojmy in concrete, a přesto a priori, či jak se říkává, může je konstruovat.*"

[75] Viz ne-euklidovské geometrie v následující kapitole.

[76] [60 str. 106] *"...Zda je hmota do nekonečna dělitelná, nebo zda se skládá z jednoduchých částí? Takové pojmy nemohou být dány v žádné zkušenosti, i kdyby byla seberozsáhlejší, takže zkušenost tu není zkušebním kamenem, který by odhaloval nesprávnost tvrdící nebo popírající teze."*

[77] Ačkoliv byl Bolzáno velký vizionář, jeho práce byly za Bolzánova života do značné míry ignorovány.

[78] Existuje řada knih a pojednání o tom, který z těchto matematiků měl prvenství a v čem, kdo byl ovlivněn kým, např. [34].

limity a derivace, patří k významným výdobytkům matematiky té doby a používá se dodnes.[79]

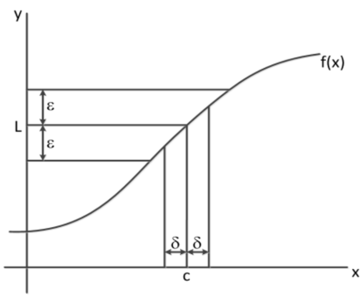
3.4. Moderní doba

Matematické kontinuum vytvořil na množinově teoretickém základě německý matematik a zakladatel teorie množin Georg Cantor (1845–1918)[80]. Cantor byl ovšem až dogmatickým oponentem infinitezimálů. Ostře útočil na úsilí matematiků formulovat rigorózní teorii infinitezimálních veličin. Dle něho byly infinitezimály "mimo realitu"; infinitezimály dokonce označil za "bacily cholery matematiky"[81] a pokoušel se matematicky dokázat nemožnost existence infinitezimálů. Za tímto odmítáním stálo jednak přesvědčení, že jím vytvořené kontinuum sestávající z racionálních a iracionálních čísel je úplné a jednak obava, že jeho hypotéza kontinua[82] by v důsledku infinitezimálů vmáčknutých mezi racionální a iracionální čísla nemusela vůbec platit anebo, že v lepším případě by infinitezimály komplikovaly důkaz této hypotézy.[83]

Vytvoření kontinua na množinově teoretickém základě vedlo k tomu, že matematici od používání infinitezimálů v matematické analýze do značné míry

---

[79] Definice limity:



L je limitním bodem funkce F v bodě c, jestliže ke každému ε nenulovému kladnému existuje kladné δ takové, že pro všechny proměnné x vzdálené od c méně než δ delta, jsou hodnoty F(x) od A vzdáleny o méně než ε.

[80] Matematické kontinuum rovněž definoval, avšak použitím jiné metody, Cantorův vrstevník, německý matematik a filozof Richard Dedekind (1831-1976)

[81] [35 str. 131]

[82] Hypotéza kontinua: Každou konečnou podmnožinu reálné přímky lze vzájemně jednoznačně zobrazit buďto na celou přímku (kontinuum) nebo na množinu přirozených čísel. Tuto svou hypotézu se snažil marně dokázat, což jak již dnes víme, se mu ani podařit nemohlo, neboť toto tvrzení (a ani jeho negaci) nelze v teorii množin dokázat.

[83] [35 str. 131]

upustili. Je třeba ovšem zdůraznit, že fyzikové je používali ve svých pracích i nadále, neboť vystihovaly fyzikální procesy lépe, než koncept postupného přibližování založený na pojmu limity. Úsilí vytvořit formálně korektní zdůvodnění infinitezimálů mělo tedy kromě čistě teoretického důvodu, to jest vyřešení staletí trvajícího problému, i praktické opodstatnění. To se nakonec podařilo matematikovi Abrahamu Robinsonovi.

Abraham Robinson (1918–1974). V roce 1966 publikoval práci o nové metodě, kterou nazval nestandardní analýza. Využívaje metody matematické logiky rozšířil standardní reálná čísla, jak o nekonečně velká (infinitní), tak i infinitezimální (nekonečně malá) čísla.[84] V tomto rozšíření platí obvyklé vlastnosti aritmetiky kontinua reálných čísel. Užitečnost nestandardní analýzy spočívá v tom, že každé tvrzení klasické matematické analýzy zahrnující pojem limity má výstižný a vysoce intuitivní konverzi do jazyka infinitezimálů. Nestandardní analýza je tedy matematická formalizace Leibnizova infinitezimálního kalkulu[85]. Nicméně, limitní koncept realizovaný epsilon-delta kalkulem (Bolzano, Cauchy) se vžil tak důkladně, že zformalizovaný Leibnizův kalkulus se zatím běžně v matematické analýze nepoužívá.

3.5. Závěr kapitoly

Dnes můžeme konstatovat, že problém matematického kontinua byl vyřešen. Bylo zkonstruováno jak klasické kontinuum reálných čísel (Cantor, Dedekind), tak i kontinuum rozdělitelné na infinitezimálně malé části (Robinson).

Co se týče dělení hmoty lze uvést, že poznání v této oblasti značně pokročilo a to mimo jiné díky tomu, že v několika posledních letech bylo objasněno, za jakých

---

[84] Nekonečně velkými čísly jsou zde míněna taková čísla, která jsou větší než jakékoliv kladné celé číslo, a recipročně infinitezimály jsou převrácené hodnoty nekonečně velkých čísel. Infinitezimály jsou tedy nenulové a současně menší než převrácené hodnoty kladných celých čísel.

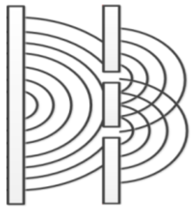
[85] Infinitezimály mají stejné vlastnosti jako "obyčejná" reálná čísla tak, jak si to Leibniz představoval.

podmínek se chovají objekty[86] jako částice a kdy se chovají jako vlny[87]. Pokud objekt neinterferuje s okolím, tj. pokud částici dokonale izolujeme od okolního prostředí chová se jako vlna [7] a nemá smysl bavit se o jejím dělení.[88] Pokud není zcela izolován, chová se objekt mikrosvěta (například proton) jako částice, kterou lze případně (v urychlovači) rozdělit[89] použitím jiné částice takovým způsobem, že hmotnost každé jedné části (kvark) vzniklé dělením (štěpením) může být větší než součet hmotností štěpeného a štěpícího objektu dohromady [8].

Touto pozoruhodností, která se vymyká naší běžné zkušenosti, skončíme pojednání o kontinuu, protože se dostáváme na téma, které přesahuje rozsah této práce.

[86] experimentálně i molekuly o hmotnosti řádově srovnatelné s hmotností proteinů (10^{-23} kg)

[87] Když se objekty chovají jako vlny, tak "procházejí" dvěma a více otvory současně:



[88] Ostatně - pokud bychom chtěli izolovaný objekt dělit, potřebujeme k tomu štěpící částici, která by okamžikem nárazu do předmětného objektu ukončila jeho izolovanost.

[89] Od objektů velikosti atomu je vhodnější hovořit o štěpení.

4. Jak matematici, tak filozofové se pokoušeli vymezit pojem prostoru.

4.1. Filozofický prostor

Ve filozofii můžeme vidět dva protichůdné přístupy k prostoru. První, označovaný jako relační[90], chápe prostor jako dynamickou strukturu tvořenou vzájemně se ovlivňujícími rozprostraněnostmi[91] jednotlivých těles. Tato koncepce prostoru vylučuje existenci prázdna - vakua.[92] Počátky relačně pojímaného prostoru lze dohledat už u Aristotela. Prostor je pro něj zcela vyplněn éterem, popřípadě jinou hmotou, [93] je souhrnem všech míst. Stejně jako každé těleso jest v místě, tak i v každém místě jest nějaké těleso.[94] Toto těleso však nemusí být hmatatelné, ani mít nějakou tíži či lehkost. Myšlenka, že by existovalo prázdné místo, to znamená místo neobsahující žádné těleso, je pro Aristotela nepřijatelná.

Odlišné vymezení prostoru - nekonečné třídimenzionální kontinuum vakua[95], v němž existují (plují) tělesa[96] - se obvykle nazývá absolutní prostor. Můžeme ho nalézt například v díle židovského filozofa Hasdai ben Judah Crescase (1340-1410).

---

[90] Někdy nazývaný též relativní. Abychom se vyhnuli nepatřičným asociacím s teorií relativity a potažmo se čtyřrozměrným časoprostorem, přidržíme se označení relační prostor.

[91] Rozprostraněností ve fyzikálním smyslu je míněn objekt (různého skupenství) včetně jeho silových polí.

[92] "horror vacui"

[93] [21 str. 212b10] *"Místo je krajní hranice, jež je v klidu a dotýká se tělesa, které je v pohybu. Země je ve vodě, tato ve vzduchu, tento zas v éteru, éter ve světě, avšak svět není již v jiné věci."*

[94] [21 str. 209a26]

[95] Pojem vakua byl známý již starořeckým filozofům. Zastánci jeho existence, atomisté Leukippos a Démokritos tvrdili, že atomy se nacházejí ve vakuu. Naproti tomu Aristoteles myšlenku vakua odmítal úvahou s tím, že prázdný prostor by nekladl žádný odpor padajícím tělesům, takže tato by padala ve vakuu nekonečnou rychlostí [21 str. 212a]. A aby se zbavil vakua, vyplnil ho éterem, to jest nedetekovatelnou substancí prostupující veškerým prostorem včetně těles.

[96] [56 str. 381] *".....Instead of defining space as "the boundary of the body that encloses the enclosed body" Crescas proposes to define space as three-cimensional continuum that precedes the bodies that exist within it."*

Absolutní prostor je zřejmě homogenní, neboť absolutní prázdnota ani jiná být nemůže.

Různé koncepce nazírání prostoru předurčovaly také odlišné pojetí času. Zatímco Aristoteles považoval čas za míru změny, neboť všude něco existuje, a to něco se neustále pohybuje, tak v absolutním pojetí prostoru je čas chápán jako absolutní veličina nekonečného trvání, která je nezávislá na pohybu těles.

