Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tereza Těšitelová

Nula-jedničkové zákony

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Matematika, Obecná matematika

2006

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10.8.2006 Tereza Těšitelová

Tereza Těšitelová

Obsah

Název práce: Nula-jedničkové zákony
Autor: Tereza Těšitelová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
e-mail vedoucího: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme 0-1 zákony. První kapitola shrnuje tři základní verze, tedy Borelův-Cantelliho, Kolmogorovův a Hewittův-Savageův 0-1 zákon. Aplikace těchto tvrzení jsou uvedeny v kapitole 2. Ve třetí kapitole se nakonec věnujeme speciálnímu 0-1 zákonu pro výběrová maxima.

Klíčová slova: 0-1 zákon, výběrová maxima.

Title: Zero-one laws
Author: Tereza Těšitelová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This thesis deals with 0-1 laws. The first capture summarize three basic versions, so Borel-Cantelli, Kolmogorov and Hewitt-Savage 0-1 law. Aplication of this theorems are ment in chapter 2. Finally, in third capture, we deal with special 0-1 law for sample maxima.
Keywords: 0-1 laws, sample maxima.

Úvod

V této práci se budeme zabývat vybranými 0-1 zákony. Tím rozumíme tvrzení, podle nichž náhodné jevy mohou za určitých podmínek být buď jisté, nebo nemožné. Tyto věty se v pravděpodobnosti a statistice nejčastěji používají v situaci, kdy potřebujeme dokázat platnost nějaké vlastnosti skoro jistě. V následujících třech kapitolách se zaměříme jednak na klasické 0-1 zákony (Borelův, Cantelliho, Kolmogorovův a Hewittův-Savageův) a jejich použití, v poslední kapitole pak na speciální typ 0-1 zákonů pro výběrová maxima. Tím však zdaleka nekončí výčet verzí a aplikací 0-1 zákonů. V následujícím textu budeme používat běžné značení: označme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - pravděpodobnostní prostor, $A \in \mathcal{A}$ - náhodný jev, P -pravděpodobnostní míra, $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ - náhodná veličina, A^c - doplňkový jev jevu A.

Kapitola 1

Klasické 0-1 zákony

1.1 Cantelliův a Borelův-Cantelliův 0-1 zákon

Nechť $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ jsou náhodné jevy , potom označme

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pro nekonečně } n \in \mathbb{N}\},$$

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ až na konečně } n \in \mathbb{N}\}.$$

Věta 1.1. (Cantelliův 0-1 zákon) *Nechť $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ jsou náhodné jevy a $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$. Potom $P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$.*

Důkaz. Pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} P(A_k).$$

Vzhledem k tomu, že je řada sčitatelná, se s rostoucím n_0 výraz $\sum_{k=n_0}^{+\infty} P(A_k)$ blíží k 0, a proto $P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$. □

Obecně nelze větu obrátit jak ukazuje následující příklad: Volme $\Omega = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}^1([0,1]), P =$ Lebesguova míra na $[0,1]$, $A_n = (0, \frac{1}{n}), 1 \leq n < \infty$. Potom každý elementární jev $\omega \in [0,1]$ patří jen do konečně mnoha A_n, tj. $\limsup_{n\to\infty} A_n = 0$ a $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
Větu lze obrátit v případě předpokladu nezávislosti jevů.

Věta 1.2. (Borelův-Cantelliův 0-1 zákon) *Když $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné jevy, pak platí*

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$$

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$$

Důkaz. Z Canteliho 0-1 zákonu víme, že když je suma konečná, potom je pravděpodobnost limes superioru nulová. Zbývá tedy ukázat co se děje v případě, kdy je suma nekonečná. Pro pevná $k, l \in \mathbb{N}, k \leq l$ máme s využitím nezávislosti následující odhad

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{l} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=k}^{l}(\Omega - A_n)\right) = 1 - \prod_{n=k}^{l}(1 - P(A_n)) \geq 1 - \exp\left\{-\sum_{n=k}^{l} P(A_n)\right\}.$$

V posledním kroku používáme nerovnost $1 - x \leq e^{-x}$ platnou pro $x \in \mathbb{R}$. Limitním přechodem $l \to +\infty$ dostáváme $P\left(\bigcup_{n=k}^{l} A_n\right) = 1$, protože řada má nekonečný součet. Ze spojitosti pravděpodobnostní míry P vyplývá: $P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$. □

1.2 Kolmogorovův 0-1 zákon

Definice 1.1. *Když $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, je posloupnost σ-algeber, pak σ-algebru*

$$\mathcal{B}^{+\infty} = \limsup \mathcal{B}_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \mathcal{B}_k\right)$$

nazveme zbytková σ-algebra posloupnosti $\mathcal{B}_n$. Jev $B \in \mathcal{B}^{+\infty}$ se nazývá zbytkový jev posloupnosti $\mathcal{B}_n$.

