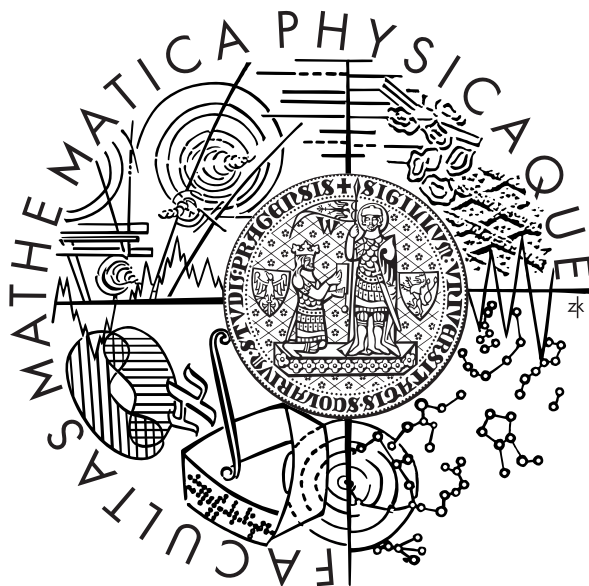


Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCA



František Brantál

### Vícekanálová slepá dokonvoluce vektorových obrazů

Ústav teorie informace a automatizace AV ČR

Vedúci diplomovej práce: Filip Šroubek PhD.

Štúdijný program: Informatika, Softwarové systémy

## **Pod'akovanie**

Ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce pánovi Filipovi Šroubkovi PhD. za neoceniteľné rady a pomoc, ktorú mi v priebehu práce poskytoval. Ďalej chcem pod'akovať rodine a osobám, ktoré mi pomáhali, menovite Peterovi Brejčákovi, Michalovi Breznickému, Lukášovi Brožovskému a Eve Daňhelkovej.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím s požičiavaním práce.

V Prahe dňa 11. decembra 2006

František Brantál

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
1.1	Motivácia . . . . .	2
1.2	Ciele . . . . .	4
1.3	Značenie . . . . .	5
1.3.1	Definícia obrazovej funkcie . . . . .	5
1.3.2	Definícia derivácie obrazovej funkcie . . . . .	5
1.3.3	Definícia tenzoru . . . . .	7
1.3.4	Diskretizácia spojitej obrazovej funkcie . . . . .	8
1.3.5	Definícia konvolúcie . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Matematický model</b>	<b>12</b>
2.1	Uniformné rozmazanie kanálov . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Regularizácia obrazovej funkcie</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Regularizácia skalárnej obrazovej funkcie</b>	<b>21</b>
4.1	Izotropné vyhladenie . . . . .	21
4.2	Geman-McClure . . . . .	23
4.3	$\phi$ funkcia . . . . .	26
4.4	Regularizácia difúznym tenzorom . . . . .	30
4.5	Smerový 1D Laplacián . . . . .	31
4.6	Half-quadratic algoritmus . . . . .	32
4.7	Mumford-Shah funkcionál . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Regularizácia vektorovej obrazovej funkcie</b>	<b>37</b>
5.1	Regularizácia zložka po zložke . . . . .	38
5.2	Definovanie vektorovej geometrie . . . . .	39
5.3	CTV . . . . .	42
5.4	Vektorová $\phi$ funkcia . . . . .	43
5.5	Beltrami . . . . .	44
5.6	Obrazová funkcia ako plocha v $\mathbb{R}^{n+p}$ . . . . .	45

---

5.7	Porovnanie výsledkov regularizačných techník . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Slepá viackanálová dekonvolúcia</b>	<b>55</b>
6.1	Matematický model . . . . .	56
6.1.1	$\mathcal{P}$ term . . . . .	57
6.1.2	$\mathcal{Q}$ term . . . . .	57
6.1.3	$\mathcal{R}$ term . . . . .	60
6.2	Dekonvolúcia po jednotlivých zložkách . . . . .	62
6.3	Dekorelácia a následná dekonvolúcia po jednotlivých zložkách	62
6.4	Vektorová dekonvolúcia . . . . .	64
6.5	MC-AM algoritmus . . . . .	65
6.5.1	Odhady zložitosti . . . . .	68
6.5.2	Vlastnosti konvergenie . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Výsledky</b>	<b>72</b>
7.1	Syntetické dáta . . . . .	72
7.2	Reálne dáta . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Záver</b>	<b>81</b>
<b>9</b>	<b>Príloha</b>	<b>83</b>

**Názov práce:** Vícekanálová slepá dekonvoluce vektorových obrazů

**Autor:** František Brantál

**Katedra (ústav):** Ústav teorie informace a automatizace AV ČR

**Vedúcí diplomovej práce:** Filip Šroubek PhD.

**E-mail vedúceho:** sroubekf@utia.cas.cz

**Abstrakt:** Zoznámí sa s metódami na odstraňovanie degradácii (dekonvolúcie) v šedotónových obrazoch pre prípady, keď nie je známa žiadna apriórna informácia o tvare konvolučnej masky (slepý problém), ale je k dispozícii viac než jedno meranie s rozdielnou degradáciou (viackanálový problém). Naštudovať či navrhnúť možné prístupy rozšírenia pre vektorové (napr. farebné) obrazy a to formou vhodnej regularizácie problému. Implementovať navrhnuté postupy a účinnosť overiť nielen na simulovaných ale aj reálnych dátach.

**Kľúčové slova:** spracovanie obrazu, fúzia dát, viackanálová slepá dekonvolúcia, regularizácia vektorovej obrazovej funkcie.

**Title:** Multichannel blind deconvolution of color images

**Author:** František Brantál

**Department:** Institute of Information Theory and Automation of the Academy of Science of the Czech Republic

**Supervisor:** Filip Šroubek PhD.

**Supervisor's e-mail address:** sroubekf@utia.cas.cz

**Abstract:** The aim of the thesis is to get acquainted with methods for degradation removal (deconvolution) in scalar images in the case when no a priori information about the shape of convolution masks is known (blind deconvolution) but more than one image acquisition with different degradation is available (multichannel deconvolution). Propose possible approaches for extending blind deconvolution into multivalued (color) images using regularization forms. Implement proposed techniques and verify performance not only on synthetic data but also on real data.

**Keywords:** image processing, data fusion, multichannel blind deconvolution, multivalued images regularization.

# Kapitola 1

## Úvod

Našej spoločnosti sa niekedy hovorí aj „informačná spoločnosť“. Je to dané enormným množstvom informácií, ktorými sme denne bombardovaní. Pri tom až 90% informácie prijímame vizuálne, teda formou obrazovej informácie. Ďalším zaujímavým trendom poslednej doby je digitalizácia. Používame digitálne fotoaparáty, digitálne telefónne ústredne, digitálne televízie a digitálne videokamery. Vždy ide o prístroje, ktoré nám uľahčujú a spríjemňujú život, poprípade sprostredkovávajú spôsobom a kvalitou, ktorou to ešte donedávna nebolo možné. Spojenie týchto dvoch trendov dalo možnosť vzniku nových vedných disciplín známych ako *spracovanie obrazu* (IMAGE PROCESSING), *analýza obrazu* (IMAGE ANALYSIS) a *počítačové videnie* (COMPUTER VISION).

V spracovaní obrazu je kladený dôraz na modifikáciu obrazu tak, aby výsledok bol v nejakom zmysle slova lepší než zdroj pre účely, na ktoré ho potrebujeme. Analýza obrazu súvisí s problémom symbolického popisu pozorovanej scény a počítačové videnie sa snaží popísať tvorbu umelých rozhodovacích systémov na základe obrazovej informácie.

*Lekárske obrazy* (MEDICAL IMAGERY) sú jednou z oblastí, na ktoré sú metódy spracovania obrazu najčastejšie používané. Prístroje ako ultrazvuk, röntgen, magnetická rezonancia a rôzne skenery dávajú obrazy, ktoré sú predmetom ďalších procesov, ako napríklad zvyšovanie kvality, zlepšovanie a extrakcia detailov alebo fúzie rôznych kusov informácie.

Iným dôležitým a zároveň pravdepodobne prvým miestom použitia sú *astronomické pozorovania* (ASTRONOMICAL IMAGING). Snímky získané teleskopmi umiestnenými na Zemi alebo teleskopmi na obežnej dráhe a vo vesmíre sú príkladmi vstupov algoritmov na zlepšenie kvality obrazu a zvýšenie úrovne detailov.

Ďalšou vhodnou oblasťou je *vzdialené snímanie* (REMOTE SENSING). Ide o množinu aplikácií, ktoré analyzujú, merajú alebo interpretujú vzdialené

scény. Príklady použitia sú od sledovania dopravy, zemských otrasov, až po mieru znečistenia ovzdušia. Spracovanie obrazu môže pomôcť sledovať zmeny v zalesnení, vodných zdrojoch, ale aj v predpovedi počasia.

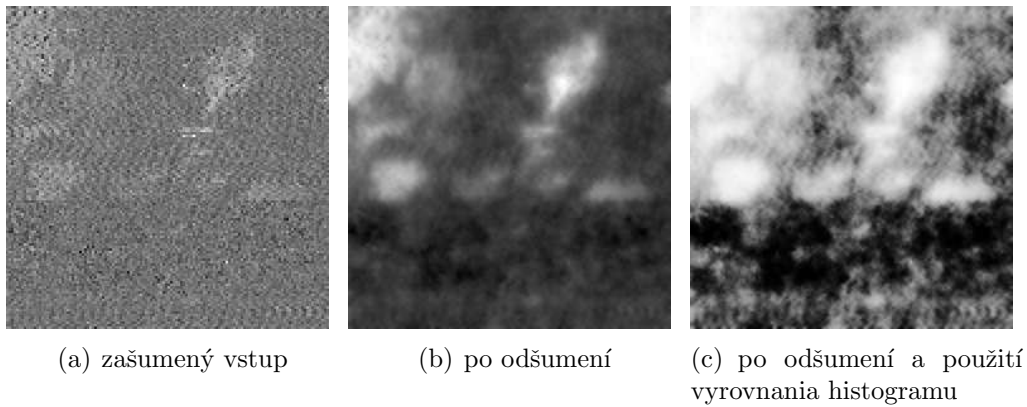
V poslednej dobe sa *spracovanie sekvencie obrazov* (VIDEO PROCESSING) stalo oblasťou spracovania obrazu, na ktorú je sústredené najviac pozornosti. Je to tým, že do tejto oblasti spadajú také problémy, ako sú kompresia videa, sledovanie pohybu a reštaurovanie starých filmov.

Oblasť, ktorá je značne prehliadaná, ale na ktorú sa spracovanie obrazu obzvlášť hodí, je reštaurovanie výtvarných (ART CONSERVATION) a iných umeleckých diel. Mnoho pokusov sa snaží nájsť spôsob popisu umeleckých diel za účelom vytvorenia dotazovacieho jazyka, ktorý by bol založený na istej forme kognitívnosti umeleckých diel.

## 1.1 Motivácia

Jednou z hlavných oblastí spracovania obrazu je *obrazová rekonštrukcia* (IMAGE RESTORATION). Cieľom rekonštrukčného procesu je obnoviť odpovedajúcu reprezentáciu danej scény z degradovaných obrazov získaných snímacím zariadením.

Existuje mnoho zdrojov degradácie s ktorými je treba počítat'. Svetelné lúče, alebo iný typ elektromagnetických vln, putuje k snímaciemu zariadeniu skrz transportné médium. Každé transportné médium svojím spôsobom modifikuje signál. Zdroj degradácie a jeho charakteristika je často ťažko predikovatelná. Navyše je signál deformovaný vnútri optických senzorov snímacieho zariadenia. Táto deformácia je vlastná snímaciemu zariadeniu a nedá sa obísť, ale jej charakteristika je často známa. Typickým príkladom je nedokonalosť vybrúsenia šošoviek v optickom systéme zariadenia. A nakoniec musí byť signál uložený na fotografický materiál v analógovej podobe na film alebo v digitálnej podobe na médium. V oboch prípadoch prináša uloženie signálu množstvo chýb. Digitálne systémy často (najmä v minulosti) trpia nízkym rozlíšením, nízkou citlivosťou na vstupný signál, obmedzenou diskretnou množinou hladín intenzít signálu a kapacitou úložného média. V prípade analógových systémov je faktor obmedzeného rozlíšenia daný fyzikálnymi vlastnosťami fotografického materiálu. Dobrý prehľad o technikách rekonštrukcie digitálneho obrazu je možné nájsť v článku [82]. Pekným príkladom úspešného aplikovania rekonštrukčných techník je prípad Hubblovho teleskopu pred opravou optiky v roku 1993. Kvôli chybe počas výroby optického systému boli fotky teleskopu rozmazané a schopnosť teleskopu zaznamenávať jemné štruktúry vzdialených objektov bola značne obmedzená.



Obrázok 1.1: Odšumenie obrazu: Balistický elektrónový emisný mikroskop je zat'azený vysokým šumom. 1.1(a) ukazuje zdrojový BEEM obrázok, 1.1(b) obraz po aplikovaní nelineárnej odšumovacej techniky, 1.1(c) výsledok vyrovnania histogramu.

Iným faktorom, ktorý poznamenáva kvalitu obrazovej informácie, je *šum*. Chyba optiky snímacieho zariadenia sa dá za určitých okolností obísť, ale šum zo svojej podstaty náhodného javu bohužiaľ nie. V procese získavania, prenosu alebo spracovania obrazu rozlišujeme šum podľa toho či je alebo nie je závislý na obrazovom signáli. Modely na odstránenie šumu sú charakterizované rôznymi rozdeleniami pravdepodobnosti. Najznámejším je Gaussov šum. Niektoré aplikácie ale počítajú so špecifickým prípadom rozdelenia pravdepodobnosti, ktorý viac zodpovedá danej situácii a snímaným dátam, ako sú *speckle noise*, Poissonov, Laplaceov a impulzný šum. Základný prehľad odšumovacích techník je v článku [83] a zložitejších nelineárnych techník v článkoch [84, 85]. Obrázok 1.1 ukazuje degradovaný obraz získaný z *Balistického elektrónového emisného mikroskopu (BEEM)* a výsledky po použití nelineárneho filtru a vyrovnania histogramu.

Iným úlohou spracovania obrazu je *segmentácia* (SEGMENTATION). Segmentovať obraz znamená rozdeliť doménu obrazu na niekoľko oblastí, v ktorých je obraz homogénny a medzi ktorými je vektor zmeny veľký. Presná definícia toho, čo je „homogénne“, závisí na konkrétnej aplikácii. Typickým príkladom použitia segmentácie je spracovanie lekárskeho obrazových dát ako ultrazvuk, magnetická rezonancia a tomografia, ktoré obsahujú objekt záujmu v podobe orgánu, nádoru a podobne. Problém segmentácie obrazu úzko súvisí s rekonštrukciou obrazu. Riešenie jedného problému uľahčuje druhý a naopak.

Úspešnosť rekonštrukčných a segmentačných metód značne závisí na



množstve *apriórnej* informácie o obrazovom systéme. Základným je správne popísanie procesu získania obrazu, inými slovami apriórna znalosť typu degradácie. Inou informáciou je charakteristika pozorovaných objektov, ktorá ale často nie je k dispozícii.

Dá predpokladať, že použitím rôznych senzorov, alebo opakovaným meraním za meniacich sa podmienok, môžeme dosiahnuť získanie ďalšej potrebnej informácie, ktorá zlepší proces rekonštrukcie. Ide o novú oblasť spracovania obrazu nazývanú *fúzia dát* (DATA FUSION). Fúzia dát predstavuje širokú doménu riešení problémov. V širšom zmysle slova by definícia mohla znieť asi takto. *Fúzia dát je množina metód, ktoré pre skupinu dát popisujúcich rovnakú scénu pochádzajúcich z rôznych zdrojov s rôznou povahou, dávajú možnosť získať informáciu, ktorej kvalita nemôže byť dosiahnutá iným spôsobom.*

## 1.2 Ciele

Hlavným cieľom tejto práce je fúzia za účelom obrazovej rekonštrukcie. Predpokladáme, že ide o tzv. *monomodálnu fúziu* degradovaných obrazov. Monomodálnou fúziou myslíme to, že degradované obrazy majú jedného spoločného predka a nereprezentujú rôzne fyzikálne vlastnosti pozorovanej scény. V tomto konkrétnom prípade budeme jednotlivé degradované obrazy nazývať kanály a budeme hovoriť o viackanálovej rekonštrukcii. Ďalej sa obmedzíme na invariantnosť snímanej scény a teda síce, že nedochádza k žiadnej geometrickej transformácii snímanej scény v čase. Najprv bude v kapitole 2. *Matematický model* navrhnutý model degradácie pomocou konvolúcie a aditívneho šumu. Tento model predpokladá, že degradácia je uniformná pre celú doménu snímaného obrazu a nemení sa v priestore. V kapitole 3. *Regularizácia obrazovej funkcie* je popísaná forma regularizácie obrazovej funkcie za účelom prekonania nedostatočného podmienenia problému a v kapitolách 4. *Regularizácia skalárnej obrazovej funkcie* a 5 *Regularizácia vektorovej obrazovej funkcie* sú navrhnuté jednotlivé techniky regularizácie pre skalárnu a vektorovú obrazovú funkciu. Kapitola 6. *Slepá viackanálová dekonvolúcia* popisuje návrh algoritmu na riešenie viackanálovej slepej dekonvolúcie pre vektorové obrazy s použitím regularizácie z predchádzajúcich kapitol. A nakoniec v kapitole 7. *Výsledky* sú znázornené výsledky algoritmu na syntetických a reálnych dátach spolu s komentárom.

Obsah článku vychádza z doktorandskej práce F. Šroubka „Image Fusion via Multichannel Blind Deconvolution” [20], ktorá sa zaoberá len prípadom skalárnych obrazov a obsahuje len základné formy regularizácie. Hlavným prínosom tejto práce sú návrhy rôznych spôsobov regularizácie vektorovej

obrazovej funkcie. Vektorová regularizácia by mala byť vďaka vzájomnej korelácii jednotlivých zložiek funkcie stabilnejšia voči šumu a robiť tak algoritmus slepej dekonvolúcie robustnejší. Kapitola 6. *Slepá viackanálová dekonvolúcia* vznikla prepisom doktorandskej práce so súhlasom autora.

## 1.3 Značenie

### 1.3.1 Definícia obrazovej funkcie

Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  je definičný obor kde  $p \in \mathbb{N}^+$  je dimenzia. Pokiaľ nebude uvedené inak, tak pracujeme v dvojrozmernom priestore ( $p = 2$ ) teda s 2-D obrazovými dátami. Každopádne, nič nám nebráni uvažovať viac dimenziálne.

Definujeme :

- *skalárnu obrazovú funkciu* ako zobrazenie  $I : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$
- *vektorovú obrazovú funkciu* ako zobrazenie  $\mathbf{I} : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$   
Farebný obraz je reprezentovaný obrazovou funkciou pre ( $p=2$ ,  $n=3$ ) s vektorovými zložkami  $(R, G, B)$ . Zložkou obrazovej funkcie značíme zobrazenie  $I_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $1 \leq i \leq n$ . V prípade farebného obrazu platí, že  $I_1 = R$ ,  $I_2 = G$ ,  $I_3 = B$ . Vektorovú obrazovú funkciu zapisujeme :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{I}(\mathbf{x}) = (I_1(\mathbf{x}), I_2(\mathbf{x}), \dots, I_n(\mathbf{x}))$$

Obrazová funkcia bude v článku tiež označovaná skráteno slovom *obraz*. Premenné obsahujúce vektor budú značené *tučnými* písmenami. **Pozor:** Slovo *kanál* bude používané **vždy** v súvislosti s konvolúciou a nie v spojitosti s obrazovou funkciou. Pre väčšiu prehľadnosť bude v miestach, kde nedôjde k nejednoznačnosti funkčná hodnota funkcie  $I$  v bode  $\mathbf{x}$  značená  $I$  namiesto  $I(\mathbf{x})$ .

### 1.3.2 Definícia derivácie obrazovej funkcie

Deriváciu skalárnej obrazovej funkcie  $I$  podľa premennej  $a$  značíme

$$I_a = \frac{\partial I}{\partial a}$$

a vektorovej obrazovej funkcie  $\mathbf{I}$  podľa premennej  $a$  v bode  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$ , kde  $\mathbf{I}_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  ako

$$\mathbf{I}_a = \left( \frac{\partial I_1}{\partial a}, \frac{\partial I_2}{\partial a}, \dots, \frac{\partial I_n}{\partial a} \right)^T$$

Gradient obrazovej funkcie

$$\nabla I = (I_x, I_y)^T$$

Norma gradientu

$$\|\nabla I\| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$

Parciálna derivácia v smere  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  pre  $\|\mathbf{u}\| = 1$

$$I_{\mathbf{u}} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} = \nabla I^T \cdot \mathbf{u}$$

pre 2-D obrazy ( $p=2$ ),

$$\mathbf{u} = (u, v)^T, \quad I_{\mathbf{u}} = uI_x + vI_y$$

Podobne druhá derivácia skalárnej obrazovej funkcie  $I$  podľa  $a$  a potom podľa  $b$  je značená

$$I_{ab} = \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial I}{\partial a} \right) = \frac{\partial^2 I}{\partial b \partial a}$$

Hessovu maticu druhých derivácií  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix}$$

V článku sa bude predpokladať, že obrazové dáta sú dostatočne regulárne a tým pádom spĺňujú komutatívu derivovania  $I_{xy} = I_{yx}$ . Z toho vyplýva, že  $\mathbf{H}$  je *symetrická matica*. Operátor *Laplacián*  $\Delta$  je definovaný ako

$$\Delta I = \text{trace}(\mathbf{H}) = I_{xx} + I_{yy}$$

Pre 2. derivácie v smere  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  kde  $\|\mathbf{u}\| = 1$  je nasledujúce značenie ekvivalentné

$$I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 I}{\partial \mathbf{u}^2} = \nabla(\nabla I \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} = \text{trace}(\mathbf{H} \mathbf{u} \mathbf{u}^T)$$

Pre 2-D obrazovú funkciu má 2. derivácia v smere  $\mathbf{u}$  tvar

$$\mathbf{u} = (u, v), \quad I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = u^2 I_{xx} + 2uv I_{xy} + v^2 I_{yy}$$

Pojem Hessova matica a gradient sa bude pre vektorové obrazové funkcie používať výlučne v spojení s konkrétnou zložkou vektoru a značiť  $\mathbf{H}_i$  resp.  $\nabla I_i$ . Okrem toho definujeme *normu gradientu vektorovej obrazovej funkcie*  $\|\nabla \mathbf{I}\|$ :

$$\|\nabla \mathbf{I}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\nabla I_i\|^2} = \sqrt{\mathbf{I}_x^T \cdot \mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y^T \cdot \mathbf{I}_y}$$

Rovnako ako v prípade skalárnej obrazovej funkcie má norma význam miery lokálnej variácie funkcie  $\mathbf{I}$ .

### 1.3.3 Definícia tenzoru

V texte sa bude požívať pojem *tenzor*, pod čím si predstavujeme *symetrická* a *pozitívne semi-definitná matica*  $\mathbf{T} \in \mathbb{P}(n)$  veľkosti  $n \times n$ . Pojmom *tenzor* myslíme skratku za pojem *difúzny tenzor* alebo *tenzor difúzie v smere*. Nech  $\mathbf{T} = (t_{ij}) \in \mathbb{P}(n)$  je tenzor veľkosti  $n \times n$ , potom splňuje nasledujúce vlastnosti :

$$\mathbf{T} \text{ je symetrická} \iff \forall i, j \in [1, n], \quad t_{ij} = t_{ji}$$

$$\mathbf{T} \text{ je pozitívne semi-definitná} \iff \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{T} \mathbf{x} \geq 0$$

Nech  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n, k \in [1, \dots, n]$  je *vlastný vektor* a  $\lambda_k$  je *vlastné číslo* zodpovedajúce vektoru  $\mathbf{u}_k$  matice  $\mathbf{T}$ , potom splňuje vlastnosti:

$$\mathbf{T} \text{ je pozitívne semi-definitná} \iff \forall k \in [1, n], \quad \lambda_k \geq 0$$

$$\mathbf{T} \text{ je reálna a symetrická} \iff \forall k, l \in [1, n], \quad \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pre } k = l \\ 0 & \text{pre } k \neq l \end{cases}$$

Z toho vyplýva, že *vlastné vektory*  $\mathbf{u}_k$  tvoria *ortonormálnu bázu* priestoru v  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{T}$  má tvar :

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{\Gamma} \mathbf{R}^T \tag{1.1}$$

kde  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je *diagonálna matica vlastných čísel*  $\lambda_k$

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a  $\mathbf{R}$  je *ortogonálna matica*, ktorej stĺpce  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  sú tvorené *vlastnými vektormi*  $\mathbf{u}_k$  matice  $\mathbf{T}$ . Platí, že  $\det(\mathbf{R}) = \pm 1$ .

$$\mathbf{R} = (\tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_2 | \dots | \tilde{\mathbf{u}}_n) \quad \text{kde} \quad \forall k = 1 \dots n, \quad \tilde{\mathbf{u}}_k = \pm \mathbf{u}_k$$

Rozklad oddeluje *smere*  $\mathbf{R}$  a *váhu difúzie*  $\mathbf{\Gamma}$  tenzoru  $\mathbf{T}$ . Grafickou reprezentáciou difúzneho tenzoru  $\mathbf{R}$  je potom *n-dimenzionálny elipsoid* kde smer polosi sú vlastné vektory  $\mathbf{u}_k$ , a dĺžka vlastné čísla  $\lambda_k$ . Iný zápis formuly (1.1) je

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$$

Táto formulácia ukazuje fakt, že  $\mathbf{T}$  je sumou *vážených ortonormálnych tenzorov* ( $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ ). Vlastné čísla  $\lambda_l$  tenzoru ( $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ ) sú:

$$\tilde{\lambda}_{lk} = \begin{cases} 0 & \text{kde } l \neq k \\ 1 & \text{kde } l = k \end{cases}$$

Na každý takýto tenzor môže byť pozerané ako na „tenký“ elipsoid s jednou osou dĺžky 1 a ostatnými dĺžky 0.

Keď všetkých  $n$  vlastných čísel  $\lambda_k$  tenzoru  $\mathbf{T}$  má rovnakú hodnotu  $\lambda > 0$  potom tenzor nie je difúzny podľa žiadneho jedného konkrétneho smeru a hovoríme, že je *izotropný* alebo difúzny v každom smere rovnako s váhou  $\lambda$ .

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^n \lambda \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T = \lambda \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \lambda \mathbf{Id}$$

V takom prípade nehovoríme o konkrétnej orientácii tenzoru. Reprezentáciou tenzoru je *sféra* s polomerom  $\lambda$  a miera difúzie je rovnaká v každom smere v priestore.

### 1.3.4 Diskretizácia spojitej obrazovej funkcie

Aby bola možná implementácia algoritmov, je potrebné navrhnuť spôsob *diskretizácie*. Budeme sa držať schémy *konečného stredového rozdielu* CCFD (Cell-centered finite difference) [5]. Nad definičným oborom  $\Omega$  funkcie je skonštruovaná štvorcová mriežka s konštantnou veľkosťou  $h$ . Nech  $m$  a  $n$  značia počet buniek v  $y$  resp.  $x$  smere, potom bunka  $c_{ij} \subseteq \Omega$  je definovaná ako :

$$c_{ij} = \{(x, y) : (i - 1/2)h \leq y \leq (i + 1/2)h, (j - 1/2)h \leq x \leq (j + 1/2)h\}$$

Stred bunky je značený ako  $(x_j, y_i)$  a indexovaný  $(i, j)$ , kde

$$\begin{aligned} x_j &= (j - 1/2)h, \quad j = 1, \dots, n \\ y_i &= (i - 1/2)h, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Hraničné body bunky majú tvar  $(x_{j\pm 1/2}, y_{i\pm 1/2})$  a sú indexované ako  $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ , kde

$$\begin{aligned} x_{j\pm 1/2} &= x_j \pm (h/2) \\ y_{i\pm 1/2} &= y_i \pm (h/2) \end{aligned}$$

Obrazová funkcia  $I$  je potom aproximovaná po častiach konštantnou funkciou  $\mathcal{I}(\mathbf{x})$ , ktorá má konštantné hodnoty  $\mathcal{I}_{ij}$  vo vnútri bunky  $c_{ij}$ .  $\mathcal{I}_{ij}$  je často

nazývaná *stredová hodnota I nad bunkou  $c_{ij}$*  alebo hodnota  $I$  v strede bunky  $(i, j)$ . Na funkciu  $\mathcal{I}$  sa môžeme pozerat' ako na diskretnú maticu  $I = \mathcal{I}(i, j)$  veľkosti  $(m, n)$ .