Významným myslitelem prostoru byl francouzský filozof, matematik a fyzik René Descartes (1596–1650). Descartův prostor je nekonečně dělitelný, zcela vyplněn nekonečně malými částicemi látky, které ovšem nejsme svou konečnou myslí schopni určit[97]. Prostor je určen rozlehlostí[98] a nemá žádné hranice[99], které by tuto jeho rozlehlost vymezovaly. Výše uvedené Descartovy úvahy hovoří ve prospěch relačního prostoru. [100]

V Descartových pracích se ovšem (implicitně) objevuje také absolutní prostor: Jeho první zákon přírody[101] totiž říká, že těleso pohybující se přímočaře bude v tomto přímočarém pohybu pokračovat, dokud ho něco nezastaví. Tento pohyb však předpokládá absolutní prostor, neboť v "napěchovaném" relačním prostoru takovýto - z fyzikálního hlediska ideální - pohyb není možný. Na tento zákon a tezi, že klid a jeho protiklad pohyb, jsou dva stavy tělesa, navázal Isaac Newton svými třemi pohybovými zákony klasické dynamiky.[102]

---

[97] [57 str. 105]

[98] [57 str. 93] *"...Prostor a tělesná substance věc v něm obsažená se neliší skutečně, ale pouze co do způsobu, kterým je obvykle pojímáme. Neboť ve skutečnosti je rozlehlost do délky, šířky a hloubky, která zakládá prostor, zcela totožná s tou, která zakládá těleso."*

[99] [57 str. 105] *"...Tento svět, čili souhrn tělesné substance, nemá hranice své rozlehlosti. Kdekoli bychom si totiž ony hranice vymýšleli, vždy bychom si za nimi představovali nějaké neomezené rozlehlé prostory."*

[100] Rovněž Descartova definice pohybu, jakožto vztahu k bezprostředně přiléhajícím tělesům, která považujeme za jsoucí v klidu znamená, že Descartes v této definici uvažuje relační prostor: *"...pohyb je přesunem jedné části látky či jednoho tělesa ze sousedství těles, která k němu bezprostředně přiléhají a jsou nahlížena jako spočívající v klidu, do sousedství jiných."* [57 str. 109]

[101] [67 str. 33] *"...The first law of nature: each thing when left to itself continues in the same state; so any moving body goes on moving ·until something stops it."*

[102] Zákon setrvačnosti, zákon síly a zákon akce a reakce.

Descartes také proslul propojením algebry s Eukleidovskou geometrií, která pracovala pouze s obrazy geometrických útvarů (bod, přímka, kružnice,...). Zavedl souřadnicovou soustavu, dodnes používanou a na jeho počest nazývanou kartézská. Položil tak základy analytické geometrie, která řeší geometrické úlohy pomocí algebraických metod.

Filozofické disputace o prostoru pokračovaly i v následujících stoletích. Velmi zajímavá "debata" (korespondence od roku 1716) probíhala mezi Leibnizem a Newtonem (jemuž sekundoval jeho žák Samauel Clark) [9]. Východiska pro filozofické uchopení prostoru byla u výše zmíněných učenců rozdílná. Isaac Newton (1643–1727) byl zastáncem absolutního[103], všudypřítomného a věčného prostoru. Absolutní prostor měl pro Newtona zásadní význam, neboť se od něho odvozovala platnost zákonů klasické mechaniky předpokládající prostor, jenž existuje nezávisle na objektech[104]. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) přistupoval k prostoru nikoliv z pozice myslitele obhajujícího klasickou mechaniku, nýbrž na základě metafyzické spekulace. Byl zastánce relačního pojetí: Prostor je druhotný - je vytvořen vztahy reálného světa. Tvrdil, že prostor je dán fyzickými objekty v něm obsaženými. Prostor bez jakékoliv hmoty tedy nemá smysl.

V té době většina myslitelů dávala za pravdu spíše Newtonovi a přikláněla se tedy k pojetí absolutního prostoru[105], neboť na základě tehdejšího fyzikálního poznání absolutní model přinášel prostřednictvím klasické mechaniky důležité a prakticky využitelné poznatky. Je však třeba poznamenat, že Leibnizova formulace prostoru je bližší dnešnímu poznání. Fyzikální pohled na prostor se definitivně změnil na základě Einsteinovy teorii relativity. Námi dnes uvažovaný prostor je relační.

---

[103] [59 str. 408]"*..Absolute space, of its own nature without reference to anything external, always remains homogeneous and immovable. Relative space is any movable measure or dimension of this absolute space; such a measure or dimension is determined by our senses from the situation of space with respect to bodies and is popularly used for immovable space, as in the case of space under the earth or in the air or in the heavens, where the dimension is determined from the situation of the space with respect to the earth."*.

[104] Newton potřeboval vztažnou soustavu vůči níž by bylo možné jednoznačně určit, zda jsou tělesa v pohybu nebo v klidu.

[105] Poznamenejme, že Newton považoval námi vnímatelný prostor v zásadě za relační, jenž je odvozen z existence těles a je vůči nim vztahován. Tento relační prostor, Newtonem nazývaný relativní, existuje na pozadí tvořeném našim smyslům nedostupným absolutním prostorem.

Německý filozof Immanuel Kant (1724-1804) studoval jak Leibnizovu tak Newtonovu filozofii. Do svého "Koperníkánského obratu"[106] kolísal mezi koncepcí relačního a absolutního prostoru, dávaje za pravdu nejprve Leibnizovi a po té Newtonovi. Ohledně prostoru (a času) Kant po svém prozření tvrdí, že prostor a čas jsou apriorní formy našeho smyslového názoru. Prostor a čas nejsou objektivní, nezávisle existující skutečnosti, ale subjektivní podmínky naší schopnosti smyslového poznání.[107] Tato časoprostorová výbava naší mysli umožňuje naše smyslové poznání.

4.2. Matematický prostor

První matematické vymezení prostoru patrně náleží Euklidovi (325–260 př.n.l.). Vytvořil formální geometrický systém, který dnes podle něho nazýváme Eukleidova geometrie.[108]

---

[106] Kant vytváří novou definici metafyziky - "*věda o hranicích lidského rozumu*". Přesunul důraz z ontologické podoby metafyziky na podobu gnoseologickou. Svoji novou "obrácenou" pozici popsal Kant následovně: *"...nemělo by smysl doufat, že o nějakém předmětu poznáme víc, než co patří k jeho možné zkušenosti, nebo dělat si nárok na sebemenší poznání nějaké věci, o níž předpokládáme, že není předmětem možné zkušenosti - osobovat si, že ji můžeme určovat v její povaze jako je sama o sobě.... na druhé straně by bylo ještě nesmyslnější, kdybychom nechtěli připustit vůbec žádné věci o sobě nebo kdybychom chtěli vydávat naši zkušenost za jediný možný způsob poznání věcí"* [60 str. 116]

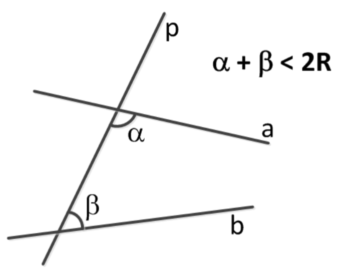
[107] Prostor a čas tedy dle Kanta existují pouze v naší mysli jakožto vrozené dispozice. Subjektivní pojetí prostoru a času zastávali i ostrovní empiristé John Locke (1632 –1704) a David Hume (1711 – 1776) tvrdíce, že prostor a čas jsou ideje (čili představy) v naší mysli vytvořené (až po narození) mentálními procesy na základě získaných empirických zkušeností (impresí). Podle Huma máme relační představu prostoru

[108] Tento formální systém pravděpodobně vznikl abstrakcí úloh majících původ v zeměměřičství a stavebnictví. Umožnil praktické úlohy korektně standardizovat, jak co se týče jejich zadání, tak i řešení. Ve prospěch hypotézy ohledně kořenů Euklidovy geometrie svědčí především samo označení geometrie (geo "země", metron "měřit") a také ta skutečnost, že řešení úloh v Euklidovském systému lze provést pouze pomocí pravítka a kružítka.

Systém je založen na pěti axiomech[109]. Při prvním pohledu na postuláty si nemůžeme nevšimnout, že pátý Eukleidův vypadá jinak, než ostatní postuláty. A již za Euklidova života se objevila hypotéza, že se nejedná o postulát, nýbrž o tvrzení, které by mohlo být dokazatelné z prvních čtyř postulátů. Touto možností se zabýval (neúspěšně) i sám Eukleides [10]. Úsilí matematiků obejít se bez tohoto axiomu pokračovalo ve středověku i novověku. Definitivní odpověď však přišla až ve 20. letech 19. století s objevením neeuklidovských geometrií. Podařilo se to roku 1824 německému matematikovi Johann Carl Friedrich Gaussovi (1777-1855), který vytvořil geometrii, v níž neplatí[110] pátý Euklidův postulát.

---

[109] [20 str. Kniha I.] Jsou to postuláty, které nelze dokázat. Je nutno je předpokládat. (Časem k původním formulací vznikla řada parafrází.):
" *1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vést přímku"* (~ přímou čáru je možné nakreslit z jakéhokoliv bodu do jakéhokoliv bodu).
" 2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužit" (~ přímku lze prodlužovat o různé délky - každé prodloužení musí být prodloužením nějakého jiného prodloužení)
"3. A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovat kruh" (~ kolem daného středu lze opsat kružnici procházející daným bodem)
"*4. A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou."* (~ když se dvě přímky protnou a když dva úhly tímto protnutím vytvořené jsou shodné, pak každý z takto vzniklých úhlů je pravý.)
Na rozdíl od ostatních axiomů nepřidává tento axiom žádnou informaci ohledně geometrické konstrukce nad rámec ostatních čtyř axiomů (první dva pojednávají o konstrukci přímek, třetí kruhu, pátý o konstrukci rovnoběžek). Je to pouze pravidlo.
"5. A když přímka protínající dvě přímky tvoří na téže straně přilehlé úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna, že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých." (~ k dané přímce a bodu, který na ní neleží, lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem.)



[110] To znamená, že bodem neležícím na dané přímce lze vést k této přímce několik rovnoběžek, či že součet úhlů trojúhelníka je menší, než dva úhly pravé. Dnes nazýváme takovouto geometrii hyperbolickou.

Gauss však svůj objev nikdy nepublikoval[111], protože nechtěl jít do otevřeného sporu se zastánci tehdy všeobecně uznávané doktríny Immanuela Kanta, že je možná jen jediná geometrie[112] a sice geometrie Euklidovská[113]. Předmětná Gaussova práce se však dochovala díky jeho soukromé korespondenci. V ní rovněž nalezneme Gaussův názor, že strukturu reálného prostoru musí vyřešit fyzika. A historie mu dala následně za pravdu.

4.1. Závěr kapitoly

Objev neeukleidovských geometrií otevřel cestu vedoucí k obecné teorii relativity. Ta odhalila, že vesmír má uvnitř galaxií sférickou geometrii[114], zatímco geometrie mezigalaktického prostoru je hyperbolická[115]. Problém geometrie vesmíru z globálního hlediska (snad definitivně) vyřešila sonda Planck (2009-2013). Ta naměřila data, která potvrzují hypotézu, že křivost vesmíru je od měřítka stovek megapaprsků[116] nulová[117], což znamená, že vesmír je plochý.

Globální geometrie vesmíru je tedy Euklidovská. Podíváme-li se však na vesmír optikou meziplanetárních vzdáleností, vyjeví se nám zprohýbaný s pozitivním zakřivením uvnitř galaxií a záporným mimo ně. Rozdílné hodnoty zakřivení jsou dány tím, že uvnitř galaxií je určující silou gravitace, která drží galaxie pohromadě, zatímco mezigalaktický prostor je vyplněn temnou energií způsobující rozpínání vesmíru. [11]

---

[111] Prvními matematiky, kteří publikovali práce pojednávající o neekleidovské geometrii byli Rus Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a Maďar János Bolyai (1802– 1860).