Dobře je vidět důležitost pojmu z následujícího příkladu: Budiž $\{X_n\}$ posloupnost náhodných veličin, položíme

$$\mathcal{B}_n = \sigma X_n = X_n^{-1}\mathcal{B}^1, n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě je

$$\limsup_{n\geq 1} X_n = \limsup_{n\geq k} X_n \text{ pro } k \in \mathbb{N},$$

a tudíž je zobecněná náhodná veličina (zobrazení $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$) $\limsup X_n$ (a podobně $\liminf X_n$) měřitelná vůči zbytkové σ-algebře $\mathcal{B}^{+\infty}$.
Vyšetřování limitních vlastností posloupnosti náhodných veličin (např. zajímá-li nás $P[\limsup X_n = \liminf X_n]$) se redukuje na vyšetřování pravděpodobnosti zbytkových jevů.

Věta 1.3. *Nechť T je neprázdá indexová množina. Jsou-li $S_t, t \in T$ nezávislé systémy jevů a pro každé $t \in T$ je S_t uzavřen na konečné průniky, pak jsou nezávislé i σ-algebry $\sigma(S_t), t \in T$.*

Důkaz. Věta je dokázána jako Věta II.5.1 v [1]. □

Věta 1.4. *Jsou-li $\mathcal{B}_t, t \in T$, kde T je neprázdná indexová množina, nezávislé σ-algebry a*

$$T = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} T_h$$

disjunktní rozklad T do neprázdých podmnožin T_h, pak jsou nezávislé σ-algebry

$$\mathcal{D}_n = \sigma(\bigcup_{T_h} \mathcal{B}_t), h \in \mathcal{H}.$$

Důkaz. Důkaz věty plyne z předchozího tvrzení, podrobněji viz [1], Věta II.5.2. □

Věta 1.5. (Kolmogorův 0-1 zákon) *Když $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé σ-algebry, pak pro každou množinu $B \in \mathcal{B}^{+\infty}$ je buď $P(B) = 1$ nebo $P(B) = 0$.*

Důkaz. Z věty 1.4 plyne, že

$$\mathcal{D}_n = \sigma \bigcup_{1}^{n-1} \mathcal{B}_h, \ \varepsilon_n = \sigma \bigcup_{n}^{\infty} \mathcal{B}_h$$

jsou nezávislé σ-algebry pro $n \geq 2$. Protože $\mathcal{B}^{+\infty} \subset \varepsilon_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jsou nezávislé všechny dvojice $(\mathcal{B}^{+\infty}, \mathcal{D}_n), n \in \mathbb{N}$. Odtud již plyne nezávislost množinových systémů $\mathcal{B}^{+\infty}$ a $\bigcup_1^\infty \mathcal{D}_n$, které jsou uzavřené vůči konečným průnikům ($\{\mathcal{D}_n\}$ je neklesající posloupnost). Z věty 1.3 vyplývá

$$\mathcal{B}^{+\infty} \text{ a } \sigma \bigcup_{1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \sigma \bigcup_{1}^{\infty} \mathcal{B}_n$$

jsou dvě nezávislé σ-algebry. Protože

$$\mathcal{B}^{+\infty} \subset \sigma \bigcup_{1}^{\infty} \mathcal{D}_n$$

přicházíme k závěru, že zbytková σ-algebra je nezávislá sama se sebou, tj.

$$P(B) = P^2(B) \text{ pro } B \in \mathcal{B}^{+\infty}.$$

□

1.3 Hewittův-Savageův 0-1 zákon

Pokud v následujícím řekneme konečná permutace množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$, máme na mysli bijekci $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která ponechává na svém místě všechny prvky až na konečně mnoho výjimek z $\mathbb{N}$. Takové zobrazení může být interpretováno jako permutace části $\{1, ..., n_0\}$ z $\mathbb{N}$, která byla rozšířena jako identické zobrazení na $\mathbb{N} \setminus \{1, ..., n_0\}$.
Předpokládejme $X_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Poslupnost určuje náhodnou veličinu

$$X := \bigotimes_{1}^{\infty} X_n$$

s hodnotami v měřitelném prostoru $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$, kde

$$\mathcal{B}^{\mathbb{N}} := (\mathcal{B}^1)^{\mathbb{N}},$$

a s rozdělením P_X. Jestliže τ je konečná permutace přirozených čísel $\mathbb{N}$, pak τX bude označovat náhodnou veličinu

$$\tau X := \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_{\tau(n)}.$$

Permutace vznikne z X přerovnáním konečně prvků $X_1, ..., X_{n_0}$ z posloupnosti X_n pomocí τ a ponecháním zbytku posloupnosti nezměněných ($\tau(n) = n$ pro všechna $n \geq n_0$).