*Diskrétna 2-D z-transformácia* matice  $I$  je definovaná

$$\tilde{I}(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Vektor  $\vec{I} = \text{vec}(I) \in \mathbb{R}^{mn}$  vznikne stĺpcovým prechodom matice  $I_{ij}$ .

$$\vec{I} = (I_{11}, I_{21}, \dots, I_{m1}, I_{12}, I_{22}, \dots, I_{m2}, \dots, I_{1n}, I_{2n}, \dots, I_{mn})$$

Pozrime sa ešte na definovanie diskretnéj smerovej derivácie  $I_{\mathbf{u}}$ . Najjednoduchšia aproximácia *štyroch susedov (four-connectivity)* uvažuje dva hlavné smerové vektory  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Zodpovedajúca smerová derivácia má tvar

$$\begin{aligned} I_{(0,1)}(x_j, y_i) &\approx \frac{I(x_{j+1}, y_i) - I(x_j, y_i)}{h} \\ I_{(1,0)}(x_j, y_i) &\approx \frac{I(x_j, y_{i+1}) - I(x_j, y_i)}{h} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Presnejšia aproximácia *ôsmych susedov (eight-connectivity)* berie do úvahy okrem vektorov  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  aj diagonálne vektory  $(1, 1)$  a  $(-1, 1)$  a derivácia v smere má tvar

$$\begin{aligned} I_{(1,1)}(x_j, y_i) &\approx \frac{I(x_{j+1}, y_{i+1}) - I(x_{j-1}, y_{i-1})}{\sqrt{2}h} \\ I_{(-1,1)}(x_j, y_i) &\approx \frac{I(x_{j+1}, y_{i-1}) - I(x_{j-1}, y_{i+1})}{\sqrt{2}h} \end{aligned} \quad (1.3)$$

### 1.3.5 Definícia konvolúcie

Konvolúcia dvoch funkcií  $f$  a  $g$  na uzavretej množine  $\Omega$  v bode  $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  kde  $n \in \mathbb{N}^+$  je binárny operátor definovaný :

$$(f * g)(u) = \int_{t \in \Omega} f(t)g(u - t) dt$$

alebo nad nekonečným intervalom ( $p = 1$ )

$$(f * g)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(u - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u - t)g(t) dt = (g * f)(u)$$

Konvolúcia  $f * g$  sa niekedy zapisuje aj pomocou binárneho operátora  $C_f(g) = f * g$ .

V prípade, že obrazová funkcia je diskretizovaná, zapisujeme *konvolúciu* v nasledujúcom tvare :

$$p = 1, \quad \mathbf{u} = (x), \quad (f * g)(\mathbf{u}) = \sum_{i=-m_g}^{m_g} f(x - i) g(i)$$

$$p = 2, \quad \mathbf{u} = (x, y), \quad (f * g)(\mathbf{u}) = \sum_{i=-m_g}^{m_g} \sum_{j=-n_g}^{n_g} f(x - j, y - i) g(j, i)$$

Rozlišujeme 3 typy diskkrétnej konvolúcie

- **plnú** kde  $-\frac{m_g}{2} + 1 \leq x \leq m_f + \frac{m_g}{2} - 1$ ,  $(f * g)(x) = \sum_{\substack{i=-m_g \\ 0 \leq x-i < m_f}}^{m_g} f(x - i) g(i)$
- **rovnakú** kde  $0 \leq x < m_f$ ,  $(f *^s g)(x) = \sum_{\substack{i=-m_g \\ 0 \leq x-i < m_f}}^{m_g} f(x - i) g(i)$
- **čiasťočnú** kde  $\frac{m_g}{2} - 1 \leq x \leq m_f - \frac{m_g}{2} + 1$ ,  $(f *^c g)(x) = \sum_{\substack{i=-m_g \\ 0 \leq x-i < m_f}}^{m_g} f(x - i) g(i)$

Akýkoľvek lineárny operátor  $\mathcal{L}(\cdot)$  a operácia  $\mathcal{L}(g)(x)$  môže byť aproximovaná maticou  $\mathbf{L}$  a matico-vektorovým násobením  $\mathbf{L}g$ . 1-D *plná* diskrétna konvolúcia  $f * g$  sa dá napísať ako  $f * g = C_{m_g}(f)g$  kde  $C_{m_g}(f)$  je *Toeplitzova matica* veľkosti  $(m_g + m_f - 1, m_g)$  a má tvar

$$C_{m_g}(f) = \begin{pmatrix} f(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m_f - 1) & \ddots & f(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(m_f - 1) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

*Čiasťočná Toeplitzova matica*  $C_{m_g}^{m_p:m_l}(g)$  veľkosti  $(m_l - m_p + 1, m_g)$  vznikne vybraním riadkov  $(m_p, \dots, m_l)$  Toeplitzovej matice.

$$C_{m_g}^{m_p:m_l}(f) = \begin{pmatrix} f(m_p) & f(m_p - 1) & \dots & f(m_p - m_g + 1) \\ f(m_p + 1) & f(m_p) & \dots & f(m_p - m_g + 2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f(m_l) & f(m_l - 1) & \dots & f(m_l - m_g + 1) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

kde  $f(i) = 0$  pre  $i < 0$  alebo  $i > m_f - 1$ . Plná 2-D diskrétna konvolúcia  $F * G$  sa dá definovať ako maticovo vektorové násobenie *blokovej Toeplitzovej matice*  $C_{m_G, n_G}(F)$  veľkosti  $((m_G + m_F - 1)(n_G + n_F - 1), m_G n_G)$  s vektorom  $\vec{G} = \text{vec}(G)$ .

$$C_{m_G, n_G}(F) = \begin{pmatrix} C_{m_G}(F(\cdot, 0)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m_G}(F(\cdot, n_F - 1)) & \dots & C_{m_G}(F(\cdot, 0)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{m_G}(F(\cdot, n_F - 1)) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

kde  $F(\cdot, i)$  je  $i$ -tý stĺpec matice  $F$ . *Obmedzená bloková Toeplitzova matica*  $C_{m_G, n_G}^{m_p: m_l, n_p: n_l}(F)$  veľkosti  $((m_l - m_p + 1)(n_l - n_p + 1), m_G n_G)$  vznikne vybraním riadkov  $(m_p, \dots, m_l)$  v blokoch  $(n_p, \dots, n_l)$  čiastočnej Toeplitzovej matice. Platí  $\text{vec}(F * G)(m_p : m_l, n_p : n_l) = C_{m_G, n_G}^{m_p: m_l, n_p: n_l}(F) \vec{G}$ .

$$C_{m_G, n_G}^{m_p: m_l, n_p: n_l}(F) = \begin{pmatrix} C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, n_p)) & \dots & C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, n_p - n_G + 1)) \\ C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, n_p + 1)) & \dots & C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, n_p - n_G + 2)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, n_l)) & \dots & C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, n_l - n_G + 1)) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

kde  $C_{m_G}^{m_p: m_l}(F(\cdot, i)) = 0$  pre  $i < 0$  alebo  $i > n_H - 1$ . Kde nedôjde k nejednoznačnosti budeme písať skráteno  $C(f) = C_{m_g}(f)$ ,  $C^c(f) = C_{m_g}^{m_p: m_l}(f)$ ,  $C(F) = C_{m_G, n_G}(F)$  alebo  $C^c(F) = C_{m_G, n_G}^{m_p: m_l, n_p: n_l}(F)$ .



## Kapitola 2

# Matematický model

V tejto kapitole bude definovaný a rozobraný problém *monomodálnej fúzie* (MONOMODAL FUSION), jej jednotlivé aspekty a základná terminológia procesu fúzie. Monomodálna fúzia môže byť definovaná nasledujúco.

Nech  $I(x, y)$  je ideálny obraz scény a nech  $Z_1(x, y), \dots, Z_n(x, y)$  sú obrazy tej istej scény získané z rôznych nastavení senzoru. V článku sa obmedzíme na statické obrazy z pohľadu miesta snímania. Inými slovami predpokladáme, že nedochádza k zmene miesta snímacieho zariadenia alebo pohybu snímaného predmetu v čase. Vzt'ah medzi jednotlivými  $Z_i$  a  $I$  je vyjadrený ako

$$Z_i(x, y) = \mathcal{D}_i(I(x, y)) \quad (2.1)$$

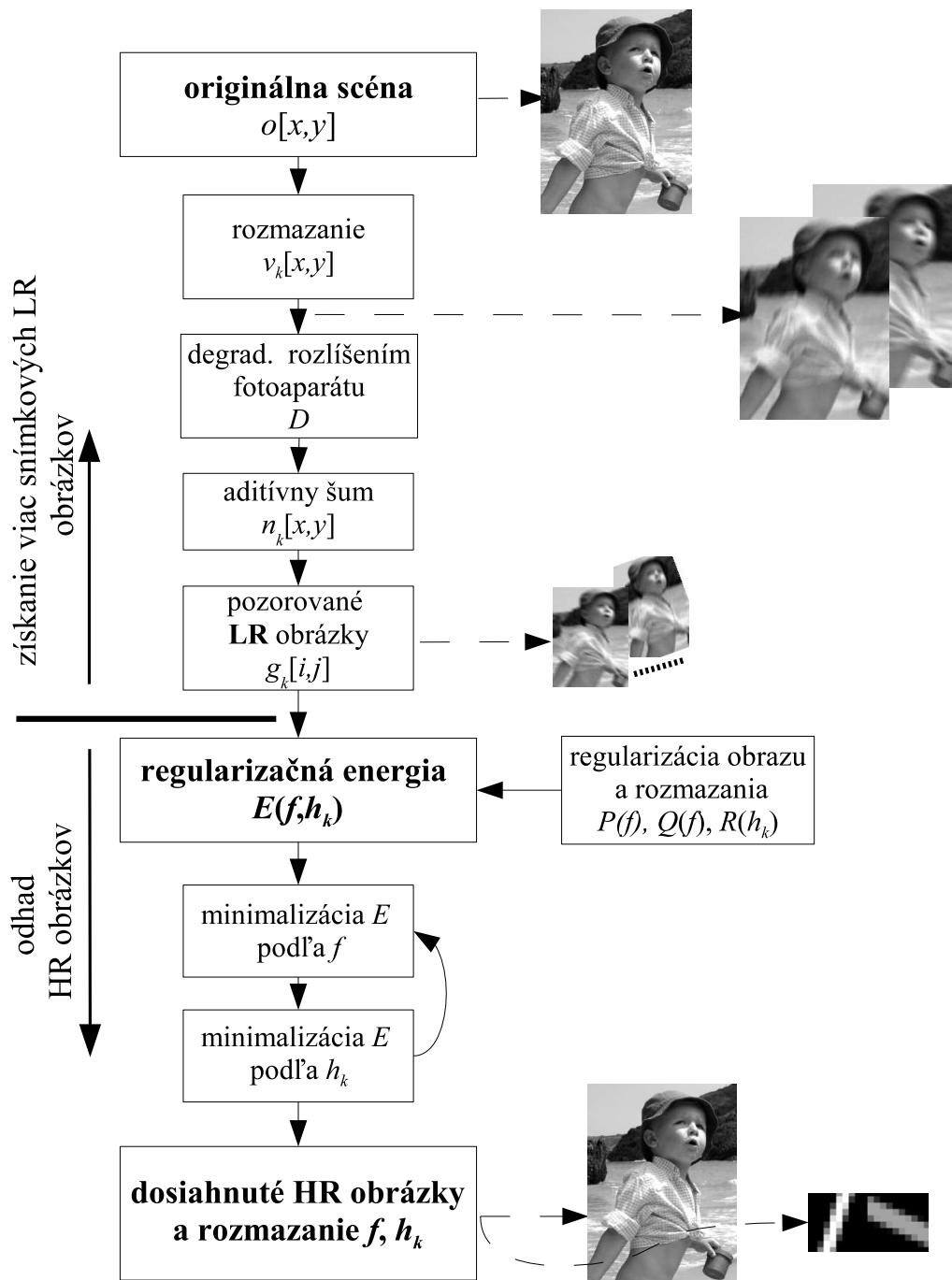
kde  $\mathcal{D}_i$  je operátor popisujúci všetky typy obrazovej degradácie ako rozmazanie, šum a iné faktory vstupujúce do procesu snímania. Hlavným cieľom monomodálnej fúzie je získať obraz  $\hat{I}$  ako dobrý odhad  $I$ , ktorý by mal byť nejakým spôsobom lepši než každý individuálny snímok  $Z_i$ .

Fúzia kľúčovo závisí na type degradačného operátoru  $\mathcal{D}_i$ . Ďalej budeme považovať za degradačné operácie spojenie rozmazania a aditívneho šumu. Rozmazanie je podmienené takými faktormi ako sú difrakcia, aberácia objektívu, zlé zaostrenie alebo turbulencia prechodového média. Za týchto predpokladov je 2.1 nasledujúca

$$Z_i(x, y) = \mathcal{H}_i(I(x, y)) + N_i(x, y) \quad (2.2)$$

kde  $\mathcal{H}_i$  je lineárny operátor, ktorý transformuje hodnotu obrazovej funkcie a  $N_i(x, y)$  je aditívny šum. V drvivej väčšine prípadov je operátor  $\mathcal{H}_i$  neznámy. Tak ako je problém definovaný je príliš všeobecný na to aby bol riešiteľný. Každopádne vo veľkom množstve praktických prípadov môže byť  $\mathcal{H}_i$  modelovaný integrálom cez jadro  $H_i$ . Potom píšeme

$$\mathcal{H}_i(x, y) = \int_{\Omega} H_i(s, t) I(x - s, y - t) ds dt \quad (2.3)$$



Obrázok 2.1: model procesu degradácie obrazu

kde  $H_i(s, t)$  je impulzívna odozva (POINT SPREAD FUNCTION (PSF)). V tomto článku budeme predpokladať, že  $H_i$  je nemenné v závislosti na  $(x, y)$ , inými slovami hovoríme, že je *space-invariant*.

V závislosti na type degradácie  $\mathcal{D}_i$  môžeme vybudovať systém popisujúci väčšinu degradačných problémov. Celý proces degradácie je znázornený v grafe 2.1.

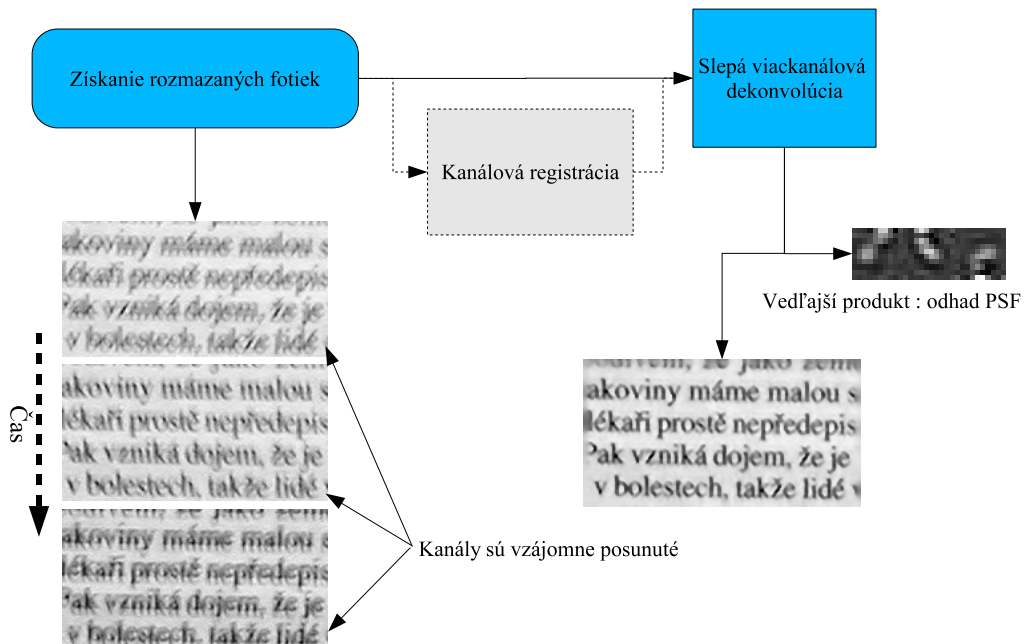
## 2.1 Uniformné rozmazanie kanálov

Tento model predpokladá, že ide o „tradičnú“ konvolúciu v každom kanáli. Model napríklad popisuje fotografovanie statickej scény s nesprávnym zaostrením v každom snímku. Fúzia obrázkov je dosiahnutá viackanálovou slepou dekonvolúciou viz. obrázok 2.2. Všetky metódy navrhnuté v literatúre nevyhnutne zavádzajú nejaké obmedzujúce predpoklady na PSF  $H_i$  alebo na zdrojový obraz  $I$ . Jednotlivé metódy dekonvolúcie sa líšia práve tým, ako sú obmedzovacie podmienky definované a použité. V podstate rozlišujeme dva základné prístupy k slepej dekonvolúcii. Prvý berie každý kanál nezávisle na ostatných, zatiaľ čo druhý zo svojej podstaty pristupuje k dekonvolúcii viackanálovo. Môžeme hovoriť, že prvý prístup sériovo aplikuje jednokanálovú dekonvolúciu, naproti tomu viackanálová dekonvolúcia dekonvuluje paralelne.

Štúdiom jednokanálovej slepej dekonvolúcie sa zaoberalo množstvo článkov, námatkovo napr. [53, 67]. Slepá dekonvolúcia sa ukázala ako *nedostatočne podmienený problém* (ILL-POSED), ktorý nemá jednoznačné riešenie a ktorej výpočtová náročnosť presahuje všetky hranice. Existuje niekoľko hlavných skupín metód slepej dekonvolúcie. Známa *parametrická metóda* (PARAMETRIC METHOD) predpokladá, že parametrický model PSF je daný apriori. Skúmaním *zero pattern* Fourierovej transformácie resp. *cepstrom*<sup>1</sup>  $Z_i(x, y)$  sa zaoberali články [54, 55, 56, 57]. Tento prístup dáva sľubné výsledky v prípade rozmazania pohybom a zlého zaostrenia. Parametrické metódy odhadujúce zložitejšie rozmazania pohybom strednou hodnotou štatistických momentov [58] a strednou hodnotou auto korelácie smerových derivácií [59] patria tiež do tejto kategórie. Iná metóda [60] predpokladá znalosť reziduálneho spektra zdrojovej scény a z množiny povolených PSF vyberie takú, pre ktorú reziduálne spektrum rekonštruovaného obrazu najviac odpovedá očakávanému.

Sľubných výsledkov dosahuje *zero-sheep separation* metóda, predstavená

<sup>1</sup>Cepstr je Fourierová transformácia decibelu spektra. Inými slovami ide o Fourierovú transformáciu logaritmu Fourierovej transformácie  $C(signal) = \mathcal{F}(\log(\mathcal{F}(signal))) + i2\pi m$ . Slovo cepstrum vzniklo obrátením prvých štyroch písmen slova „spectrum“.



Obrázok 2.2: Rovnomerne rozmazané kanály. Pri získavaní jednotlivých kanálov dochádza k malej translácii spôsobenej rozmazaním pohybom. Dekonvolučná metóda navrhnutá v tomto článku si dokáže v malej miere poradiť aj s transláciou.

v [61] a zdokonalená v [62, 63]. Táto metóda je založená na analytickej vlastnosti  $z$ -transformácie v 2-D. Bolo dokázané, že nuly v  $z$ -transformácii  $I(x, y)$  a  $H(x, y)$  ležia na disjunktných spojitých povrchoch nazývaných *zero sheets*. Oddelením týchto dvoch povrchov od seba môžeme rekonštruovať  $H(x, y)$  aj  $I(x, y)$  presne až na škálovací koeficient. Aj keď je myšlienkovito *zero sheet* metóda správna, má malé praktické použitie, pretože algoritmus je vysoko citlivý na šum a má tendenciu nedávať numericky presné výsledky pre obrázky väčších rozmerov.

Metódy založené na *projekcii* [64] sa snažia spojiť znalosť vlastností originálnej scény a PSF spolu s obmedzovacou množinou. Táto metóda sa správa dobre aj v prípade, že apriórna informácia nebola optimálna. Každopádne riešenie nemusí byť jedinečné. Popri projekčných metódach existuje veľké množstvo neparаметrických metód, ktoré predpokladajú apriórne deterministické alebo stochastické obmedzenie ako napríklad pozitivitu obrazu, veľkosť supportu PSF, vlastnosti spektra PSF a originálneho obrazu a iné. Ako príklad môže poslúžiť *iteratívna slepá dekonvolúcia* [65, 66]. Základom je iteratívna Wienerova rekonštrukcia, ktorá sa strieda medzi  $H$  a  $I$  v kaž-

dom kroku iterácie. Táto metóda je robustná voči šumu ale trpí nezaručenou konvergenciou.

Veľmi sľubných výsledkov dosahuje *Nonnegativity and support constraints recursive filtering (NAS-RIF)* algoritmus [67, 68, 69]. Každopádne, ide o metódu, ktorá môže byť aplikovaná na obrazy, ktoré obsahujú predmety s konečným supportom na uniformnom pozadí a support musí byť navyše špecifikovaný. Iným príkladom sú stochastické neparametrické prístupy založené na Bayesovskom teoréme spolu s *maximálnym aposteriorným odhadom* (MAXIMUM APOSTERIOR ESTIMATION (MAP)) [70] a Richardson-Lucy viac-kanálový algoritmus [71], ktorý je efektívny pre prípad Poissonovho modelu šumu.

Rekonštrukčné metódy založené na minimalizácii variácie integrálu tvoria zaujímavú skupinu algoritmov [72, 73]. Integrál variácie, ako napríklad totálna variácia, hraje významnú rolu v odšumovacích technikách, keďže poskytuje možnosť anizotropnej difúzie, ktorá je šetrná k obrazovým hranám. Viac o anizotropných odšumovacích technikách v kapitolách 3, 4 a 5.

Všetky doteraz spomínané metódy nevyužívajú potenciál viakanálovosti informácie. Vývoj metód viackanálovej dekonvolúcie začal nedávno. Dá sa povedať, že sú tri hlavné výhody viackanálového prístupu oproti jednonálovému. Po prvé, redukcia šumu cez vlastnosť štatistickej nezávislosti náhodných generátorov v jednotlivých kanáloch každého bodu. Po druhé, výhoda eliminácie *núl* rekonštruovaných filtrov v deliteli Fourierovej transformácie. A najmä po tretie, výhoda väčšieho množstva informácie o originálnej scéne za predpokladu diverzity PSF funkcií. Nedostatok informácie v jednom kanáli spôsobený rozmazaním je nahradený informáciou z ostatných v tej istej frekvencii.

Priekopníckou prácou v tejto oblasti bola [74], ktorá bola primárne určená na obrazy rozmazané atmosférickou turbulenciou. Harikumar [4, 75] navrhol dva algoritmy, ktoré najprv odhadnú PSF a potom rekonštruujú originálny obraz štandardnou neslepou dekonvolúciou. Prvá je *subspace method*, kde PSF je rovná minimálnemu vlastnému vektoru špeciálnej matice skonštruovanej z rozmazaných obrazov. Druhá rieši *subspace problem* metódou *najväčšej podobnosti* (MAXIMUM LIKEHOOD ESTIMATOR). Nutným predpokladom je znalosť veľkosti konvolučného filtra. V [76, 77, 78] vyvinuli iný algoritmus založený na Bezoutovej identite nesúdeliteľných polynómov, ktorá slúži na určenie *inverzných filtrov*. Rekonštruovaný obraz je potom získaný normálnou konvolúciou s inverznými filterami. Ako *subspace method* tak aj metóda inverzných filtrov je náchylná na šum a aj pre nie vysokú hladinu šumu algoritmy zlyhávajú. Pillai v [79] navrhol inú zaujímavú metódu založenú na *najväčšom spoločnom deliteli*, ktorá je bohužiaľ ešte menej stabilná v prípade prítomnosti šumu. V [80, 81] prišli s dvoma priamymi algoritmami, ktoré na

rozdiel od Harikumar a Giannakis počítajú priamo originálny obraz z jadra špeciálnej matice. V prípade prítomnosti šumu je metóda stabilnejšia než predchádzajúce dve metódy. Každopádne slabinou algoritmu je, že neberie v úvahu žiadny popis šumu a nezavádza žiadny regularizačný term. A práve definovanie vhodnej regularizácie obrazovej funkcie bude cieľom nasledujúcich troch kapitol.

## Kapitola 3

# Regularizácia obrazovej funkcie

Prvým cieľom regularizácie obrazovej funkcie je prekonanie tzv. *nedostačného podmienenia* (ILL-POSE). Ide o typ problémov, pre ktoré neexistuje riešenie, nie je jednoznačné, alebo nie je stabilné pri meniacich sa vstupných dátach. Obrazová funkcia, kde každý bod predstavuje jeden moment voľnosti, je typickým príkladom, pre ktorý musí byť definovaná zväzujúca podmienka. Druhým cieľom regularizácie je definovať spôsob, pomocou ktorého odstránime šum a iné formy degradácie pri zachovaní prítomnej signifikantnej obrazovej informácie. Najprv je potrebné definovať matematický postup, ktorým sa to dosiahne.

*Variačný kalkulus* je matematický nástroj, ktorý hľadá spôsob ako nájsť extrém funkcionálu v tvare:

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}) = \int_{\Omega} F(x, y, \mathbf{I}(x, y), \mathbf{I}_x(x, y), \mathbf{I}_y(x, y)) \, d\Omega \quad (3.1)$$

Nájst' funkciu  $\mathbf{I}$ , ktorá minimalizuje funkcionál  $\mathcal{E}(\mathbf{I})$

$$\arg \min_{\mathbf{I}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n} \mathcal{E}(\mathbf{I}) = \arg \min_{\mathbf{I}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n} \int_{\Omega} F(x, y, \mathbf{I}(x, y), \mathbf{I}_x(x, y), \mathbf{I}_y(x, y)) \, d\Omega$$

je netriviálny problém. Každopádne *Euler-Lagrangeova rovnosť* dáva aspoň nutnú podmienku riešenia minima  $\mathcal{E}(\mathbf{I})$  :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}_y} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} - \operatorname{div} \left( \frac{\partial F}{\partial \nabla \mathbf{I}} \right) = 0 \quad (3.2)$$

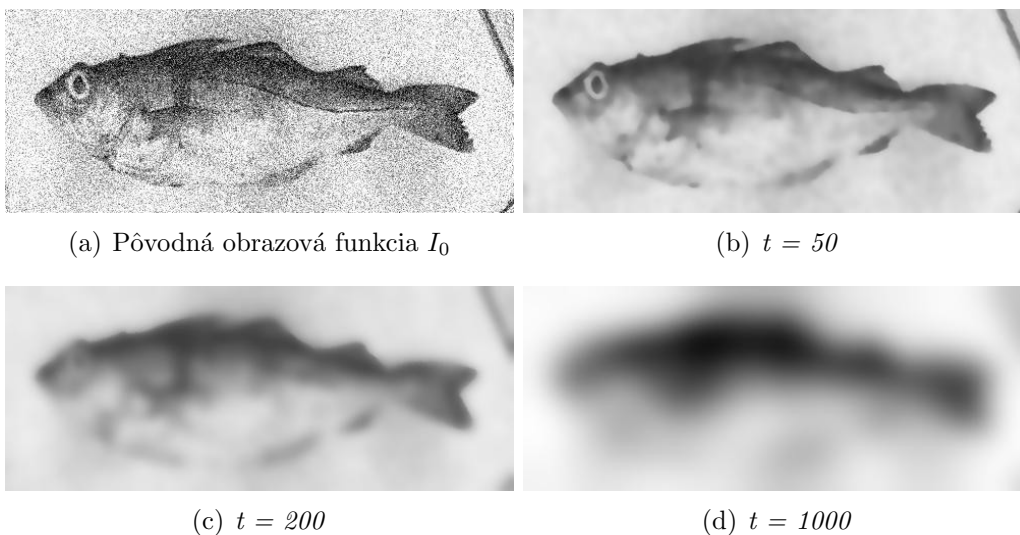
Namiesto numericky zložitého priameho riešenia sústavy *parciálnych diferenciálnych rovníc* (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS) ďalej len *PDE* viz. 3.2 je použitá *iteratívna metóda klesajúceho gradientu*, tiež známa ako *me-*

tóda najväčšieho zostupu (STEEPEST DESCENT)

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{t=0} = \mathbf{I}_0 \\ \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = - \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} - \operatorname{div} \left( \frac{\partial F}{\partial \nabla \mathbf{I}} \right) \right) = \mathcal{R} \end{cases}$$

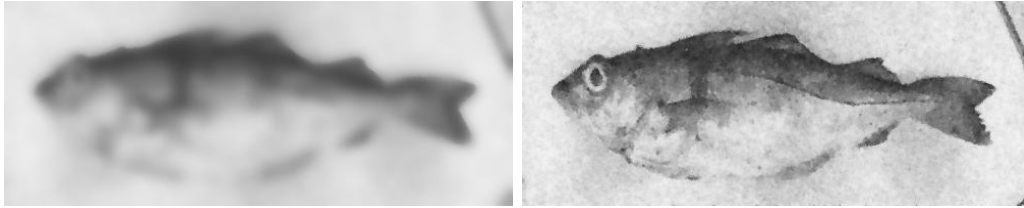
V prípade, keď nie je energetický funkcionál  $\mathcal{E}(\mathbf{I})$  konvexný, je potrebné voliť počiatočný bod iterácie opatrne, najlepšie v blízkosti globálneho minima. Inak môže algoritmus konvergovať k lokálnemu minimu. Ale aj v prípade konvexného funkcionálu je vhodné počiatočné riešenie voliť správne aspoň s ohľadom na výpočtovú náročnosť. PDE je parametrizovaná časovou premennou  $t$ . Podmienkou zastavenia iterácie je, že obrazová funkcia dôjde do *stabilného bodu*, inými slovami nebude sa už meniť v závislosti na čase  $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \approx 0$ .

Očakávaným cieľom takéhoto regularizačného algoritmu je, že „nevýznamné“ obrazové dáta sa stratia skôr v behu iterácie, zatiaľ čo „zaujímavé“ ostanú až do momentu, než sa aj oni stanú nevýznamnými v rámci dát aktuálnej iterácie. Toto je zároveň správny moment zastavenia iterácie. Tento proces je pekne vidieť v obrázku 3.1, ktorý je postupne rozmazávaný, a to tak, že najprv sa rozmáže oblasť obrázku s pozadím, ktorá nenesie žiadnu potrebnú informáciu a až potom oblasti s hranami ako je napr. *oko* ryby. Zároveň je vidieť, že takto definovaná regularizácia vedie k minimalizácii



Obrázok 3.1: Príklad priebehu obrazovej funkcie v závislosti na čase





(a)  $\frac{\partial I}{\partial t} = \mathcal{R}$  kde  $t = 200$

(b)  $\frac{\partial I}{\partial t} = \mathcal{R} + (I_0 - I)$  kde  $t = 200$

Obrázok 3.2: Term podobnosti s originálnou obrazovou funkciou

variácie dát a konverguje ku konštantnej obrazovej funkcii tzv. *nulovému riešeniu*.