[112] [54 str. 72]. „*...charakteristické pro všechny věty geometrie je nutnost a absolutní obecnost."*

[113] Jiná než Eukleidovská geometrie nebyla za Kantova života známa.

[114] Vesmír má uvnitř galaxií kladnou křivost (tvar povrchu míče ve dvourozměrné analogii)

[115] Mezigalaktický prostor má zápornou křivost (tvar koňského sedla ve dvourozměrné analogii)

[116] Jeden parsek je cca 3,36 světelných let.

[117] To je dáno tím, že vesmír od tohoto měřítka je homogenní a izotropní. Konkrétně to znamená, že má stejnou hustotu - spočtenou jako součet hmoty a energie (a to jak té známé, tak i neznámé = temné) dělenou objemem koule o poloměru minimálně stovek megapaprsků. (Hmota a energie jsou provázány vzorcem $E = mc^2$)

5. Determinismus, pravděpodobnost, a svobodná vůle

Historicky existují dva diametrálně odlišné přístupy, jak se s tématy pravděpodobnost, determinismus a svobodná vůle popasovat:

Deterministický přístup říká, že vše je pevně dané - běh světa je určen předem, zpravidla na základě všeobecně platného kauzální principu.

Ale co náhoda s níž se běžně setkáváme? "Nekonečná inteligence" má kompletní znalost všeho, co se v universu odehrávalo, odehrává a bude odehrávat. Lidská inteligence toho však není schopna a vyrovnává se se svou nedokonalostí eufemismem náhody. Ve vědě je pak náhoda označována jako pravděpodobnost.

Opačný přístup popírá jakoukoliv příčinnou souvislost. Vše je buďto dílem čisté náhody anebo je dění ve světě určováno případ od případu z vůle "vyšší bytosti". V obou těchto případech se ovšem nikdy nedá s určitostí predikovat, že po události A bude následovat událost B.[118]

Je veškeré dění v přírodě a ve společnosti zcela nahodilé? Anebo je vše řízeno a to ať už Božími rozhodnutími ad hoc nebo pevně danou kauzální posloupností příčin a následků, buďto nekonečnou a tedy bez počátku anebo vycházející z počáteční entity (Bůh, velký třesk), jež uvádí do pohybu veškerou realitu? Toť otázky a ne ledajaké; vždyť různící se odpovědi na ně spoluvytvářely dějiny filozofie. Budeme se jimi zabývat v této kapitole.

Další velké téma, se kterým se setkáme v této kapitole, je antinomie determinismu daného existencí všemohoucího, vševědoucího Boha a svobodné vůle člověka. Můžeme být zodpovědnými za naše skutky, když jsou už dopředu Bohem stanoveny? Pokud bychom jednali nezávisle na Bohovi podle naší svobodné vůle, znamenalo by to, že vševědoucí Bůh neví vše? Rozporem se zabývala po mnoho století všechna tři velká pouštní náboženství - judaismus, křesťanství a islám. Rabíni, scholastikové i islámští teologové sepsali na toto téma mnoho spisů, a ani filozofové s vytvářením různých interpretací nezůstávali pozadu. Nicméně, osobně mám dojem, že jak to opravdu je, to ví jen Bůh.

[118] Důsledkem tohoto přístupu je (mimo jiné) popření možnosti poznávat.

5.1. Starověk

Starořečtí atomisté[119] měli za to, že náš život je určen na nás nezávislými pravidly a že náš život je žití dané předurčeností neboli žitím osudu [12]. Ačkoliv se tento striktně deterministický přístup ke světu zdá být vhodný pro fyzikální výklad světa, je z důvodů etických těžko obhajitelný, neboť by tímto člověk ztratil veškerou odpovědnost za své činy.

Stejně tomu tak je - co se týče mravnosti - i v případě naprostého popření kauzality. Z toho lze dovodit, že jak determinismus, tak i jeho protiklad (chaos) jsou neslučitelné s praktickým fungováním lidské civilizace, protože ta je postavena více, či méně na dodržování principu odpovědnosti jedince za své chování.

Sokrates zastával názor, že se znalostí věci volíme rozumem to nejlepší. Nicméně připouštěl, že zmíněná rozumem řízená volba není vždy uskutečnitelná, neboť existují okolnosti, které jsou určující a nelze je nijak obejít; lze je pouze přijmout jako danost.[120]

Platón od Sokrata převzal doktrínu onoho racionálně vybíraného nejlepšího s tím, že její platnost omezil rámcem objektivních překážek. Jak plyne z dialogů *Ústavy*, ne vždy jednáme racionálně volíce to nejlepší, neboť se podvolujme démonům vášně a nepatřičných tužeb, jež nám zatemňují mozek[121].

Podíváme-li se na oba myslitele z hlediska toho, jak se stavěli k otázce svobodné vůle, vidíme, že Sokrates ji do jisté míry popíral, neboť jsme dle něho determinováni jednak vnějšími okolnosti, jednak volíme vždy to správné, jsme-li náležitě poučeni. Jak plyne z výše uvedeného, Platon byl ve srovnání se Sokratem, méně deterministický, neboť připouštěl možnost zcela iracionálních rozhodnutí činěných se zatemněnou myslí bez ohledu na to, jak moc znalostí se v ní nachází.

---

[119] U zakladatele atomismu Leukippa (500-440 př. n. l.) můžeme nalézt jednu z prvních definic kauzality: "*Ani jedna věc nevzniká bez příčiny, ale vše vzniká z nějakého důvodu a nutnosti*." [3].

[120] [55 str. 77] *"Jestliže by někdo říkal, že kdybych neměl takové věci jako kosti a svaly a co všechno jiného mám, nebyl bych s to udělat, co se mi uzdá, mluvil by pravdu; avšak říkat, že takové věci jsou příčinou, že dělám to, co dělám, a že to znamená jednati podle rozumu, a ne volba toho, co je nejlepší, v takové řeči by bylo mnoho a veliké lehkomyslnosti."*

[121] Platón v dialozích uvádí tři příčiny zločinů: Vášeň, potěšení a od Sokrata převzatý důvod nevědomosti, ovšem dále rozvedený na prostou nevědomost a nevědomost z domýšlivosti vše znalého. [58 str. 245]

Aristoteles mluví o kauzální příčinnosti, když uvádí čtyři příčiny jsoucna: materialis, formalis, efficiens a finalis. [3] Toto je na první pohled rys determinismu. Současně však uvádí, že ne každá událost má nutnou kauzální příčinu, neboť některé události jsou způsobeny náhodou[122] a nebo rozhodnutím naší svobodné vůle[123]. Což však musíme hodnotit jako prvek nedeterministický.

5.2. Středověk

Aristotelem ovlivněný židovský filozof v Evropě nazývaný Maimonides (= Moše ben Majmon = Rambam) (1135-1204) ve své knize Mišne Tora jednoznačně vystupoval proti předurčenosti.[124] Rovněž tak nekompromisně kritizoval ty, kteří se za všemohoucnost Boha schovávali a nechtěli mít se svobodnou vůlí nic společného.[125].

Tomáš Akvinský (1225-1274), jenž věřil v existenci všemohoucího a vševědoucího Boha, měl zato, že člověk má svobodnou vůli a není podřízen osudové danosti, přestože Bůh je nejvyšší příčina všeho. V jeho díle *Teologické sumy* můžeme nalézt logický argument pro existenci svobodné vůle[126].

---

[122] [47 str. Kniha V. 1025a23] *"...mnohé se vyskytuje někde a někdy sice skutečné jest, ale ne proto, že by něco jiného bylo,...mnohdy lze totiž postupovat až k určitému počátku, ale pak již k ničemu jinému. On sám je počátkem, že se to či ono právě přihodilo, a sám však nemá příčinu svého vzniku."*

[123] [36 str. Kniha III. 1113b2] *"... Poněvadž předmětem chtění jest účel, to pak, o čem uvažujeme a pro co jsme se rozhodli, jsou prostředky, bude jednání, jež se vztahuje k těmto prostředkům, odpovídati záměrné volbě a bude dobrovolné."*

[124] [18 str. 559] *"... free will is a fundamental principle to which, thank God"*

[125] [18 str. 559] *"... individual uneducated Jews who, with an inconsistency characteristic of simple-minded believers, professed a blind belief in God's power as extending over human action, without openly denying free will and, so much the more, without openly opposing those who profess a belief in free will."*

[126] [30 str. 730]*" ...člověk jest svobodně rozhodující: jinak by byly marny rady, napomínání, příkazy, zákazy, odměny a tresty."*

Ve zmíněném díle Akvinský uvádí do souladu zdánlivé antinomie všemocného Boha a svobodné vůle[127], nebo vševědoucího Boha a náhody[128].

5.3. Novověk

5.3.1. Pravděpodobnost

Počátek teorie pravděpodobnosti[129] se datuje do počátku 16. století. Vysvětlením, proč se matematici pravděpodobností dlouho nezabývali, by mohla být skutečnost, že matematika byla považovaná za disciplinu, která nemá nic společného s náhodou. Jak se pravděpodobnost dostala do matematiky, je možné dozvědět se z korespondence dvou francouzských matematiků Blaire Pascala (1623-1662)[130] a Pierre de Fermata (1601-1665). Zabývali se řešením úlohy: Kolik hodů dvěma kostkami je třeba, aby šance, že padne alespoň jedna nebo dvě šestky, byla větší než 50 procent.

O významný rozvoj teorie pravděpodobnosti se přičinil francouzský fyzik a matematik Pierre Simeon Laplace (1749-1827). Ač byl determinista, připisoval značný význam pravděpodobnosti. Viděl potřebu používat teorii pravděpodobnosti

---

[127] [30 str. 731] "*...Bůh jest první příčina pohybující i přírodní příčiny, i volní. A jako pohybuje přírodní příčiny, neodnímá jim, že jejich úkony jsou přírodní, tak pohybuje příčiny volní, neodnímá, že jejich skutky jsou dobrovolné, nýbrž spíše to v nich činí: jedná totiž v každém podle jeho povahy."*

[128] [30 str. 150] *"...Bůh ví všechno, nejen co je v uskutečnění, nýbrž co je v možnosti své nebo tvora, a z těch některá jsou budoucí náhodná. ...ač nejvyšší příčina je nutná, přece účinek může být náhodný z nejbližší příčiny náhodné, jako klíčení rostlin je náhodné z nejbližší příčiny, ačkoli pohyb slunce, jež je první příčinou, jest nutný. A podobně věděná od Boha jsou z nejbližších příčin náhodná, ačkoli vědění Boží, jež je první příčinou, jest nutné."*

[129] Teorie pravděpodobnosti (počet pravděpodobnosti) popisuje zákonitosti jevů, které z hlediska pozorovatele mohou a nemusí nastat (není předem jisté, zda nastanou či nenastanou)

[130] Pascal je považován za zakladatele teorie pravděpodobnosti. Nicméně je třeba poznamenat, že již o století, v roce 1526, zveřejnil patrně první seriózní pojednání o matematické pravděpodobnosti „*Liber De Ludo Aleae*“ Giordano Cardano (1501–1576), italský matematik a filozof, náruživý hráč v kostky a také spoluobjevitel imaginárního čísla.

ve všech případech, kdy naše znalost není dokonalá.[131] Laplace rozšířil používání počtu pravděpodobnosti do mnoha oblastí vědeckého zkoumání, včetně filozofie.