Definice 1.2. *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost rálných náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $X = \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n$ je náhodná veličina s hodnotami v $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$. Měřitelná numerická funkce g na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ se nazývá permutovatelná, přesněji konečně permutovatelná, vzhledem k dané posloupnosti nebo vzhledem k X, jestliže*

$$g(\tau X(\omega)) = g(X(\omega)) \tag{0}$$

pro všechna $\omega \in \Omega$ a pro konečnou permutaci přirozených čísel τ. Speciálně: množina $A \in \mathcal{B}$ se nazývá permutovatelná (vzhledem k X) jestliže 1_A je permutovatelná, tedy jestliže

$$\{\tau X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$

platí pro všechny konečné permutace τ.

Věta 1.6. *Je-li P pravděpodobnost na $\sigma\mathcal{A}$, kde $\mathcal{A}$ je algebra, pak pro každé $A \in \sigma\mathcal{A}$ existují $A_n \in \mathcal{A}$ tak, že $P(A_n \triangle A) \to 0$, kde $\triangle$ označuje symetrickou diferenci množin (tj. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$, kde $A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$).*

Důkaz. Viz důkaz Věty I.8.10 v [1]. □

Věta 1.7. (Hewittův-Savageův 0-1 zákon) *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Potom pro každou množinu $A \in \mathcal{B}$, která je permutovatelná vzhledem k $X = \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n$, platí*

$$P(X \in A) = P_X(A) = 0 \textit{ nebo } 1.$$

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ budeme symbolem π_k označovat projekci $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ označévat projekci $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ do n-té složky, tj. $\pi_k(x) = x_k$, pro všechna $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. σ-algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} = \sigma(\pi_n : n \in \mathbb{N})$ je generována algebrou

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$$

v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, kde $\mathcal{F}_n := \sigma(\pi_1, ..., \pi_n)$. Podle věty 1.6 pro každou $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ existuje aproximace množinami $C \in \mathcal{A}_0$ taková, že symetrická diference $A \triangle C$ má libovolně malou pravděpodobnost. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset ...$, máme pro každou množinu $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ podposloupnost $n_k, k \in \mathbb{N}$ vybranou z posloupnosti přirozených čísel a jevy $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$ s

$$\lim_{k \to \infty} P_X(A \triangle C_k) = 0.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme konečnou permutaci přirozených čísel τ_k, která ponechává na svém místě všechna $n > 2n_k$ a na prvních $2n_k$ přirozených číslech se chová následovně

$$\begin{pmatrix} 1, & ..., & n_k, & n_k+1, & ..., & 2n_k \\ n_k+1, & ..., & 2n_k, & 1, & ..., & n_k \end{pmatrix}.$$

Jestliže je množina $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ permutovatelná, potom

$$\{\tau_k X \in A\} = \{X \in A\} \ (k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$, existuje borelovská množina $B_k \in \mathcal{B}^{n_k}$ v $\mathbb{R}^{n_k}$ taková, že

$$C_k = \{(\pi_1, ..., \pi_{n_k}) \in B_k\}. \tag{2}$$

Proto, jestliže položíme

$$M_k = \{(\pi_{\tau_k(1)}, ..., \pi_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\} = \{(\pi_{n_k+1}, ..., \pi_{2n_k}) \in B_k\}, \tag{3}$$

potom M_k leží v $\sigma(\pi_n; n \geq n_k + 1)$. Ale $C_k \in \mathcal{F}_{n_k} = \sigma(\pi_1, ..., \pi_{n_k})$ a posloupnost $(\pi_n), n \geq n_k + 1$ jsou nezávislé vzhledem k P_X, takže podle věty 1.4 jsou C_k nezávislé na M_k, tedy

$$P_X(C_k \cap M_k) = P_X(C_k) \cdot P_X(M_k). \tag{4}$$

Posloupnost $X_n, n \in \mathbb{N}$ je nezávislá a náhodné veličiny X_n jsou stejně rozdělené. Proto X i $\tau_k X$ mají rozdělení $P_X = (P_{X_1})^{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$, kde každé μ_n je P_{X_1}. Rovnost (2) nám dává další rovnost

$$\{\tau_k X \in C_k\} = \{(X_{\tau_k(1)}, ..., X_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\}$$

a (3) nám dává

$$\{X \in M_k\} = \{(X_{\tau_k(1)}, ..., X_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\},$$

takže

$$\{\tau_k X \in C_k\} = \{X \in M_k\}.$$

Vzhledem k (1) dostáváme

$$\{\tau_k X \in A \triangle C_k\} = \{X \in A \triangle M_k\}$$

z čehož, vzhledem k rovnosti rozdělení X a $\tau_k X$, dostáváme

$$P_X(A \triangle C_k) = P_X(A \triangle M_k), \ (k \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