Všeobecne platí, že *Gausovský aditívny šum* vizuálne poškodzuje obrazové dáta najmä vo vysokých frekvenciách, preto väčšina odšumovacích prístupov orezáva vysoké frekvencie, čím sa síce vizuálne odstráni šum, ale na druhej strane dôjde k rozmazaniu dát. Napriek tomu je v spracovaní obrazu *regularizačný term* kľúčový element v prípade problémov s *nedostatočným podmienením*, ako sú *rekonštrukcia*, *segmentácia*, *registrácia*. A je neoddeliteľnou súčasťou veľkého množstva algoritmov.

Aby sa vyhlo problému konvergenzie k *nulovému riešeniu*, zavádza sa ďalší regularizačný term a to term *podobnosti s originálnou obrazovou funkciou*  $I_0$ .

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathcal{R} + (I_0 - I) \quad (3.3)$$

Term zaručí, že obrazová funkcia bude počas iterácie čiastočne viazaná na zdrojovú obrazovú funkciu a výsledok sa úplne nevychýli k nulovému riešeniu. Výsledok regularizácie s použitím *vernostného* termu je vidieť v obrázku 3.2. Je viditeľné, že výsledný obraz nie je natoľko rozmazaný, na druhú stranu je tu stále v malej miere prítomný šum zdrojového obrazu. Ako vhodne regularizovať obraz za účelom odstránenia šumu a zachovania významnej obrazovej informácie, inými slovami ako voliť term  $\mathcal{R}$ , sa dozvieme v nasledujúcich dvoch kapitolách.

## Kapitola 4

# Regularizácia skalárnej obrazovej funkcie

V tejto kapitole budú uvedené niektoré základné metódy založené na PDE nad skalárnymi 2-D obrazovými funkciami  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jeden z hlavných prístupov vychádza z toho, že na šum sa pozerá ako na funkciu s veľkou variáciou.

$$I_{noise} = I + \nu, \quad \text{var}(\nu) \gg 0 \quad (4.1)$$

Spôsob, akým sa šum potlačí, spočíva v minimalizácii variácie  $I_{noise}$ . To znamená v minimalizácii  $\|\nabla I\|$ .

### 4.1 Izotropné vyhladenie

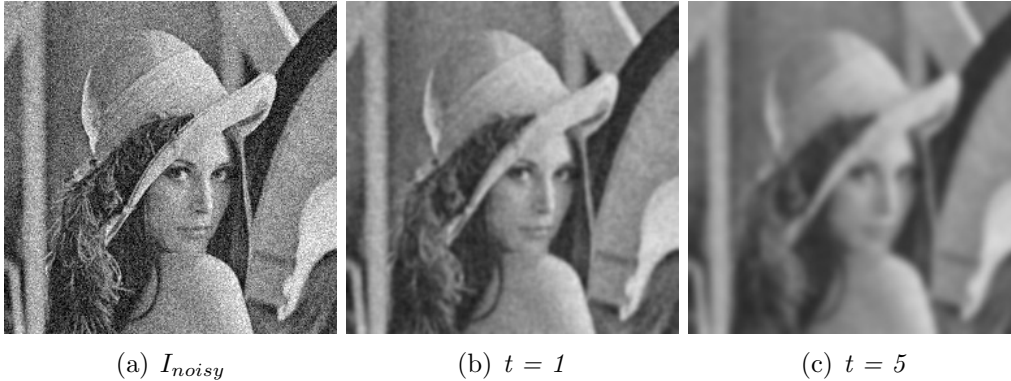
Izotropné vyhladenie je jedným zo základných prístupov ako „vyhladiť“ obrazové dáta. Prvým kto formuloval problém bol *Tichonov* v [7]. Regularizácia má nasledujúcu podobu

$$\mathcal{E}_{Tichonov}(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2 d\Omega \quad (4.2)$$

Pri použití *Euler-Lagrangeovej rovnosti* má regularizácia 4.2 tvar

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I \quad (4.3)$$

Ide o vo fyzike dobre známu *heat equation* popisujúcu tok tepla materiálmi. Tento typ PDE je nazývaný *difúzna rovnica*.



Obrázok 4.1: Výsledok heat equation v čase

Koenderink ukázal v [6], že riešenie rovnice 4.3 v čase  $t$  je rovné konvólúcii zašumeného obrazu  $I_{noisy}$  s *normalizovaným 2D Gaussovým jadrom* s rozptylom  $\sigma^2 = (\sqrt{2t})^2$

$$I_t = I_{noisy} * G_\sigma \quad \text{tzn.} \quad I_t(x, y) = \int_{\Omega} I_{noisy}(x - u, y - v) G_\sigma(u, v) du dv \quad (4.4)$$

kde  $G_\sigma$  má tvar

$$G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{a} \quad \sigma = \sqrt{2t} \quad (4.5)$$

Chovanie regularizácie je zrejmé. Signál je *izotropne* rozmazaný a miera rozmazania závisí na čase  $t$ . Nahradenie iteratívneho výpočtu PDE konvólúciou s Gaussovským jadrom je výrazným ušetrením výpočtovej náročnosti. Rovnako výhodou je nahradenie vysoko nelineárnej PDE lineárnou formou, ktorej numerický výpočet je triviálny.

Stojí za pozornosť, že podľa *konvolučného teorému* je cyklická konvólúcia obrazovej funkcie s Gaussovým jadrom rovná násobeniu Fourierovej transformácie obrazovej funkcie s iným Gaussovým jadrom.

$$\mathcal{F}(G_\sigma)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2)) \quad (4.6)$$

Inými slovami sa izotropná regularizácia správa ako *low-pass* filter odstraňujúci vysoké frekvencie z obrazu  $I$ . Toto pozorovanie bude často používané v priebehu článku. Hrany sú bohužiaľ typicky vysokofrekvenčný signál, tým pádom sú regularizáciou tiež potlačené, a to do takej miery, že výsledky dosiahnuté pomocou *heat equation* nie sú prakticky použiteľné, ako je vidieť z obrázku 4.1. Je preto potrebné nájsť komplexnejšiu nelineárnu anizotropnú regularizáciu, ktorá by nepotláčala obrazové hrany.

## 4.2 Geman-McClure

S. Geman a D.E. McClure [10] navrhli nelineárnu anizotropnú regulárizáciu, ktorá rozširuje heat equation rovnicu 4.3. Myšlienka je postavená na fakte, že heat equation môže byť prepísaná v tvare

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I = \operatorname{div}(\nabla I)$$

Pridaním funkcie  $c(\|\nabla I\|) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  do divergencie lepšie špecifikujeme regularizačný proces.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}(c(\|\nabla I\|) \nabla I) \quad (4.7)$$

Vhodný kandidát na funkciu  $c(\|\nabla I\|)$  by mal spĺňať niekoľko podmienok. Mala by to byť funkcia zabraňujúca difúzii v prípade hrán a zaručujúca rozmazanie v prípade homogénnych dát. Ako vidieť pôjde o klesajúcu funkciu z  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . S. Geman a D.E. McClure navrhli

$$c_{GM}(\|\nabla I\|) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{K^2}\right)^2} \quad (4.8)$$

Kde  $K$  je fixná konštanta určujúca prah medzi homogénnymi oblastami a hranami. Rovnica 4.7 rozpísaná podľa definície dáva

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c(\|\nabla I\|)\Delta I + c'(\|\nabla I\|)\|\nabla I\| (\eta^T \mathbf{H} \eta) \quad (4.9)$$

kde  $\eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$ .

Malé odbočenie v podobe ľahkého pozorovania. Nech  $A(n, n)$  je reálna symetrická matica a vektory  $x_1, \dots, x_n$  tvoria ortonormálnu bázu priestoru  $\mathbb{R}^n$  potom platí

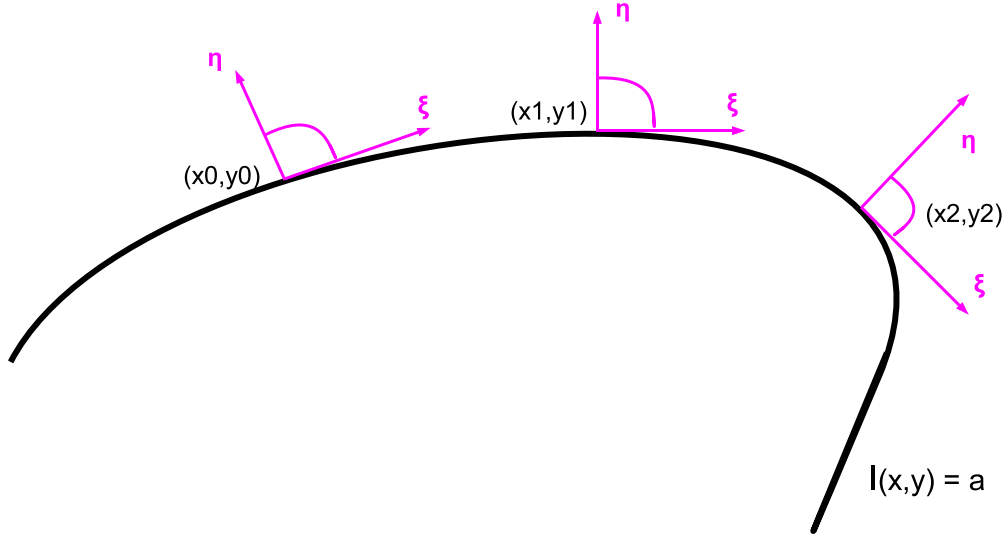
$$\sum_{i=1}^n x_i^T A x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \Delta A = \operatorname{trace}(A) \quad (4.10)$$

kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú vlastné čísla matice  $A$ . Toto pozorovanie 4.10 použité na 4.9 dáva

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta} \quad (4.11)$$

kde  $c_\xi = c(\|\nabla I\|)$  a  $c_\eta = c'(\|\nabla I\|)\|\nabla I\| + c(\|\nabla I\|)$ .  $I_{\xi\xi}$  a  $I_{\eta\eta}$  značia druhé derivácie  $I$  v navzájom kolmých smeroch  $\xi$  a  $\eta$  a platí

$$I_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} = \xi^T \mathbf{H} \xi \quad \text{a} \quad I_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} = \eta^T \mathbf{H} \eta \quad \text{kde } \mathbf{H} \text{ je Hessova matica } I$$



Obrázok 4.2: smerové derivácie  $\xi$  a  $\eta$  na hrane obrazu

Jednotkové ortonormálne vektory  $\eta$  a  $\xi$  sú dané smerom gradientu resp. kolmicou na ňu.

$$\eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \quad \text{a} \quad \xi = \eta^\perp$$

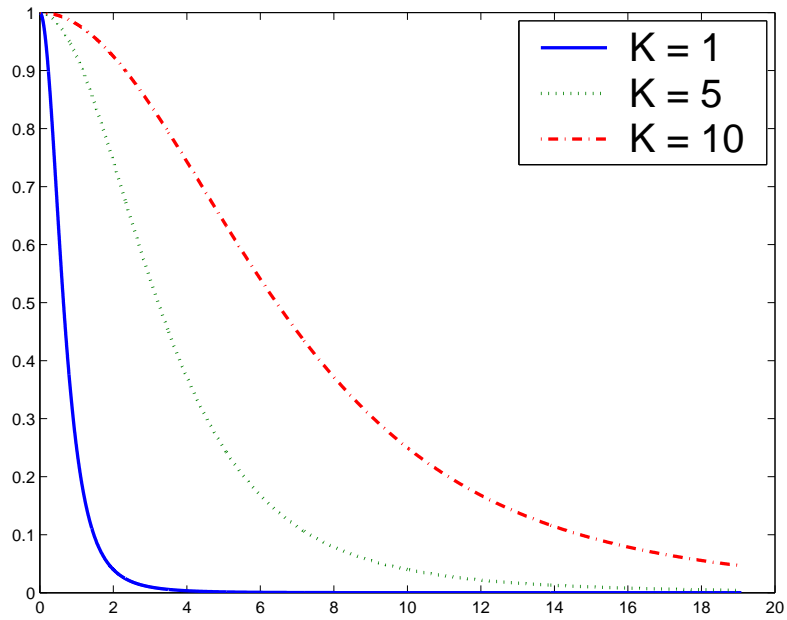
Dvojica  $(\eta, \xi)$  tvorí *ortonormálnu bázu* priestoru smerových derivácií v bode  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Názorná ukážka tvaru vektorov je v obrázku 4.2 V prípade regularizácie *German-McClure* 4.8 sú koeficienty  $c_\xi$  a  $c_\eta$  rovné

$$c_\xi^{GM} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{K^2}\right)^2} \quad \text{a} \quad c_\eta^{GM} = \frac{1 - 3\frac{\|\nabla I\|^2}{K^2}}{\left(1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{K^2}\right)^3} \quad (4.12)$$

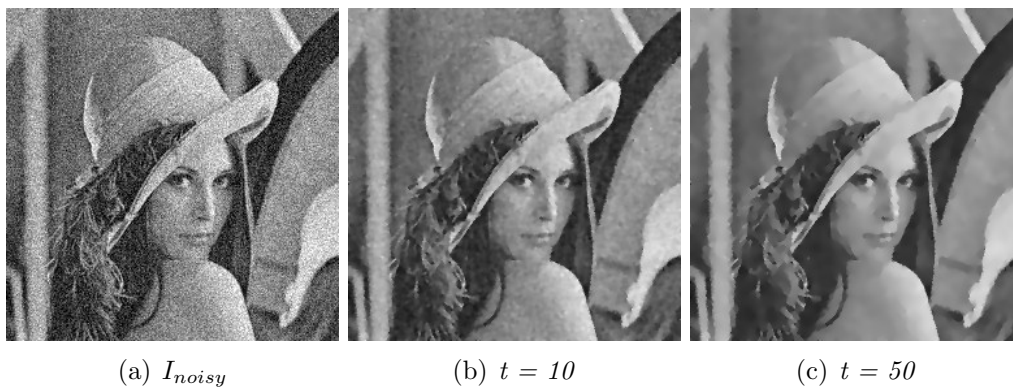
Rovnosť 4.11 sa dá interpretovať ako dve smerové rozmazania, kde jedno je v smere derivácie s váhou  $\eta$  a druhé v kolmici naň teda v smere izočiar s váhou  $\xi$ . Keďže platí  $c_\xi \geq c_\eta$  ide o anizotropné rozmazanie hlavne v smere izočiar. Vlastnosť, že k rozmazaniu dochádza najmä v smere izočiar a minimálne v smere gradientu je spoločným rysom väčšiny odšumovacích metód.

Aby bola dodržaná konzistencia a numerická stabilita výpočtu je potrebné zaručiť

$$c_\eta > 0 \quad c_\xi > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$



Obrázok 4.3:  $c_{GM}$  v závislosti na koeficiente  $K$



Obrázok 4.4: Geman-McClure

Je vidieť, že  $c_\eta$  môže byť v 4.12 v istých špecifických prípadoch menšie ako nula. Aby sa tomu zabránilo, je potrebná buď správna voľba koeficientu  $K > \|\nabla I\|/\sqrt{3}$  alebo definovanie dolnej hranice  $c_\eta = \max(c_{min}, c_\eta)$ . Štúdiu numerickej stability pri záporných difúzných koeficientoch sa venuje napr. článok [14].

Výsledok odšumenia pomocou 4.8 regularizácie je znázornený v obrázku 4.4. Je zrejmé, že výsledky dosiahnuté regularizáciou *Geman-McClure* sú podstatne lepšie ako v prípade *heat equation* 4.1. Každopádne spolu so šumom sú odstránené aj jemné detaily. Zaujímavá je úloha koeficientu  $K$  v regularizácii. Čím je väčší, tým sa  $c_{GM}$  4.8 správa viac izotropne a rozmazáva, zatiaľ čo, keď je nízky zachováva lokálnu variáciu. Priebeh funkcie  $c_{GM}$  v závislosti na koeficiente  $K$  je vidieť v grafe 4.3. Veľkou nevýhodou *Geman-McClure* regularizácie je nelineárnosť divergenčného termu, čím sa stáva numericky ťažko riešiteľným. Riešením sú spôsoby linearizácie založené na aproximácii vyšších rádov alebo použití hodnôt z predchádzajúceho kroku iterácie [37, 38]. Iným prístupom je *Half-quadratic schéma*, o ktorom je viac napísane v kapitole 4.6.

### 4.3 $\phi$ funkcia

Regularizácia pomocou variačného počtu vychádza z pozorovania, že obrazová funkcia môže byť regularizovaná pomocou minimalizácie energetického funkcionálu merajúceho globálnu variáciu obrazovej funkcie. Cieľom energetického funkcionálu je nájsť popis lokálnej geometrie, ktorá zaručí, že potlačí oblasti s malou variáciou, ktoré predstavujú najmä šum a zachová oblasti s veľkou, ktoré reprezentujú hrany.  $\phi$  funkcia musí splňovať tieto požiadavky a ukazuje jeden z všeobecných prístupov k regularizácii. Poškodená skalárna obrazová funkcia  $I_{noisy}$  je regularizovaná minimalizáciou nasledujúceho funkcionálu

$$\mathcal{E}(I) = \int_{\Omega} \phi(\|\nabla I\|) \, d\Omega \quad (4.13)$$

kde  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je rastúca funkcia majúca deriváciu 1. a 2. rádu v každom bode, riadiaca regularizáciu a penalizujúca veľký gradient. Na základe *Euler-Lagrangeovej* rovnosti má 4.13 minimum v bode splňujúcom nasledujúcu PDE rovnosť

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \nabla I \right) \quad (4.14)$$

Všimnime si ekvivalenciu s definíciou *Geman-McClure* regularizácie 4.8, keď platí  $c(\|\nabla I\|) = \phi'(\|\nabla I\|)/\|\nabla I\|$ . Rovnosť 4.14 rozpísaná do tvaru dvoch smerových Laplaciánov, jedného v smere gradientu a druhého v smere izočiary analogickým postupom ako v predchádzajúcom prípade dáva

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta} \quad \text{kde} \quad c_\xi = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \quad \text{a} \quad c_\eta = \phi''(\|\nabla I\|) \quad (4.15)$$

Po regularizácii 4.15 resp. po funkcii  $\phi$  budeme požadovať vlastnosti, ktoré by mala spĺňať. Ako uvidíme, niektoré sú navzájom nezlučiteľné:

- Aby bolo zabránené *inverznej difúzii*, ktorá môže spôsobiť numeric- kú nestabilitu výpočtu, musia byť koeficienty  $c_{\xi\xi}$  a  $c_{\eta\eta}$  vždy pozitívne. Čo znamená, že funkcia  $\phi$  musí byť rastúca a konvexná.

$$\phi'(s) \geq 0 \quad \text{a} \quad \phi''(s) \geq 0 \quad (4.16)$$

- Izotropné vyhladenie v bode, kde je lokálna variácia nízka. Za predpokladu, že funkcia  $\phi$  je regulárna, je tohto izotropného vyhladenia dosiahnuté keď

$$\phi'(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi''(s) = \phi''(0) > 0 \quad (4.17)$$

Preto v bodoch, kde  $\|\nabla I\| \approx 0$  má 4.15 tvar

$$\frac{\partial I}{\partial t} \approx \phi''(0)(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta}) = \phi''(0)\Delta I \quad (4.18)$$

Čiže v bodoch, kde  $I$  lokálne splňuje 4.17 sa regularizácia správa silne izotropne a pripomína *heat equation* s koeficientom difúzie rovným  $\phi''(0)$ .

- V oblasti bodov susediacich s hranou, inými slovami tam kde je veľká norma gradientu, je žiaduce, aby bol obraz vyhladený najmä v smere hrany a nie v smere kolmom na hranu. Toho je dosiahnuté, keď platí

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi''(s) = 0, \quad \text{a} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi'(s)}{s} = \beta > 0 \quad (4.19)$$

Bohužiaľ, tieto dva požiadavky sú vzájomne nezlučiteľné. Je potrebné nájsť kompromis. Napríklad,  $\phi''(s)$  a  $\phi'(s)/s$  konvergujú k nule pre  $s \rightarrow \infty$ , ale s inou mierou

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi''(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi'(s)}{s} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi''(s)}{\phi'(s)/s} \neq 0 \quad (4.20)$$

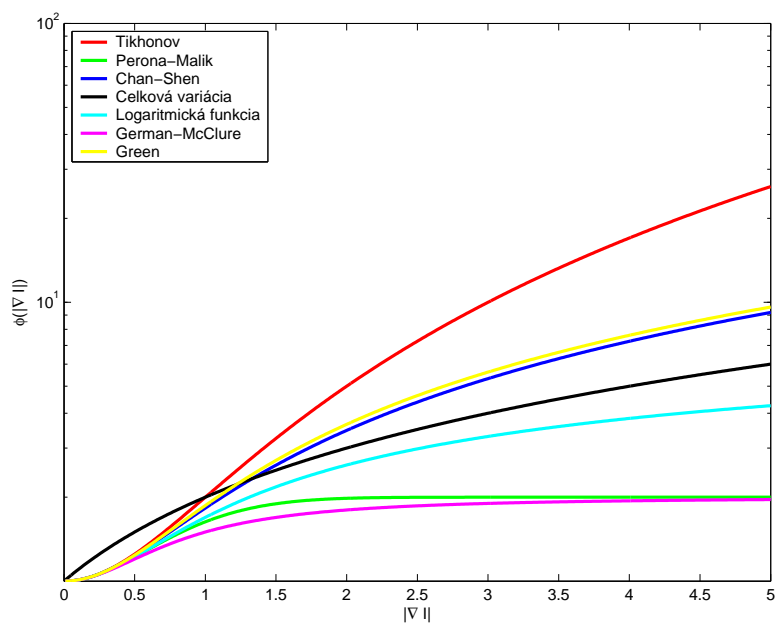


Názov funkcie	$\phi(s)$	odkaz
Tichonov	$s^2$	[7]
Perona-Malik	$1 - \exp(-s^2/K^2)$	[23]
Chan-Shen	$2\sqrt{1 + s^2/K^2} - 2$	[31]
Total variation	$s$	[11]
Green	$2\log(\cosh(s))$	[24]
Logarithmická funkcia	$\log(1 + s^2/K^2)$	[44]
Geman-McClure	$s^2/(1 + s^2/K^2)$	[10]

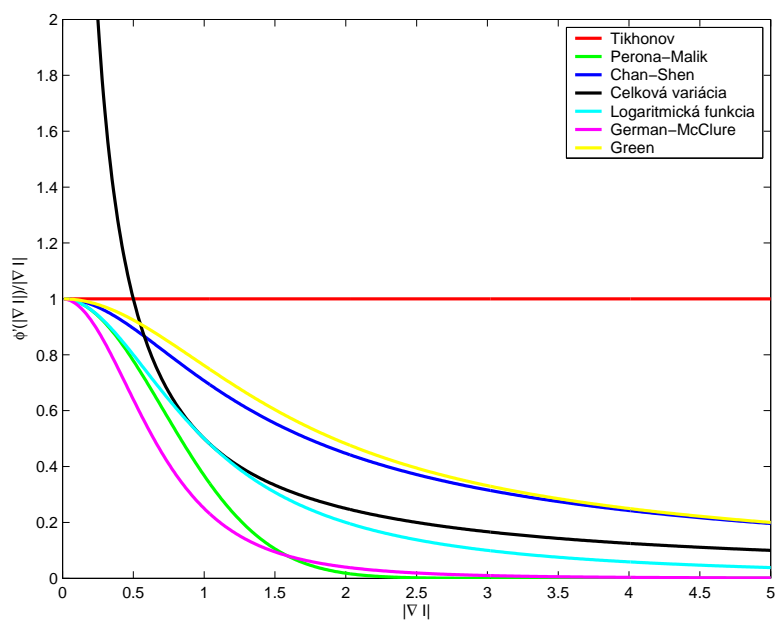
Tabuľka 4.1: Rôzne príklady  $\phi$  funkcií

Rôzne  $\phi$  funkcie dávajú rôzne výsledky. V tabuľke 4.1 je zoznam niektorých najznámejších a v literatúre bežne používaných. Graf 4.5 ukazuje priebeh  $\phi$  funkcie pre rôzne definície. Priebeh  $\phi'(s)/s$  je v grafe 4.6. Normalizácie  $\phi$  funkcie je dosiahnuté vhodnou voľbou konštanty  $K$  určujúcej hranicu medzi homogénnou oblasťou a hranou. A nakoniec príklady použitia rôznych  $\phi$  funkcií na vzorový obraz sú v obrázku 4.7. Vidieť, že dosiahnuté výsledky sa po vizuálnej stránke značne líšia a celkový dojem z výsledkov je rôznych funkcií od funkcie. Každopádne je zrejme, že výsledné obrazy skutočne zodpovedajú lokálnej geometrickej definícii regularizácie v závislosti na difúzných koeficientoch  $c_\xi$  a  $c_\eta$ .

Definícia difúzie pomocou  $\phi$  funkcie nepokrýva všetky typy difúzie. Je dobré si uvedomiť, že difúzne koeficienty  $c_\xi$  a  $c_\eta$  nie sú navzájom nezávislé, ale sú odvodené od  $\phi$  funkcie, čo znamená minimálne o jeden moment voľnosti menej. Preto bude v ďalšej kapitole navrhnutý všeobecnejší prístup dávajúci viac voľnosti v definícii regularizácie.



Obrázok 4.5: Priebeh  $\phi(s)$  funkcie s logaritmickej stupnicou *ypsilónovej* osi



Obrázok 4.6: Priebeh  $\phi'(s)/s$  funkcie

## 4.4 Regularizácia difúznym tenzorom

Cieľom *regularizácie difúznym tenzorom* je umožniť všeobecnejšie definovanie lokálnej difúzie než v prípade  $\phi$  funkcie. Funkcia  $\phi'(\|\nabla I\|)/\|\nabla I\|$  v divergencii 4.14 je nahradená tenzorom.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{D}(\nabla I)\nabla I) \quad (4.21)$$

kde  $\mathbf{D}$  je symetrická pozitívne semi-definitná matica  $2 \times 2$ . Definuje tok gradientu a lokálne difúznu geometriu.  $\phi$  funkcia je špeciálny prípad 4.21, kde tenzor  $\mathbf{D}$  je rovný

$$\mathbf{D} = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \mathbf{Id}$$

Podme si ukázať jeden príklad *difúzneho tenzoru*. Weickert v [15, 16, 17] navrhol difúzny tenzor vytvorený z vlastných vektorov  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  a z vlastných čísel  $(\lambda_+, \lambda_-)$ , ktoré su funkciou príslušných vlastných čísel matice  $\mathbf{G}_\sigma$

$$\mathbf{G}_{\sigma_{i,j}} = ((\nabla I)_i (\nabla I^T)_j) * G_\sigma \quad \text{kde} \quad G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right), \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (4.22)$$

Nech vlastné čísla matice  $\mathbf{G}_\sigma$  sú  $\lambda_+^*, \lambda_-^*$  a vlastné vektory  $\eta^*, \xi^*$  potom platí

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \eta^* = \eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \quad \text{a} \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \xi^* = \xi = \frac{\nabla I^\perp}{\|\nabla I\|} \quad (4.23)$$

ale všeobecne **neplatí**, že  $\eta^* = \eta * G_\sigma$  a  $\xi^* = \xi * G_\sigma$ . Vektory  $\eta^*$  a  $\xi^*$  sú síce vyhladené verzie vlastných vektorov  $\eta$  a  $\xi$ , čo ale neznamená že vzniknú konvolúciou  $\eta, \xi$  s  $G_\sigma$ . Spektrum difúzneho tenzoru definovaného Weickertom má podobu

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \alpha & \mathbf{u} &= \eta^* \\ \lambda_- &= \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{-C}{(\lambda_+^* - \lambda_-^*)^2}\right) & \mathbf{v} &= \xi^* \end{aligned} \quad (4.24)$$

kde  $C > 0$  je prahová konštanta určujúca hranicu medzi homogénnymi a heterogénnymi oblasťami a  $\alpha \in [0, 1]$  je minimálna miera difúzie aplikovaná v každom bode. Všimnime si, že takto definovaná difúzia vyhladzuje v smere gradientu, čiže najväčšieho sklonu vždy s konštantou  $\alpha$ , zatiaľ čo v smere izotóny kolmom na deriváciu s váhou, ktorá vznikne ako konvexná kombinácia rozdielnosti vlastných čísel. Tenzor  $\mathbf{D}$  má z definície vlastných čísel tvar

$$\mathbf{D} = \lambda_+ \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \lambda_- \mathbf{v}\mathbf{v}^T$$

Difúzny tenzor v každom bode definuje difúznu geometriu, na ktorú kladieme rovnaké požiadovky ako na  $\phi$  funkciu v kapitole 4.3 a to síce, že

- V homogénnych oblastiach, kde je  $\lambda_+^* \simeq \lambda_-^* \simeq 0$  je  $\lambda_+ \simeq \lambda_- = \alpha$  a platí

$$\mathbf{D} \simeq \alpha \mathbf{Id}$$

čo znamená, že tenzor sa chová izotropne.

- V miestach hrán, kde  $\lambda_+^* \gg \lambda_-^* \gg 0$  je  $\lambda_- > \lambda_+ > \alpha$  sa tenzor správa veľmi anizotropne a vyhladzuje hlavne v smere izotóny  $\mathbf{v} = \xi^*$ .