5.3.2. Determinismus a svobodná vůle

Vznik a rozvoj teorie pravděpodobnosti v 17. století však neznamenal konec determinismu ve filozofii. Do období vzniku této teorie spadá také objev infinitezimálního počtu, jenž umožnil velký rozvoj přírodních a technických věd. Důsledkem pak bylo, že mnozí filozofující vědci činili ukvapené závěry ohledně možnosti spočítat deterministicky předurčenou budoucnost.

Isaac Newton (1643–1727) nahlížel Boha jako mistrného stvořitele, jehož existence nemůže být popírána v důsledku velkoleposti vesmíru.[132] Dokonale fungující přírodní zákony byly pro Newtona důkazem dokonalosti Boha. Boha považoval za garanta přírodních zákonů - Bůh bdí nad správným fungováním světa. Odmítal však tezi, že Bůh stvořil perfektní svět, který nevyžaduje jeho následné regulativní zásahy.[133] Z výše uvedených tvrzení vyplývá, že Newton nebyl determinista (ne vše jde podle připravených zákonů). Na výroky Newtona reagoval jeho vrstevník Leibniz. A tato reakce se stala začátkem dlouhodobé korespondenční komunikace mezi Newtonem/Clarkem a Leibnizem[134], která skončila až úmrtím Leibnize.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) obhajoval naprostý determinismus všech událostí definovaných v okamžiku Božího stvoření světa. Bůh podle Leibnize

---

[131] [37 str. 1] *"...Strictly speaking it may even be said that nearly all our knowledge is problematical; and in the small number of things which we are able to know with certainty, even in the mathematical sciences themselves, the principal means for ascertaining truth, are based on probabilities."*

[132] [9 str. 174] "*....Tento překrásný systém Slunce, planet a komet mohl vzniknout pouze z úradku a moci nějaké moudré a mocné Bytosti.... Tato Bytost vládne všem jako Pán veškerenstva"*

[133] [9 str. 170] *"Zatímco komety se pohybují po velice excentrických oběžných drahách ve všech možných pozicích, slepá nutnost by nikdy nedonutila planety, aby se všechny pohybovaly jedním a týmž směrem na soustředných drahách,....., a bude tento systém nakonec potřebovat opravu."* Toto můžeme rovněž považovat za důkaz nutnosti existence Boha - Boha potřebujeme, protože je potřeba čas od času vesmír poladit.

[134] tato korespondence rovněž byla zmíněna v předchozí kapitole této bakalářské práce.

stvořil ze všech světů[135] ten nejlepší[136] možný a nevyžadující dodatečných zásahů. O živé přírodě pak říká: *"...oragnické tělo živého tvora je jakýsi druh božského stroje, neboli přírodního automatu"*[137]. Vezmeme-li k tomu v úvahu Leibnizovu teorii o předzjednané harmonii, tak musíme dospět k tomu, že Leibnizova filozofie jednoznačně obsahuje rysy determinismu.

Leibniz, ač determinista, také obhajoval svobodnou vůli. Svobodný člověk si na základě své přirozenosti (v souladu s obecně platným zákonem dostatečného důvodu[138]) vybírá to, co vnímá jako nejlepší možnost. Ovšem člověk, na rozdíl od Boha, jednak neví co je opravdu to nejlepší (člověk není vševědoucí) a jednak jeho rozhodnutí jsou (též na rozdíl od Boha) často činěna pod tlakem vnějších okolností. Člověk je tedy relativně svobodný, a je tím svobodnější, čím více rozhodnutí vychází z něho samého. Bůh, který je determinován jen sebou samým, je dokonale svobodný. A jsa nejvyšší všemohoucností, moudrostí a dokonalostí, volí vždy tu nejlepší variantu. Na tomto místě považuji za užitečné připomenout zdánlivý paradox: Člověk se může rozhodnout, že zvedne i břímě, které pak neunese[139]. Ale Bůh, nakolik je absolutně svobodný, takovou možnost volby nemá.

---

[135] [6 str. 165] *"... boží ideje obsahují nekonečný počet možných světů a může existovat pouze jeden. Musí zajisté existovat nějaký dostatečný důvod pro boží volbu, jenž Boha určuje spíše pro jeden z nich než pro jiný."* V této větě rovněž nalézáme použití principu dostatečného důvodu, který budeme rozebírat v dalších kapitolách.

[136] Logicky plyne z podstaty Boha: Kdyby stvořený svět nebyl nejlepší, musel by Bůh tento lepší svět neznat - spor s Boží vševědoucností, nebo by ho nedokázal stvořit - spor s jeho všemohoucností, nebo nechtít - spor s dobrotou Boha.

[137] [6 str. 167]

[138] Vždy musí být důvod, proč se věci staly tak a ne jinak. Pokud by naše vůle nebyla takto ukotvena, člověk by se neměl podle čeho rozhodovat, což by znemožňovalo jeho existenci jako takového. Člověk by dopadl jak "Buridanův osel" (bajka o oslu, jenž zemřel hlady v důsledku své neschopnosti rozhodnout se mezi dvěma stejně dobrými kupkami sena).

[139] To například dokumentuje tragický příběhu íránského horolezce jménem Mehdi Etemad Far, s nímž naposledy hovořil 1.května 2009 ve výšce okolo osmi tisíc metrů pod vrcholem Dhaulagiri turecký horolezc Tunc Fındık. Ten později zveřejnil záznam jejich rozhovoru na internetu: „I saw Mehdi sitting on the rocks at the mouth of the summit gully. I told him to come down with me but I think he wanted to have a try at summit, once it was so near… I could not wait for him, had to go down fast. This was the last time I saw him alive". Od té doby ho Tunc a ani nikdo jiný s určitostí nespatřili.
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_deaths_on_eight-thousanders

Německý filozof Immanuel Kant (1724-1804) zastával názor, že determinismus existuje, ale že se vztahuje pouze na jevy (věci pro nás).[140] Na člověka, jako věc o sobě, se podle Kanta princip kauzality nevztahuje.[141] Z toho důvodu pro člověka platí mravní imperativ, což je vystupňovaná forma morální odpovědnosti, z níž se nelze vyvázat žádnými výmluvami na předchozí "nepříznivé okolnosti"[142].

Holandský filozof Baruch Spinoza (1632-1677) nahlížel na svět jako na jednotný, neměnný řád, kde působí kauzální řetězec příčin a účinků.[143] Byl důsledným deterministou[144] a svobodu člověka považoval za iluzi[145].

Osobností završující proud determinismu[146] byl vynikající francouzský filozof, matematik a fyzik Pierre Simeon Laplace (1749-1827). Na začátku svého spisu "*A*

---

[140] [39 str. 167] *"...Příčinná nutnost se týká pouze určení té věci, která podléhá podmínkám času, tudíž se týká pouze jednajícího subjektu (věci) jako jevu, a pokud tedy leží určující důvody každého jednání tohoto subjektu v tom, co patří uplynulému času, není již v jeho moci."*

[141] [39 str. 167] *"....Avšak týž subjekt, který na druhé straně, vědom si sebe sama jako věci o sobě, zvažuje svou existenci, pokud nepodléhá podmínkám času, sama sebe jako určitelného pouze zákony, které si sám dává skrze rozum a v této jeho existenci nepředchází* nic *jeho určení vůle, nýbrž na každý čin se musíme dívat u vědomí jeho inteligibilní existence (tj. jako věc o sobě) jen jako na následek a nikdy ne jako na určující důvod jeho kauzality jako věci o sobě."*

[142] [39 str. 168] *"...V tomto ohledu pak může rozumná bytost o každém protizákonném činu, který spáchala po právu říci, že ho spáchat nemusela, i kdyby byl jako jev dostatečně určen v minulosti a potud nevyhnutelně nutný; neboť tento čin se vší minulostí, která ho určuje, náleží k jednomu jedinému fenoménu jeho charakteru, který si sám osvojil a podle něhož si sám připisuje, jako na vší smyslovosti nezávislou příčinu, kausalitu oněch jevů."*

[143] Tento přístup umožnil Spinozovi použít matematickou metodu - od definic, přes axiomy, k tvrzením a jejich důkazům z definic a axiomů - jako nástroj filozofa pro poznávání světa: *"...psát o lidské bytosti, jako bychom se zabývali přímkami, plochami a pevnými tělesy."* [3 str. 237]

[144] [41 str. 33] *"...V přírodě neexistuje nic náhodného, nýbrž všechny věci jsou přirozeností Boha nutně determinovány k určitému modu existence a působení."*

[145] [41 str. 41] *"...lidé se domnívají, že jsou svobodni, protože si jsou vědomi svého chtění, ale ani ve snách nemyslí na příčiny, jež vyvolávají jejich touhu něco chtít..., protože jim nejsou známy."*

[146] [37 str. 3] *"All events, even those which on account of their insignificance do not seem to follow the great laws of nature, are a result of it just as necessarily as the revolutions of the sun."*

Phylosophical Essay on Probabilities", kterou publikoval v roce 1814, předkládá koncept "super" intelektu, pro který se později vžil název Laplaceho démon[147]. Koncept představuje pojetí světa, v němž není místa pro náhodu, pro svobodnou vůli[148], ve světě je vše dané a nutné[149]. A budoucnost univerza lze při dokonalé znalosti minulosti a přítomnosti užitím matematické analýzy s jistotou predikovat.
V Lapalceově pojetí determinismu je princip perfektní predikce založen na představě, že svět je možno popsat soustavou diferenciálních rovnic klasické mechaniky s počátečními podmínkami při vzniku vesmíru.[150] Aby tento model popisující svět byl použitelný, bylo třeba jednoznačnosti řešení uvažovaných diferenciálních rovnic. Laplace, ačkoliv implicitně ve svých úvahách předpokládal jednoznačné řešení diferenciálních rovnic za platné, toto ve skutečnosti nikdy nedokázal a vypadá to, že ani nikdy explicitně nezmínil, že takové tvrzení je opravdu platné.

5.3.3. Princip dostatečného důvodu

Termín "princip dostatečného důvodu" pochází od Gottfrieda Leibnize[151] a také i následující znění tohoto principu popsané v díle *Monadologie*: *"...žádný fakt nemůže být pravdivý a jsoucí, žádná výpověď nemůže být správná, není-li dostatečný důvod, proč je tomu tak, a ne jinak, i když nám tyto důvody ve většině případů nemohou být známy."*[152]

---

[147] [37 str. 4] *„Given for one instant an intelligence which could comprehend all the forces by which nature is animated and the respective situation of the beings who compose it an intelligence sufficiently vast to submit these data to analysis it would embrace in the same formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the lightest atom; for it, nothing would be uncertain and the future, as the past, would be present to its eyes.“*

[148] a ani pro aktivně zasahujícího Boha. Bůh je v něm redukován do role prvního hybatele.

[149] Laplace nepoužívá pojem determinismus.