Tato rovnost nás přibližuje k našemu cíli:

$$A \triangle (C_k \cap M_k) \subset (A \triangle C_k) \cup (A \triangle M_k).$$

Z toho vyplývá

$$P_X(A \triangle (C_k \cap M_k)) \leq P_X(A \triangle C_k) + P_X(A \triangle M_k) = 2P_X(A \triangle C_k).$$

Z tohoto vztahu a z podmínek, za jakých jsme posloupnost C_k vybrali, vyplývá

$$\lim_{k \to \infty} P_X(A \triangle (C_k \cap M_k)) = 0$$

a tedy

$$\lim_{k \to \infty} P_X(C_k \cap M_k) = P_X(A).$$

Posledně uvedený důvod také znamená, že (5) dává

$$P_X(A) = \lim_{k \to \infty} P_X(C_k) = \lim_{k \to \infty} P_X(M_k).$$

Kombinací této rovnosti a (4) se dostáváme k tomu, že $P_X(A) = P_X(A)^2$, z čehož vyplývá, že $P_X(A)$ je buď 0 nebo 1, jak jsme si přáli ukázat.

□

Kapitola 2

Aplikace 0-1 zákonů

2.1 Silný zákon velkých čísel

Nejznámější aplikace 0-1 zákonů je silný zákon velkých čísel (SZVČ)pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Nejprve uvedeme několik definic a tvrzení, které později využijeme při zformulování a důkazu SZVČ pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny.
Na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ označme $L(\Omega, \mathcal{A}) = L(\mathcal{A}) = L$ prostor náhodných veličin na prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. A položme $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \in L : E|X|^1 < \infty\}$.

Definice 2.1. *Řekneme, že posloupnost náhodných veličin X_n splňuje silný zákon velkých čísel, jestliže $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])$ konverguje skoro jistě k 0 (tj. existuje množina $A \in \mathcal{A}, P(A) = 1$, tak, že limita výrazu $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E[X_i(\omega)])$ je 0 pro všechna $\omega \in A$).*

Definice 2.2. *Řekneme, že posloupnost náhodných veličin X_n splňuje slabý zákon velkých čísel, jestliže $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])$ konverguje v pravděpodobnosti k 0 (tj. $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i] - 0| > \varepsilon) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$).*

Věta 2.1. (SZVČ) *Když $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny s konečným rozptylem a čísla $0 < b_1 \leq b_2 \leq ...b_n \to +\infty$ jsou taková, že $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{VarX_n}{b_n^2} < +\infty$, potom*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E[X_k]) \to 0 \text{ s.j. pro } n \to +\infty.$$

Důkaz. Věta je dokázána jako Věta IV.2.1 v [1]. □

Lemma 2.1. *Pro reálnou náhodnou veličinu X je*

$$X \in L_1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| \geq n) < +\infty.$$

Důkaz. Viz důkaz Věty II.2.8. v [1]. □

Lemma 2.2. *Buďte $X_1, X_2, \ldots$ nezávislé náhodné veličiny. Pak buď existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $X_n \to c$ s.j. nebo $P[$ existuje konečná $\lim_{n\to\infty} X_n] = 0$.*

Důkaz. Lemma je dokázáno jako Tvrzení III.1.9 v [1]. □

Věta 2.2. (SZVČ pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny) *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost nezávislých sejně rozdělených náhodných veličin. Pak posloupnost $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ má konečnou limitu skoro jistě $\Leftrightarrow X_1 \in L_1(P)$ a*

$$X_1 \in L_1(P) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \to EX_1 \text{ } s.j.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme druhou část tvrzení. Budiž $X_1 \in L_1(P)$. Definujeme

$$Y_n = X_n \mathbb{I}_{[|X_n|\le n]}, Z_n = X_n - Y_n = X_n \mathbb{I}_{[|X_n|>n]}, n \in \mathbb{N}$$

Protože podle lemmatu 2.1 je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[Z_n \neq 0] = \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_1| > n] < +\infty,$$

z Borelova-Canteliho zákona vyplývá, že $P(\limsup_{n\to\infty} Z_n \neq 0) = 0$, tedy pro $\omega \in A, P(A) = 1$, existuje $n = n(\omega)$ tak, že při $k > n$ je $Z_k(\omega) = 0$.
Stačí tedy dokázat, že

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to EX_1 \text{ s.j.}$$

Platí

$$EY_n = EX_n \mathbb{I}_{[|X_n|\le n]} = EX_1 \mathbb{I}_{[|X_1|\le n]} \to EX_1 \text{ při } n \to \infty,$$

protože veličiny X_n jsou stejně rozdělené a integrovatelné. Je tedy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EY_k \to EX_1 \text{ při } n \to \infty.$$