## 4.5 Smerový 1D Laplacián

Omnoho lepšiu predstavu o chovaní difúzie než v prípade *difúzneho tenzoru* dosiahneme prepisom do orientovaného 1-D Laplaciánu tvoreného smerovými druhými deriváciami obrazovej funkcie.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_1 I_{\mathbf{uu}} + c_2 I_{\mathbf{vv}} \quad (4.25)$$

kde  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ,  $c_1, c_2 \geq 0$  a  $I_{\mathbf{uu}}$ ,  $I_{\mathbf{vv}}$  značí druhú deriváciu  $I$  v smere  $u$  a  $v$  formálne

$$I_{\mathbf{uu}} = \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} \quad \text{a} \quad I_{\mathbf{vv}} = \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v}$$

kde  $\mathbf{H}$  je *Hessova* matica druhých derivácií. Difúzia sa chová lokálne tak, že v smere  $\mathbf{u}$  vyhladzuje s váhou  $c_1$  a v smere kolmom  $\mathbf{v}$  s váhou  $c_2$ . Je dobré si všimnúť spojitosť s difúziou pomocou  $\phi$  funkcie 4.15. Príkladom regularizácie pomocou smerového 1D Laplaciánu môže byť regularizácia navrhnutá *Sapiro, Ringach* [18]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I_{\xi\xi} \quad (4.26)$$

ktorá vyhladzuje výhradne v smere izotóny s váhou jedna. Ide o regularizáciu, ktorá **nemôže** byť definovaná pomocou  $\phi$  funkcie. To by muselo platiť:

$$\mathbf{u} = \xi, \quad \mathbf{v} = \eta \quad \text{a} \quad c_1 = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}, \quad c_2 = \phi''(\|\nabla I\|) \quad (4.27)$$

to ale z definície 4.26 nie je možné, pretože by muselo platiť  $\phi'(\|\nabla I\|) = \|\nabla I\|$  a zároveň  $\phi''(\|\nabla I\|) = 0$ , čo nie je možné.

Na 4.26 vidíme príklad regularizácie, ktorá sa nedá formulovať  $\phi$  funkciou. Smerový 1-D Laplacián síce poskytuje širšie mantinely vo formulácii

problému, ale ako sa neskôr ukáže,  $\phi$  funkcia na druhú stranu poskytuje elegantnejšie numerické riešenie.

Rovnosť 4.25 je v literatúre častejšie zapisovaná v tvare

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_1 I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} + c_2 I_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \text{trace}(\mathbf{T}\mathbf{H}) \quad (4.28)$$

kde

$$\mathbf{T} = c_1 \mathbf{u}\mathbf{u}^T + c_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^T$$

a ide o  $2 \times 2$  symetrickú maticu, ktorej vlastné čísla sú  $c_1, c_2$  a vlastné vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Viac o vzťahu a sile definícií regularizácie pomocou  $\phi$  funkcie, difúzneho tenzoru a smerového Laplaciánu vo výbornej publikácii od David Tschumperlé [88].

## 4.6 Half-quadratic algoritmus

Malé intermezzo. Pri použití  $\phi$  funkcie sa stretávame s problémom ako numericky riešiť Euler-Lagrangeovu rovnosť

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div} \left( \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \nabla I \right) \quad (4.29)$$

Z požiadaviek na  $\phi$  funkciu vyplýva, že 4.29 nie je konvexná všade, čo je veľmi nežiaduca vlastnosť. Na prekonanie tohto problému bolo navrhnuté vhodné numerické schéma nazývané *Half-quadratic* algoritmus, ktoré zaručí konvergenciu. Idea spočíva v tom, že je pridaná ďalšia premenná tiež nazývaná *duálna premenná* a rozšírený funkcionál  $\mathcal{J}(I, v)$ , pre ktorý platí  $\arg \min_I \mathcal{E}(I) = \arg \min_I \mathcal{J}(I, v)$ . Presnejšie, že pre sekvenciu  $(I_n, v_n)$  minimalizujúcu  $\mathcal{J}(I, v)$  platí, že  $I_n$  konverguje  $L_1$  k  $I$ . Tento postup bol pôvodne navrhnutý pre minimalizáciu totálnej variácie [19] Chambolle a Lionsom. Ale ako bude vidieť, ide použiť na ľubovoľnú  $\phi$  funkciu splňujúcu niekoľko základných vlastností. Celý algoritmus vychádza z nasledujúceho tvrdenia.

**Lemma 1.** *Nech  $\phi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  je funkcia, pre ktorú platí, že  $\phi(\sqrt{s})$  je konkávna na  $[0, +\infty]$  a  $\phi(s)$  je neklesajúca. Nech pre limity platí  $L = \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi'(s)/2s$  a  $M = \lim_{s \rightarrow 0+} \phi'(s)/2s$ . Potom existuje konvexná a klesajúca funkcia  $\psi : [L, M] \rightarrow [\beta_1, \beta_2]$  taká, že*

$$\phi(s) = \inf_{L \leq b \leq M} (bs^2 + \psi(b))$$

kde  $\beta_1 = \lim_{s \rightarrow 0+} \phi(s)$  a  $\beta_2 = \lim_{s \rightarrow 0+} (\phi(s) - s\phi'(s)/2)$ . Navyše, pre každé  $s \geq 0$  hodnota  $b$ , pre ktorú je minimum dosiahnuté, je rovná  $b = \frac{\phi'(s)}{2s}$ .

```

Inicializácia:  $I^0 = 0 \quad b^0 = 1$ 
for  $n \geq 1$ 
   $I^{n+1} = \arg \min_I (\mathcal{J}(I, b^n))$ , kde  $I^{n+1} = \arg(\operatorname{div}(b^n \nabla I) = 0)$ 
   $b^{n+1} = \arg \min_b (\mathcal{J}(I^{n+1}, b))$ , kde  $b^{n+1} = \frac{\phi'(\|\nabla I^{n+1}\|)}{2\|\nabla I^{n+1}\|}$ 
endfor
    
```

Tabuľka 4.2: Pseudoalgoritmus half-quadratic

Názov	$\phi(s)$	konvexná	$\psi(b)$	$\phi'(s)/2s$
Chan-Shen	$2\sqrt{1+s^2} - 2$	Áno	$b + \frac{1}{b}$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$
Logaritmická funkcia	$\log(1+s^2)$	Nie	$b - \log b - 1$	$\frac{1}{1+s^2}$
Geman-McClure	$\frac{s^2}{1+s^2}$	Nie	$b - 2\sqrt{b} + 1$	$\frac{1}{(1+s^2)^2}$

Tabuľka 4.3: Príklady  $\phi$  funkcií s príslušnou  $\psi$  funkciou

Ako vidieť lemma 1 sa dá použiť ako na konvexné, tak na konkávne  $\phi$  funkcie, ale  $\psi$  je vždy konvexná. Tabuľka 4.3 ukazuje príklady  $\phi$  funkcií a príslušných  $\psi$  funkcií.

Nech  $\phi$  funkcia vo funkcionále  $\mathcal{E}(I)$  energetickej funkcie 4.13 splňuje lemma 1, potom existuje  $L, M$  a  $\psi$  také, že

$$\begin{aligned}
 \inf_{I:\Omega \rightarrow \mathbb{R}} \mathcal{E}(I) &= \inf_{I:\Omega \rightarrow \mathbb{R}} \int_{\Omega} \inf_{L \leq b \leq M} (b\|\nabla I\|^2 + \psi(b)) d\Omega = \inf_{I:\Omega \rightarrow \mathbb{R}} \inf_{L \leq b \leq M} \int_{\Omega} b\|\nabla I\|^2 + \psi(b) d\Omega = \\
 &= \inf_{L \leq b \leq M} \inf_{I:\Omega \rightarrow \mathbb{R}} \int_{\Omega} b\|\nabla I\|^2 + \psi(b) d\Omega \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

Funkcionál s duálnou premennou  $b$  má tvar

$$\mathcal{J}(I, b) = \int_{\Omega} (b\|\nabla I\|^2 + \psi(b)) d\Omega$$

Funkcionál  $\mathcal{J}(I, b)$  nie je konvexný v priestore dvojíc  $(I, b)$ . Keď ale zafixujeme  $b$  resp.  $I$  už konvexný je. Z toho je odvodený názov *half-quadratic*. Riešenie je zrejmé, striedavá minimalizácia cez  $I$  a cez  $b$ . Návrh algoritmu je v tabuľke 4.2.

Zaujímavé pozorovanie je, že duálna premenná  $b$  sa chová ako detektor hrán. Ak  $\phi(\|\nabla I\|)$  splňuje predpoklady, ktoré sú na ňu kladené v kapitole 4.3

a navyše krajné limity sú rovné  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi'(s)/2s = 0$  a  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi'(s)/2s = 1$ , potom pre sekvenciu  $b^n$  platí nasledujúce

- $b^n(\|\nabla I(\mathbf{x})\|) \approx 1$ , ak  $\mathbf{x}$  patrí do homogénnej oblasti
- $b^n(\|\nabla I(\mathbf{x})\|) \approx 0$ , ak  $\mathbf{x}$  patrí do oblasti s veľkou variáciou

Half-quadratic algoritmus umožnil z vysoko nelineárneho problému urobiť lineárny a to s garanciou konvergencie k pôvodnému riešeniu. Ide o výhodu, ktorá bude v algoritme slepej dekonvolúcie využitá.

## 4.7 Mumford-Shah funkcionál

*Mumford* a *Shah* [25] navrhli segmentáciu obrazu minimalizáciou formy

$$\mathcal{E}_{MS}(I, K) = \int_{\Omega \setminus K} \|\nabla I\|^2 dA + \beta \text{length}(K) \quad (4.31)$$

alebo tiež niekde ekvivalentne zapisovaná ako

$$\mathcal{E}_{MS}(I, K) = \int_{\Omega \setminus K} \|\nabla I\|^2 dA + \beta \int_K d\mathcal{H}^1 \quad (4.32)$$

kde  $K$  je zjednotenie množín hrán v obraze a  $\mathcal{H}^1$  je jednorozmerná *Hausdorfova miera* množiny nespojitostí. Táto voľba modeluje obraz ako po častiach hladkú funkciu. Predpokladá sa, že obraz sa skladá z *oblastí* s malou a hladkou variáciou. Naprieč hranicami oblastí môže byť obrazová funkcia nespojitá. Takisto sa predpokladá, že tieto hrany sú z matematického hľadiska „pekné“, napríklad zjednotenie hladkých kriviek malej dĺžky. Forma 4.31 je v [26, 27] aproximovaná numericky krajším funkcionálom, ktorý  $\Gamma$ -konverguje k 4.31. Aby bola dosiahnutá konvexnosť funkcionálu je zavedená duálna premenná  $v$ .

$$\mathcal{E}_\epsilon^{MS}(I, v) = \int_{\Omega} v^2 \|\nabla I\|^2 + \beta \left( \frac{(v-1)^2}{4\epsilon} + \epsilon \|\nabla v\|^2 \right) d\Omega \quad (4.33)$$

Duálna premenná  $v(\mathbf{x})$  reprezentuje hrany. Minimalizácia  $\mathcal{E}_\epsilon^{MS}$   $\Gamma$ -konverguje k  $\mathcal{E}^{MS}$  s  $\epsilon \rightarrow 0$ . V [28] Mumford navrhol modifikovanú verziu funkcionálu a jeho aproximáciou pomocou  $\Gamma$ -konvergencie totálnej variácie

$$\mathcal{E}_\epsilon^{MSTV}(I) = \alpha \int_{\Omega} v^2 \|\nabla I\|^2 d\Omega + \beta \int_{\Omega} \left( \frac{(v-1)^2}{4\epsilon} + \epsilon \|\nabla v\|^2 \right) d\Omega \quad (4.34)$$

$L^2$  norma  $\nabla I$  bola nahradená  $L^1$  normou. Teraz sa pozrieme na funkcionál definovaný Geman-McClurom v kapitole 4.2 a prepíšeme ho s pomocou duálnej premennej do podoby definovanej v tabuľke 4.3

$$\phi_{GM}(\|\nabla I\|) = \frac{\|\nabla I\|^2}{(1 + \|\nabla I\|^2/K^2)} = \inf_b \left( b\|\nabla I\|^2 + K^2(\sqrt{b} - 1)^2 \right) \quad (4.35)$$

*Teboul* v [30] ukázal, že v prípade absencie šumu, je potrebné aby sa regularizácia správala rozumne, pridať term  $\chi(b)$ , ktorý zachováva hrany. Funkcionál má potom tvar

$$\mathcal{E}_{GM}(I) = \lambda_1 \int_{\Omega} b\|\nabla I\|^2 + K^2(\sqrt{b} - 1)^2 d\Omega + \lambda_2 \int_{\Omega} \chi(b) d\Omega \quad (4.36)$$

v prípade, že  $\chi(b) = \|\nabla(\sqrt{b})\|^2$ ,

$$\mathcal{E}_{GM}(I) = \lambda_1 \int_{\Omega} b\|\nabla I\|^2 + K^2(\sqrt{b} - 1)^2 d\Omega + \lambda_2 \int_{\Omega} \|\nabla(\sqrt{b})\|^2 d\Omega \quad (4.37)$$

substitúciou  $b = v^2$ ,  $\lambda_1 = \alpha$ ,  $K = \sqrt{\beta/4\epsilon}$  a  $\lambda_2 = \beta\epsilon$  dostávame ekvivalenciu medzi regularizáciou Geman-McClure 4.37 s pridaním termom  $\chi(b)$  a aproximáciou Mumford-Shah funkcionálu 4.33. Ide o zaujímavé pozorovanie, ktoré dáva tieto dve rôzne regularizácie do súvisu.





Obrázok 4.7: Príklady regularizácií použitých na *Lenu*

## Kapitola 5

# Regularizácia vektorovej obrazovej funkcie

Doteraz sme sa zaoberali prípadom, keď obrazová funkcia má podobu skalárnej funkcie

$$I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Veľa odborných článkov sa zaoberá iba týmto typom obrazovej funkcie a neberie v úvahu prípad, keď má obrazová funkcia vektorovú funkčnú hodnotu. Tento prípad obrazovej funkcie je diametrálne odlišný od prípadu skalárnej funkcie a vyžaduje si iný prístup. Niekoľko príkladov vektorovej obrazovej funkcie

- *digitálne farebné obrázky* : na pixel farebného obrázku sa dá pozerat' ako na troj zložkový vektor  $(R, G, B)$ . Veľké množstvo publikácií sa zaoberá práve regularizáciou farebnej obrazovej funkcie [1, 18, 38, 39, 40, 88].
- *pole smerového toku (optical flow and direction fields)* : algoritmy zaoberajúce sa optickým tokom [31, 32, 33] vedú na 2D alebo 3D vektorové pole reprezentujúce pohyb pixlu medzi dvoma obrazmi.
- *polia difúzneho tenzoru (field of diffusion tensors)* : v praxi ide často o medicínske obrazové dáta, ako magnetická rezonancia a iné mnohodi-menzionálne lekárske obrazy [34, 35].

Vektorová 2-D obrazová funkcia je definovaná

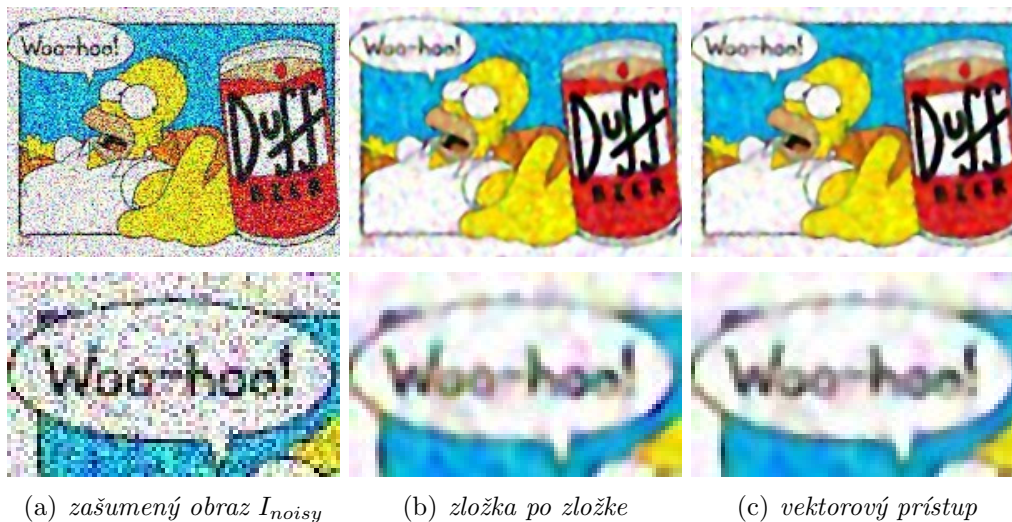
$$\mathbf{I} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

V kapitole sa budeme zaoberat' hlavne prípadom, keď  $n = 3$  ale väčšina regularizácii je definovaná pre ľubovoľné  $n$  a teda aj pre špeciálny prípad

skalárnej funkcie  $n = 1$ . Rozšírenia regularizácii určených pre vektorový prípad sa redukujú pre  $n = 1$  opäť na ich skalárny ekvivalent. Najskôr sa pozrieme na spôsob, ktorý neberie v úvahu vzájomnú väzbu medzi jednotlivými zložkami obrazovej funkcie.

## 5.1 Regularizácia zložka po zložke

Ide o najjednoduchší spôsob regularizácie vektorovej obrazovej funkcie. Hlavná idea je v tom, že skalárna regularizácia je aplikovaná na každú zložku obrazovej funkcie  $I_i$ . Asi je hneď každému zrejmé, že tento postup nebude dávať najlepšie výsledky. Typickým príkladom je existencia hrany len v jednej zložke obrazovej funkcie. Výsledok vznikne spriemerovaním jednotlivých skalárnych regularizácii a hrana jasne viditeľná v jednej zložke je vo výsledku rozmazaná. Druhým typickým príkladom sú kreslené obrázky, kde zložkové izotóny (dotyčnica k hrane)  $\xi_i$  sú prevažne rovnaké v nezašumenom obraze  $I_{clear}$ , ale s pridaním Gaussovho aditívneho šumu, ktorý je v každej zložke nezávislý, dôjde k rozsynchronizovaniu izotón a k tzv. efektu *miešania farieb* (*color blending*) viz. obrázok 5.1. Na hranách obrázku dochádza k farebným škvrnám, ktoré sú dobre viditeľné najmä v detaile textu. Preto je potrebné definovať lokálnu vektorovú geometriu, ktorá bude brať v úvahu všetky zložky obrazovej funkcie.



Obrázok 5.1: Zložka po zložke vs. vektorový prístup

## 5.2 Definovanie vektorovej geometrie

Nevýhody prechádzajúceho modelu regularizácie v podobe artefaktov na hranách, ktoré sú prítomné iba v niektorej zložke, prekonáva definícia vektorovej geometrie, ktorá berie do úvahy variáciu v každej zložke a definuje normu variácie v každom bode obrazovej funkcie. Regularizácia je definovaná rovnako ako v prípade skalárnej obrazovej funkcie, a to buď variačnými metódami, lokálnym difúznym tenzorom alebo orientovaným smerovým Laplaciánom. Tieto tri definície nemajú rovnakú definičnú silu a nie sú si ekvivalentné. Rozšírenie algoritmov určených pre skalárny prípad do vektorového si vyžaduje najskôr zadefinovanie lokálnej vektorovej geometrie, ktorá popisuje variáciu v každom bode  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ . Vo všetkých definíciách rozšírených na vektorový prípad bude vidieť, že pre prípad  $n = 1$  sú ekvivalentné so skalárnou definíciou. Je potrebné zadefinovať dva termíny.

- Jednak treba zaviesť pojem *variačnej normy*  $\mathcal{N}$ , ktorá detekuje hrany a relatívne odhalí hranu aj v prípade, že sa nachádza iba v jednej zo zložiek obrazovej funkcie. Ak je  $n = 1$  mala by norma  $\mathcal{N}$  byť rovná  $L^2$  norme parciálnych derivácií  $\|\nabla I\|$ .
- Dve odpovedajúce smerové orientácie variácie  $\theta_+$  a  $\theta_-$ , ktoré sú navzájom ortonormálne a korešpondujú kolmici smeru hrán a dotyčnici hrán. V prípade vektorovej geometrie je pojem smeru hrany pre všetky zložky trochu mätlivý a bude definovaný neskôr. Ak platí  $n = 1$  tak sa vektorový prípad redukuje na skalárny a musí platiť

$$\theta_+ = \eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \quad \text{a} \quad \theta_- = \xi = \frac{\nabla I^\perp}{\|\nabla I\|}$$

Jedným zo spôsobov ako definovať vektorovú geometriu je previesť vektorový prípad na skalárny pomocou funkcie  $f(\mathbf{I})$ , ktorá redukuje funkčný obor  $\mathbf{I}$  z  $\mathbb{R}^n$  na  $\mathbb{R}$ .

$$f(\mathbf{I}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Funkcia  $f$  prevedie vektorovú obrazovú funkciu  $\mathbf{I}$  na skalárnu funkciu  $I$ . Jedným z adeptov môže byť napríklad *luminiscenčná funkcia* [89]. Odpovedajúca norma  $\mathcal{N}$  a smerové variácie  $\theta_+$  a  $\theta_-$  majú tvar

$$\theta_+ = \frac{\nabla f(\mathbf{I})}{\|\nabla f(\mathbf{I})\|}, \quad \theta_- = \theta_+^\perp = \frac{\nabla f(\mathbf{I})^\perp}{\|\nabla f(\mathbf{I})\|}, \quad \mathcal{N} = \|\nabla f(\mathbf{I})\|$$

Každý by si ale mal uvedomiť, že takto definovaná transformačná funkcia  $f$  odstráni variáciu v bodoch s rovnakou luminiscenciou. Body

$\mathbf{x}_c = \{\mathbf{x} \in \Omega, f(\mathbf{I}(\mathbf{x})) = c, \forall \mathbf{x} \in \Omega\}$  s rovnakou luminiscenciou nebudú v tomto prípade detekované, keďže  $f(\mathbf{I}(\mathbf{x}_c))$  je konštantná.

Druhým prístupom je spôsob, ktorý neredukuje funkčný priestor  $\mathbb{R}^n$  na  $\mathbb{R}$  ale zachováva ho a definuje plne vektorovú geometriu. *Di Zenzo* [39] sa na obrazovú funkciu  $\mathbf{I} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  pozerá ako na vektorové pole a hľadá lokálnu variáciu  $\|d\mathbf{I}\|^2$  danú variačnou maticou  $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{I} &= \mathbf{I}_x dx + \mathbf{I}_y dy \\ \|d\mathbf{I}\|^2 &= d\mathbf{I}^T d\mathbf{I} = \|\mathbf{I}_x\|^2 dx^2 + 2\mathbf{I}_x^T \mathbf{I}_y dx dy + \|\mathbf{I}_y\|^2 dy^2 = dx^T \mathbf{G} dx \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \nabla I_i \nabla I_i^T \quad \text{a} \quad d\mathbf{x} = (dx, dy)^T \quad (5.2)$$

V prípade farebného obrazu  $\mathbf{I} = (R, G, B)$  má  $\mathbf{G}$  tvar

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} R_x^2 + G_x^2 + B_x^2 & R_x R_y + G_x G_y + B_x B_y \\ R_y R_x + G_y G_x + B_y B_x & R_y^2 + G_y^2 + B_y^2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Keď sa prípad vektorového obrazu zredukuje na prípad skalárneho je matica  $\mathbf{G}$  rovná

$$\mathbf{G} = \nabla I \nabla I^T = \begin{pmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_y I_x & I_y^2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Čo je zaujímavé na matici  $\mathbf{G}$  je to, že vlastné čísla  $\lambda_+$  a  $\lambda_-$  sú *maximum* resp. *minimum*  $\|d\mathbf{I}\|^2$ , zatiaľ čo vlastné vektory  $\theta_+$  a  $\theta_-$  sú ortonormálne vektory odpovedajúce smerovej orientácii variácie.

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{22} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (5.5)$$

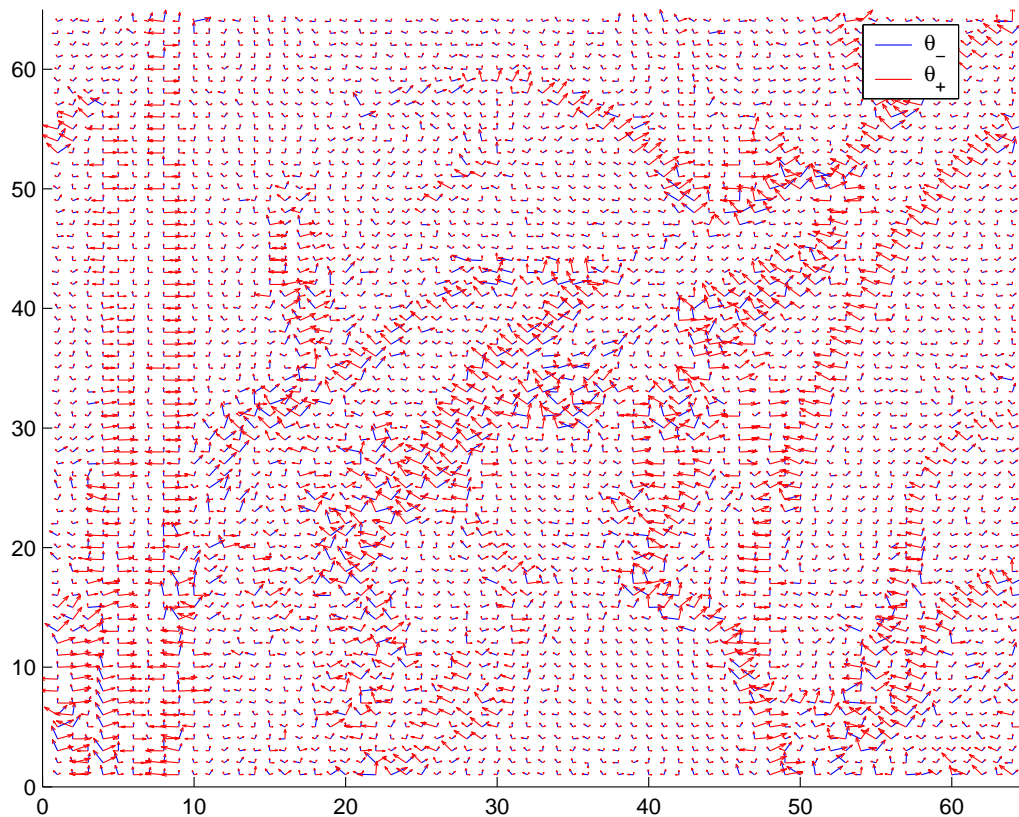
a

$$\theta_{\pm} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{22} - 2\mathbf{G}_{11} \pm \sqrt{\Delta} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

kde  $\Delta = (\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{22})^2 + 4\mathbf{G}_{12}^2$ . Názorná ukážka tvaru smerových derivácií  $\theta_{\pm}$  je v obrázku 5.2.

*Di Zenzo* navrhol priamy spôsob ako definovať vektorovú geometriu pomocou ortonormálnej báze  $\theta_{\pm}$  a variačnej miery  $\lambda_{\pm}$ . Miera variácie  $\lambda_{\pm}$  poslúži ako dobrý základ pre definovanie rôznych lokálnych geometrických prípadov.

- ak  $\lambda_+ \simeq \lambda_- \simeq 0$  potom v tomto bode je malá miera variácie, oblasť je prakticky homogénna a neobsahuje žiadne hrany v žiadnej zložke obrazovej funkcie. Pre tento prípad by norma variácie  $\mathcal{N}$  mala byť *nízka*.

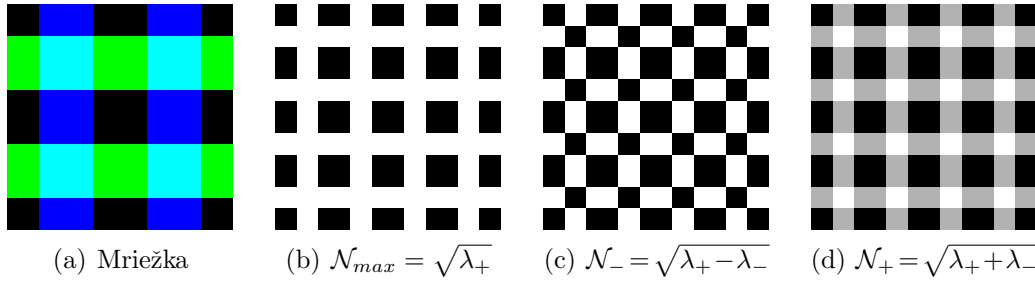


Obrázok 5.2: Smerové derivácie  $\theta_+$  a  $\theta_-$  na obrázku Lena

- ak  $\lambda_+ \gg \lambda_-$  potom je v oblasti tohto bodu veľká miera variácie. Bod sa môže nachádzať na hrane a preto by mala byť norma variácie  $\mathcal{N}$  vysoká.
- ak  $\lambda_+ \simeq \lambda_- \gg 0$  potom sa bod pravdepodobne nachádza v oblasti, kde je variácia vysoká v každom smere a môže ísť o roh hrany. Norma  $\mathcal{N}$  by podľa očakávania mala byť ešte vyššia než v predchádzajúcom prípade. Na druhú stranu takisto môže ísť o bod s okolím postihnutý šumom, preto je treba k takýmto bodom pristupovať opatrne.

Konečne zdefinujeme normu lokálnej variácie  $\mathcal{N}$  vektorových obrazov. Pokiaľ je norma založená na *Di Zeno* variačnej matici máme v podstate tri základné možnosti voľby.

- $\mathcal{N}_{max} = \sqrt{\lambda_+}$  ako norma je zvolená *maximálna* lokálna variácia viz. [40, 41].