[150] Vize, že svět je možné popsat soustavou diferenciálních rovnic, byla zdůvodňována dále uvedenými zákony dostatečného důvodu (počáteční podmínky) a kontinuity (popsatelnost světa diferenciálními rovnicemi).

[151] Leibniz zpočátku používal označení určující důvod (determining reason). Později nahradil slovo určující slovem dostatečný, aby sjednotil zavedenou matematickou konvenci se svou filozofickou terminologií.

[152] [6 str. 161]

První, kdo důsledně[153] aplikoval tento princip za účelem filozofického zdůvodnění vyhraněného deterministického uvažování, byl Baruch Spinoza (1632-1677). Ve svém stěžejním díle *Etika* používá následující formulaci principu dostatečného důvodu: *"...U každé věci musí být udána příčina nebo důvod, proč existuje nebo proč neexistuje....Tento důvod nebo příčina musí být obsažena bud v přirozenosti věci, nebo mimo ni."*[154]

Princip dostatečného důvodu rovněž nalezneme v Laplacově díle *Filosofická esej o pravděpodobnosti.*[155] Laplace v této eseji principem dostatečného důvodu odůvodňuje, že všechny události v přírodě jsou nutnými důsledky zákonů přírody.[156]

Povšimněme si rozdílů mezi Leibnizovou, Spinozou a Laplaceho formulací principu dostatečného důvodu. Zatímco Leibniz a Spinoza říkají, že pro vše, co se vyskytne, musí existovat nějaký důvod, proč tomu je právě tak a ne jinak, pak v Laplaceově podání se pouze uvádí, že pro vše musí existovat příčina to ono způsobující. To znamená, že Laplaceova formulace dostatečného důvodu je "o polovinu slabší" tvrzení, než definice Leibnize či Spinozy.

5.3.4. Zákon kontinuity

Popis pohybu těles v rámci klasické mechaniky pomocí infinitezimálního kalkulu vyžadoval spojitost popisovaného děje. Pouze za tohoto předpokladu bylo uchopení reality infinitezimálním kalkulem možné. Když vědečtí deterministé[157] extrapolovali postupy klasické mechaniky na celé universum, k zajištění opodstatněnosti své úvahy nutně proto potřebovali spojitost veškerých ve vesmíru probíhajících dějů. Spojitost[158] byla důležitá jak z metafyzických důvodů (vše se děje

---

[153] Ve Spinozově díle Etika můžeme vidět použití principu dostatečného důvodu i pro důkaz existence Boha. [41 str. 17]

[154] [41 str. 16]

[155] [37 str. 3] *"...Present events are connected with preceding ones by a tie based upon the evident principle that a thing cannot occur without a cause which produces it."*

[156] [37 str. 4]“ *We ought to regard the present state of the universe as the effect of its anterior state and as the cause of the one which is to follow."*

[157] Vědecký determinismus je determinismus vytvářený jednak na základě principu dostatečného důvodu a zákona kontinuity, jednak zobecňující vědecké poznatky a zkušenosti. Za zakladatele vědeckého determinismu je často považován Laplace.

[158] Je dobré si uvědomit, že v době vydání Laplaceovy *Eseje* (1814) nebyla ještě spojitost funkcí korektně definovaná. Přesvědčení, že diferenciální rovnice klasické mechaniky mají

spojitě), tak i z matematického hlediska (jednoznačnost řešení diferenciálních rovnic klasické mechaniky, jež jsou realizací popisu pohybu těles). Tato spojitost měla být zajištěna metafyzickou heuristikou označenou Leibnizem jako zákon kontinuity. Leibniz tento zákon formuloval mnoha způsoby [13] a některé z nich zde uvedeme.

V této práci jsme se poprvé setkali s Leibnizovým zákonem kontinuity ve třetí kapitole v tomto znění: *„The rule of the finite remains valid in the domain of the infinite“*[159]. Leibniz tím říká, že to, co platí pro konečné veličiny, že platí i pro nekonečně malé, respektive nekonečně velké veličiny.

Jako další formulaci uveďme tuto: *"In any supposed transition, ending in any terminus, it is permissible to institute a general reasoning, in which the final terminus may also be included”*.[160] Zde jde o to, že předchozí se spojitě mění v následující.

Formulace zákona kontinuity, kterou si zde uvedeme jako poslední příklad, je snad nejvíce známá: *"Everything goes by degrees in nature, and nothing by leaps, and this rule regarding changes is a part of my law of continuity”.* [161] Jinými slovy: Všechny změny v přírodě se dějí postupně a nikoliv skokovou změnou.

Zákon kontinuity byl Leibnizem používán nejen za účelem metafyzických zdůvodnění opodstatněnosti fyzikálního popisu pohybu[162], nýbrž také jako matematická metoda dokazování. Jako příklad zákona kontinuity použitého v matematice si můžeme uvést definici pojmu parabola pomocí zákona kontinuity: *"A parabola is the ultimate form of an ellipse, in which the second focus is at an infinite distance from the given focus nearest to the given vertex.*"[163]

---

jednoznačné řešení, tehdy proto vycházelo pouze z empirických zkušeností podložených intuicí, případně filozofické heuristicky zákona kontinuity.

Spojitost funkcí definoval Bolzano až v roce 1817: "*Bolzano definuje spojitost funkce jedné proměnné tak, jak to činíme dnes:*

Funkce f(x) je spojitá v bodě a, jestliže ke každému ε > 0 lze nalézt číslo δ > 0 tak, že pro všechna x, splňující nerovnosti $|x - a| < \varepsilon$, platí $|f(x) - f(a)| < \delta$ ". [38]

[159] [29 str. 92]

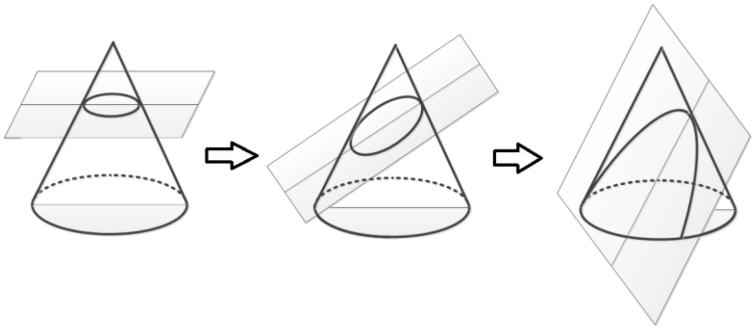
[160] [29 str. 92]

[161] [29 str. 93]

[162] ve filozofickém smyslu změny

[163] [29 str. 94]

Jinými slovy: Parabola je elipsa s jedním ohniskem v nekonečnu. Viz obrázek níže.



Na závěr této kapitoly si ještě zmiňme, že Leibnizův zákon kontinuity "Natura not facit saltum" aplikovaný na živou přírodu je v naprostém souladu s Darwinovou evoluční teorií vývoje druhů.[164].

5.4. Moderní doba

Do první poloviny 19. století panovala představa, že přinejmenším fyzikální svět je podřízen striktním zákonům a je zcela prostý vší náhody. V polovině 19. století se začaly v tomto modelu objevovat trhliny způsobené objevením statistických fyzikálních zákonů a zejména pak ve 20. století, kdy byly objeveny další zákony popisující děje fyzikálních systémů jen s určitou pravděpodobností. Jako příklad dokumentující tuto skutečnost uveďme Heisenbergův princip neurčitosti[165]. Pravděpodobnost se tedy postupně stala součástí fyzikálních teorií, neboť dodnes neexistuje způsob jak tuto nahodilost eliminovat, byť jakkoliv složitým způsobem.

V souvislosti s nahodilostí jako součástí kvantové mechaniky[166] uveďme, že Albert Einstein (1879–1955) ovlivněn deterministou Spinozou, odmítal náhodné

---

[164] Anglický přírodovědec Charles Robert Darwin (1809-1882). Viz Darwinova práce *"O původu druhů"*.

[165] Německý fyzik Werner Karl Heisenberg (1901-1976). Heisenbergův princip říká, že čím přesněji určíme polohu elementární částice, například elektronu, tím méně přesně můžeme určit její hybnost (součin hmoty a okamžité rychlosti) a naopak.

[166] Podle fyzikálních principů, na nichž jsou vystavěny pohybové zákony, lze mechaniku - nauku o pohybu - členit na:

- klasickou (Newtonovu) mechaniku - je založena na Newtonových pohybových zákonech. Zabývá se pomalu pohybujícími (ve srovnání s rychlostí světla) makroskopickými tělesy.
- relativistickou mechaniku - je založena na teorii relativity, tedy na Einsteinových postulátech. Zabývá se rychle se pohybujícími (rychlost pohybu je srovnatelná s rychlostí světla) makroskopickými tělesy.

aspekty kvantové mechaniky. Nevěřil, že by "Bůh hrál s vesmírem v kostky". Až do své smrti věřil, že kvantová mechanika bude nahrazena hlubší teorií, která bude striktně deterministická.

5.5. Závěr kapitoly

I já se domnívám, že by mohla být vytvořena nová kvantová teorie - možná i deterministická, která by uchopila univerzum komplexněji než stávající kvantová mechanika a to taková, že by popisovala chování mikročástic nejen jako "věci pro nás", ale i jako "věci o sobě". Možná, že bychom poté zjistili, že nahodilost je pouze součástí stávajícího fyzikálního modelu mikrosvěta, a nikoliv jeho reálnou vlastností.[167]

- kvantovou mechaniku - zabývá se pohybem atomárních a subatomárních těles / částic, jenž má dvě specifika: skoková změna a výskyt částice pouze s určitou pravděpodobností. Kvantová mechanika vznikla v roce 1900, kdy Max Planck (1858-1947) odhalil, že energie elektromagnetického záření se nešíří spojitě, nýbrž je přenášena po nepatrných, ale konečně velkých kvantech (tzn. je kvantována). Počínaje rokem 1925 má kvantová mechanika vlastní matematický aparát. Ten vychází ze skutečnosti, že mikrosvět na atomární a subatomární úrovně není komutativní (např. výsledek měření polohy a hybnosti mikročástice závisí na pořadí měřených veličin.

[167] Stávající teorie kvantové mechaniky popisuje chování mikročástic „pro nás“ a nikoliv chování mikročástic „o sobě“. Platí, že částice je ve stavu "o sobě", když není v interakci s okolím, to znamená, že se nestřetává s jinými částicemi mikrosvěta. Současné experimenty, které zkoumají mikročástice, se provádějí tak, že se proti zkoumané mikročástici vystřelí jiná mikročástice. Je patrné, že po provedeném experimentálním „ohledání“ (obě částice - zkoumaná a zkoumající - musí být ve vzájemně srovnatelných velikostech a pohybovat se rychlostí blízké rychlosti světla) se zkoumané částice nachází v jiném stavu, než v jakém byly před započetím experimentu. V důsledku experimentu opustí stav "o sobě" a překlopí se do stavu "pro nás". Problém je, že v současné době neexistuje způsob, jak se v experimentech zkoumajících mikrosvět obejít bez zkoumajících mikročástic. Důsledkem této skutečnosti je, že i kdyby dnes někdo vytvořil zcela novou kvantovou teorii popisující jak chování mikročástic "pro nás", tak i "o sobě", t.j. když nejsou v žádné interakci s okolím, tzn. nestřetávají se s jinými částicemi, pak by její závěry nebylo možné dnes známými postupy plně ověřit.

