

Posudek na magisterskou práci Šárky Stejskalové

Název: Stromová vlastnost na více kardinálech, The tree property at more cardinals

Univerzita, katedra: Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, katedra logiky

Vedoucí práce: Mgr. Radek Honzík, Ph.D.

Je-li κ regulárních kardinál, pak κ -strom je strom výšky κ , jehož hladiny jsou menší než κ . Ptáme se, za jakých podmínek je takový strom kompaktní v tom smyslu, že má kofinální větev. Aronszajn dokázal ve třicátých letech, že na ω_1 vždy existuje strom, který kompaktní není (tzv. *Aronszajnův strom*). Na druhé straně, je-li κ slabě kompaktní kardinál, pak všechny κ -stromy kompaktní jsou (říkáme, že κ má *stromovou vlastnost*). Těžiště práce leží v definici a zkoumání dvou forcingů, které dokáží za předpokladu existence velkých kardinálů forcovat stromovou vlastnost na následnických kardinálech, typicky menších než \aleph_ω . První forcingem je Mitchellův forcing, vytvořený Mitchellem v sedmdesátých letech, druhým forcingem je Grigorieffův forcing. Většina výsledků týkajících se Grigorieffova forcingu je nová, protože tento forcing se v tomto kontextu dosud explicitně nepoužil (Grigorieffův forcing je podobný Sackovu forcingu, který se v kontextu stromové vlastnosti používá).

První dvě kapitoly práce velmi podrobně zkoumají různé typy stromů na ω_1 i na větších kardinálech. Výsledky v této oblasti jsou roztroušeny po různých článcích, často bez zohlednění na větší kardinály. Autorka si dala práci a výsledky sebrala a přehledně shrnula, případně dokonce nově zobecnila doplnila (viz např. věta 3.40). Vztahy mezi jednotlivými typy stromů jsou shrnuty v grafu 1 na straně 26 (pro případ ω_1), a grafu 2 na straně 37 (pro případ κ^+ , κ regulární). Zvlášť ocenit je třeba část týkající se stromů na κ^+ , které nejsou v literatuře soustavně zpracovány. Novým výsledkem analýzy je postřeh, které stromy existují v Mitchellově modelu na daném kardinálu (poznámka 4.25).

Kapitola 4 zkoumá stromovou vlastnost (a *slabou stromovou vlastnost* – týká se jen jistých Aronszajnových stromů, tzv. speciálních Aronszajnových stromů) na jednom kardinálu, např. ω_2 (obecně následník regulárního kardinálu $> \omega_1$). Jak je zmíněno v úvodním odstavci, práce se zabývá dvěma typy forcingů: Mitchellovým a Grigorieffovým. Vzhledem k jejich podstatné rozdílnosti, pokud jde o způsob prokázání stromové vlastnosti (produktová analýza pro Mitchella a fúze pro Grigorieffa), je srovnání technik užitečné. Věta 4.45 nebyla dosud v literatuře popsána a je možné ji považovat za novou.

Závěrečná část (kapitola 5) rozšiřuje techniku popsanou v kapitole 4 na nekonečně mnoho kardinálů: hlavním výsledkem je zde věta 5.38, která využívá Mitchellův forcing (použití Grigorieffova forcingu je v případě stromové vlastnosti na více kardinálech obecně problematické).

Práce lze vytknout jen drobné nedostatky, které nemají vliv na jinak výbornou úroveň práce: několik překlepů či nepřesností ve formulaci, např. “inaccessible” měly být Mahlovy kardinály ve větě 5.22, “by some subforcing of $G_I(\lambda_0, \lambda_1)$ ” je příliš silné – podstatné je, že takových subforcing není globálně omezený nějakým $\mu < \lambda_1$, před Definicí 5.1 by mělo být zřetelné, zda je tato Definiční vytvořena Ungerem, nebo jím jen použita (tj. je lépe rozlišovat mezi “found in” a “is due to”).

Práci hodnotím známkou *výborně*.

Radek Honzík, 12. září 2014.