Tedy jsme dokázali, že $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j \to EX_1$ s.j.
Nyní dokážeme, že z $X_1 \in L_1(P)$ vyplývá existence konečné limity posloupnosti $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ skoro jistě. K tomu nám poslouží věta 2.1, ověříme tedy její předpoklady: Odhadneme rozptyl veličiny Y_n. Platí

$$\mathrm{Var}Y_n = EY_n^2 - (EY_n)^2 \le EY_n^2 = E(X_1^2 \mathbb{I}_{[|X_1|\le n]}), n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

protože veličiny X_n jsou stejně rozdělené. Počítáme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\mathrm{Var}Y_n}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} E(X_1^2 \mathbb{I}_{[|X_1|\le n]}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} E(X_1^2 \mathbb{I}_{[k-1<|X_1|\le k]}), \tag{7}$$

protože

$$[|X_1| \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [k-1 < |X_1| \leq k] \cup [|X_1| = 0].$$

Zaměníme-li pořadí sčítání v posledním výraze nerovnosti (7) a uvědomíme-li si, že

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2} \leq \frac{1}{k^2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \text{ pro } k \in \mathbb{N},$$

dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var} Y_n}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} E(X_1^2 \mathbb{I}_{[k-1<|X_1|\leq k]}) \sum_{n=k}^{\infty} n^{-2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} E\left[|X_1| \frac{|X_1|}{k} \mathbb{I}_{[k-1<|X_1|\leq k]} \right] \leq$$

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} E[|X_1| \mathbb{I}_{[k-1<|X_1|\leq k]}] = 2E|X_1|.$$

Z věty 2.1 a konvergence (6) tudíž plyne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - EY_k) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} EY_k \to EX_1 \text{ s.j. při } n \to \infty.$$

Protože předokládáme $E|X_1| < \infty$, vyplývá z toho, že i $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k < \infty$ a tedy i $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k < \infty$.

Zbývá dokázat poslední část tvrzení - tedy, že existence konečné

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

na množině pravděpodobností 1 implikuje $E|X_1| < \infty$. Budiž tedy X náhodná veličina taková, že

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \to X \text{ s.j.}$$

(X je s pravděpodobností 1 reálná konstatnta). Zřejmě je

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} X_k \right) \to X - X = 0 \text{ s.j. při } n \to \infty.$$

Z lemmatu 2.2 vyplývá, že existuje $c \in \mathbb{R}$,tak, že $X_n \to c$ a tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_1| \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \geq n]$$

je konvergentní a z kritéria integrovatelnosti (lemma 2.1) plyne $E|X_1| < \infty$. □

2.2 Aplikace Borelova-Canteliho zákona

Vzhledem k tomu, že nejdůležitější aplikací Borelova-Cantelliho zákona je SZVČ, kterému jsem se podrobněji věnovala v předchozí části, uvedu zde jen jeden krátký příklad pro ilustraci.

Věta 2.3. *Jestliže posloupnost jevů $A_n, n \in \mathbb{N}$ obsahující podposloupnost $A_{n_k}, k \in \mathbb{N}$ po dvou nezávislých jevů splňuje*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n_k}) = +\infty,$$

potom

$$P\{A_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\} = 1.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že

$$\limsup_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

a tvrzení vyplývá ihned z Borelova-Canteliho zákona. □

Příklad 2.1. *Házíme minci nekonečně častokrát. Ptáme se na pravděpodobnost, že v nekonečně případech padne panna dvakrát po sobě.*
Nechť $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$ je pravděpodobnostní prostor - $\Omega_0 := \{0,1\}, A := \{1\}, P_0(A) := p = 1/2 = P_0(A^C) := q := 1 - p = 1/2$. Nechť A_n označuje jev, kdy padne panna v n-tém i v $n+1$ hodu. Zřejmě, $P(A_n) = 1/4$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{2n}) = +\infty$. Jev, který nás zajímá je $A := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Vzhledem k větě 2.3, $P(A) = 1$, protože posloupnost jevů (A_{2n}) je nezávislá posloupnost (ačkoliv původní posloupnost A_n není nezávislá).

2.3 Aplikace Kolmogorova 0-1 zákona

Kolmogorovův 0-1 zákon nám dává nový pohled na platnost silného zákona velkých čísel.

Příklad 2.2. *Předpokládejme, že $X_n, n \in \mathbb{N}$ je nezávislá posloupnost reálných náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dále nechť $\tau_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost v $\mathbb{R}$ s nulovou limitou. Položme*

$$Y_n := \tau_n \sum_{i=1}^{n} X_i, \ n \in \mathbb{N}$$

a uvažujme množinu A elementárních jevů $\omega \in \Omega$ takových, že $\lim Y_n(\omega) = 0$. Vzhledem k tomu, že $\lim \tau_n = 0$ a

$$Y_n := \tau_n \sum_{i=m}^{n} X_i + \tau_n \sum_{i=1}^{m-1} X_i, \ 2 \le m \le n,$$

je zřejmé, že A zůstává stejná, jestliže změníme konečně mnoho náhodných proměnných (například, položme některé rovny 0) v posloupnosti X_n. Proto pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=m}^{\infty} \left\{ \sup_{n \geq N} |\tau_n \sum_{i=m}^{n} X_i| \leq 1/k \right\}$$

a A je zbytkový jev posloupnosti X_n. Z toho vyplývá, že $P(A)$ může být buď 0 nebo 1. Jestliže každá X_n je také integrovatelná, potom je posloupnost $(X_n - E(X_n))$ také nezávislá. Předchozí výsledek, s $\tau_n := 1/n$, aplikováno na tuto posloupnost nám dává

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) = 0 \right\}$$

je buď 0 nebo 1. Silný zákon velkých čísel platí podle definice, pokud je tato pravděpodobnost 1.