6. Základy formální logiky a analytické filozofie

Vzájemné ovlivňování matematiky a filozofie popisované v předchozích kapitolách vyplývalo buď ze snahy obou disciplin vymezit a uchopit některé aspekty fyzické reality či aspekty fyzickou realitu přesahující, anebo ze snahy vykládat svět na základě poměrů přirozených čísel. V této kapitole budeme sledovat, jak úsilí postulovat základy matematiky na pojmově přesných formulacích přerostlo ve vybudování základů formální symbolické logiky[168] a základů analytické filozofie[169]. Klíčovou roli v úsilí budovat matematiku na korektních základech sehrál německý matematik a filozof Gottlob Frege (1848-1925). Je obecně známo, že nedosáhl cíle, který si předsevzal, a že se mu za jeho života nedostalo patřičného ocenění za to, co se mu podařilo. Význam Fregovy práce náležitě docenili až jeho následovníci[170]. Ti v něm viděli myslitele, který stál u zrodu moderní logiky a filozofie založené na analýze jazyka.

6.1. Začátky hledání pevných základů matematiky.

Postulování korektních základů matematiky znamená naprosto přesné vystižení logických vztahů mezi pojmy. Chceme-li logické vztahy zkoumat, pak musíme zabezpečit, aby důkaz, který použijeme pro prokazování vztahu, byl rozčleněn do logických kroků. A jednotlivé kroky se nesmí v žádném případě odkazovat na názorné představy, čili odvolávat se na naše představy prostoru a času.[171] V logicky správném důkazu je třeba vycházet pouze z toho, co je obsaženo v premisách.

---

[168] Logika je věda, která zkoumá vyplývání. Formální symbolická logika využívá symbolů jakožto nástroj idealizované rekonstrukce jazyka a nahlíží výsledek idealizované rekonstrukce jako předmět matematického zkoumání.

[169] Analytická filozofie na základě logické analýzy jazyka zkoumá základní struktury toho, co jest. Hledá odpovědi jen na takové otázky, které lze jasně formulovat. (například analytická filozofie neřeší problém lidské existence - lidskou existenci neumíme přesně specifikovat, tudíž na ni neumíme jasně zformulovat otázky)

[170] Například Ludwig Wittgenstein (1889-1951), Bertrand Russell (1872-1970), Rudolf Carnap (1891-1970)

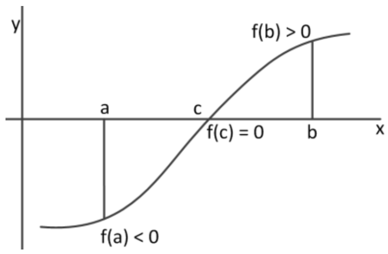
[171] Kant však měl zato, že právě názorné představy vytvářejí matematické poznání: *„Podstatné u čistého matematického poznání a čím se odlišuje ode všeho jiného poznání a priori, je okolnost, že musí postupovat nikoli pomocí pouhých pojmů, nýbrž tak, že je názorně konstruuje.“* [60 str. 36]

Důkaz však není důležitý jen v případě dokazování nových matematických teorémů. Někdy je ho třeba vyžadovat i v případě zdánlivě jasného tvrzení, kdy dokazovaná pravda je na první pohled zřejmá[172]. Dokazování samozřejmého nemá v tomto případě za cíl potvrdit či vyvrátit matematickou hypotézu, ale přispět k objasnění nedostatečně matematicky vymezeného pojmu[173].

Frege zahájil svoji práci tím, že se začal zabývat izolováním několika málo axiomů - čisté logické pravdy (tzn. nutné pravdy) - a chtěl ukázat na teorii čísel (aritmetice), že její teorémy mohou být odvozeny z těchto axiomů užitím pouze logických odvozovacích pravidel. To by znamenalo, že klasická teorie čísel je větví logiky.[174] Za tím účelem Frege redefinoval názvy a výrazy používané v teorii čísel takovým způsobem, aby umožňovaly přechod od čistě logických axiomů k aritmetickým teorémům. Zejména se pokoušel vytvořit nové definice čísel. Po velkém úsilí vytvořit bezpečné základy pro teorii čísel v rámci běžné němčiny Frege dospěl k závěru, že nejen pro účely matematické argumentace, ale i pro potřeby jakékoliv jiné vědy, je přirozený jazyk nevhodný.[175]

---

[172] Například Bolzanova věta: "Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť součin $f(a) * f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $c \in [a,b]$ takový, že $f(c) = 0$."



Platnost tohoto tvrzení je intuitivně jasné, ale bez korektní definice spojitosti je matematický důkaz tohoto tvrzení nemožný.

[173] Fregemu šlo primárně o pojem čísla.

[174] Domníval se, že by tím také dokázal pravdivost své hypotézy, že teorémy teorie čísel jsou analytické a nikoliv syntetické pravdy [43 str. §109]. Kant naopak tvrdil, že matematické soudy (včetně aritmetických) jsou syntetické. [60 str. 34]

[175] [45 str. 7] *"...narážel jsem na nedostatky jazyka, který svým těžkopádným vyjadřováním vede k tomu, že čím spletitější jsou vztahy, tím méně se dá dosáhnout té přísnosti, kterou můj cíl vyžaduje."*

6.2. Formální symbolický systém

Pro formální systém je charakteristický jednak symbolický jazyk a jednak odvozovací pravidla, pomocí nichž je stanoveno, které logické kroky jsou povolené. Máme-li k dispozici formální systém, pak lze specifikovat, jak by měl vypadat formální důkaz: Jedná se o posloupnost formulí, přičemž poslední formulí této posloupnosti je dokazovaný teorém. Pro každou z formulí v posloupnosti dále platí, že je buď axiomem anebo byla získána užitím odvozovacích pravidel na předcházející formule důkazu. Takováto definice důkazu pak umožňuje jeho mechanickou kontrolu, aniž bychom se odvolávali na názor.

Po té, co Frege shledal běžný jazyk nevyhovujícím pro vybudování základů matematiky, zaměřil svoje úsilí na vytvoření formálního systému[176] jménem Pojmopis[177].

---

[176] Frege odvolávaje se na Leibnizův projekt "characteristica universalis" říká o svém formálním systému: "*I did not wish to present an abstract logic in formulas, but to express a content through written symbols in a more precise and perspicuous way than is possible with words. In fact, I wished to produce, not a mere calculus ratiocinator, but a lingua characteristica* (míněno: characteristica universalis) *in the Leibnizian sense*." [53 str. 91]
Characteristica universalis je označení pro Leibnizův koncept universálního formálního systému pro přesné vyjádření nejen matematických pojmů, nýbrž také vědeckých pojmů a metafyzických sdělení. Inspirací, jakož i vzorem při vytváření tohoto konceptu, mu byla matematika z důvodu přesných formulací, které používá, a jednoznačnosti symbolů (zejména symbolů algebry). Leibniz popisuje svůj koncept characteristica universalis jako "universální algebru", s jejíž pomocí by bylo možno činit nové vědecké objevy stejným způsobem, jakým se to děje v matematice. Jednotlivé symboly characteristica universalis (reprezentující elementární pojmy) si Leibniz představoval jako samo-vysvětlující ikony. Vzhledem k neustále narůstajícímu počtu symbolů kopírujícímu rozvoj vědy a obrázkovému vyjádření symbolů, dospěl však Leibniz k závěru, že kompletní realizace tohoto univerzálního systému je pro jednoho člověka neproveditelná.
V ideovém rámci characteristika universalis Leibniz v letech 1688-9 navrhl "calculus ratiocinator", zamýšlený jako formální odvozovací stroj neboli mechanický kalkulus. Ten měl algoritmicky rozhodovat o pravdivosti formulí na základě implementovaných axiomů (formulí o sobě pravdivých) a syntaktických pravidel inference.

[177] Tento systém, jakož i Fregeho kniha, která se jím zabývala, mají společný název Pojmopis (*Bergriffsschrift).*

A měl velká očekávání[178]. Vytvářený formální systém měl být prostý všeho "smetí" běžného jazyka, jenž bylo překážkou k tomu, aby se tento systém mohl stát adekvátním prostředkem pro uskutečnění jeho plánu ukázat, že aritmetika a potažmo celá matematika jsou součástí logiky. Jednalo se tedy o metodu, která je ve filozofii matematiky označovaná jako logicismus[179]. Jeho formální systém neměl vyjadřovat nic víc, než co je požadováno pro logické odvozování, za to však přesně a zřetelně. Pro ilustraci se podívejme na některé Frégem zjištěné problémy běžného jazyka[180]:

- Význam sdělovaného je dán nejen obsahem sdělovaného, nýbrž také formou sdělování (tónem, barvou hlasu, hlasitostí). Naproti tomu vědecký jazyk by měl předávat sdělení pouze na základě obsahu.
- Metaforická sdělení, jsou neslučitelná s vyjadřováním vědeckých myšlenek.
- Schopnost jazyka tvořit prázdná jména, která pak generují kontradikce s všeobecnou platností pravidla vyloučeného třetího.[181]
- Povrchová gramatika[182], která je mnohdy zavádějící a vede k osvojování si zcela chybných logických struktur.

---

[178] [45 str. 10] *"...Je-li jedním z úkolů filosofie zlomit nadvládu slov nad lidským duchem tím, že odhalí klamy, které často téměř nevyhnutelně vznikají používáním jazyka na vztahy mezi pojmy, čímž se myšlenky osvobodí od toho, co se týká pouze povahy jazykových výrazových prostředků, pak se bude moci stát můj Pojmopis, dále rozvinutý pro tyto účely, užitečným nástrojem filozofů."*

[179] Logicismus chápe matematiku jako součástí logiky. Zakladatelem logicismu je Frege. Chtěl ukázat, že každý aritmetický pojem může být definován čistě logickými pojmy, rovněž tak každý teorém aritmetiky lze dokázat pouze na základě zákonů logiky.

[180] [44 str. 513]

[181] Prázdná jména nemají konkrétního "nositele". Jde například o křestní jména, či jména jako Šípková Růženka. A je zřejmé, že pro tvrzení "Šípková Růženka spala 10 let" nemohu rozhodnout, zda je to pravda či nikoliv.

[182] Jedná se o gramatiku na úrovni běžné komunikace, spíše než na úrovni sémantické a syntaktické analýzy. Jako příklad si můžeme uvést v češtině používaný dvojí zápor, který běžně interpretujeme jako jednu negaci. Například sdělení "nikdo nebyl doma" neznamená "někdo byl doma", nýbrž zesílení spojení "nikdo byl doma".
Příklad důsledků použití povrchové gramatiky v anglickém jazyce - popřípadě jakémkoli jazyce, který rozlišuje určitý a neurčitý člen u podstatných jmen - uvidíme dále v argumentaci Fregeho, kdy vysvětluje, jak se stalo, že se při vytváření svého formálního systému dopustil chyby.

