**Oponentský posudek bakalářské práce Michala Ketnera**
***Konstruktivní univerzum*** $\mathbb{L}$

Bakalářská práce Michala Ketnera se zabývá dvěma různými způsoby konstrukce Gödelova konstruktivního univerza $\mathbb{L}$. Autor v práci dokazuje jejich ekvivalenci a následně fakt, že konstruktivní univerzum $\mathbb{L}$ je modelem ZFC + GCH. Práce čerpá z několika standardních učebnic teorie množin a podle zadání má by být přístupná pro studenty se základními znalostmi z teorie množin.

Práce má fyzicky 62 stran, ovšem tento rozsah je především důsledkem autorova rozhodnutí sázet matematické formule na samostatných řádcích v daleko větší míře, než je běžné. Reálnou délku, kterou by práce měla při běžnějším způsobu sázení, bych odhadoval na 25–30 stran. Práce se tedy navzdory prvnímu dojmu nevymyká běžné délce bakalářské práce v oboru Logika.

Pokud se v práci objevují logické chyby, tak jsou spíše nepodstatné. Tím ovšem výčet pozitiv této bakalářské práce končí. Práce působí značně ledabylým dojmem a obsahuje podstatné jazykové a formální nedostatky v četnosti, která podle mého soudu přesahuje únosnou mez. Autor se místy vyjadřuje natolik vágně, že není jasné, jestli sám rozumí tomu, co přesně tvrdí a dokazuje, popř. není jasné, co je chyba a co překlep. Matematický text má být jednoznačný a jasný. V tomto ohledu předložená práce selhává.

Práce selhává také v ambici být přístupná neodborníkům. Kromě toho, že autor mnohdy používá pojmy, které nikde nedefinuje, není také často jasné, odkud kam text kráčí. Krom úvodní stránky a krátkého odstavce na str. 27 se v samotném textu *nikde* nevyskytuje žádný komentář k dokazovaným matematickým tvrzením. Práci tvoří čistě posloupnost definic, lemmat a matematických vět. (Občasnou osamocenou větu typu „teď si dokážeme lemma o …“ nelze považovat za komentář, který by čtenáři materiál zpřístupňoval.) Technická část práce např. začíná *in medias res* tím, že autor definuje jakési množiny $Df^+(k, A, n)$. Jediné zdůvodnění, kterého se čtenář dočká, je, že si s jejich pomocí definujeme množinu $Df$ s podobně nejasným významem. Mám obavu, že čtenáři, který s danou problematikou není předem obeznámen, nemůže být jasné, za jakým účelem cokoliv z toho děláme.

Nedostatky, které práci vyčítám, lze mnohdy označit za formální. Nicméně v práci tohoto druhu, kdy se nejedná ani o prezentaci vlastních výsledků, ani o rešerši literatury k danému tématu, ani o samostatné studium nějakého odborného článku, je způsob prezentace zásadní. Podotýkám, že nejde o jeden či dva zásadní nedostatky, ale spíše o velké množství drobnějších nedostatků, které však v součtu určují kvalitu celé práce. Rád bych zde zdůraznil kvantitu těchto nedostatků, následující seznam zdaleka není vyčerpávající:

- Je patrné, že práci po sobě autor nečetl, např. hned v abstraktu se čtenář setká s větou *The goal is to give a comprehensive view of the construction* $\mathbb{L}$ *and verification of 's relative consistency CH.*

- Jedním ze dvou klíčových slov práce jsou *vnitřní modely.* Tento termín se ovšem v celé práci vyskytuje pouze jednou, a to na str. 4: *Průběhu důkazů dokážeme mimojiné, že $\mathbb{L}$ je vnitřní model ZF.*

- Poslední sekce je věnovaná důkazu platnosti GCH v $\mathbb{L}$, ovšem znění GCH se v textu vyskytuje pouze jednou, a to nesprávně (Věta 4.21). Autor si plete nekonečné kardinály a kardinály tvaru $\aleph_\alpha$ pro nekonečné $\alpha$.

- Autor opakovaně používá nedefinované pojmy a značení, např.:

  Lemma 3.2: náhle se objevuje značení $\mathbb{WF}$ a $R_\alpha$ bez jakéhokoli vysvětlení.

  Lemma 3.10 spojuje v práci nikde nezavedenou třídu $\mathbb{WF}$ s nikde neformulovaným axiomem fundovanosti pomocí důkazu, který nic neříká.

  Lemma 3.21: *$L_\alpha$ je absolutní[.]* Definován byl pouze pojem absolutní formule, nikoliv absolutní množiny.

  Věta 4.1: *WO $\Rightarrow$ AC [nový řádek] Nebo-li že princip dobrého uspořádání implikuje axiom výběru.* Zkratka WO ani znění samotného principu dobrého uspořádání se v textu nikde předtím ani potom neobjevuje (vyjma jednoho výskytu v důkazu Věty 4.5).

  Vhodné by bylo i definovat pojem tranzitivního modelu ZF.

- Typograficky je text na velmi nízké úrovni. Autor nepoužívá typografické prostředky (fonty, zalamování řádků, interpunkce u displejovaných formulí apod.) konzistentním způsobem. Občas se na začátku tvrzení nebo před dvojtečkou náhodně vyskytují mezery, občas ne. Občas je displejovaná formule následována interpunkcí, občas ne. Některá tvrzení jsou náhodně zarovnána na střed, jiná ne. Podotýkám, že se nejedná o nějaké typografické finesy známé pouze expertům: autor se mnohdy ani neobtěžuje zakončit matematické tvrzení tečkou, např. Lemma 3.9, Věta 3.19, Lemma 3.21, Věta 3.22 (vynechávám množství příkladů, kdy se tvrzení končí displejovanou formulí bez interpunkce). Celkově toto vyvolává dojem naprosté ledabylosti, dezorganizace a nezájmu o čtenáře.