Z definice Y_n navíc vyplývá, že

$$\liminf_{n\to\infty} Y_n = \liminf_{n\to\infty} (\tau_n \sum_{i=m}^{n} X_i)$$

a

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n = \limsup_{n\to\infty} (\tau_n \sum_{i=m}^{n} X_i)$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$. Proto náhodné veličiny $\liminf Y_n$ a $\limsup Y_n$ jsou měřitelné vzhledem k σ-algebře

$$\mathcal{B}^{+\infty} := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \sigma \left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} X_i \right)$$

zbytkových jevů určených posloupností X_n. Pro takové náhodné veličiny platí následující důsledek Kolmogorova 0-1 zákona:

Věta 2.4. *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je nezávislá posloupnost reálných náhodných veličin. Potom každá $\mathcal{B}^{+\infty}$-měřitelná numerická funkce T je skoro jistě konstantní, což znamená, pro nějaké $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$P\{T = \alpha\} = 1.$$

Náhodná veličina $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, která je $\mathcal{B}^{+\infty}$-měřitelná je také nazývána zbytková funkce posloupnosti $X_n, n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Pro každé $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{T \leq \gamma\} \in \mathcal{B}^{+\infty}$, takže vhledem ke Kolmogorovu 0-1 zákonu

$$P\{T \leq \gamma\} = 0 \text{ nebo } 1.$$

Pro $\gamma = +\infty$, zjevně dostáváme $P\{T \leq \gamma\} = P(\Omega) = 1$. Nechť α označuje infimum z $\overline{\mathbb{R}}$ z neprázdné množiny C všech $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$, pro která platí $P\{T \leq \gamma\} = 1$. Potom $\gamma_n \downarrow$ (konvegruje seshora monotónně) α pro nějakou klesající posloupnost γ_n z prvků z C. Vzhledem k tomu, že $\{T \leq \gamma_n\} \downarrow$ (indikátor množiny konverguje seshora monotónně)$\{T \leq \alpha\}$, z toho vyplývá, že $\alpha \in C$. Tedy α je nejmenší prvek v C. Proto, podle předchozí dichotomie, $P\{T < \alpha\} = 0$ a proto $P\{T = \alpha\} = 1$. □

2.4 Aplikace Hewittova-Savageova zákona

Nejprve uvedeme a dokážeme větu, která je obměnou věty 2.4.

Věta 2.5. *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je nezávislá posloupnost stejně rozdělený náhodných veličin na pravěpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Jestliže g je $\mathcal{B}$-měřitelná numerická funkce na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, která je permutovatelná vzhledem k posloupnosti X_n, potom náhodná veličina g je P_X-skoro jistě konstantní, takže $g \circ X$ je P-skoro jistě konstantní.*

Důkaz. Pro každé $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ množina $A := \{g \leq \gamma\}$ je permutovatelná vzhledem k $X := \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n$, vzhledem ke vztahu (0)

$$\{X \in A\} = \{g(X) \leq \gamma\} = \{g(\tau X) \leq \gamma\} = \{\tau X \in A\}$$

pro každou konečnou permutaci τ množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$. Ale potom podle Hewittova-Savegeova zákona, pravděpodobnost $P_X\{g \leq \gamma\} = P\{g \circ X \leq \gamma\}$ může nabývat pouze buď hodnoty nula nebo jedna. Dále bychom mohli pokračovat stejně jako v důkazu věty 2.4 a dokázat, že náhodná veličina g je skoro jistě konstantní. □

Příklad 2.3. *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je nezávislá posloupnost stejně rozdělených reálných náhodných veličin. Položíme*

$$S_n := X_1 + ... + X_n, n \in \mathbb{N}.$$

Potom každá z náhodných veličin

$$\liminf_{n\to\infty} S_n \text{ a } \limsup_{n\to\infty} S_n$$

je skoro jistě konstantní. Abychom toto dokázali musíme si pouze uvědomit, že

$$x_n, n \in \mathbb{N} \to \liminf_{n\to\infty}(x_1 + ... + x_n)$$

je měřitelná numerická funkce g definována na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{B})$ pro kterou

$$g \circ X = g(X) = \liminf_{n\to\infty} S_n.$$

Jestliže $S_{\tau(n)} = S_n$ pro všechna až na konečně mnoho n, kdykoliv τ je konečná permutace množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$, je g permutovatelná vhledem k posloupnosti X_n. Tím jsou splněny předpoklady úředchozí věty a je tedy zřejmé, že tvrzení pro $\liminf_{n\to\infty} S_n$ platí. Tvrzení o $\limsup S_n$ lze dokázat analogicky nebo aplikováním předchozího na $(-X_n)$.