Právě povrchové gramatice Frege přisuzoval zhroucení svého logicistického programu po té, co ho Russell seznámil s paradoxem, který zkonstruoval právě na základě Fregeho tezí[183]. Frege akceptoval, že má zásadní problém ve svém formálním systému, a chybu vysvětloval tak, že byl
ošálený jazykem[184]. Ze zmíněného nezdaru ovšem nikterak nevyplývá, že aritmetiku nelze vybudovat jako součást logiky. Jako příklad si můžeme uvést Peanovu[185] aritmetiku přirozených čísel, vytvořenou v roce 1889. Tato aritmetika je součástí logiky [14].

---

[183] Frege v desátém paragrafu Pojmopisu uvádí, že: *".. výraz Φ(A) lze také pojímat jako funkci argumentu Φ"*. Tímto rozšířením pojmu funkce však Frege stírá rozdíl mezi funkcí a argumentem. Toho se chopil Russell a v dopise posílá Fregemu [50] predikát p, který definoval na základě Fregeho rozšířené definice pojmu funkce: p(q) ~ ¬q(q). Pokud se jako argument použije p, pak dostáváme paradox: p(p) ~ ¬p(p) [46]
Každá funkce je definovaná svými argumenty. Pokud bychom tedy připustili, že funkce může být svým vlastním argumentem, jednalo by se o definici kruhem. Vyjádřeno slovy Wittgensteina: *"...Žádná věta nemůže vypovídat nic, co by se týkalo jí samé."* [2 str. §3.332]
Na závěr ještě pro úplnost dodejme, že tento paradox je analogií Russellova paradoxu: "množina, jejímiž prvky jsou právě ty množiny, které neobsahují sami sebe", uvedeného ve třetí kapitole této práci v souvislosti s intuitivní teorií množin.

[184] [68 str. 269] *"... A particularly noteworthy example is the formation of a proper name after the pattern of 'the extension of the concept a', e.g. 'the extension of the concept star'. Because of the definite article, this expression appears to designate an object; but there is no object for which this phrase could be a linguistically appropriate designation. From this has arisen the paradoxes of set theory from which have dealt the death blow to set theory itself. I myself was under this illusion when, in attempting to provide a logical foundation for numbers, I tried to construe numbers as sets. It is difficult to avoid an expression that has universal currency, before you learn of mistakes it can give rise to. It is extremely difficult, perhaps impossible, to test every expression offered us by language to see whether it is logically innocuous."*

[185] Guiseppe Peano (1858-1932) Fregeho práce pravděpodobně neznal.

6.3. Fregeho filozofie matematiky

Frege zastával názor, že věty geometrie jsou syntetické.[186] O větách aritmetiky, na rozdíl od geometrie, byl dlouho přesvědčen, že jsou analytickými soudy[187]. Teprve až na sklonku života nahlédl, že rovněž věty aritmetiky mohou být syntetické. [188]

Jestliže tedy v matematice existují syntetické pravdy, má smysl se ptát, jak jsou možné tyto pravdy. Kant říká, že matematiku vytváříme díky našim vrozeným schopnostem čistých názorů prostoru a času. Protože dle Kanta neexistují prostor a čas mimo nás (nejsou to pojmy vnějších vztahů), lze z toho dovodit, že neexistuje ani matematika mimo nás. Pokud bychom se dnes drželi této Kantovy teze, postrádalo by smysl vypouštět v roce 1977 sondy Voyager za hranice sluneční soustavy se vzkazy mimozemským civilizacím v podobě do zlatých desek vyryté Pythagory věty. To, že tato poselství mají své filozofické opodstatnění, můžeme doložit Fregeho tezemi o „třetí říši“.

Frege spatřoval pravdivost aritmetických soudů pouze v jejich logické struktuře, a nikoliv v Kantovských syntetických soudech náležejících do říše subjektivního vědomí. Matematické entity, jakož i myšlenky vůbec, podle Fregeho však nemohou náležet do říše subjektivního vědomí, neboť v takovém případě by jakákoliv věda byla nemožná[189]. Nemohou ovšem náležet ani k vnějšímu světu, neboť myšlenky nejsou vnímatelné smysly. A to přestože je určitá myšlenka společná všem, kteří ji chápou, čímž tato myšlenka má, stejně jako fyzické předměty, obecnou přístupnost k vnějším světu. Náleží do oblasti, kterou Frege nazývá „třetí

---

[186] [43 str. 156] „...*Jestliže však není možné vést důkaz bez toho, že bychom použili pravdy, které nejsou čistě logické povahy, nýbrž se vtahují na zvláštní oblast vědění, pak je tato věta syntetická*.“ Věty Euklidovské geometrie jsou tedy příklady syntetických pravd: Pro axiomy, z nichž jsou tyto pravdy odvozeny, totiž platí, že nejsou obecně logické povahy, neboť se pojí s určitou omezenou oblastí tvořenou prostorovými uspořádáními. Současně jsou tyto axiomy obecné, protože nejsou platné jen pro specifické objekty.

[187] [43 stránky §14, §109]

[188] [68 str. 277] „...*The more I have thought the matter over, the more convinced I have become that arithmetic and geometry have developed on the same basis – a geometrical one in fact – so that mathematics is its entirety is really geometry. Only on this view does mathematics present itself as completely homogenous*.”

[189] Každý by vyjadřoval svoji vlastní myšlenku.

říše“. Prvky třetí říše tedy nejsou ani smyslově vnímatelné předměty vnějšího světa, a ani ke své existenci nepotřebují nositele[190], do jehož vědomí náleží[191].

Třetí říše je současně sférou sdělitelného, což znamená, že je závislá na jazyku. Právě jazyk je to jediné, čímž se ke zmíněným entitám vztahujeme. Věta, jakožto posloupnost zvuků či znaků, se vztahuje k oněm entitám tím, že zachycuje myšlenku, i když ne vždy přesně. A proto se na význam matematického pojmu musíme vždy ptát v kontextu věty a nikoli se ho snažit získat z jednoho samostatně stojícího slova.[192] Frege se principem kontextuality programově řídil, což z něj činí průkopníka analytické filozofie[193].

6.4. Závěr kapitoly

Jaký význam mělo Fregeho hledání korektních základů matematiky pro filozofii? Značný, a to i přes to, že jeho proces hledání základů matematiky nevedl k jednoznačnému závěru.

V prvé řadě je třeba vyzdvihnout tu skutečnost, že se Frege cíleně věnoval jazyku, což byla dosud explicitně netematizovaná oblast. Tím zavedl zcela nový přístup k řešení filozofických problémů, později označený jako „obrat k jazyku“[194]. Podstata tohoto nového přístupu spočívá vedle již zmíněného uvažování v kontextu také v tom, že se zaměřil na věty s číselnými údaji, aniž by spekuloval o číslech samých. Tyto věty dle něho nepojednávají o určitých předmětech, nýbrž vymezují

---

190 stejně jako fyzické předměty

191 [61 str. 272]

192 Například nerespektování různých významů slova „je“ vede k učebnicovému paradoxu: Frege je filozof. Russell je filozof. Tedy Frege je Russell. Tento paradox vznikne tím, že „je“ v uvedených větách nemá význam „je identický s“, nýbrž „má vlastnost“.

193 Analytická filozofie je myšlenkový směr postavený na odkazu díla Gottloba Freege v tom, že jejím základem je logická analýza jazyka. Základní teze analytické filozofie jsou tyto: "*Svět lze pochopit pochopením jazyka a jenom pochopení jazyka*". [40 str. 7]. *"Zkoumání charakteru jsoucna je vždy úzce spjato s vyjádřením tohoto jsoucna jazykem"*. [40 str. 106]

194 Mnohé filozofické problémy spočívají v tom, že jsme nepochopili či špatně pochopili jazyk, kterým o tématu mluvíme.

určitý pojem[195]. Také věty aritmetiky, o nichž jeho předchůdci tvrdili, že se odvolávají na mimologický názor, jsou podle něho ve skutečnosti věty o pojmech.

Za druhé, jeho formální systém, jenž měl popisovat věty aritmetiky za účelem naplnění jeho logicistického programu, rozšířil možnosti dokazování. V Kantově pojetí se totiž důkaz omezoval na aristotelskou sylogistiku[196]. Tato logika umožňovala, aby se matematici uchylovali v důkazech teorémů a při objasňování pojmů k názorným prostředkům. Fregeho formální systém však zamezil používání názorných prostředků jak v matematických důkazech, tak v definicích matematických pojmů.

V neposlední řadě, jeho snažení o formálně přesné ukotvení matematiky přispělo ke vzniku analytické filosofie. Zmíněný obrat k jazyku se totiž stal inspirací pro mnohé jiné filozofy, kteří postupně začali projevovat zájem o jazyk. Nutným (a někdy i dostatečným) předpokladem pro řešení filozofických problémů je přesné pochopení jazyka, který užíváme.

---

[195] Tážeme-li se například kolik má Jupiter měsíců, očekáváme vymezení pojmu "být Jupiterovým měsícem", ale ne popis Jupiterova měsíce - ne popis určitého předmětu. [43 str. §57]

[196] Aristotelova sylogistika je v zásadě velmi specifická teorie odvozování. Její odvozovací pravidla - sylogismy - sestávají ze dvou premis, což jsou výrokové formy mající právě jeden termín společný, a závěru, což je opět výroková forma tvořená dvěma v premisách nesdílenými termíny.

Závěr

Po tisíciletí se matematika a filozofie významně ovlivňovaly, k čemuž přispívala ta skutečnost, že filozofové často bývali matematiky a naopak. Matematické objevy inspirovaly filozofické práce a filozofické úvahy se promítaly do vývoje matematiky artikulováním hypotéz a filozofickými heuristikami, o něž se mnohdy opírala akceptace některých – často zásadních – technik a tvrzení, a to do té doby, než si rozvoj rigorizace matematiky vynutil jejich korektní důkazy. Příklady uvedené v předchozích kapitolách oboustranné ovlivňování filozofie a matematiky dokládají.

Přes značný vliv filozofie na matematiku by bylo přehnané tvrdit, že by filozofie zásadně ovlivňovala vývoj matematiky. Vždyť již prvotní matematické objevy vznikaly z čistě praktické potřeby něco změřit nebo spočítat, a nikoliv v důsledku filozofického uvažování.

Lidé od nepaměti spekulovali o dění ve světě, a to ať už globálně či v jednotlivostech, různými úvahami náležejícími jak do filozofie, tak i do matematiky. Nabízí se Kantovská otázka, jak vlastně mohou být všechny filozofické teze a matematické teorémy poznávány? Odhalování nových pravd je možné díky výjimečné schopnosti některých z nás nahlédnout platné principy na základě poznatků získaných zkušeností.

Seznam použité literatury

1. **WAITHE, Mary Ellen.** *A History of Women Philosopers - Volume 1.* University of Minesota : Martinus Publishers, 1987.

2. **WITTGENSTEIN, Ludwig.** *Tractatus logico-philosophicus.* [překl.] P.Glombíček. Praha : Oikoymeneh, 2007. ISBN 978-80-7298-284-4.