 Obrázok 5.3: Rôzne typy noriem  $\mathcal{N}$ 

- $\mathcal{N}_- = \sqrt{\lambda_+ - \lambda_-}$  tiež nazývaná *koherenčná norma* je rozdiel *maximálnej* a *minimálnej* lokálnej variácie. S takto definovanou normou dochádza v bodoch s veľkou variáciou, ale s rovnakou vo všetkých smeroch, k izotropii a tým pádom môžu byť brané niektoré body na hrane ako súčasť homogénnej oblasti, ako to je vidieť v obrázku 5.3.
- $\mathcal{N}_+ = \sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}$ , ide o v literatúre často používanú normu, keďže odhaľuje hrany aj izolované body s veľkou variáciou a jej numerický výpočet si nevyžaduje dekompozíciu matice  $\mathbf{G}$  na vlastné čísla a vektory. Názorná ukážka normy je v obrázku 5.3.

$$\mathcal{N}_+ = \|\nabla I\|^2 = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{G})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\nabla I_i\|^2}$$

Pod'me si ukázať ako vyzerá *Di Zenzo* matica v špeciálnom prípade, keď je  $n = 1$ .

$$\mathbf{G} = \nabla I \nabla I^T = \begin{pmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_y I_x & I_y^2 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla  $\lambda_{\pm}$  a vlastné vektory  $\theta_{\pm}$  matice  $\mathbf{G}$  majú tvar

$$\lambda_+ = \|\nabla I\|^2, \quad \lambda_- = 0, \quad \theta_+ = \eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|^2}, \quad \theta_- = \xi = \frac{\nabla I^\perp}{\|\nabla I\|^2}$$

V tomto prípade sa všetky tri normy  $\mathcal{N}, \mathcal{N}_-, \mathcal{N}_+$  rovnajú  $\|\nabla I\|$ . Nasledujúce metódy vychádzajú z lokálnej geometrie založenej na *Di Zenzo* matici s použitím  $\lambda_{\pm}$  a  $\theta_{\pm}$  resp.  $\mathcal{N}_{max}, \mathcal{N}_{\pm}$  noriem.

### 5.3 CTV

*Color Total Variation* je jedna z prvých variačných metód na regularizáciu farebných obrazov. Bola navrhnutá Blomgren a Chanon [40] a ide o rozšírenie

metódy Total Variation viz. tabuľka 4.1  $\phi$  funkcií do farebných obrazov. Color Total Variation je definovaná ako minimalizácia funkcionálu  $\phi$  funkcie

$$\mathcal{E}_{CTV}(\mathbf{I}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \|\nabla I_i\| \, d\Omega \right)^2} \quad (5.7)$$

CTV minimalizácia vedie k parciálne diferenciálnej rovnici

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = A_i \operatorname{div} \left( \frac{\nabla I_i}{\|\nabla I_i\|} \right) \quad \text{pre } i = 1, \dots, n \quad \text{kde } A_i = \frac{\int_{\Omega} \|\nabla I_i\| \, d\Omega}{\mathcal{E}_{CTV}(\mathbf{I})} \quad (5.8)$$

Ako je vidieť z PDE 5.8 ide prakticky o rozklad jednotlivých zložiek  $I_i$  obrazovej funkcie a jediným zväzujúcim prvkom je koeficient  $A_i$ , ktorý vyjadruje podiel celkovej variácie v jednotlivej zložke  $I_i$  voči celkovej variácii vo všetkých zložkách. CTV nedefinuje spoločnú lokálnu geometriu nad zložkami obrazovej funkcie a hrany, ktoré nie sú prítomné vo všetkých kanáloch budú rozmazané a dôjde k rovnakému efektu ako v prípade regularizácie zložku po zložke. CTV teda nemôžeme považovať za plnohodnotnú regularizáciu vektorovej obrazovej funkcie. Pre lepšie pochopenie správania regularizácie a ukážku prechodu k  $\phi$  funkcii prepíšeme 5.7 do ekvivalentnej formy

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = A_i \frac{I_{\xi_i \xi_i}}{\|\nabla I_i\|} \quad (5.9)$$

kde  $\xi_i = \nabla I_i^\perp / \|\nabla I_i\|$  pre  $i$ -tú zložku. CTV vyhladzuje teda iba v smere izotóny s váhou nepriamo úmernou norme variácie jednotlivej zložky a nie v smere kolmom na izotónu. V miestach s nízkou variáciou sa teda nespráva izotropne. Každopádne príčina efektu *miešania farieb*, a to teda rôzna regularizácia pre jednotlivé zložky obrazovej funkcie, je zároveň dôvodom prečo je smer difúzie  $I_{\xi_i \xi_i}$  v homogénnych oblastiach natoľko rôzny, že vo výsledku aproximuje všesmerovú difúziu. Spolu s penalizátorom  $\frac{1}{\|\nabla I_i\|}$ , ktorý sa správa „agresívne“ k bodom s veľkou variáciou spôsobuje, že CTV dosahuje najmä pre veľmi zašumené obrazy uspokojujivé výsledky.

## 5.4 Vektorová $\phi$ funkcia

Analogicky k postupu v kapitole 4.3 definujeme funkciu  $\phi(\mathcal{N})$  kde  $\mathcal{N}$  je jedna z troch noriem  $\mathcal{N}_{max}, \mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-$ . Pointa a hlavný rozdiel oproti skalárnemu prípadu je v tom, že norma  $\mathcal{N}$  berie v úvahu lokálnu vektorovú geometrickú reprezentáciu.

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}) = \int_{\Omega} \phi(\mathcal{N}) \, d\Omega \quad (5.10)$$



Pokiaľ nebude uvedené inak budeme používať normu  $\mathcal{N}_+$ , kde

$$\mathcal{N}_+ = \sqrt{\lambda_+ + \lambda_-} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\nabla I_i\|^2} = \|\nabla \mathbf{I}\|$$

Prepisom 5.10 podľa Euler-Lagrangeovej rovnosti dostávame

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \begin{cases} I_i^{noisy} & t = 0 \\ \operatorname{div} \left( \frac{\phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}\|} \nabla I_i \right) & \text{inak} \end{cases} \quad (5.11)$$

Rovnica 5.11 je podobná ako v prípade skalárnej funkcie. Bohužiaľ jej prepis do tvaru smerového Laplaciánu nie je tak priamočiary ako pri skalárnej obrazovej funkcii, pretože berie v úvahu vzťah medzi jednotlivými zložkami. Viac o vzťahoch a ekvivalencii jednotlivých definícií vo vektorovom prípade v článku od Tschumperlé [88].

## 5.5 Beltrami

S prístupom odlišným od  $\phi$  funkcie prišli *Kimmel* a *Sochen* [9, 36] založenom na difúznom tenzore a obrazovej funkcii ako ploche v  $\mathbb{R}^{n+p}$  priestore. O tomto špeciálnom type regularizácie je napísané viac v kapitole 5.6. Beltramiho energetický funkcionál má tvar

$$\mathcal{E}_{Bel}(\mathbf{I}) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathbf{Id} + \mathbf{G})} \, d\Omega \quad (5.12)$$

kde  $\mathbf{G}$  je Di Zeno matica definovaná v rovnici 5.2 a  $\mathbf{Id}$  je identická matica. Je zrejmé, že platí  $\det(\mathbf{Id} + \mathbf{G}) = (1 + \lambda_+)(1 + \lambda_-)$  a teda

$$\mathcal{E}_{Bel}(\mathbf{I}) = \int_{\Omega} \sqrt{(1 + \lambda_+)(1 + \lambda_-)} \, d\Omega \quad (5.13)$$

Euler-Lagrangeova rovnosť použitá na 5.12 s metrikou  $\mathbf{Id} + \mathbf{G}$  dáva

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{Id} + \mathbf{G})}} \operatorname{div} \left( \sqrt{\det(\mathbf{Id} + \mathbf{G})} (\mathbf{Id} + \mathbf{G})^{-1} \nabla I_i \right) \quad \text{pre } i = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

Výsledná rovnosť 5.14 minimalizuje povrch definovaný obrazovou funkciou s ohľadom na metriku povrchu. Anizotropný difúzny tenzor  $\mathbf{D}$  má tvar

$$\mathbf{D} = \sqrt{\det(\mathbf{Id} + \mathbf{G})} (\mathbf{Id} + \mathbf{G})^{-1} \quad (5.15)$$

Ľahko sa dá overiť, že vlastné čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  a vlastné vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  tenzoru  $\mathbf{D}$  sa dajú vyjadriť pomocou vlastných čísel a vlastných vektorov matice  $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{1 + \lambda_-}{1 + \lambda_+}} & \mathbf{u} &= \theta_+ \\ & & \text{a} & \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{1 + \lambda_+}{1 + \lambda_-}} = \frac{1}{\lambda_1} & \mathbf{v} &= \theta_- \end{aligned}$$

Voľba  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  zaručí, že difúzny tenzor  $\mathbf{D}$  sa chová v závislosti na  $\lambda_+, \lambda_-$  nasledujúco :

- keď je  $\lambda_+ \approx \lambda_-$  ide o bod v homogénnej oblasti a  $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 1$  tým pádom sa tenzor  $\mathbf{D}$  chová izotropne.
- keď je  $\lambda_+ \gg \lambda_-$  je tenzor  $\mathbf{D}$  silne anizotropný prevažne v smere izotóny  $\theta_-$ .

Za pozornosť stojí vážený koeficient v rovnici 5.14

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{Id} + \mathbf{G})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \lambda_+)(1 + \lambda_-)}}$$

ktorý znižuje mieru difúzie pri veľkej lokálnej variácii a hrany sú potom v priebehu iterácie zachované, bohužiaľ spolu so šumom v podobe ostrých hrán.

## 5.6 Obrazová funkcia ako plocha v $\mathbb{R}^{n+p}$

*Sochen*, *Kimmel* a *Malladi* [9, 21] navrhli iný spôsob regularizácie založený na obrazovej funkcii ako mape v priestore  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Šedotónový obraz je potom dvojrozmerný povrch v trojrozmernom priestore. Bude vidieť, že regularizácie *Beltrami*, *Total variation* ale aj *Mean curvature* sú špeciálnym prípadom minimalizácie povrchu v  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Tento spôsob regularizácie je nezávislý na dimenzii definičného oboru  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  ako aj na dimenzii priestoru funkčných hodnôt  $\mathbb{R}^n$ . Je rovnako dobre použiteľný na šedotónové obrazy ako aj na farebné, ale rovnako dobre aj na multidimenzionálne obrazové dáta typu magnetickej rezonancie, štruktúry materiálu a podobne.

Ako bolo zmienené obraz nie je braný ako funkcia  $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ale ako povrch  $\mathcal{M}$  v  $\mathbb{R}^{n+p}$  a obrazová funkcia je nahradená funkciou z definičného oboru  $\Omega$  do  $\mathcal{M}$

$$\mathbf{X} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$$

$$\forall (\omega_1, \dots, \omega_p) \in \Omega, \mathbf{X}(\omega_1, \dots, \omega_p) = [X_1(\omega_1, \dots, \omega_p), \dots, X_{n+p}(\omega_1, \dots, \omega_p)]$$

Platí, že metrika  $G$  v priestore  $\mathbb{R}^p$  je rovná

$$G = (\partial_\Omega \mathbf{X})^T H (\partial_\Omega \mathbf{X})$$

kde

$$\partial_\Omega \mathbf{X} = (\partial_\Omega X_1, \dots, \partial_\Omega X_{n+p})^T \text{ a } \partial_\Omega X_i = \left( \frac{\partial X_i}{\partial \omega_1}, \dots, \frac{\partial X_i}{\partial \omega_p} \right) \text{ pre } i = 1, \dots, n+p$$

a  $H$  je metrika priestoru  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Predpokladáme, že mapa  $\mathbf{X}$  má zjednodušený tvar

$$\mathbf{X}(\omega_1, \dots, \omega_p) = [\omega_1, \dots, \omega_p, I_1(\omega_1, \dots, \omega_p), \dots, I_n(\omega_1, \dots, \omega_p)] \quad (5.16)$$

čo sa pre farebný obraz rovná

$$\mathbf{X}(x, y) = [x, y, I_1(x, y), I_2(x, y), I_3(x, y)]$$

a pre šedotónový obraz

$$\mathbf{X}(x, y) = [x, y, I(x, y)]$$

Ďalej budeme predpokladať, že metrika  $H$  v priestore  $\mathbb{R}^{n+p}$  je pozitívne semidefinitná matica v tvare

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

kde  $\beta$  je váha v funkčnom priestore. Potom je metrika  $G$  v  $\Omega$  matica  $\mathbf{G}$  rovná

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + \beta \sum_{i=1}^n (I_{i_x})^2 & \beta \sum_{i=1}^n (I_{i_x})(I_{i_y}) \\ \beta \sum_{i=1}^n (I_{i_x})(I_{i_y}) & 1 + \beta \sum_{i=1}^n (I_{i_y})^2 \end{pmatrix} = \mathbf{Id} + \beta \mathbf{G}$$

a vzdialenosť v priestore  $\Omega$  je

$$ds^2 = (dx_1, dx_2) \mathbf{G} (dx_1, dx_2)^T$$

Ako môže byť tento pohľad použitý v analýze obrazu? Aby sa dosiahla rekonštruovaná verzia poškodeného obrazu je minimalizovaná plocha v  $\mathcal{M}$ . Čo nie je nič iné ako hľadanie minima determinantu popisujúceho lokálnu metriku. Ak  $g$  značí determinant metriky  $\mathbf{G}$  potom minimalizujeme integrál

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) = \int_{\Omega} \sqrt{g} \, dx \, dy = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \beta \left( \sum_{i=1}^n \|\nabla I_i\|^2 + \|\mathbf{I}_x \times \mathbf{I}_y\|^2 \right)} \, dx \, dy \quad (5.18)$$

kde  $\|\mathbf{I}_x \times \mathbf{I}_y\|^2$  je norma vektorového súčinu derivácii obrazovej funkcie. Pre  $n = 1$  je term rovný nule. Od tohto miesta predpokladáme šedotónový prípad obrazovej funkcie, ale je to len z dôvodu jednoduchosti zápisu, inak je postup pre vektorový prípad analogický. Ak existuje minimalizátor potom musí splňovať Euler-Lagrangeovu rovnosť

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla I}{\sqrt{g}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta I_x}{\sqrt{1 + \beta (I_x^2 + I_y^2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\beta I_y}{\sqrt{1 + \beta (I_x^2 + I_y^2)}} \right) = \\ &= \frac{\beta I_{xx}(1 + \beta I_y^2) + \beta I_{yy}(1 + \beta I_x^2) - 2\beta^2 I_x I_y I_{xy}}{(1 + \beta (I_x^2 + I_y^2))^{3/2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Keď definujeme implicitnú funkciu  $I_{impl}(x, y, z) = z - \beta I(x, y) = 0$  potom jej stredné zakrivenie (MEAN CURVATURE) je rovné

$$\mathcal{K}(I_{impl}) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla I_{impl}}{\|\nabla I_{impl}\|} \right) \quad (5.20)$$

Rozpísaním 5.20 dostávame, že pre riešenie  $I$  rovnice 5.19 platí, že stredná hodnota zakrivenia plochy  $I_{impl}$  je rovná nule. Inými slovami plochy s nulovou strednou hodnotou zakrivenia sú známe ako minimálne plochy. Na výpočet numerického riešenia je rovnosť 5.19 rozpísaná

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t) = \mathcal{F} \quad (5.21)$$

kde  $\mathcal{F}$  je tok na ploche  $\mathcal{M}(t)$ . Keďže je mapa  $\mathbf{X}$  definovaná zjednodušene v tvare 5.16 potom dostávame

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t) = \left( 0, 0, \frac{\partial I}{\partial t}(t, x, y) \right)^T$$

Zmena toku je preto iba v  $z$ -tovej súradnici. A teda

$$\mathcal{F} = (0, 0, \alpha \mathcal{K}) = \alpha \frac{\beta I_{xx}(1 + \beta I_y^2) + \beta I_{yy}(1 + \beta I_x^2) - 2\beta^2 I_x I_y I_{xy}}{(1 + \beta (I_x^2 + I_y^2))^{3/2}} \quad (5.22)$$

Zaujímavú úlohu má koeficient  $\alpha$ . Môžeme ho interpretovať ako váhový koeficient. Ak  $\alpha = 1/\sqrt{g}$  potom 5.22 má podobu

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\beta I_{xx}(1 + \beta I_y^2) + \beta I_{yy}(1 + \beta I_x^2) - 2\beta^2 I_x I_y I_{xy}}{(1 + \beta(I_x^2 + I_y^2))^2} \quad (5.23)$$

a ide o známy *Beltramiho operátor* a na rovnosť 5.23 sa dá pozerat' ako na projekciu toku  $\mathcal{K}$  na z-tovú osu a platí  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathcal{K}N$  kde  $N = 1/\sqrt{g}(I_y, -I_x, 1)^T$  je jednotkový vektor kolmý na povrch  $\mathcal{M}(t)$ . Parameter  $\alpha = 1/\sqrt{g}$  má ešte jednu zaujímavu vlastnosť. Nech  $r$  je pomer

$$r = \frac{A(\Omega)}{A(\mathcal{M})}$$

kde  $A(\mathcal{M})$  je plocha povrchu  $\mathcal{M}$  a  $A(\Omega)$  je plocha projekcie  $\mathcal{M}$  do definičného oboru  $\Omega$ . Tento pomer vlastne vyjadruje veľkosť variácie na porchu  $\mathcal{M}$ . V miestach s malou variáciou je  $r \approx 1$  a v miestach hrán je  $r \approx 0$ . Keďže  $r$  môžeme chápať ako detektor hrán, bude zakomponovaný do modelu. Pre tento prípad zvolíme v rovnici 5.22  $\alpha = r^{\gamma+3}$  a teda tok 5.22 má tvar

$$\frac{\partial I}{\partial t} = r^{\gamma+3}(\beta I_{xx}(1 + \beta I_y^2) + \beta I_{yy}(1 + \beta I_x^2) - 2\beta^2 I_x I_y I_{xy}) \quad (5.24)$$

Voľbou  $\gamma$  dostávame rôzne typy regularizácie. Napríklad

- pre  $\gamma = -1$  ide o projekciu toku stredného zakrivenia na vektor normály. Viac o strednom zakrivení v [45].
- pre  $\gamma = 0$  ide o stredné zakrivenie (mean curvature).
- pre  $\gamma = 1$  ide Beltramiho regularizáciu viz. predchádzajúca kapitola 5.5.

Ďalším zaujímavým predmetom skúmania je vplyv konštanty  $\beta$  v metrike  $\mathbf{H}$  5.17 na výslednú regularizáciu. Voľbou  $\beta$  vravíme akú veľkú váhu prikladáme variácii vo funkčnej oblasti. Pre

- $\beta$  veľké, vravíme, že do výpočtu plochy berieme v úvahu iba variáciu funkčnej hodnoty  $I$  a nie definičný priestor  $\Omega$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\beta(I) = \int_{\Omega} \sqrt{\|\nabla I\|^2} dx dy \quad (5.25)$$

Ide o energetický funkcionál *totálnej variácie*.

- naopak pre  $\beta \approx 0$  je plocha definovaná ako projekcia  $I$  do definičného oboru  $\Omega$  a PDE je rovné

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \mathcal{E}_\beta(I) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = |\Omega| \quad (5.26)$$

Všetky závery uvedené v tejto kapitole platia aj pre prípad farebnej obrazovej funkcie, ale zápisy sú značne komplikovanejšie, preto nie sú uvedené. Ako je vidieť prístup cez minimalizáciu plochy v  $\mathbb{R}^{n+p}$  dáva všeobecný nástroj, ktorým sa dá regularizovať obrazová funkcia. Tak isto bolo vidieť, že regularizácie *Beltrami*, *totálna variácia* a *tok strednej hodnoty zakrivenia* sú špeciálne prípady minimalizácie plochy v  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Štúdiom minimalizácie plochy nad inými typmi metriky  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{G}$  sa zaoberali *Sochen*, *Deriche*, *Perez* v článku [21].

## 5.7 Porovnanie výsledkov regularizačných techník

V tejto kapitole budú uvedené výsledky dosiahnuté jednotlivými typmi regularizácie spolu s komentárom a popisom výsledkov. Numerický výpočet PDE prebiehal dopredne to znamená, že

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \frac{I_i(t+1) - I_i(t)}{\Delta t} = \operatorname{div}(\mathbf{D}(t)\nabla I_i(t))$$

kde  $\mathbf{D}(t) = f_1(\lambda_+(t), \lambda_-(t))\eta(t)\eta(t)^T + f_2(\lambda_+(t), \lambda_-(t))\xi(t)\xi(t)^T$ . Voľba  $f_1, f_2$  závisí na konkrétnej regularizácii. Iné efektívne schéma výpočtu je možné vidieť napríklad v článku od *Barash*, *Kimmel* [46] založené na aditívnom operátore (ADDITIVE OPERATOR SPLITTING) rozdeľujúcom regularizáciu na 2 časti, jednu obsahujúcu derivácie  $I_x$  a druhú  $I_y$ . Diskretizácia *divergenčného* termu  $\operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla I_i)$  je nasledujúca :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla I(i, j)) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{D}^{11}I_x + \mathbf{D}^{12}I_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{D}^{21}I_x + \mathbf{D}^{22}I_y) = \\ &= -I_{i,j}(\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}^{11} + \mathbf{D}_{j-\frac{1}{2}}^{11} + \mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}^{22} + \mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}^{22}) + \\ &\quad + I_{i,j-1}(\mathbf{D}_{j-\frac{1}{2}}^{11}) + I_{i,j+1}(\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}^{11}) + I_{i-1,j}(\mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}^{22}) + I_{i+1,j}(\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}^{22}) + \\ &\quad + I_{i+1,j+1}(\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}^{12} + \mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}^{21}) + I_{i-1,j-1}(\mathbf{D}_{j-\frac{1}{2}}^{12} + \mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}^{21}) - \\ &\quad - I_{i+1,j-1}(\mathbf{D}_{j-\frac{1}{2}}^{12} + \mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}^{21}) - I_{i-1,j+1}(\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}^{12} + \mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}^{21}) = \\ &= \mathbf{A}_D \operatorname{vec}(\mathbf{I}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

kde  $\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}^{11} = (\mathbf{D}_{11}(i, j) + \mathbf{D}_{11}(i, j + 1)) / 2$  a  $\mathbf{A}_{\mathbf{D}}$  je riedka matica, ktorá vznikne umiestnením  $\mathbf{D}$  na príslušné diagonály. Hodnoty na diagonále sú volené tak, aby platilo, že riadkový súčet matice  $\mathbf{A}_{\mathbf{D}}$  je rovný *nule*. Veľkosť časového kroku bola stanovená na  $\Delta t = 0.1$ . Pri väčších hodnotách sa regularizácia správala nestabilne. Na vstupný obraz bola použitá obmedzujúca podmienka na rozptyl  $\sigma(\mathbf{I})^2 = 1$ . Aby bolo zabránené „ustreleniu“ obrazovej funkcie najmä v bodoch s veľkou variáciou je rozsah funkčných hodnôt  $\mathbf{I}_t$  omedzený rozsahom funkčných hodnôt pôvodnej obrazovej funkcie  $\mathbf{I}_0$ . Počet krokov iterácie bol stanovený na 30.

Najprv je ukázaná regularizácia Mumford-Shah kapitola 4.7, Weickert kapitola 4.4 a Beltrami kapitola 5.5 na impresionistickom obraze *Vincent van Gogha, Kosatce*<sup>1</sup> viz. obrázok 5.4. Druhá ukážka 5.5 je regularizácia na zašumenom referenčnom obraze Leny s hladinou šumu  $SNR = 6dB$ . A tretia ukážka 5.6 na zašumenom kreslenom obrázku s hladinou šumu  $SNR = 4dB$ . V prvom prípade impresionistického obrazu ide najmä o ukážku chovania regularizácií na obrazových dátach v ostatných dvoch na praktické ukážky dosiahnutých výsledkov za cieľom dosiahnutia čo najlepšieho vizuálneho dojmu. Definície  $\phi$  funkcií sú v tabuľke 4.1.

- **Perona-Malik.** Výsledný estetický dojem je pomerne dobrý, rušivým elementom sú *artefakty* procesu regularizácie v miestach s veľkou variáciou v zdrojovom obraze, čo je spôsobené „agresívnym“ priebehom funkcie  $\phi'_{PM}(s)/s$  viz. tabuľka 4.6, ktorá je silne klesajúca a už pre pomerne malé  $\mathcal{N}$  má hodnoty blízke nule. Inými slovami v bode patriacom do homogénnej oblasti zdrojového obrazu, a kde je zároveň hodnota aditívneho šumu veľká, dôjde k veľkej variácii vo všetkých smeroch a pri voľbe normy  $\mathcal{N}_+$  je norma natoľko veľká, že regularizácia sa lokálne chová akoby išlo o roh hrany.
- **Chan-Shen.** Rekonštruovaný obraz je do značnej miery rozmazaný a ani homogénne oblasti v pôvodnom obraze nepôsobia vyhladene. Opäť je to spôsobené priebehom funkcie  $\phi'(s)/s$ , ktorá rozmazáva aj v miestach s pomerne veľkou variáciou.
- **Green.** Výsledok je o niečo lepší, ale inak platí to isté ako v predchádzajúcom prípade a najmä vyhladenie homogénnych oblastí je nedostatočné.

---

<sup>1</sup>ide o jedno z prvých a zároveň o najznámejšie dielo zo série namalované počas azylu v Saint-Rémy-de-Provence rok pred jeho smrťou. Prvým majiteľom bol francúzsky kritik a anarchista Octave Mirbeau. Za obraz zaplatil 300 frankov. V 1987 sa stal najdrahšou predanou maľbou za \$49 miliónov dolárov, tento primát mu vydržal dva a pol roku. Momentálne ide o šiesty najdrahší obraz histórie (so započítaním inflácie).



(a) pôvodný obraz



(b) Mumford-Shah



(c) Weickert  $\alpha = 0.005, C = 100$



(d) Beltrami

Obrázok 5.4: Vincent van Gogh, Kosatce





Obrázok 5.5: príklady regularizácií na farebnom obrázku



Obrázok 5.6: príklady regularizácií na farebnom kreslenom obrázku

- **CTV.** Homogénne oblasti pôsobia na oko príjemne, ale hrany sú mierne rozmazané. Pretože platí  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi'(s)/s = \infty$  musí byť funkcia zhora obmedzená, inak by dochádzalo k nestabilite výpočtu a k artefaktom vo výslednom obraze.
- **Logaritmická funkcia.** Výsledný dojem je dobrý a navyše zostali prítomné jemné detaily. Dobré je to vidieť napríklad v ozdobe klobúku Leny. Rušivým momentom je prítomnosť „závoja“, ktorý spôsobí zmenu podania farieb, ktoré už nie sú také živé.
- **Weickert** viz. kapitola 4.4. Veľkosť konvolučnej masky  $G_\sigma$  je  $7 \times 7$  a difúzny koeficient  $\alpha = 0.01$ . Keďže variácia sa počíta z väčšieho okolia, vznikajú väčšie ucelené plochy podobné t'ahu štetcom, čo je dobre vidieť na ukážke impresionistického obrazu. Celkový vizuálny dojem nie je moc dobrý.
- **I<sub>ξξ</sub>** viz kapitola 4.5. Keďže táto metóda vyhladzuje iba v smere izotóny, nie sú homogénne oblasti úplne vyhladené, oproti tomu úroveň detailov je pomerne veľká a celkový dojem je dobrý.
- **Beltrami.** Platí podobne ako v predchádzajúcom prípade, že homogénne plochy nie sú úplne hladké. Zato hrany sú zvýraznené, ako je vidieť z maľby „Kosatce“.
- **MumFord-Shah.** „Kosatce“ budia dojem akoby prešli procesom *posterizácie*<sup>2</sup>. Je to spôsobené tým, že Mumford-Shah regularizácia sa do značnej miery chová ako segmentácia. Na druhú stranu výrazné hrany ostali prítomné.

---

<sup>2</sup>posterizácia - zmenšenie rozsahu funkčných hodnôt obrazovej funkcie

## Kapitola 6

# Slepá viackanálová dekonvolúcia

Dekonvolúcia je témom množstva odborných článkov a dlhodobo ide o oblasť spracovania obrazu, ktorá je predmetom veľkého záujmu. V prípade slepej jednokanálovej dekonvolúcie väčšina postupov využíva to, že priestor riešení resp. konvolučných filtrov zmenší nejakou obmedzujúcou väčšinou štatistickou podmienkou [54, 55, 56, 57, 58]. Z článkov zaoberajúcich sa *neslepou* jednokanálovou dekonvolúciou je dobré spomenúť metódy založené na *Wienerovom* filtre [65, 66]. V prípade, že nie je k dispozícii žiadna *apriórna informácia*, tak je to *nedostatočne podmienený* problém. Dokonca aj v prípade, že konvolučný filter je známy nie je možné, z dôvodu nulových bodov v frekvenčnom spektre konvolučných filtrov, zaručiť úplnú rekonštrukciu. Regularizácia musí tiež garantovať jedinečnosť riešenia a splňovať numerickú stabilitu voči šumu. Toto je často dosahované pomocou anizotropných odšumovacích techník, ktoré boli spomenuté v predchádzajúcich kapitolách 3, 4 a 5. Regularizácia odstraňuje šum je nutnou súčasťou dekonvolučných techník a zlepšuje numerickú stabilitu ako aj kvalitu výsledného obrazu. Na druhú stranu dôsledkom odšumovania je čiastočné rozmazanie obrazu, čo je často v protiklade s dekonvolúciou, ktorej typickým príkladom je práve zaostrenie.

Spôsobom ako obísť problém nedostatočného podmienenia je okrem regularizácie aj zväčšenie množstva vstupnej informácie tým, že pozorovaná scéna bude viacnásobne digitalizovaná. Spolu s podmienkou, že konvolučné filtre sú tzv. *co-prime* (definované neskôr), voľne preložené, že dodržia istú mieru odlišnosti medzi sebou, podmienkou neprítomnosti šumu a znalosťou veľkosti konvolučného filtra, dáva možnosť ako rekonštruovať presný originál.