Na uvedený příklad navazuje následující věta, která se zabývá limitním chováním součtu veličin.

Věta 2.6. *Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ je nezávislá posloupnost stejně rozdělených reálných náhodných veličin pro které platí X_1 je skoro jistě různá od nuly. Potom se součet veličin $S_n := X_1 + ... + X_n, n \in \mathbb{N}$, chová jedním z následujících způsobů:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \text{ skoro jistě} \qquad (i)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \text{ skoro jistě} \qquad (ii)$$

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \text{ a } \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \text{ skoro jistě} \qquad (iii)$$

Důkaz. V předcházejícím příkladu jsme ukázali, že (jako důsledek 0-1 Hewittova-Savageova zákona)

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = \gamma \text{ skoro jistě}$$

pro vhodné $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$. Toto je P_X-skoro jistě konstatní hodnota funkce g, která byla představena v příkladu. Nyní náhodné veličiny $X'_n := X_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ tvoří posloupnost, jejíž společné rozdělení je

$$P_{X'} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_{X'_n} = \bigotimes_{n=2}^{\infty} P_{X_n}.$$

Vzhledem k tomu, že všechny P_{X_n} jsou stejné, platí $\bigotimes_{n=1}^{\infty} P_{X_n} = P_X$. Tedy $P_{X'}$-skoro jistě $g = \gamma$ a, stejně jako dříve, součet $S'_n := X'_1 + ...X'_n$ splňuje

$$\liminf_{n\to\infty} S'_n = \gamma \text{ skoro jistě.}$$

Platí $S_{n+1} = X_1 + S'_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, z tohoto a z limitních vztahů pro S_n a S'_n, vyplývá, že skoro jistě $\gamma = X_1 + \gamma$. Vhledem k předpokladu, že X_1 je reálná a skoro jistě různá od nuly, musí platit $\gamma = \pm\infty$. Tedy platí buď $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ skoro jistě nebo $\liminf_{n\to\infty} = +\infty$, odkud $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ skoro jistě. Z podobné úvahy (nebo aplikováním předchozího na posloupnost $-X_n$) najdeme alternativu: buď $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ skoro jistě nebo $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ skoro jistě. Tyto dvě alternativy kombinují očividně vzájemně neslučitelná a úplná tvrzení $(i) - (iii)$. □

Pokud bychom nepředpokládali, že $X_1 \neq 0$ s.j., potom by byla ještě jedna možnost - přesněji, že $S_n = 0$ skoro jistě pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Kapitola 3

0-1 zákony pro maxima

3.1 Míra růstu dílčího maxima posloupnosti nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin

Nechť $X_1, X_2, ... X_3, ...$ je posloupnost náhodných, stejně rozdělených náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť F označuje jejich (společnou) distribuční funkci, tedy

$$F(x) = P(\{X_n \leq x\})$$

pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ a $n = 1, 2, ...$

Hlavním výsledkem této podkapitoly bude věta 3.1, jejíž znění je následující: Nechť $\{\lambda_n\}$ je neklesající posloupnost taková, že posloupnost $\{(F(\lambda_n))^n\}$ je nerostoucí. Potom

$$P\left(\left\{\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq \lambda_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\right\}\right) = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases}$$

jestliže

$$\sum_{n=3}^{\infty} (F(\lambda_n))^n \frac{\log\log n}{n} \begin{cases} < \infty \\ = \infty. \end{cases}$$

Označme $\limsup A_n = \{A_n \text{ i.o. }\}$, kde i.o. je zkratka pro nekonečně často (infinitly often). Dále označme A^c doplňkový jev jevu A. Nakonec nechť $X_{(n)} = \max_{1\leq k\leq n} X_k$, $n = 1, 2, ...$, nechť $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ je neklesající posloupnost reálných čísel a nechť

$$E_n = \{X_{(n)} \leq \lambda_n\}, n = 1, 2, ...$$

V průběhu důkazu hlavního tvrzení budeme potřebovat zobecnění Cantelliho 0-1 zákona (věta 1.1):

Lemma 3.1. *Pro nějakou posloupnost $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ jevů splňujících*

$$P(A_n) \to 0 \textit{ když } n \to \infty$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty, \tag{8}$$

dostáváme

$$P(\{A_n \text{ } i.o.\}) = 0.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že

$$P(\{A_n \text{ i.o.}\}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{r=n}^{\infty} A_r^c\right) \geq \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1$$

dostáváme, jako důsledek (8) a věty (1.1),

$$P(\{A_n \text{ i.o.}\}) = P(\{A_n \cap A_{n+1}^c \text{ i.o.}\}) = 0.$$

□

Dále zde uvedeme několik pomocných tvrzení, které již nejsou zobecněním Cantelliho zákona, ale použijeme je při důkazu tvrzení 3.1.