- Mnohdy autor není schopen dostatečně přesně formulovat, co vlastně dané tvrzení říká, např.:

  První bod Definice 2.2 je, pokud ne mylný, tak aspoň krajně matoucí a vyžadující ke správné interpretaci "zjednodušení 4" ze str. 5. Interpretace tohoto "zjednodušení" je také dost nejasná.

  Definice 2.17 podstrádá klauzuli zaručující, že nic jiného $\Delta_0$-formulí není. Je také krajně nevhodné používat v jedné větě vedle sebe symboly $\varphi$ a $\phi$ ve dvou různých významech.

  Lemma 2.18: co je $\varphi(u)$ a $\psi(u, x)$?

  Lemma 2.20 říká *Gödelovy operace jsou $\Delta_0$-formule.* V textu není nikde vysvětleno, co toto tvrzení znamená.

  Lemma 2.23 není lemma, ale důkaz.

Definice 2.25 mluví o tranzitivním modelu, ale Lemma 2.26 o libovolné tranzitivní třídě.

Definice 3.11 zahrnuje požadavek, že jisté formule neobsahují univerzální kvantifikátor. Není jasné, jak si toto má čtenář vyložit, zejména když autor v úvodu tvrdí, že univerzální kvantifikátory nejsou oficiálně součástí jeho logického jazyka.

Lemma 4.11: autor v zápisu ledabyle zaměňuje ordinály a kardinály. Píše opakovaně $|\mathbb{L}_\alpha| = \alpha$, ale o řádek níže pak $|\mathbb{L}_\beta| = |\beta|$.

Není z textu jasné, proč je Definice 4.14 přípustná.

- Autor v textu opakovaně zaměňuje proměnné (symboly jazyka) a jejich hodnoty v nějakém ohodnocení, např. v Lemmatech 2.26 and 3.12. Symboly jako $x$ a $x_i$ se v důkazech vyskytují v dvojí roli.

- S výše uvedenou vágností konstratuje zbytečná formálnost tam, kde to není třeba. Např. proč Lemma 3.3 místo samoúčelně formálního zápisu $(\forall \alpha \in On)(\forall x \in L_\alpha)(y \in x \to y \in L_\alpha)$ neříká lidsky čitelným jazykem *Množina $L_\alpha$ je tranzitivní*? Autor také občas kombinuje formální a neformální vyjadřování poněkud zvláštním způsobem (např. Lemma 4.19).

- Sekce 3.2 se jmenuje $\mathbb{L}$ *je model ZF*, považoval bych tedy vhodné, aby se někde v práci vyskytovala axiomatizace ZF použitá v důkazu Věty 3.19, zvlášť pokud má práce být přístupná pro studenty teorie množin.

- Autor občas tvrdí, že něco platí pro všechna $x$, ale neobtěžuje se čtenáři oznámit z jaké množiny, např. v Lemmatu 2.13 má být $x_0, \ldots, x_{m-1} \in A$ a v Lemmatu 2.26 má být $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathsf{M}$.

- Časté jsou překlepy, např. *general contiuum hypothesis*, *zkoumání vlastnostní*, *formule s volnými proměný*, *budememe postupovat.* Celá jedna sekce nese název *Základní vlasnosti* $\mathbb{L}$.

- Slovo *lemma* autor většinou pokládá za nesklonné, píše *nebo-li* místo *neboli*, obecně jsou časté chyby v interpunkci, např. ve spojeních typu *existuje množina tak, že* se čárka píše za a nikoli před slovo *tak* (ostatně je vhodné v podobných případech použít spojení *taková, že*), ale i jinde.

- Autor na literaturu neodkazuje standardním způsobem, ale tím, že celý název díla (opakovaně v rámci jednoho paragrafu) přepíše do textu. U jedné ze tří referencí na str. 62 je pak špatně napsané jméno autora.

- Autor se často vyjadřuje krajně neobratně a stylisticky nevhodně, např.:

  (str. 5) *Ted' ke každému bodu komentář, proč takové omezení můžem přijmout.*
  *1. Si můžeme dovolit díky tomu, protože ostatní spojky a kvantifikátory se dají vyjádřit pomocí $\wedge, \neg, \exists$.*

  (Lemma 2.5) *Nechť tedy mějme nějaké přirozené číslo.*

(Věta 3.13) $\forall\alpha(\exists\beta > \alpha)$ *takže [tak, že] pro něj platí [...]*

(Lemma 3.17) $x$ *je ordinál je* $\Delta_0$ *formule.*

(str. 26) *Ted' když se kouknem na předchozí lemmata máme materiál pro toho, abychom zapsali každý prvek uzávěru jako* $\Delta_0$*-formuli.*

Autor dle mého soudu v předložené práci neprokázal schopnost napsat smysluplný, jednoznačný a logicky souvislý matematický text bez vážných formálních a jazykových nedostatků, který by čtenáře uvedl do dané oblasti. U typu práce, kdy je úkolem autora pouze čerpat z několika standardních učebnic a jejich obsah vhodně přeformulovat, nepovažuji absenci jednoznačných a vážných logických chyb za postačující k úspěšné obhajobě. Ostatně se domnívám, že neschopnost jednoznačně formulovat matematická tvrzení je zásadnějším nedostatkem než občasný mylný úsudek. Práci tedy navrhuji hodnotit jako *nedostatečnou.*

V Praze dne 29. 8. 2016 Mgr. Adam Přenosil