## 6.1 Matematický model

Od tohto momentu budeme používať model degradácie SIMO. Vzťah medzi pozorovaným obrazom  $Z_p$  a originálom  $I$  je definovaný ako

$$Z_p(\mathbf{x}) = (H_p * I)(\mathbf{x}) + N_p(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

kde  $H_p$  je konvolučný filter a  $N_p$  je aditívny Gaussovský šum. Tento model predpokladá, že konvolučný filter je rovnaký pre všetky zložky vektorového obrazu. Aj keď sa to môže javiť ako limitujúci faktor, obrázky zachytené digitálnymi fotoaparátmi toto splňujú. K degradácii reprezentovanej konvolúciou dochádza v momente prechodu optikou fotoaparátu, poprípade atmosférickými turbulenciami, teda pred tým ako dôjde k digitalizácii a rozkladu na farebné zložky v CCD snímači fotoaparátu. Je dobré si všimnúť, že v rovnici 6.1 je jedinou známou premennou premenná  $Z_p$ . Ide o nedostatočne podmienený problém s ohľadom na  $H_p$  a  $I$ . Použitým riešením bude minimalizácia funkcionálu nad obmedzeným priestorom riešení. Obmedzenia tu uvažované, sú všeobecné a často používané. O Gaussovom aditívnom šume predpokladáme, že je to *nezávislý biely šum*<sup>1</sup> so strednou hodnotou *nula* a konštantnou variáciou  $\sigma^2$ . Spomenuté obmedzenia aplikované na 6.1 majú nasledujúci tvar:

$$\int_{\Omega} (H_p * I - Z_p) d\Omega = |\Omega|\sigma^2, \quad p = 1 \dots P \quad (6.2)$$

$$\int_{\Omega} (Z_p - I) d\Omega = 0, \quad p = 1 \dots P \quad (6.3)$$

Metóda riešenia je založená na minimalizácii energetického funkcionálu v tvare

$$\mathcal{E}(I, H_1, \dots, H_P) = \mathcal{P}(I, H_1, \dots, H_P) + \lambda \mathcal{Q}(I) + \gamma \mathcal{R}(I, H_1, \dots, H_P) \quad (6.4)$$

Riešenie nesmie byť významne penalizované ani jedným z termov. Ich váha je nastavená pomocou koeficientov  $\lambda$  a  $\gamma$ . Ako sú definované a aký význam pre regularizáciu majú jednotlivé termy bude objasnené v nasledujúcich kapitolách.

---

<sup>1</sup>Ide o typ šumu, ktorý poškodzuje všetky frekvencie zdrojového signálu rovnako a jeho autokorelačná matica je diagonálna

### 6.1.1 $\mathcal{P}$ term

Term  $\mathcal{P}$  je vernostný term inými slovami term podobnosti k pôvodnému obrázku. Je definovaný ako :

$$\mathcal{P} = \sum_{p=1}^P \|H_p * I - Z_p\|^2 \quad (6.5)$$

Zabraňuje aby sa riešenie vzdialilo od predpokladaného riešenia a napomáha konvergencii počas iterácie.

### 6.1.2 $\mathcal{Q}$ term

Regularizácia s ohľadom na obrázok  $I$  by sa mala snažiť potlačiť prítomnosť šumu a zachovávať obraz tak, aby budil vizuálne dobrý dojem. Klasickým prístupom, ktorý navrhol Tichonov viz. kapitola 4.1 je

$$\mathcal{Q}(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I\|^2$$

Ide o prístup, ktorý je numericky pekne riešiteľný, pretože po prepise pomocou *Euler-Lagrangeovej rovnosti* má lineárny tvar. Bohužiaľ výhoda jednoduchej numerickej riešiteľnosti je prevážená úbohými vizuálnymi výsledkami.  $L_2$  norma príliš potláča informáciu v podobe hrán a výsledok je značne rozmazaný. Automaticky núkajúcim sa riešením je regularizácia pomocou *celkovej variácie* ďalej len  $TV$  (Total Variation) resp.  $CTV$  (Color Total Variation). Ide o funkcionál navrhnutý Rudinom [11].

$$\mathcal{Q}_{TV}(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I\| \, d\Omega \quad (6.6)$$

Po použití *Euler-Lagrangeovej rovnosti* na 6.4 dostávame

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I} = \sum_{p=1}^P \ddot{C}_{H_p}(C_{H_p}(I) - Z_p) - \lambda \nabla \left( \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial I}{\partial N} = 0 \text{ na } \partial\Omega \quad (6.8)$$

kde  $C_{H_p}(\cdot) = (H_p * \cdot)$  a  $\ddot{C}_{H_p}(\cdot)$  značí adjugovaný operátor v našom prípade  $\ddot{C}_{H_p}(\cdot) = H_p((-x) * \cdot)$ . V druhej rovnici je  $\frac{\partial I}{\partial N}$  smerová derivácia v smere kolmice k okraju definičného oboru. Na chvíľu predpokladajme, že konvolučný filter  $H_p$  je známy, potom je rovnica 6.7 vysoko nelineárna, navyše nedefinovaná pre prípady keď je  $\|\nabla I\| = 0$ . Na riešenie 6.7 bolo navrhnutých niekoľko

postupov. V tomto článku bude použitý výhradne *Half-quadratic* algoritmus definovaný v kapitole 4.6. Použitím na 6.6 vzniká funkcionál dvoch premenných

$$\mathcal{Q}_{TV_\epsilon}(I, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( v \|\nabla I\|^2 + \frac{1}{v} \right) \quad (6.9)$$

Z numerických dôvodov je  $v$  obmedzená na uzavretú množinu  $K_\epsilon = \{v : \epsilon \leq v \leq 1/\epsilon\}$ . Samotný algoritmus pozostáva zo striedavej minimalizácie

$$\mathcal{F}_\epsilon(I, v) = \lambda \mathcal{Q}_\epsilon(I, v) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \|C_{H_p}(I) - Z_p\|^2 \quad (6.10)$$

cez  $I$

$$I^n = \arg \min_I \mathcal{F}_\epsilon(I, v^{n-1}) \quad (6.11)$$

a  $v$

$$v^n = \arg \min_{v \in K_\epsilon} \mathcal{F}_\epsilon(I^n, v) = \min(\max(\epsilon, 1/\|\nabla I^n\|), 1/\epsilon) \quad (6.12)$$

Minimalizácia cez  $v$  je triviálna. Minimalizácia cez  $I$  tiež nie je zložitá, keďže  $\mathcal{F}_\epsilon$  splňuje predpoklady, že je konvexná a kvadratická dá sa jednoducho lineárne riešiť pomocou Euler-Lagrangeovej rovnosti.

Rovnakým spôsobom ako TV sa dá riešiť ľubovoľná regularizácia založená na minimalizácii variácie pomocou  $\phi$  funkcie za predpokladu, že splňuje podmienky *Half-quadratic* algoritmu. Horšie to je v prípade zložitejších nelineárnych regularizačných techník založených na difúznom tenzore a smerovom Laplaciáne. Spôsob diskretizácie 5.27 použitý v kapitole 5.7 síce umožňuje riešiť prípad difúzneho tensoru a podobným spôsobom je možné linearizovať smerový Laplacián, ale výsledky takto dosiahnuté sú v porovnaní s half-quadratic algoritmom horšie. Navyše v prípade vyšších hladín šumu sa algoritmus slepej viackanálovej dekonvolúcie MC-AM správa značne nestabilne.

Iný prístup k regularizácii obrázku  $I$  je použitie *Mumford-Shah* komplexného energetického funkcionálu založeného na Hausdorfovej miere viz. kapitola 4.7. Jeho tvar je

$$\mathcal{Q}_{MS}(I) = \int_{\Omega \setminus K} \|\nabla I\|^2 + \eta \int_K d\mathcal{H}^{n-1} \quad (6.13)$$

kde  $\mathcal{H}^{n-1}$  značí n-D Hausdorfovú mieru a  $S_u \in \Omega$  množinu bodov obrazu, kde je obrazová funkcia  $I$  nespojitá. Chambolle v [12] ukázal nasledujúce. Nech  $\mathcal{I}$  je po častiach konštantná aproximácia funkcie  $I$  nad definičným obrom  $C_\Omega = \{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} \subset \Omega$ . A nech je definovaný

funkcionál

$$\mathcal{Q}_{MS_\epsilon}(I) = \epsilon^2 \sum_{\mathbf{x} \in C_\Omega} \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h} \in \Omega}} \frac{\mu}{\epsilon} f \left( \frac{(I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}))^2}{\mu \epsilon} \right) \phi(\mathbf{h}) \quad (6.14)$$

kde  $\phi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  je párna funkcia splňujúca  $\phi(0) = 0$  a  $\phi(h_i) > 0$  pre  $i = 1, 2$  kde  $\{h_1, h_2\}$  tvoria bázu priestoru  $\mathbb{R}^2$  a  $f$  je neklesajúca ohraničená funkcia splňujúca  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = 1$  a  $f'(0) = 1$ . Vhodným kandidátom na  $f$  je napríklad  $f(t) = (2/\pi) \arctan((\pi t)/2)$ . Potom  $\mathcal{Q}_{MS_\epsilon}$   $\Gamma$ -konverguje k blízkej aproximácii Mumford-Shah funkcionálu. Každopádne, keďže na  $f$  nie sú kladené žiadne ďalšie obmedzenia je konvexnosť 6.14 otázná a výpočet správneho riešenia nie je zaručený. Preto bude  $f$  obmedzená ešte na priestor konkávných a derivovateľných funkcií. Vďaka tomu môže byť  $f$  prepísaná ako

$$f(x) = \min_{0 \leq v \leq 1} xv + \psi(v) \quad (6.15)$$

a ktorej minimum je dosiahnuté pre  $v = f'(x)$ . Keďže v priebehu minimalizácie  $\phi$  zmizne nie je potrebné mu venovať pozornosť. Dosadením 6.15 do 6.14 dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{MS_\epsilon}(I, v) = & \epsilon^2 \sum_{\mathbf{x} \in C_\Omega} \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h} \in \Omega}} \left[ \min_{0 \leq v(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{h}) \leq 1} \left( \mu \frac{\psi(v(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{h}))}{\epsilon} + \right. \right. \\ & \left. \left. + v(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{h}) \left| \frac{I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h})}{\epsilon} \right|^2 \right) \right] \phi(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

kde  $V : C_\Omega \times \epsilon \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, 1]$ . Postup minimalizácie pre funkcionál  $\mathcal{F}_\epsilon(I, v) = \lambda \mathcal{Q}_\epsilon(I, v) + 1/2 \sum_p \|C_{H_p}(I) - Z_p\|^2$  je presne rovnaký ako v prípade TV 6.10 pozostávajúcej zo striedajúcej sa minimalizácie cez  $I$  a cez  $v$ . Minima cez  $I$  je dosiahnuté pre

$$I^n = \arg \min_I (\mathcal{F}_\epsilon(I, v^{n-1}))$$

a cez  $v$  pre

$$v^n(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{h}) = f' \left( \frac{(I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}))^2}{\mu \epsilon} \right) \quad (6.17)$$

Opäť vidieť, že minimalizácia cez  $v$  je priamočiara a minimalizácia cez  $I$  nie je numericky komplikovaná, keďže  $\mathcal{F}_\epsilon(I, v)$  je konvexná a kvadratická s ohľadom na  $I$ .



### 6.1.3 $\mathcal{R}$ term

Od tohto momentu budeme pracovať s diskretnými dátami a všetky zápisy budú myslené v diskretnéj forme. V tejto kapitole bude uvedená regularizácia berúca v úvahu konvolučné filtre  $H_p$ . Diskretný zápis SIMO degradácie 6.1 v prípade neprítomnosti šumu vyzeraá

$$Z_p = H_p * I, \quad p = 1, \dots, P \quad (6.18)$$

Matice  $Z_p$ ,  $H_p$ ,  $I$  majú veľkosť  $(m_Z, n_Z)$ ,  $(m_H, n_H)$  resp.  $(m_I, n_I)$ . Bez straty na všeobecnosti sa dá predpokladať, že konvolučné filtre majú rovnakú veľkosť pre všetky kanály. Keby tomu tak nebolo, môže byť každý filter doplnený nulami do veľkosti najväčšieho. Z definície úplnej konvolúcie platí, že  $m_Z = m_H + m_I - 1$  a  $n_Z = n_H + n_I - 1$ . Ako už bolo spomínané presné riešenie existuje v prípade, že je dodržaná istá miera odlišnosti jednotlivých filtrov. Podme si túto vágnu formuláciu definovať presnejšie.

**Definícia 1.** *Nech  $\tilde{H}_p$  je diskretná  $z$ -transformácia  $H_p$ . Hovoríme, že polynómy  $\tilde{H}_p$  sú slabo nesúdeliteľné (weakly co-prime) práve vtedy ak platí, že ich najväčším spoločným deliteľom je skalár.*

Inými slovami ak platí  $\tilde{H}_{p_1}(z_1, z_2) = C(z_1, z_2)\tilde{H}_{p_2}(z_1, z_2), \forall p_1, p_2 = 1, \dots, P$  iba pre  $C(z_1, z_2) = a$ . Podobne definujeme *silnú nesúdelnosť*.

**Definícia 2.** *Nech  $\tilde{H}_p$  je diskretná  $z$ -transformácia  $H_p$ . Hovoríme, že polynómy  $\tilde{H}_p$  sú silne nesúdeliteľné (strongly co-prime) práve vtedy ak platí  $\nexists(\xi_1, \xi_2) : \tilde{H}_p(\xi_1, \xi_2) = 0, \forall p = 1, \dots, P$ .*

Je ľahko nahliadateľné, že obidve definície sú si ekvivalentné pre prípad 1-D polynómov. V 2-D to je trochu komplikovanejšie a ukazuje to na diametrálny rozdiel oproti 1-D polynómom. Je vidieť, že pre  $P = 2$  je Lebesgueova miera množiny polynómov splňujúcich silnú nesúdeliteľnosť rovná nule, pretože pravdepodobnosť prieniku dvoch nulových čiar v rovine je rovná jednej. Zatiaľ čo dvojíc polynómov splňujúcich *slabú nesúdeliteľnosť* je väčšina z tých, ktoré sa bežne vyskytujú v praxi. Dostačujúcim počtom pre 2-D prípad je  $P = 3$ . Pravdepodobnosť prieniku troch čiar v 2-D priestore je rovná nule.

**Lemma 2.** *Nech  $P \geq 2$ ,  $H_i$  sú slabo nesúdeliteľné a nech  $I$  obsahuje aspoň jeden nenulový prvok, potom riešenie rovnice*

$$Z_i * G_j - Z_j * G_i, \quad 1 \leq i < j \leq P \quad (6.19)$$

má nasledujúci tvar

$$G_i = \begin{cases} H_i * K & \text{pre } m_g \geq m_h \wedge n_g \geq n_h \\ \alpha H_i & \text{pre } m_g = m_h \wedge n_g = n_h \\ 0 & \text{pre } m_g \leq m_h \vee n_g \leq n_h \end{cases}$$

kde  $\mathbf{K}$  je matica veľkosti  $(m_G - m_H + 1, n_G - n_H + 1)$  a  $\alpha$  je skalár. Dôkaz je možné nájsť v [4].

Toto tvrdenie je kľúčové pre celý algoritmus a ukazuje za predpokladu dostatočného počtu snímok, neprítomnosti šumu a znalosti veľkosti konvolučnej masky, spôsob ako konvolučné masky presne určiť. V prípade, že snímky obsahujú šum, čo je prípad všetkých reálnych dát, je situácia odlišná. Na 6.19 sa nedá pozerat' ako na rovnicu, ale skôr ako na mieru podobnosti. Riešením 6.19 bude  $H_i$  s najmenším štvorcem chyby. Regularizačný term  $\mathcal{R}$  definujeme potom ako

$$\mathcal{R}(H_1, \dots, H_P) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq P} \|C_{Z_i}(H_j) - C_{Z_j}(H_i)\|^2 \quad (6.20)$$

kde  $C_{Z_i}(\cdot) = (Z_i * \cdot)$ . Je na prvý pohľad jasné, že správny odhad veľkosti konvolučných filtrov je pre výpočet  $G_i$  kľúčový. V [13] je dokázané, že pre nadhodnotenú veľkosť konvolučných filtrov sa term  $\sum_i \|H_i * I - Z_i\|$  správa ako penalizátor, čo dáva pomerne jednoduchý spôsob ako odhadnúť veľkosti masiek. Energetická rovnica 6.4 má po aplikovaní Euler-Lagrangovej rovnosti s ohľadom na  $H_p$  tvar

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial H_p} = C_I^*(C_I(H_p) - Z_p) - \gamma \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^P (C_{Z_i}^* C_{Z_i}(H_p) - C_{Z_i}^* C_{Z_p}(H_i)) \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial H_p}{\partial N} = 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad p = 1, \dots, P \quad (6.22)$$

kde  $C_I(\cdot) = (I * \cdot)$  a  $C_I^*(\cdot) = (I(-\mathbf{x}) * \cdot)$  je adjugovaný operátor. Ide o je sústavu lineárnych rovníc a nájdenie riešenia pre  $H_p$  je priamočiare. Neumannove okrajové podmienky, na nulovosť derivácie konvolučného filtra v smere kolmice na okraj, je možné zanedbať, keďže veľkosť filtra  $H_p$  je oproti veľkosti obrazu  $I$  zanedbateľná.

Stojí za pozornosť, že lemma 2 je splnené iba za predpokladu, že  $Z_p$  je výsledkom *plnej* konvolúcie. Toto bohužiaľ zriedkavo platí v prípade reálnych aplikácií. *Harikumar G.* a *Bresler Y.* sa v [4] zaoberali prípadom, keď je konvolúcia čiastočná a dokázali platnosť podobného lemmatu pre prípad čiastočnej konvolúcie. Od tohto momentu predpokladáme, že 6.20 je výsledkom čiastočnej konvolúcie a veľkosť  $Z * H$  je  $(m_Z - m_H + 1, n_Z - n_H + 1)$  ak  $m_Z \geq m_H$  a  $n_Z \geq n_H$ . Pri užití čiastočnej konvolúcie automaticky platí Neumannova hraničná podmienka v Euler-Lagrangovej rovnosti. Nevýhodou je, že čiastočná konvolúcia sa nedá počítat' pomocou Fourierovej transformácie.

Po dosadení termu 6.20 má energetický funkcionál 6.4 podobu

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_P) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \|\mathbf{H}_p * \mathbf{I}\|^2 + \lambda \mathcal{Q}(\mathbf{I}) + \gamma \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq P} \|C_{Z_i}(\mathbf{H}_j) - C_{Z_j}(\mathbf{H}_i)\|^2 \quad (6.23)$$

V nasledujúcich kapitolách si uvedieme spôsoby rozšírenia regularizácie viac-kanálovej slepej dekonvolúcie do vektorových obrazov.

## 6.2 Dekonvolúcia po jednotlivých zložkách

Ide o najjednoduchšiu formu rozšírenia viackanálovej slepej dekonvolúcie do vektorových obrazov. Ako názov hovorí, proces spočíva v rozložení obrazovej funkcie

$$\mathbf{I} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

na jednotlivé zložky  $(\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n)$  a aplikovaní dekonvolúcie na každú zložku samostatne. Je to najjednoduchší spôsob rozšírenia do vektorových obrazov, na druhej strane tento prístup neberie v úvahu koreláciu zložiek obrazovej funkcie. A ako bude vidieť dáva aj horšie výsledky.

## 6.3 Dekorelácia a následná dekonvolúcia po jednotlivých zložkách

Oproti predchádzajúcemu prístupu je pridaný počiatočný krok v podobe dekorelácie zložiek obrazovej funkcie. Cieľom je nájsť funkciu

$$\mathcal{T} : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}^r, \quad \text{kde } \mathbb{I} = \{\mathbf{I} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (6.24)$$

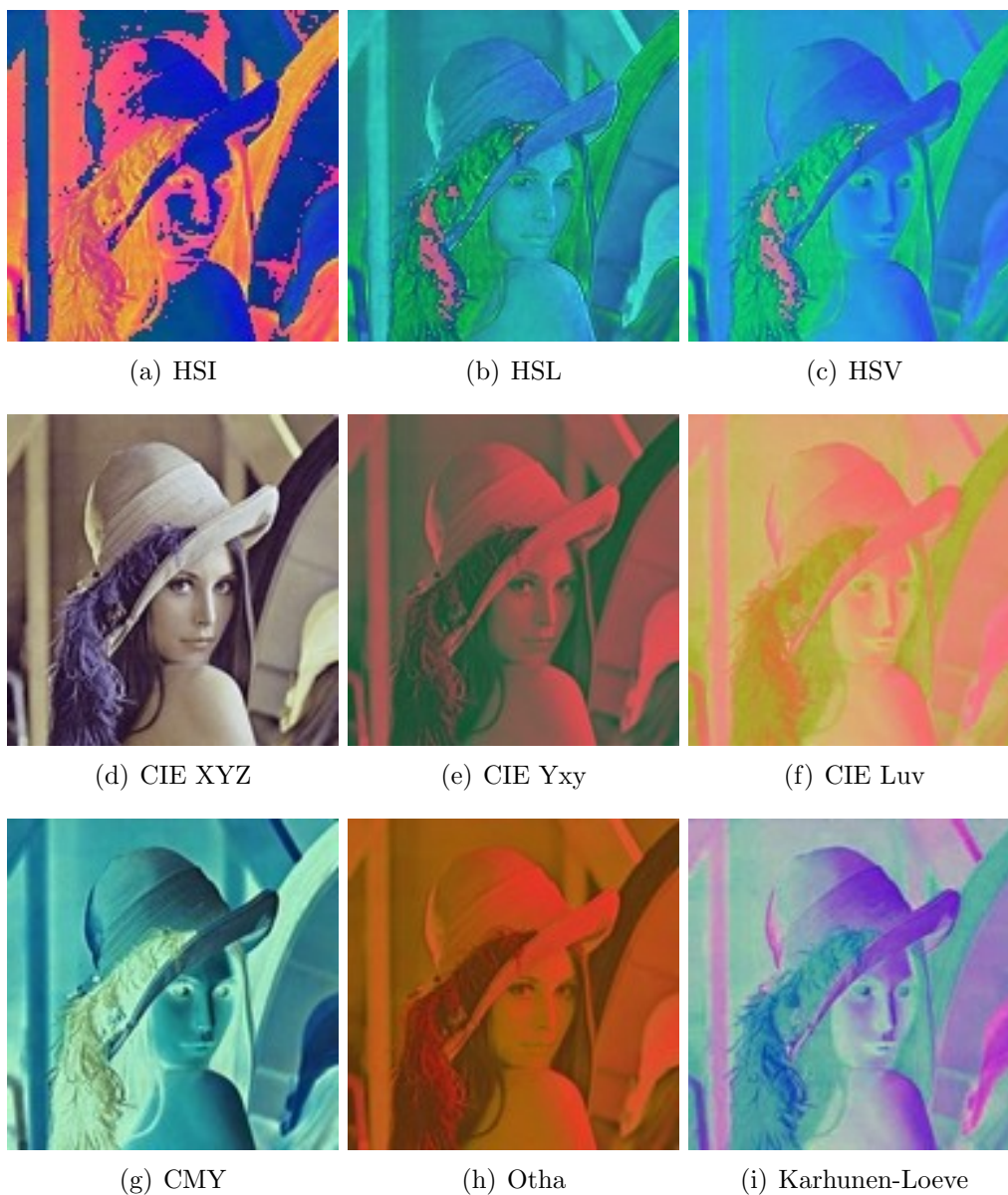
Ide o transformačnú funkciu, ktorá by mala splňovať

$$\rho(\mathcal{T}(\mathbf{I}_i), \mathcal{T}(\mathbf{I}_j)) = 0, \quad \text{pre } i \neq j \quad \text{kde } \rho \text{ je korelačný koeficient}$$

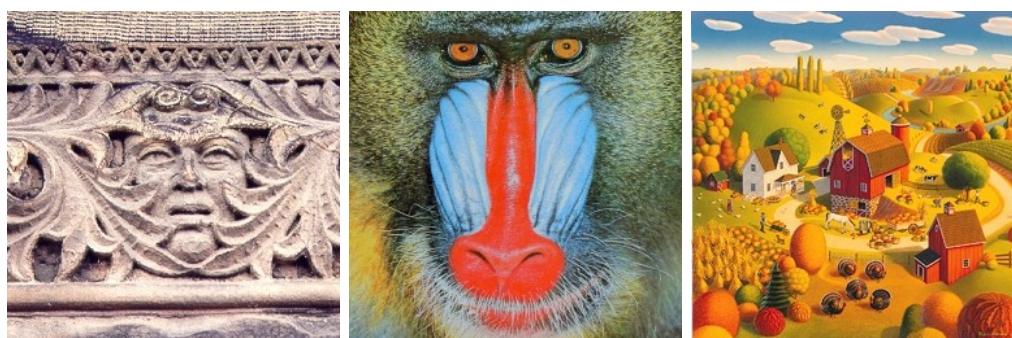
Je to teoretická podmienka, ktorá bude v skutočnosti asi ťažko splniteľná. Každopádne funkcia by sa mala snažiť zložky čo najviac dekorelizovať. Prvým prístupom bude transformácia RGB do iného farebného priestoru. Všetky typy transformácie sú zobrazené v obrázku 6.1. Výsledná korelácia farebného obrazu je počítaná ako

$$\rho_{\mathcal{T}} = |\mathbf{A} - \mathbf{Id}|_F, \quad \text{kde } \mathbf{A}_{ij} = \rho(\mathcal{T}(\mathbf{I}_i), \mathcal{T}(\mathbf{I}_j))$$

a  $|\cdot|_F$  je *Frobeniova* norma. Definície konverzie medzi jednotlivými farebnými priestormi sú uvedené napríklad v článkoch [48, 49].



Obrázok 6.1: Porovnanie rôznych farebných systémov zobrazené RGB systémom



(a) Freska

(b) Pavián

(c) Jesenný zber

$\rho_{\mathcal{T}}$	RGB	HSV	HSI	HSL	Hering	Otha	CMY
(a)	5.8028	1.6135	1.5316	0.8244	1.0694	1.5893	5.8028
(b)	1.5899	0.7156	0.5828	0.4936	1.4538	0.7152	1.5899
(c)	1.1887	0.4111	0.4155	0.4478	0.9764	0.2730	1.1887

$\rho_{\mathcal{T}}$	CIEXYZ	CIEY <sub>xy</sub>	CIEY <sub>uv</sub>	CIELab	Karhunen-Loeve
(a)	5.9232	1.4065	2.0222	3.2780	1.1115
(b)	4.1760	0.9545	0.9719	0.6217	0.2534
(c)	2.8699	1.1689	0.6925	0.5864	0.1420

Obrázok 6.2: Tabuľka celkovej korelácie po použití dekorelačných techník

Iným prístupom je *Karhunen-Loeve dekompozícia* [47], ktorá nie je definovaná na základe predpokladaných vlastností dát, ale priamo na základe ich konkrétnych hodnôt vstupujúcich do dekompozície. Ide o teoreticky najlepšiu možnú dekoreláciu vstupných hodnôt.

Tabuľka 6.2 ukazuje výsledné celkové korelácie po procese dekorelácie. V prvom prípade ide prakticky o šedotónový obraz tým pádom je jeho korelácia vysoká. V druhom prípade obraz obsahuje oblasti s veľkou prítomnosťou jednej konkrétnej zložky obrazovej funkcie a vzájomná korelácia je teda nižšia. A nakoniec v treťom prípade ide o farebný veľmi satureovaný obrázok s ešte menšou mierou korelácie. Z tabuľky je vidieť, že podľa predpokladov najlepšie výsledky dáva *Karhunen-Loeve* dekompozícia. Použiteľná je aj dekompozícia *Otha* a farebné systémy *HSL* a *HSI*.

## 6.4 Vektorová dekonvolúcia

Najvšeobecnejším prístupom je vektorová slepá viackanálová dekonvolúcia. Ako už bolo spomenuté, riešenie spočíva v nájdení minima energetického

funkcionálu

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P) = \mathcal{P}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P) + \lambda \mathcal{Q}(\mathbf{I}) + \gamma \mathcal{R}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P)$$

Termy  $\mathcal{P}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P)$  a  $\mathcal{R}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P)$  sú počítané analogicky ako v prípade skalárnej obrazovej funkcie  $\mathbf{I}$ . Termom, ktorý zväzuje jednotlivé zložky obrazovej funkcie je term  $\mathcal{Q}(\mathbf{I})$ . Jeho definícia v podkapitole 6.1.2 vychádza z kapitol 4 a 5.