3. **STORING, Hans Joachim.** *Malé dějiny filosofie.* Praha : Zvon, české katolické nakladatelství, 1993. ISBN 80-7113-058-3.

4. **ZAMAROVSKY, Petr.** *Proč je v noci tma?* Praha : AGA, 2011. ISBN 978-80-904582-1-5.

5. **BALCAR, Bohuslav a ŠTĚPANEK, Petr.** *Teorie množin.* Praha : Academia, 2001. ISBN 80-200-0470-X..

6. **LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm.** *Monadologie a jiné práce.* [překl.] J.Husák. Praha : Svoboda, 1982. Název originálu: Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz.

7. **EIBENBERGER, Sandra, a další.** Matter–wave interference of particles selected from a molecular library with masses exceeding 10 000 amu. *Physical Chemistry Chemical Physics.* 2013.

8. **SHU, Frank,H.** *The Physical Universe: An Introduction to Astronomy.* U.S. : University science book, 1982. ISBN 0-935702-05-9.

9. **KOYRE, Alexandre.** *Od uzavřeného světa k nekonečnému vesmíru.* [překl.] p.Horák (angličtina). Praha : Vyšehrad, 2004. ISBN 80-7021-568-0.

10. **VOPĚNKA, Petr.** *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci.* Praha : Práh, 2000. ISBN 80-7252-022-9.

11. **HOLLIDAY, David, RESNICK, Robert a WALKER, Jearl.** *Fyzika.* Praha : Prometheus, 2000. ISBN 81-7196-214-7.

12. **Kolektiv, autorů.** *Filosofický slovník.* Olomouc : Olomouc, 2002. ISBN 80-7182-064-4.

13. **KATZ, Mikhail, G. a SHERRY, David, M.** *Leibniz's Laws of Continuity and Homogeneity.* U.S. : American Mathematical Society, 2012.

14. **SHOENFIELD, R. Joseph.** *Mathematical logic.* London : Adison Wesley, 1973.

15. **PLATON.** *Ústava - Kniha VII.* Praha : Oikoymenh, 2014. 978-80-7298-504-3.

16. **OTTO, Jan.** *Ottův slovník naučný - ilustovaná encyklopedie obecných vědomostí.* Praha : J.Otto, 1888-1909.

17. **HUSSEY, Edward.** *Presokratici.* [překl.] Pokorný M. Praha : Petr Rezek, 1997. str. 66. ISBN 80-86027-07-4.

18. **WOLFSON, Harry A.** *The Jewish Kalam.* University of Pennsylvania : Center for Advanced Judaic Studies,, 2013.

19. **LAERTIOS, Díogenes.** *Životy, názory a výroky proslulých filozofů.* [překl.] A.Kolář. Praha : Československá akademie věd, 1964.

20. **EUKLEIDES.** *Základy.* [překl.] F.Servít. Praha : Jednota českých matematiků, 1907.

21. **ARISTOTELES.** *Fyzika.* Praha : Rezek, 2010. ISBN 80-86027-31-7.

22. **VOPĚNKA, Petr.** *Podivuhodný květ českého baroka.* Praha : Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-646-5.

23. **PATOČKA, Jan a FLOSS, Pavel.** *Mukáláš Kusánský.* Praha : Vyšehrad, 2001. ISBN 80-7021-472-4.

24. **VOPĚNKA, Petr.** *Prolegomena - nová infinitní matematika.* Praha : Karolinum, 2014. ISBN 978-80-846-2566-9.

25. **BOLZANO.** *Paradoxy nekonečna.* [překl.] O.Zich. Praha : Československnká akademie věd, 1963.

26. **HAWKING, Stephen.** *Stručná historie času.* [překl.] V. Karas. Praha : Mladá fronta, 1991. ISBN 80-204-0169-5.

27. **HALAS, Zdeněk.** *Archimedés - Metoda.* Praha : Matfyzpress, 2012.

28. **HEATH, Thomas, L.** *The Method of Archimedes.* Cambridge : Cambridge University Press, 1912.

29. **BELL, John L.** *The Continuous and Infinitesimal in Mathematics and Philosophy.* U.S. : Polimetrica, 2008. ISBN 978-8876990151.

30. **AKVINSKÝ, Tomáš.** *Teologické summy - První část.* [překl.] E. Soukup. Olomouc : Edice Krystal, 1937.

31. **SOBOTKA, Milan.** *Život a dílo Gottfrieda Wilhelma Leibnize.* Praha : Svoboda, 1982.

32. **BERKLEY, George.** *The Analyst - The Discourse Addressed to an Infidel Mathematician.* London : Tonson, 2002.

33. **ARISTOTELES.** *O vzniku a zániku.* [překl.] M.Okál. Bratislava : Pravda, 1985.

34. **GRABINER, Judith V.** *The Origins of Cauchy´s Rigorous Calculus.* Cambridge : The MIT Press, 1981. ISBN 0-486-43851-5.

35. **DAUBEN, Josepfh, Warren.** *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite* . Princeton : Princeton University Press, 1990. ISBN 0-691-02447-2 .

36. **ARISTOTELES.** *Etika Nikomachova.* Praha : Rezek, 1996. ISBN 80-901796-7-3.

37. **LAPLACE, Pierre, Simon.** *A Phylosophical Essay on Probabilities.* [překl.] F.W.Truscot. New York : John Wiley, 1902.

38. **JARNIK, Vojtěch.** *Bolzano a základy matematické analýzy.* Praha : Jednota českých matematiků a fyziků, 1981.

39. **KANT, Immanuel.** *Kritika praktického rozumu.* [překl.] J.Loužil. Praha : Svoboda, 1996. ISBN 80-205-0507-5.

40. **PEREGRIN, Jaroslav.** *Uvod do analytické filosofie.* Praha : Herman a synové, 1992.

41. **SPINOZA, Benedikt.** *Etika vyložená způsobem používaným v geometrii.* [překl.] K.Hubka. Praha : DYBBUK, 2001. Název originálu: Ethika ordine geometrico demonstrata. ISBN 80-903001-0-3.

42. **McGRATH, Alistar E.** *Dialog přírodních věd a teologie.* Praha : Vyšehrad, 2003. Název originálu: The Foundations of Dialogue in Science an Religion. ISBN 80-7021-552-6.

43. **FREGE, Gottlob.** *Logická zkoumání, základy aritmetiky.* [překl.] J.Fiala. Praha : Oikoymenh, 2011. ISBN 978-80-7298-319-3.

44. **REIN, Andrew.** *Philosophy* **-** *Frege and Natural Language.* místo neznámé : Cambridge University, 1985.

45. **FREGE, Gottlob.** *Pojmopis.* [překl.] J.Fiala. Praha : Oikoymeneh, 2012. Název originálu: Bergriffsschrift. ISBN 978-80-261-0253-3.

46. **PEREGRIN, Jaroslav.** *Filosofie a jazyk.* Praha : Triron, 2003. ISBN 80-7254-432-2.

47. **ARISTOTELES.** *Metafyzika.* [překl.] A. Kříž. Praha : Rezek, 2003. ISBN 80-86027-19-8.

48. **CARUS, Lucretius, Titus.** *O přírodě.* [překl.] J. Nováková. Původní jazyk latina.

49. **GALILEI, Galileo.** *Dialogues concerning two new sciences.* [překl.] A.Salvio a H.Crew. New York : Standford University, 1914. původní jazyk latina.

50. **HEIJENOORT, Jean.** *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic.* Cambridge : Harvard University Press, 2002. ISBN 9780674324497.

51. **SOUSEDIK, Prokop.** *Logika pro studenty humanitních oborů.* Praha : Vyšehrad, 2008. ISBN 978-80-7021-970-6.

52. **ROED, Wolfgana.** *Novověká filosofie II.* [překl.] J.Karásek (němčina). Praha : Oikoymenh, 2004. ISBN 80-7298-109-9.

53. **FREGE, Gottlob.** *Conceptual Notations and related articles.* [překl.] T.W.Bynum (němčina). Oxford : England, 1972. ISBN 978-0198243595.

54. **KANT, Immanuel.** *Kritika čistého rozumu .* [překl.] Navrátil a Kohout (němčina). Praha : OIKOYMENH, 2001. ISBN 80-7298-035-1.

55. **PLATON.** *Faidon.* [překl.] F.Novotný. Praha : Jan Leichter, 1941.

56. **SCHWEID, Eliezer.** *The classic Jewish Philosophers.* [překl.] L.Lewin. Leiden : Koninklijke Brill, NV, 2003. ISBN 987 90 04 16213 6.

57. **DESCARTES, René.** *Principy filozofie* **-** *výbor.* [překl.] P.Glombíček T.Marvan. Praha : Filosofický ústav AV ČR, 1998.

58. **PLATON.** *Zákony.* [překl.] F.Novotný (řečtina). Praha : Oikoymenh, 1997. ISBN 80-86005-31-3.

59. **NEWTON, Isaac.** *The Principia mathematical Principles of Natural Philosophy.* [překl.] A.Whitman I.B.Cohen. Los Angeles : University of California, 1999.

60. **KANT, Immanuel.** *Prolegomena ke každé příští metafyzice, jenž se bude moci stát vědou.* [překl.] Navrátil a Kohout (němčina). Praha : Svoboda, 1992. ISBN 80-205-0310-2.
61. **FREGE, Gottlob.** Myšlienka: Logické skúmanie. *Organon F.* 1996, Sv. 3.
62. **RUSSELL, Bertrand.** *Problémy filosofie.* Praha : Čin, 1927.
63. **BRUNO, Giordano.** *Dialogy.* [překl.] J.B.Kozák (italština). Praha : Státní nakladatelství politické literatury, 1956.
64. **DESCARTES, René.** *Uvahy o první filosofii.* [překl.] Z.Gabriel (latina). Praha : Svoboda, 1970.
65. **BERKLEY, George.** *Esej o nové teorii vidění. Pojednání o principech lidského poznání.* [překl.] M.Tomeček (angličtina) M.Holubová. Praha : Oikoymenh, 2004. ISBN 80-7298-112-9.
66. **NAHIN, Paul J.** *An Imaginary Tale of the Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton : Princeton Science Library, 1998.
67. **DESCARTES, René.** *Principles of Philosophy.* [překl.] J. Cottingham. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
68. **FREGE, Gottlob.** *Posthumous Writings.* [překl.] R.White a P.(němčina) Long. Oxford : Basil Blackwell, 1979. ISBN 0 631 10 301 5.

Summary

The submitted thesis addresses the ideas that are at the intersections of philosophy and mathematics. These intersections have been in the course of the history as follows: Numerical ratios, the concept of infinity, continuum partition, space specification, determinism versus randomness and exploring of the mathematics foundations with an overlap into philosophy.

The results herewith presented have been achieved on the basis of the HTF lectures and seminars, available literature, my own knowledge and reasoning.

The thesis documents processes of how mathematics stimulated certain philosophical principles and vice versa how mathematics was influenced by philosophical views. Last but not least, there are presented comparisons between philosophic propositions and the current mathematics and physics knowledge in the mentioned intersections.