Porovnanie výsledkov dosiahnutých *dekonvolúciou po jednotlivých zložkách, dekoreláciou a následnou dekonvolúciou po jednotlivých zložkách a vektorovou dekonvolúciou* na reálnych dátach spolu s komentárom je v kapitole 7. *Výsledky.*

## 6.5 MC-AM algoritmus

Energetický funkcionál má v prípade použitia totálnej variácie 6.6 tvar

$$\mathcal{E}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \|H_p * \mathbf{I}\|^2 + \lambda \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{I}\| + \gamma \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq P} \|C_{\mathbf{z}_i}(H_j) - C_{\mathbf{z}_j}(H_i)\|^2 \quad (6.25)$$

$\mathcal{E}(\mathbf{I}, H_1, \dots, H_P)$  je funkcionál viacerých premenných, ktorý nemusí byť konvexný. Ak  $(\mathbf{I}, H_p)$  je riešením, potom riešením je aj  $(\alpha \mathbf{I}, (1/\alpha)H_p)$  (nejednoznačnosť strednej hodnoty),  $(\mathbf{I}(\mathbf{x} \pm \mathbf{h}), H_p(\mathbf{x} \pm \mathbf{h}))$  (nejednoznačnosť voči posunutiu) pre ľubovoľné  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ . Na druhú stranu pre pevné  $\mathbf{I}$  resp.  $H_p$  je  $\mathcal{E}(\mathbf{I}, H_p, \dots, H_p)$  konvexný funkcionál podľa  $H_p$  resp.  $\mathbf{I}$ . MC-AM algoritmus pre počiatočné  $\mathbf{I}_0$  strieda minimalizáciu podľa  $H_p$  a  $\mathbf{I}$ .

$$\begin{aligned} H_p^n &= \arg \min_{H_p} \mathcal{E}(\mathbf{I}^{n-1}, H_p) \quad \text{podľa 6.21} \\ \mathbf{I}^n &= \arg \min_{\mathbf{I}} \mathcal{E}(\mathbf{I}, H_p^n) \quad \text{podľa 6.12 alebo 6.17} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Minimum cez  $H_p$  je riešením sústavy lineárnych rovníc 6.21  $(\partial \mathcal{E})/(\partial H_p) = 0$ . Minimum cez  $\mathbf{I}$  je riešením 6.12 pre funkcionál totálnej variácie alebo 6.17 pre Mumford-Shah funkcionál. Invariancia strednej hodnoty je zaručená obmedzením 6.3. Správna veľkosť konvolučnej masky odstráni nejednoznačnosť voči posunutiu. V prípade neprítomnosti šumu je MC-AM algoritmus ekvivalentný EVAM algoritmu [4]. Prvý krok 6.26 presne rekonštruuje konvolučné masky a druhý nájde pôvodný obraz  $\mathbf{I}$ . Ak je prítomný šum, je ťažké povedať čokoľvek o konvergencii. Každopádne bude ukázané, že aj v prípade pomerne veľkej degradácie obrazu šumom je možné dostať rozumné výsledky. Za predpokladu použitia diskretizačného schématu konečného

stredového rozdielu 1.3.4 a modelu degradácie SIMO má 6.1 tvar

$$\vec{\mathbf{Z}} = \mathcal{H}\vec{\mathbf{I}} + \vec{\mathbf{N}} = \mathcal{I}\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{N}} \quad (6.27)$$

kde  $\vec{\mathbf{Z}} = \text{vec}([\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_P])$ ,  $\vec{\mathbf{H}} = \text{vec}([\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_P])$  a  $\vec{\mathbf{N}} = \text{vec}([\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_P])$  značia stĺpcovo zret'azené matice  $\mathbf{Z}_p$ ,  $\mathbf{H}_p$  a  $\mathbf{N}_p$  veľkosti  $3Pm_Zn_Z$ ,  $Pm_Hn_H$  a  $3Pm_Zn_Z$ . Matice  $\mathcal{I}$  a  $\mathcal{H}$  majú tvar

$$\mathcal{I} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{m_H, n_H}(\mathbf{I}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{m_H, n_H}(\mathbf{I}) \end{pmatrix}}_P, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} C_{m_I, n_I}(\mathbf{H}_1) \\ \vdots \\ C_{m_I, n_I}(\mathbf{H}_P) \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

kde  $C_{\mathbf{I}}$  a  $C_{\mathbf{H}}$  značia čiastočnú konvolúciu s  $\mathbf{I}$  resp.  $\mathbf{H}$ . Veľkosť matice  $\mathcal{I}$  je  $(3Pm_Zn_Z, Pm_Hn_H)$  a matice  $\mathcal{H}$  je  $(Pm_Zn_Z, 3m_In_I)$ . Ďalej prepíšeme 6.19 do lineárnej maticovej formy. Maticu  $\mathcal{Z}$  definujeme iteratívnym prepisom

$$S_{P-1} = (C^c(\mathbf{Z}_P) - C^c(\mathbf{Z}_P - 1))$$

$$S_t = \left( \begin{array}{c|ccc} C^c(\mathbf{Z}_{t+1}) & -C^c(\mathbf{Z}_t) & & \\ C^c(\mathbf{Z}_{t+2}) & & -C^c(\mathbf{Z}_t) & \\ \vdots & & & \ddots \\ C^c(\mathbf{Z}_P) & & & -C^c(\mathbf{Z}_t) \\ \hline 0 & & & -C^c(\mathbf{Z}_{t+1}) \end{array} \right), \quad t = P-2, P-3, \dots, 1$$

$$\mathcal{Z} = S_1$$

kde  $C^c(\mathbf{Z}_p)$  značí čiastočnú konvolúciu s obrazom  $\mathbf{Z}_p$  a ide o skrátenejší prepis  $C^c(\mathbf{Z}_p) = C_{m_Z, n_Z}^{m_H: m_Z, n_H: n_Z}(\mathbf{Z}_p)$ . Potom  $1/2\|\mathcal{Z}\vec{\mathbf{H}}\|^2$  nie je nič iné ako pravá strana rovnice 6.20 a rozmery matice  $\mathcal{Z}$  sú  $((P(P-1)/2)3(m_Z - m_H + 1)3(n_Z - n_H + 1), Pm_Hn_H)$ . Predpokladajme, že  $\text{supp}(\mathbf{Z}_p) \gg \text{supp}(\mathbf{H}_p)$  pre  $p = 1, \dots, P$ . Presný vzťah medzi veľkosťou jadra konvolučného filtra a obrazu je ukázaný v [4]. Obecne sa dá povedať, že veľkosť obrazu musí byť minimálne dvojnásobná ako veľkosť filtra  $m_Z \geq 2m_H - 1$  a  $n_Z \geq 2n_H - 1$ . Z lemy 2 plynie, že v prípade neprítomnosti šumu má  $\mathcal{Z}$  plnú stĺpcovú hodnotu ( $\text{rank}(\mathcal{Z}) = Pm_Hn_H$ ) iba ak je veľkosť filtra podhodnotená, inými slovami ak platí  $m_H \leq m_H^*$  a  $n_H \leq n_H^*$ , kde  $(m_H^*, n_H^*)$  je skutočná veľkosť filtra. Pre nadhodnotenú veľkosť  $m_H \geq m_H^* \wedge n_H \geq n_H^*$  je hodnota matice rovná  $\text{rank}(\mathcal{Z}) = Pm_Hn_H - (m_H - m_H^* + 1)(n_H - n_H^* + 1)$ . Viac o existencii riešenia a jeho vlastnostiach v [4]. Teraz zdefinujeme diskretizáciu duálnej premennej  $v$  v terme  $\mathcal{Q}$  pre prípad totálnej variácie 6.6, ale spôsob je rovnaký

aj v ostatných prípadoch regularizácie, stačí aby

$$\mathcal{Q}_\epsilon(\mathbf{I}, v) = \int_{\Omega} f_\epsilon(\|\nabla \mathbf{I}\|, v)$$

pre  $f_\epsilon$  pri pevnom  $v$  platilo, že je to kvadratická funkcia podľa  $\|\nabla \mathbf{I}\|$ . Pre jednoduchú štvorbodovú diskretizáciu 1.2 má  $f_\epsilon$  tvar 6.29 a pre komplexnejšiu osem bodovú 1.3 tvar 6.30

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( v_{i+\frac{1}{2},j} \|\mathbf{I}_{i+1,j} - \mathbf{I}_{i,j}\|^2 + v_{i,j+\frac{1}{2}} \|\mathbf{I}_{i,j+1} - \mathbf{I}_{i,j}\|^2 + \frac{1}{v_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{1}{v_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) = \\ = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{I}}^T \mathcal{L}_4(v) \vec{\mathbf{I}} + c(v) \quad (6.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( v_{i+\frac{1}{2},j} \|\mathbf{I}_{i+1,j} - \mathbf{I}_{i,j}\|^2 + v_{i,j+\frac{1}{2}} \|\mathbf{I}_{i,j+1} - \mathbf{I}_{i,j}\|^2 + \frac{1}{v_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{1}{v_{i,j+\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \|\mathbf{I}_{i+1,j+1} - \mathbf{I}_{i,j}\|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \|\mathbf{I}_{i+1,j-1} - \mathbf{I}_{i,j}\|^2 + \frac{1}{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \right) = \\ = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{I}}^T \mathcal{L}_8(v) \vec{\mathbf{I}} + c(v) \quad (6.30) \end{aligned}$$

kde  $\mathcal{L}_4$  je bloková 15-diagonálna a  $\mathcal{L}_8$  bloková 27-diagonálna matica a  $c(v)$  je suma inverzných hodnôt  $v$ . Pre Mumford-Shah regularizáciu 6.13 je rovnica podobná. Napríklad ak je  $\phi(h) = 0$  s výjimkou  $\phi(h) = 1/2$  pre  $h \in \{(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\}$  potom má 6.13 tvar 6.29 ak navyše platí  $\phi(h) = 1/(2\sqrt{2})$  pre  $h \in \{(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)\}$  potom má tvar 6.30. Každopádne, rozdiel je vo výpočte duálnej premennej  $v$ . Zatiaľ čo pre totálnu variáciu má tvar

$$v_{i\pm 1/2, j\pm 1/2} = \min \left( \max \left( \epsilon, \frac{1}{\|\mathbf{I}_{i\pm 1, j\pm 1} - \mathbf{I}_{i,j}\|} \right), \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (6.31)$$

pre Mumford-Shah 6.13

$$v_{i\pm 1/2, j\pm 1/2} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\pi (\mathbf{I}_{i\pm 1, j\pm 1} - \mathbf{I}_{i,j})^2}{2\mu} \right)^2} \quad (6.32)$$

Energetický funkcionál 6.4 sa dá pre konkrétnu veľkosť konvolučných filtrov  $(m_H, n_H)$  konečne prepísať do maticového zápisu

$$\mathcal{E}_{m_H, n_H}(\mathbf{I}, \mathbf{H}, v) = \lambda \vec{\mathbf{I}}^T \mathcal{L}(v) \vec{\mathbf{I}} + \gamma \|\mathcal{Z} \vec{\mathbf{H}}\|^2 + \|\mathcal{H} \vec{\mathbf{I}} - \vec{\mathbf{Z}}\|^2 \quad (6.33)$$



Požiadavky: počiatková hodnota  $\mathbf{I}^0$ , veľkosť konvolučných filtrov  $(m_H, n_H)$ , kde  $m_H \geq m_H^*$  a  $n_H \geq n_H^*$  a parametry regularizácie  $\gamma > 0$  a  $\lambda > 0$

- 1, for  $n \geq 1$
- 2,  $\mathbf{H}^n = \arg_{\mathbf{H}} \left( [(\mathcal{I}^{n-1})^T \mathcal{I}^{n-1} + \gamma \mathcal{Z}^T \mathcal{Z}] \vec{\mathbf{H}} = (\mathcal{I}^{n-1})^T \vec{\mathbf{Z}} \right)$
- 3,  $\mathbf{I}_0^n = \mathbf{I}^{n-1}$  a  $v_0 = \varphi(\mathbf{I}^{n-1})$
- 4, for  $k \geq 1$
- 5,  $\mathbf{I}_k^n = \arg_{\mathbf{I}} \left( [(\mathcal{H}^n)^T \mathcal{H}^n + \lambda \mathcal{L}(v_{k-1})] \vec{\mathbf{I}} = (\mathcal{H}^n)^T \vec{\mathbf{Z}} \right)$
- 6,  $v_k = \varphi(\mathbf{I}_k^n)$ ,  $\varphi$  je 6.31 alebo 6.32
- 7, endfor
- 8,  $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}_1^n$
- 9, endfor

Tabuľka 6.1: MC-AM algoritmus

kde  $\mathcal{L}$  je buď  $\mathcal{L}_4$  alebo  $\mathcal{L}_8$  poprípade iná matica, ktorá je výsledkom iného prístupu k regularizácii alebo k diskretizácii. Funkcia  $v$  je vynechaná, pretože ako sa ďalej ukáže, nie je v priebehu výpočtu potrebná. Algoritmus založený na striedaní minimalizácie cez  $\mathbf{I}$  a  $\mathbf{H}$  podľa 6.26 sa dá prepísať do podoby ako je v tabuľke 6.1.

Je vidieť, že každý krok je numericky jednoduchý, založený na riešení sústavy lineárnych rovníc. Sústava na riadku 2 sa dá riešiť priamo, keďže ide o symetrickú maticu s rozmermi  $Pm_H n_H$  a skoro určite regulárnu vďaka plnej stĺpcovej hodnosti matice  $\mathcal{I}$  viz. článok [4]. Ďalším zaujímavým pozorovaním je vplyv nadhodnotenej veľkosti matice filtrov na výsledok. V prípade neprítomnosti šumu bude dimenzia jadra zobrazenia  $\mathcal{Z}$  rovná  $(m_H - m_H^* + 1)(n_H - n_H^* + 1)$  a ľubovoľné  $\mathbf{G} \in \ker \mathcal{Z}$  má podľa lemy 2 tvar  $\mathbf{G} = \{\mathbf{K} * \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{K} * \mathbf{H}_P\}$  kde  $\mathbf{K}$  je spoločný chybový parameter v podobe matice. Našťastie je tento faktor penalizovaný termom  $\|\mathcal{H}\vec{\mathbf{I}} - \vec{\mathbf{Z}}\|^2$  energetického funkcionálu 6.33, vďaka čomu sa dá správne odhadnúť veľkosť konvolučných masiek v 2-D priestore rozmerov. Každopádne správny počiatkový odhad je pre výpočet kľúčový minimálne z pohľadu časovej náročnosti.

### 6.5.1 Odhady zložitosti

V tomto bode je dobré ukázať časovú a pamäťovú náročnosť konštrukcie matíc  $\mathcal{I}^T \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{Z}^T \mathcal{Z}$  a  $\mathcal{H}^T \mathcal{H}$ . Veľkosť matice  $\mathcal{I}$  je  $(Pm_Z n_Z, Pm_H n_H)$ , matice  $\mathcal{Z}$  je  $(P(P-1)/2(m_Z - m_H + 1)(n_Z - n_H + 1), Pm_H n_H)$  a matice  $\mathcal{H}$  je  $(Pm_Z n_Z, Pm_I n_I)$ . Ako je vidieť, spôsob konštrukcie matíc a následného maticového násobenia nie je vhodný, pretože samotné matice sú veľké. Našťastie existuje rýchla priama metóda konštrukcie.

Matica  $\mathcal{H}^T \mathcal{H}$  sa dá rozpísať

$$\mathcal{H}^T \mathcal{H} = \sum_{i=1}^P (C_{m_I, n_I}(\mathbf{H}_i))^T C_{m_I, n_I}(\mathbf{H}_i) = \sum_{i=1}^P C_{m_I, n_I}^{m_H: m_I, n_H: n_I}(\ddot{\mathbf{H}}_i *^s \mathbf{H}_i)$$

kde  $\ddot{\mathbf{H}}(i, j) = \mathbf{H}(m_H - i - 1, n_H - j - 1)$  pre  $0 \leq i < m_H$  a  $0 \leq j < n_H$ . Rovnosť  $(C_{m_I, n_I}(\mathbf{H}))^T C_{m_I, n_I}(\mathbf{H}) = C_{m_I, n_I}^{m_H: m_I, n_H: n_I}(\ddot{\mathbf{H}} *^s \mathbf{H})$  je zrejmá z definície Toeplitzovej matice. Keďže cyklická konvolúcia sa rovná násobeniu vo frekvenčnej oblasti je jej časová zložitosť rovná  $O^t(m_H n_H \log(m_H n_H))$  a celková časová zložitosť výpočtu  $\mathcal{H}^T \mathcal{H}$  je rovná  $O^t(P m_H n_H \log(m_H n_H))$ . U pamäťovej náročnosti predpokladáme, že na uloženie riedkej matice  $A_{(m, n)}^p$ , kde  $(m, n)$  je veľkosť matice a  $p$  je počet nenulových prvkov, je potrebné rádovo  $O(p)$  bytov. Potom platí, že pamäťová náročnosť  $\mathcal{H}^T \mathcal{H}$  je  $O^m(m_H n_H)$ .

Pre maticu  $\mathcal{I}^T \mathcal{I}$  platí, že je diagonálna a dá sa napísať v tvare

$$\mathcal{I}^T \mathcal{I} = \{\mathcal{D}_{ij}, 1 \leq i, j \leq P\}$$

kde

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{cases} C_{m_H, n_H}(\mathbf{I})^T C_{m_H, n_H}(\mathbf{I}) = C_{m_H, n_H}^{m_H: m_H, n_H: n_H}((\ddot{\mathbf{I}} * \mathbf{I})(-m_H: m_H, -n_H: n_H)) & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{pre } i \neq j \end{cases}$$

kde  $C_{m_H, n_H}^{m_H: m_H, n_H: n_H}(\cdot) = C_{m_H, n_H}^{1/2m_H: 3m_H/2, 1/2n_H: 3n_H/2}(\cdot)$ . Časová zložitosť výpočtu  $\mathcal{I}^T \mathcal{I}$  je  $O^t(P m_I n_I \log(m_I n_I))$ , pamäťová zložitosť je  $O^m(m_I n_I)$ .

Podobne sa dá prepísať matica  $\mathcal{Z}^T \mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}^T \mathcal{Z} = \{\mathcal{B}_{ij}, 1 \leq i, j \leq P\}$$

kde

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{cases} -(C_{m_H, n_H}(\mathbf{Z}_i))^T C_{m_H, n_H}(\mathbf{Z}_j) & \text{pre } i \neq j \\ \sum_{t \neq i} (C_{m_H, n_H}(\mathbf{Z}_t))^T C_{m_H, n_H}(\mathbf{Z}_t) & \text{pre } i = j \end{cases} \quad (6.34)$$

Predpokladajme, že  $m_Z \gg m_H$  a  $n_Z \gg n_H$ , potom je časová zložitosť výpočtu  $\mathcal{Z}^T \mathcal{Z}$  rovná  $O^t(P(P m_Z n_Z \log(m_Z n_Z)) + P(P-1)(m_Z n_Z \log(m_Z n_Z))) = O^t(P^2 m_Z n_Z \log(m_Z n_Z))$ . Pamäťová náročnosť je  $O^m(m_Z n_Z)$ . V porovnaní s metódou konštrukcie matice  $\mathcal{Z}$  a následného násobenia, ktorej časová zložitosť je  $O(P^4 m_H^2 n_H^2 m_Z^2 n_Z^2)$ , ide o značné zlepšenie.

## 6.5.2 Vlastnosti konvergenzie

Teoretický dôkaz existencie a jedinečnosti riešenia 6.33 je netriviálny a je nad rámec rozsahu tohto článku. Každopádne bolo by dobré povedať pár slov o konvergencii MC-AM algoritmu.

Riešenie half-quadratic algoritmu funkcionálu  $\mathcal{E}_\epsilon$   $\Gamma$ -konverguje k riešeniu funkcionálu  $\mathcal{E}$ . Invariantnosť strednej hodnoty riešenia 6.3 je zabezpečená pre prípad, keď stredná hodnota počiatočného odhadu  $\mathbf{I}^0$  riešenia je rovná stredným hodnotám vstupných pozorovaní  $\mathbf{Z}_p$ . Podme to formulovať ako tvrdenie.

**Lemma 3.** *Pokiaľ  $\bar{\mathbf{I}}^0 = \bar{\mathbf{Z}}_p$  pre  $p = 1, \dots, P$ , potom platí  $\bar{\mathbf{I}}^n = \bar{\mathbf{Z}}_p$ .*

**Dôkaz.** Dôkaz je formou matematickej indukcie. Čiastočná konvolúcia v bode 2 MC-AM algoritmu je nahradená cyklickou konvolúciou. Vďaka tomu, že pre cyklickú konvolúciu platí konvolučný teorém, má  $\mathcal{Z}^T \mathcal{Z}$  po aplikovaní Fourierovej transformácie v bode  $(0, 0)$  hodnotu

$$\tilde{\mathbf{I}}^{n-1} \tilde{\mathbf{I}}^{n-1} \tilde{\mathbf{H}}_p^n + \gamma \sum_{i \neq p} \tilde{\mathbf{Z}}_i \tilde{\mathbf{Z}}_i \tilde{\mathbf{H}}_p^n + \sum_{i \neq p} -\tilde{\mathbf{Z}}_i \tilde{\mathbf{Z}}_p \tilde{\mathbf{H}}_i^n = \tilde{\mathbf{I}}_p^{n-1} \tilde{\mathbf{Z}}_p^{n-1} \quad \text{pre } p = 1, \dots, P \quad (6.35)$$

s použitím platnosti tvrdenia pre predchádzajúci krok  $\bar{\mathbf{I}}^{n-1} = \bar{\mathbf{Z}}^p$ , definíciou 6.27 a predpokladom nulovej strednej hodnoty šumu, sa dá 6.35 v bode  $(0, 0)$  zjednodušiť

$$\tilde{\mathbf{H}}_p^n(0, 0) + \gamma \left( (P-1) \tilde{\mathbf{H}}_p^n(0, 0) - \sum_{i \neq p} \tilde{\mathbf{H}}_i^n(0, 0) \right) = 1 \quad \text{pre } p = 1, \dots, P \quad (6.36)$$

Riešenie  $\tilde{\mathbf{H}}_p^n(0, 0)$  sústavy lineárnych rovníc 6.36 splňuje

$$\tilde{\mathbf{H}}_p^n(0, 0) = 1 \quad (6.37)$$

Rovnakým prepisom pomocou Fourierovej transformácie na krok 5 MC-AM algoritmu dostávame

$$\left( \tilde{\mathbf{H}}^n \tilde{\mathbf{H}}^n + \lambda + \tilde{\mathcal{L}}_k \right) \tilde{\mathbf{I}}_k^n = \tilde{\mathbf{H}}^n \tilde{\mathbf{Z}} \quad (6.38)$$

Keďže stĺpcový a riadkový súčet matice  $\mathcal{L}$  je rovný 0 je  $\tilde{\mathcal{L}}(0, 0) = 0$ . Pre riešenie kroku 5 potom musí platiť

$$\bar{\mathbf{I}}_k^n = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \bar{\mathbf{Z}}_p = \bar{\mathbf{Z}}_p \quad \square$$

□

MC-AM algoritmus je modifikáciou metódy najväčšieho sklonu (Steepest descent), kde priestorom riešení je zjednotenie podpriestoru obrazových funkcií a podpriestoru konvolučných filtrov. Algoritmus najprv prehladáva podpriestor konvolučných filtrov a potom podpriestor obrazových funkcií. Inými

slovami po nájdení minima v podpriestore  $\mathbb{H}$  pre  $\nabla_H \mathcal{E}_\epsilon = 0$  hľadá minimum v podpriestore  $\mathbb{I}$  pre  $\nabla_I \mathcal{E}_\epsilon = 0$ . Každý krok je maticovo ortogonálny k predchádzajúcemu, ide o metódu konjugatívneho gradientu (CONJUGATIVE GRADIENT) CG. Nutným predpokladom na použitie CG je pozitívna definitnosť Hessovej matice. Hessova matica energetického funkcionálu  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{I}, \mathbf{H})$  je symetrická matica

$$\mathbf{H}_{\mathcal{E}_\epsilon} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{H}\mathbf{H}}\mathcal{E}_\epsilon & \nabla_{\mathbf{H}\mathbf{I}}\mathcal{E}_\epsilon \\ \nabla_{\mathbf{I}\mathbf{H}}\mathcal{E}_\epsilon & \nabla_{\mathbf{I}\mathbf{I}}\mathcal{E}_\epsilon \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

kde  $\nabla_{\mathbf{H}\mathbf{H}}\mathcal{E}_\epsilon = \mathcal{I}^T \mathcal{I} + \gamma \mathcal{Z}^T \mathcal{Z}$  a  $\nabla_{\mathbf{I}\mathbf{I}}\mathcal{E}_\epsilon = \mathcal{H}^T \mathcal{H} + \lambda \mathcal{L}$ . Dôkaz pozitívnej semi-definitnosti matice  $\mathcal{E}_\epsilon(\mathbf{I}, \mathbf{H})$  je možné nájsť v [13]. Kľúčovým miestom dôkazu je pozorovanie, že vlastné čísla  $\lambda_{\mathbf{I}}$  cyklickej konvolučnej matice  $C_{\mathbf{I}}$  funkcie  $\mathbf{I}$  sú rovné Fourierovým koeficientom funkcie  $\mathbf{I}$ .

$$C_{\mathbf{I}}\mathbf{F} = \text{diag}(\lambda_{\mathbf{I}})\mathbf{F} \quad (6.40)$$

kde  $\mathbf{F}$  sú Fourierove vektory

$$\mathbf{F}(m, k) = e^{-i2\pi mk/N}$$

Kompletný dôkaz konvexnosti priestoru riešení je možné nájsť opäť v [13].

# Kapitola 7

## Výsledky

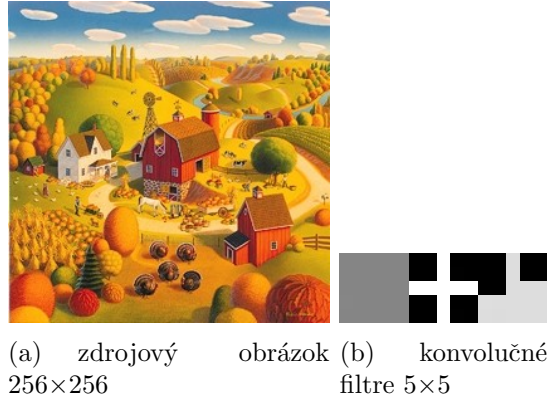
V tejto kapitole sú demonštrované výsledky MC-AM algoritmu. Najprv bude algoritmus použitý na syntetickej množine obrazových dát a potom aj na reálnych obrazových dátach. V prvom prípade bude ukázaná stabilita algoritmu voči prítomnosti šumu pri rôznych úrovniach SNR, v druhom prípade kvalita dosiahnutého výsledku na skutočných fotografiách získaných digitálnym fotoaparátom. Všetky experimenty používajú 8 bodové diskretizačné schéma. Voľba koeficientov  $\lambda, \gamma$  je explicitne uvedená.

### 7.1 Syntetické dáta

Aby bolo možné porovnať dosiahnuté výsledky je potrebné definovať chybu dosiahnutého výsledku. Ako odhad chyby je použitá *PMSE* (PERCENTAGE MEAN SQAURED ERROR)

$$\begin{aligned} \text{PMSE}(I, \bar{I}) &= 100 \frac{\|\bar{I} - I\|}{\|I\|} \\ \text{PMSE}(H, \bar{H}) &= 100 \frac{\|\bar{H} - H\|}{\|H\|} \end{aligned}$$



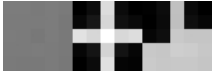



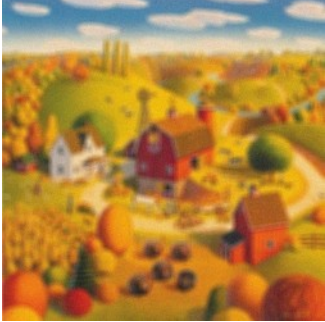

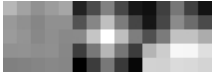
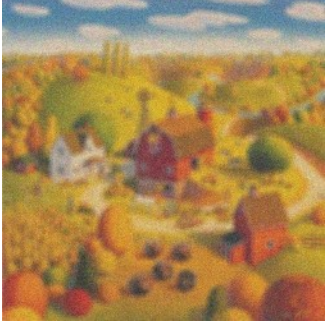

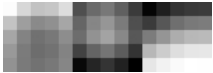
kde  $\bar{H}$  resp.  $\bar{I}$  sú výstupy MC-AM algoritmu. Namiesto PMSE by mohla byť použitá *miera zaostrenia* (FOCUS MEASURE) [50], ktorá bohužiaľ ale značne penalizuje výsledok, ktorý obsahuje artefakty vzniknuté počas procesu dekonvolúcie. Aj keď PMSE nemusí byť najlepší odhad chyby, pretože subjektívne môže výsledok budiť človeka od človeka iný vizuálny dojem, dáva dobrý odhad o kvalite dosiahnutého výsledku. Za základ bol použitý farebný veľmi saturovaný obrázok 7.1 veľkosti  $256 \times 256$ , na ktorý bola najprv použitá konvolúcia s tromi konvolučnými maskami  $7 \times 7$  a následne bol pridaný aditívny Gaussov biely šum s rôznymi hladinami ( $40dB, 30dB, 20dB, 10dB$ )



Obrázok 7.1: Zdrojový obraz a jednotlivé rozmazania

SNR	$\lambda$	$\gamma$	PMSE(I)	PMSE(H)
50dB	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^2$	2.14	2.85
40dB	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^2$	3.65	5.38
30dB	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^2$	7.80	12.44
20dB	$1 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^2$	15.94	37.79
10dB	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^2$	21.76	51.77

Tabuľka 7.1: Voľba koeficientov a chyba pri jednotlivých úrovniach šumu

SNR	Rozmazaný obraz	rekonštruovaný obraz	konvolučné filtre
40dB			
30dB			
20dB			
10dB			

Obrázok 7.2: výsledky MC-AM na syntetických dátach typu kresleného obrázku

na každú zložku kanálu. Týmto spôsobom sme dostali tri kanály  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$  a  $\mathbf{Z}_3$ . SNR (SIGNAL-TO-NOISE RATIO) je počítaný

$$\text{SNR} = 10 \log \left( \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \|Z_{ij} - \bar{Z}_{ij}\|}{N P m_Z n_Z \sigma^2} \right)$$

MC-AM algoritmus je aplikovaný na degradované obrázky  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$ . Hlavný cyklus algoritmu viz. tabuľka 6.1 beží 10 krát a vnútorný cyklus bežal raz pre každú iteráciu. Počiatočná hodnota  $I^0 = 0$ , veľkosť filtrov bola nastavená na  $7 \times 7$  a parametre  $\lambda$  a  $\gamma$  podľa tabuľky 7.1. Regularizačnou technikou bol zvolený Perona-Malik viz. tabuľka 4.1. Výsledky MC-AM algoritmu spolu s rekonštruovanými maskami je vidieť v obrázku 7.2. Ako ukazujú výsledky algoritmus sa správa stabilne ešte na úrovni šumu  $SNR = 20dB$  a pre  $SNR = 10dB$  dáva slušný obraz ak zoberieme v úvahu množstvo šumu vo vstupných obrazoch. Percentuálne množstvo chyby rekonštruovaného obrazu a masiek je v tabuľke 7.1.

## 7.2 Reálne dáta

Na fotenie bol použitý digitálny fotoaparát *Nikon D70*, v každom meraní bola nafotená sada dvoch alebo troch rozmazaných fotiek s rovnakou dobou expozície, citlivosťou a clonou.

Prvý prípad obrázku 7.3 ukazuje výsledky prístupu *zložku po zložke* ( $R, G, B$ ) spolu so sadou rekonštruovaných masiek veľkosti  $9 \times 9$ . Každý riadok matice filtrov predstavuje rekonštruované filtre konkrétnej zložky farebnej funkcie. Druhý dekonvolúciu *zložku po zložke s počiatočnou dekoreláciou* pomocou Karhunen-Loeve dekompozície a tretí *vektorovú dekonvolúciu*. Je vidieť, že vektorová dekonvolúcia na rozdiel od dekonvolúcie zložku po zložke neobsahuje artefakty na hranách v podobe rušivých pixelov. Pekne to je vidieť na detaile kvetu, kde v miestach hrán sú nepríjemné červené a modré pixely.

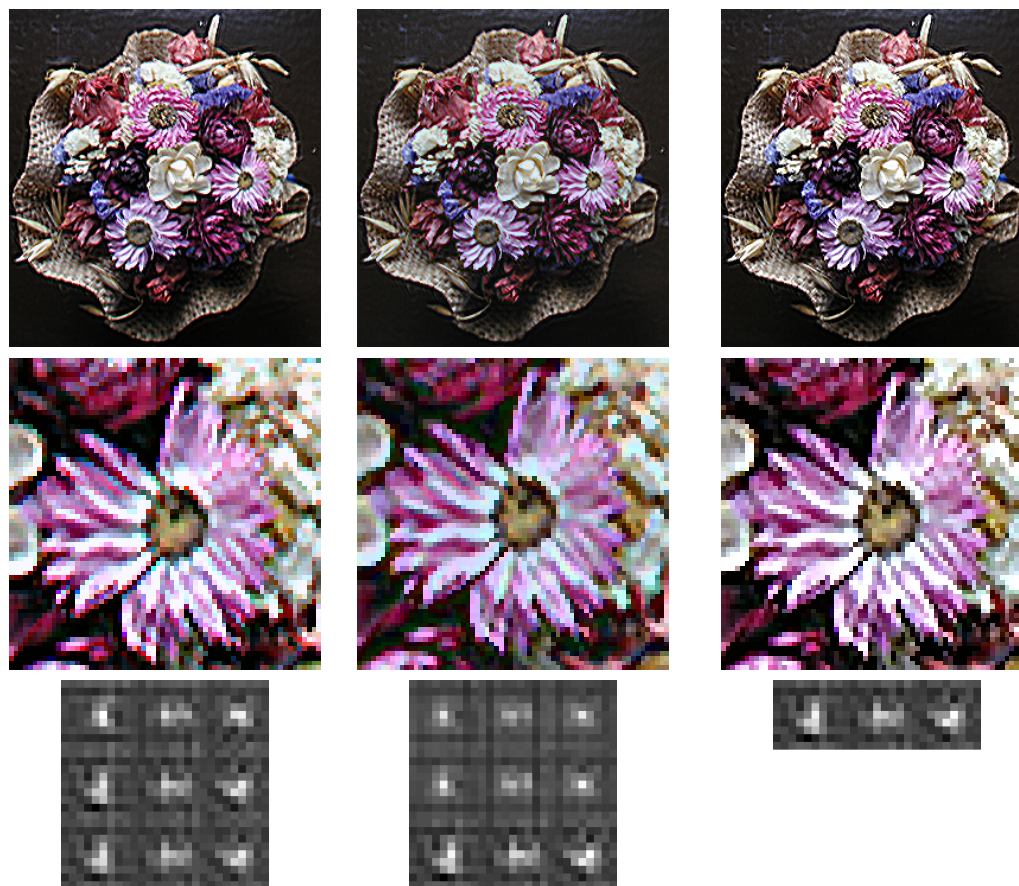
Ďalšie dva experimenty demonštrujú použitie MC-AM algoritmu na fotky z exteriéru. Fotky boli nafotené s citlivosťou *ISO 200* a s dlhšou dobou expozície, aby sa dosiahlo rozmazanie pohybom. V prvom prípade bola doba expozície *1/6 sekundy* v druhom *1/4 sekundy*. Dáta boli uložené v rozlíšení  $1504 \times 1000$  v nekomprimovanej podobe<sup>1</sup>. Slepá dekonvolúcia bola aplikovaná len na stredový výrez fotky. V prvom prípade ide o mozaiku na jednom z domov na námestí v Berouně obrázok 7.4. V tomto prípade je algoritmus

<sup>1</sup>Je dôležité mať na pamäti, že každá forma stratovej kompresie a najmä *kosínová* transformácia použitá v formáte *JPEG* degraduje detaily v obraze a algoritmus MC-AM v takom prípade býva často silne nestabilný.





(a) Tri rozmazané fotky

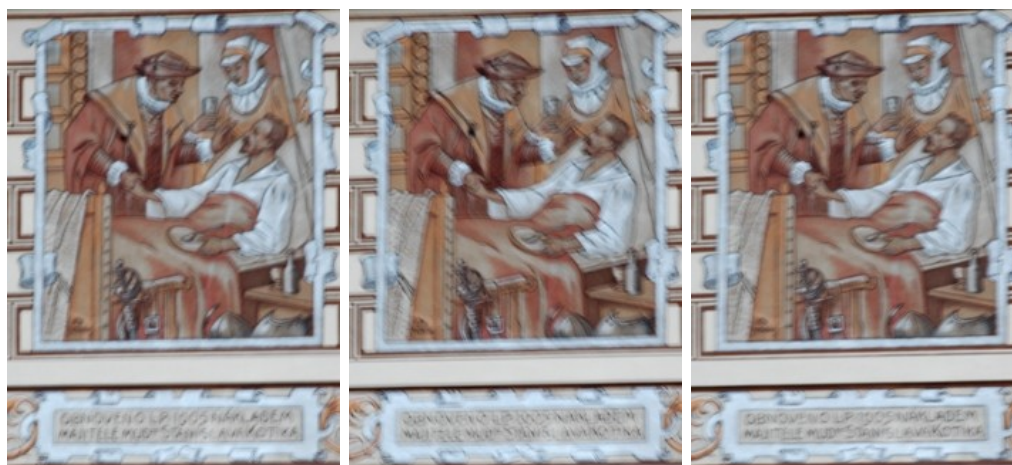


(b) Zložka po zložke

(c) Karhunen-Loeve dekompozícia

(d) Vektorová dekonvolúcia

Obrázok 7.3: Fotka kytice  $271 \times 326$

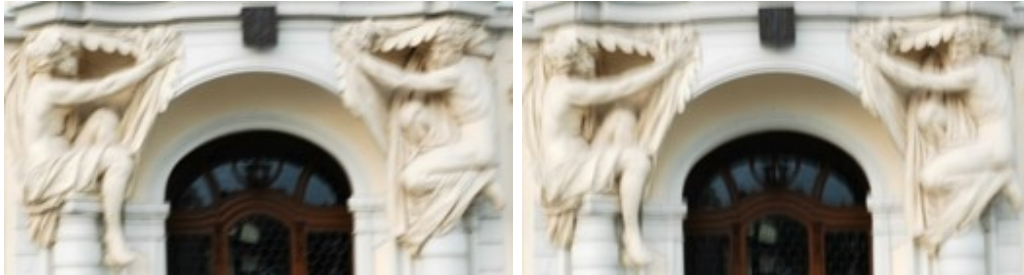


(a) Tri rozmazané fotky



(b) Výsledok, detail a rekonštruované konvolučné filtre

Obrázok 7.4: Historická mozaika domu 234 × 326



(a) Rozmazané fotky



(b) Výsledok, detail a rekonštruované konvolučné filtre

Obrázok 7.5: Priečelie radnice v Berouně  $261 \times 140$ 

aplikovaný pre ukážku ešte na detail textu mozaiky, aby bola názorná kvalita rekonštrukcie fotky na čitateľnosti textu. V druhom prípade ide o priečelie radnice v Berouně obrázok 7.5. V oboch prípadoch bol koeficient  $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$  a  $\gamma = 1 \cdot 10^1$ , pri tejto voľbe dôjdeme k najlepším výsledkom. V prípade zväčšenia váhy  $\lambda$  dôjde k zbytočnému vyhladeniu fotky, naopak ak je váha menšia, tak sa algoritmus správa nestabilne. Pre menšie  $\gamma$  konverguje algoritmus k výsledku pomaly a naopak pri väčšom vznikajú v fotke artefakty. Váha koeficientov  $\lambda, \gamma$  bola určená metódou pokusu a omylu a ide v podstate o jediný spôsob určenia koeficientov. Je dobré si uvedomiť, že v reále máme prakticky 100% zaručené, že konvolučné filtre budú *nesúdeliteľné*, každopádne platí, že s väčšou diverzitou filtrov dostávame lepšie výsledky. Zaujímavým pozorovaním je, že pre väčšinu prípadov stačia dve rozmazané fotografie. Dôvodom je rozšírenie skalárnej do vektorej obrazovej funkcie spolu s diverzitou konvolučných filtrov.

Ďalšou vhodnou oblasťou na použitie MC-AM algoritmu sú satelitné resp. astronomické fotky. Ide o fotky s dlhou dobou expozície fotejúce s veľkou citlivosťou. Vysoká citlivosť spôsobuje prítomnosť šumu. K rozmazaniu dochádza prechodom atmosféry poprípade inými vplyvmi. Výsledky dosiahnuté



(a) Rozmazané fotky



(b) Výsledok, detail nápisu a rekonštruované filtre

Obrázok 7.6: Fotka  $241 \times 352$  vyfotená mobilným telefónom Sony-Ericsson K750i

MC-AM algoritmom sú veľmi dobré. Sledovanie správania MC-AM algoritmu na satelitné fotky je za rozsahom tohto článku, ale ukážky výsledkov je možné nájsť v článkoch od Šroubka a Flussera [13].

Posledným prípadom, na ktorom je funkčnosť MC-AM algoritmu demonštrovaná, sú fotky vyfotené mobilným telefónom. Ide o do istej miery špecifický typ fotografie. O optike v mobilných fotoaparátoch sa prakticky nedá hovoriť a ak áno, tak je ďaleko za kvalitou bežných digitálnych fotoaparátov. Je to dané jednak konštrukčnými danosťami, ako je snaha o čo najmenšie rozmery a jednak tým k čomu majú byť použité. Ďalšou veľkou nepríjemnosťou je vysoká hladina šumu, čo je problém spôsobujúci silnú degradáciu kvality výsledku. Napriek všetkým týmto prekážkam sú výsledky MC-AM algoritmu slušné najmä v porovnaní so vstupnými obrázkami. V experimente 7.6 bola 2krát za sebou vyfotená reklamná tabuľa v interiéri budovy s obmedzeným denným svetlom. Takisto je vidieť detail nápisu a rekonštruované filtre. Na podobnosti rekonštruovaných filtrov je zrejmé, že podmienka *nesúdeliteľnosti* konvolučných filtrov nie je v praxi skoro žiadnym obmedzením.

# Kapitola 8

## Záver

Ako bolo v predchádzajúcej kapitole ukázané, algoritmus funguje stabilne ako pre syntetické dáta tak aj pre reálne. A to dokonca aj pri veľkej hladine šumu, ktorá je neoddeliteľnou súčasťou snímaných dát. Výsledky budia dobrý vizuálny dojem, sú znateľne ostrejšie než zdrojové obrázky a rekonštrované filtre odpovedajú typu rozmazania. Vektorová dekonvolúcia nedáva kvalitatívne o moc lepšie výsledky než dekonvolúcia zložku po zložke. To sa dá pripísať na vrub veľkej korelácii jednotlivých zložiek obrazovej funkcie. Výhodou je, že rozšírenie so sebou vďaka riedkosti regularizačnej matice neprináša žiadne významné výpočetné spomalenie a zároveň odstraňuje *color blending* problém.

Miestom, kde by mohol byť MC-AM algoritmus obzvlášť použiteľný, je v mobilných telefónoch, u ktorých je časté rozmazanie najmä v prípade obmedzených svetelných podmienok. Mohlo by ísť o plne automatizovaný proces. V prvom kroku by sa software mobilu napríklad pomocou *miery rozmazania* rozhodol či je fotka ostrá, ak nie tak by vyfotil ešte jednu fotku. Toto by bol vstup algoritmu. Ako bolo ukázané v praxi je rozdielnosť filtrov prakticky 100% zaručená. Veľkosť filtrov by sa dala určiť z *miery rozmazania* a aj v prípade, že by boli rozmery filtrov nadhodnotené nestráca algoritmus moc na stabilitu. Kritickým miestom je pamäťová a časová náročnosť. Každopádne smer vývoja mobilných telefónov je jasný, rýchlejšie procesory a viac pamäte za čo najnižšiu cenu a tempo vývoja je v tejto oblasti enormné. Okrem toho by sa dal výpočet MC-AM algoritmu obmedziť na menší výrez z fotografie, na ktorom by sa spočítali konvolučné filtre. Výsledná *neslepá* dekonvolúcia by spočívala v jednom riešení *riedkej* matice rovníc. Celý proces by bežal *real time* popri prípade *na pozadí* v prípade väčšej časovej náročnosti a bez potrebnej interakcie s užívateľom.

Napriek slušným výsledkom algoritmu nie je jeho podoba konečná a možných je hneď niekoľko rozšírení. Prvým je nájsť vhodnú podobu linearizač-

ného schématu pre zložitejšie formy regularizácie vektorovej obrazovej funkcie. Linearizácia nevrhnutá v tomto článku v kapitole *Porovnanie výsledkov regularizačných techník* je použiteľná, ale v porovnaní s *half-quadratic* schématom dáva horšie výsledky. Otázkou samou o sebe je existencia takého schématu.

Ďalším potrebných rozšírením je nájsť spôsob, ktorý zaručí invariancu algoritmu voči zmene polohy snímacieho zariadenia alebo snímaného objektu v čase. MC-AM algoritmus síce zaručuje istú malú mieru invariantnosti voči posunutiu ale vôbec nezaručuje invariantnosť voči rotácii. Naopak, v prípade otočenia snímacím zariadením dochádza vo výsledkoch k prítomnosti tzv. *duchov*. Ide o hrany jednotlivých zdrojových obrazov, ktoré figurujú na rôznych miestach výsledného obrazu a kazia tak celkový vizuálny dojem.

## Kapitola 9

### Príloha

Súčasťou zadania bola aj implementácia navrhnutých postupov. Ako implementačný jazyk bol použitý *Matlab* vo verzii R13 so štandardnou sadou toolboxov. V obale diplomovej práce je CD disk so zdrojovými kódmi a demonštrатívnymi ukázkami použitia MC-AM algoritmu.



## Literatúra

- [1] David Tschumperlé and Richard Deriche, „Diffusion PDEs on Vector-Valued Images”, *IEEE signal processing magazine*, pp. 16-25, September 2002.
- [2] A. Chambolle, „Inverse problems in image processing and image segmentation: some mathematical and numerical aspects”, *School on Mathematical Problems in Image Processing*, September 2000.
- [3] Brook A., Kimmel R. and Sochen N. A., „Variational Restoration and Edge Detection for Color Images”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 18, pp. 247-268, 2003.
- [4] Harikumar G., Bresler Y., „Perfect Blind Restoration of Images Blurred by Multiple Filters: Theory and Efficient Algorithms”, *IEEE Transactions on image processing*, Vol. 8, No. 2, pp. 202-219, February 1999.
- [5] Curtis R., Vogel, Mary and E. Oman, „Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 7, pp. 813-824, June 1998.
- [6] J.J. Koenderink, „The structure of images”, *Biological Cybernetics*, vol. 50, 363-370, 1984.
- [7] A.N. Tikhonov, „Regularization of incorrectly posed problems”, *Soviet. Math. Dokl.*, vol. 4, 1624-1627, 1963.
- [8] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-F´eraud, and M. Barlaud, „Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging”, *In Proceedings of the International Conference on Image Processing*, vol. 2, pp. 168-172, 1994.
- [9] Nir Sochen, Ron Kimmel, and Ravikanth Malladi, „A General Framework for Low Level Vision”, *IEEE Transactions on image processing*, vol. 7, no. 3, pp. 310-318, march 1998.

- [10] S. Geman and D.E. McClure, „Bayesian image analysis: an application to single photon emission tomography”, *Amer. Statist. Assoc.*, pp. 12-18, 1985.
- [11] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, „Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, *Phys. D*, vol. 60, pp. 259–268, 1992.
- [12] A. Chambolle, „Finite-differences discretizations of the Mumford-Shah functional”, *RAIRO Math. Model Numer. Anal.*, vol. 33, no. 2, pp. 261–288, 1999.
- [13] F. Šroubek, J. Flusser, „Multichannel Blind Iterative Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, no. 9, pp. 1094–1106, 2003.
- [14] J.Weickert and B. Benhamouda, „A semidiscrete nonlinear scale-space theory and its relation to the Perona-Malik paradox”, *Advances in Computer Vision*, pp. 1-10. Springer, Wien, 1997.
- [15] J.Weickert, „Coherence-enhancing diffusion of colour images”, in *Proc. 7th Nap. Symp. Pattern Recognition and Image Analysis*, vol. 1, pp. 239-244, Apr. 1997.
- [16] J.Weickert, „Anisotropic Diffusion in Image Processing”, *Teubner-Verlag*, Stuttgart, Germany, PP. 3-28, 1997.
- [17] J.Weickert. „Anisotropic Diffusion in Image Processing”, *Teubner-Verlag*, Stuttgart, Germany, 1998.
- [18] G.Sapiro, D.L.Ringach, „Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 5, no. 11, pp. 1582-1585, 1996.
- [19] A. Chambolle and P.L. Lions, „Image recovery via total variation minimization and related problems”, *Numerische Mathematik*, vol. 76 no. 2, pp. 167-188, 1997.
- [20] Filip Šroubek, „Image Fusion via Multichannel Blind Deconvolution”, *Ph.D. Thesis on Faculty of Mathematics and Physics Charles University*, Prague, 2002.
- [21] Nir Sochen, Rachid Deriche and Lucero Lopez-Perez, „Variational Beltrami flows over manifolds”, *International Conference Image Processing*, Barcelona, Spain, 2003.

- [22] Nir Sochen, Rachid Deriche, Lucero-Lopez Perez, „The Beltrami Flow over Manifolds”, *Rapport de recherche n° 4897*, 35 pp., July 2003.
- [23] P. Perona and J. Malik, „Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, July 1990.
- [24] P.J. Green, „Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified em algorithm”, *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 9 no. 1, pp. 84-93, March 1990.
- [25] D. Mumford and J. Shah, „Boundary detection by minimizing functionals”, in *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 22–26, 1985.
- [26] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli, „Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence”, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 43, no. 8, pp. 999–1036, 1990.
- [27] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli, „On the approximation of free discontinuity problems”, *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, vol. 6, no. 1, pp. 105–123, 1992.
- [28] Shah, J., „A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion”. In: *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 136-142, 1996.
- [29] Alicandro, R., Braides, A., Shah, J., „Free-discontinuity problems via functionals involving the L1-norm of the gradient and their approximation”, *Interfaces and Free Boundaries 1*, 17-37, 1999.
- [30] Teboul, S., Blanc-Fleraud, L., Aubert, G., Barlaud, M., „Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's”, *IEEE Trans. Image Proc.* 7, 387-397, 1998.
- [31] T. Chan and J. Shen., „Variational restoration of non-flat image features : Models and algorithms”, *Research Report. Computational and applied mathematics department of mathematics Los Angeles.*, June 1999.
- [32] R. Kimmel and N. Sochen, „Orientation diffusion or how to comb a porcupine. Technical Report 2000-02, CIS, 2000. Accepted to special issue on PDEs in Image Processing”, *Computer Vision, and Computer Graphics, Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2000.

- [33] P. Perona, „Orientation diffusions”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol 7, no. 3, pp. 457-467, March 1998.
- [34] C. Chef'd'hotel, D. Tschumperlé, R. Deriche, and O. Faugeras, „Constrained flows on matrix-valued functions : application to diffusion tensor regularization”. *In Proceedings of ECCV'02*, June 2002.
- [35] Vemuri, Y. Chen, M. Rao, T. McGraw, T. Mareci, and Z. Wang, „Fiber tract mapping from diffusion tensor mri”, *In 1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, (VLSM'01), July 2001.
- [36] R. Kimmel, R. Malladi, and N. Sochen, „Images as embedded maps and minimal surfaces: movies, color, texture, and volumetric medical images”, *International Journal of Computer Vision*, vol. 39, no. 2, pp. 111-129, September 2000.
- [37] J. Weickert, „Applications of nonlienaar diffusion in image processing and computer vision”, *Acta Math. Univ. Comeniana*, vol. 70, no. 1, pp. 33–50 Proceedings of Algoritmy 2000.
- [38] Seongjai Kim, Sung Ha Kang, „Implicit Procedures for PDE-based Color Image Denoising via Brightness-Chromaticity Decomposition”, *Technical Report 2002-07*, Department of Mathematics, University of Kentucky.
- [39] S. Di Zenzo, „A note on the gradient of a multi-image”. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 33, pp. 116-125, 1986.
- [40] P. Blomgren, „Total Variation Methods for Restoration of Vector Valued Images”, *PhD thesis, Department of Mathematics, University of California*, Los Angeles, June 1998.
- [41] G. Sapiro, „Vector-Valued Active Contours”, *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 680-685, San Francisco, CA, June 1996.
- [42] A. Roche, G. Malandain, X. Pennec, and N. Ayache, „Multimodal image registration by maximization of the correlation ratio”. *Technical Report 3378*, INRIA, August 1998.
- [43] J. Weickert, „Anisotropic Diffusion in Image Processing”, *PhD thesis, University of Kaiserslautern*, Germany, Laboratory of Technomathematics, January 1996.

- [44] T.F. Chan and J. Shen, „Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (cdd)”, *J. Visual Comm. Image Rep.*, vol. 12 no. 4, pp. 436-449, 2001.
- [45] Raúl San José Estépar, Steve Haker, and Carl-Fredrik Westin, „Riemannian Mean Curvature Flow”, *ISVC 2005, LNCS 3804*, pp. 613–620, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.
- [46] Danny Barash, Ronny Kimmel, „An Accurate Operator Splitting Scheme for Nonlinear Diffusion Filtering”, *HPL-2000-48(R.1)*, August 1st, 2000.
- [47] Johnson, D., „Karhunen-Loeve Expansion”, *Connexions Web site*, <http://cnx.org/content/m11259/1.3/> , Aug 8, 2003.
- [48] Marko Tkalčič, Jurij F. Tasič, „Colour spaces - perceptual, historical and applicational background”, *Faculty of electrical engineering University of Ljubljana*, 2001.
- [49] Adrian Ford, Alan Roberts, „Colour Space Conversions”, *Westminster University*, London, 1998.
- [50] J. Kautsky, J. Flusser, B. Zitová, and S. Šimberová, „A new wavelet-based measure of image focus”, *Pattern Recognit. Lett.*, vol. 23, pp. 1785–1794, 2002.
- [51] Filip Šroubek, Jan Flusser, „Registration and Fusion of Blurred Images”, *Institute of Information Theory and Automation Academy of Sciences of the Czech Republic*.
- [52] F. Šroubek, J. Flusser, „Image Fusion via Probabilistic Deconvolution”, *Institute of Information Theory and Automation*,
- [53] M. I. Sezan and A. M. Tekalp, „Survey of recent developments in digital image restoration”, *Optical Engineering*, vol. 29, pp. 393-404, 1990.
- [54] D. B. Gennery, „Determination of optical transfer function by inspection of frequency-domain plot”, *J. Optical Soc. Amer.*, vol. 63, pp. 1571-1577, 1973.
- [55] T. G. Stockham, T. M. Cannon, and R. B. Ingebretsen, „Blinddeconvolution through digital signal processing”, *Proc. IEEE*, vol. 63, pp. 678-692, 1975.

- [56] M. M. Chang, A. M. Tekalp, and A. T. Erdem, „Blur Identification using the bispectrum”, *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Processing*, vol. 39, pp. 2323-2325, 1991.
- [57] T. M. Cannon, „Blind Deconvolution of spatially invariant image blurs with phase”, *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Processing*, vol. 24, pp. 58-63, 1976.
- [58] A. Stern and N. Kopeika, „Method to calculate optical transfer functions for image motion and vibrations using moments”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 14, pp. 388-396, Feb. 1997.
- [59] Y. Yitzhaky and N. Kopeika, „Identification of blur parameters from motion blurred images”, *Graphical Models and Image Processing*, vol. 59, pp. 310-320, Sept. 1997.
- [60] A. E. Savakis and H. J. Trussel, „Blur identification by residual spectral matching”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 2, pp. 141-151, 1993.
- [61] R. G. Lane and R. H. T. Bates, „Automatic multidimensional deconvolution”, *J. Optical Soc. Amer. A*, vol. 4, pp. 180-188, 1987.
- [62] R. H. T. Bates, B. K. Quek, and C. R. Parker, „Some implications of zero sheets for blind deconvolution and phase retrieval”, *J. Optical Soc. Amer. A*, vol. 7, pp. 468-479, 1990.
- [63] D. C. Ghiglia, L. A. Romero, and G. A. Mastin, „Systematic approach to twodimensional blind deconvolution by zero-sheet separation”, *J. Optical Soc. Amer. A*, vol. 10, pp. 1024-1036, 1993.
- [64] Y. Yang, N. Galatsanos, and H. Stark, „Projection-based blind deconvolution”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, pp. 2401-2409, Sept. 1994.
- [65] Z. Mou-Yan and R. Unbehauen, „An iterative method of blur identification and image restoration”, in *Proc. 3rd IEEE Int. Conf. on Image Proc.*, vol. 3, pp. 77-80, 1996.
- [66] N. Miura and N. Baba, „Segmentation-based multiframe blind deconvolution of solar images”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, pp. 1858-1866, Sept. 1995.
- [67] D. Kundur and D. Hatzinakos, „Blind image deconvolution”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, pp. 43-64, May 1996.

- [68] C. Ong and J. Chambers, „An enhanced NAS-RIF algorithm for blind image deconvolution”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, pp. 988-992, July 1999.
- [69] M. Ng, R. Plemmons, and S. Qiao, „Regularization of RIF blind image deconvolution”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 9, pp. 1130-1138, June 2000.
- [70] J. Conan, L. Mugnier, T. Fusco, V. Michau, and G. Rousset, „Myopic deconvolution of adaptive optics images by use of object and point-spread function power spectra”. *App. Opt.*, vol. 37, pp. 4614-4622, July 1998.
- [71] D. Fish, A. Brinicombe, E. Pike, and J. Walker, „Blind deconvolution by means of the Richardson-Lucy algorithm”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, pp. 58-65, Jan. 1995.
- [72] T. Chan and C. Wong, „Total variation blind deconvolution”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 7, pp. 370-375, Mar. 1998.
- [73] Y.-L. You and M. Kaveh, „Blind image restoration by anisotropic regularization”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, pp. 396-407, Mar. 1999.
- [74] T. J. Schulz, „Multiframe blind deconvolution of astronomical images”, *J. Optical Soc. Amer. A*, vol. 10, pp. 1064-1073, 1993.
- [75] G. Harikumar and Y. Bresler, „Efficient algorithms for the blind recovery of images blurred by multiple filters”, *in Proc. 13th International Conference on Pattern Recognition*, vol. 3, pp. 97-100, Vienna, Austria, 1996.
- [76] G. B. Giannakis and R. W. Heath, „Blind identification of multichannel FIR blurs and perfect image restoration”, *in Proc. 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 717-720, Vienna, Austria, 1996.
- [77] G. Giannakis and R. Heath, „Blind identification of multichannel FIR blurs and perfect image restoration”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 9, pp. 1877-1896, Nov. 2000.
- [78] G. Harikumar and Y. Bresler, „Exact image deconvolution from multiple FIR blurs”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, pp. 846-862, June 1999.

- [79] S. Pillai and B. Liang, „Blind image deconvolution using a robust GCD approach”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, pp. 295-301, Feb. 1999
- [80] H.-T. Pai and A. Bovik, „Exact multichannel blind image restoration”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, pp. 217-220, Aug. 1997.
- [81] H.-T. Pai and A. Bovik, „On eigenstructure-based direct multichannel blind image restoration”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 10, pp. 1434-1446, Oct. 2001.
- [82] M. Banham and A. Katsaggelos, „Digital image restoration”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 14, pp. 24-41, Mar. 1997.
- [83] W. K. Pratt, „Digital Image Processing”. *New York: John Wiley*, 1991
- [84] A. B. Hamza, H. Krim, and G. Unal, „Unifying probabilistic and variational estimation”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, pp. 37-47, Sept. 2002.
- [85] G. Aubert and P. Kornprobst, „Mathematical Problems in Image Processing”, *New York: Springer Verlag*, 2002.
- [86] Miroslav Beneš, „Databáze restaurátorských zpráv s možností vyhledávání podle textové a obrazové informace”, *Master thesis, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta*, 2004
- [87] Filip Šroubek, Jan Flusser, „Shift-Invariant Multichannel Blind Restoration”, *Institute of Information Theory and Automation*
- [88] David Tschumperlé, „PDE's Based Regularization of Multivalued Images and Applications”, *PhD thesis, University of Nice-Sophia Antipolis*, 2002.
- [89] C. Connolly and T. Fliess, „A study of efficiency and accuracy in the transformation from rgb to cielaab color space”. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6 no. 7, July 1997.