Lemma 3.2. *Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládát, že distribuční funkce F je spojitá.*

Důkaz. Viz důkaz Lemmatu 3 v [3]. □

Lemma 3.3. *Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že*

$$\alpha_n \leq F(\lambda_n) \leq \beta_n \text{ pro } n > 2, \tag{9}$$

kde

$$\alpha_n = \exp\left(-2\frac{\log\log n}{n}\right)$$

a

$$\beta_n = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\log\log n}{n}\right)$$

Důkaz. Předpokládejme (ve shodě s lemmatem 2.3), že F je spojitá a, že tvrzení 3.1 bylo dokázáno pro posloupnost $\{\lambda_n\}$ splňující dodatečnou podmínku (9). Musíme dokázat, že pokud tvrzení 3.1 platí pro distribuční funkci splňující podmínku (9), pak platí i pro distribuční funkci, která dodatečnou podmínku (9) nesplňuje.
Pro jakoukoliv neklesající posloupnost $\{\lambda_n\}$, pro kterou $\{(F(\lambda_n))^n\}$ je neklesající, definujme posloupnost $\{\lambda'_n\}$ následujícím způsobem

$$\lambda'_n = \begin{cases} \sup\{\lambda; F(\lambda) \leq \alpha_n\}, & \text{jestliže} \quad F(\lambda_n) < \alpha_n, \\ \lambda_n, & \text{jestliže} \quad \alpha_n \leq F(\lambda_n) \leq \beta_n, \\ \inf\{\lambda; F(\lambda) \geq \beta_n\}, & \text{jestliže} \quad F(\lambda_n) > \beta. \end{cases}$$

Potom $\{\lambda'_n\}$ je neklesající posloupnost a následkem předpokladu spojitosti F je $\{(F(\lambda'_n))^n\}$ nerostoucí a

$$\alpha_n \le F(\lambda'_n) \le \beta_n$$

pro každé n. Tedy, položením

$$E'_n = \{X_{(n)} \le \lambda'_n\}$$

z předpokladů na začátku důkazu dostáváme, že

$$P(\{E'_n \text{ i.o. }\}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{jestliže } \sum_{n=3}^{\infty} (F(\lambda'_n))^n \frac{\log\log n}{n} \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases}.$$

Dále si povšimněme, že řada

$$\sum_{n=3}^{\infty} (F(\lambda_n))^n \frac{\log\log n}{n} \tag{10}$$

diverguje, jestliže $\lambda_n > \lambda'_n$ pro nekonečně mnoho n, řekněme $n_1, n_2, ..., n_k, ...$, jelikož v tomto případě (pro $n_k > 81$)

$$\sum_{n=81}^{n_k} (F(\lambda_n))^n \frac{\log\log n}{n} \ge (F(\lambda_{n_k}))^{n_k} \sum_{n=81}^{n_k} \frac{1}{n}$$

$$\ge (\log n_k)^{-\frac{1}{2}} (\log(n_k + 1) - \log 81) \to \infty \text{ pro } k \to \infty. \tag{11}$$

Dále si povšimněme, že

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\alpha_n)^n \frac{\log\log n}{n} < \infty.$$

V důsledku tohoto řada (9) a řada

$$\sum_{n=3}^{\infty} (F(\lambda_n))^n \frac{\log\log n}{n}, \tag{12}$$

konvergují současně. V případě konvergence ($\lambda_n \le \lambda'_n$ pro nekonečně mnoho n) dostáváme $E_n \subset E'_n$ pro všechna n s výjimkou konečně mnoha a tedy

$$P(\{E_n \text{ i.o.}\}) \le P(\{E'_n \text{ i.o.}\}) = 0;$$

v případě divergence, vzhledem k (12) a lemmatu 3.1 dostáváme

$$P(\{E_n \text{ i.o.}\}) \ge P(\{E_n \text{ i.o.}\} \cap \{E'_n \text{ i.o.}\}) = P(\{E'_n \text{ i.o.}\}) = 1,$$

jak jsme tvrdili. □

Věta 3.1. *Jestliže posloupnost* $(F(\lambda_n))^n, n = 1, 2, ...$ *je nerostoucí, potom*

$$P(\{E_n \textit{ i.o. }\}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \textit{jestliže } \sum_{n=3}^{\infty} (F(\lambda_n))^n \frac{\log\log n}{n} \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases}.$$

Důkaz. Vzhledem k Lemmatu 3.3, můžeme předokládat, že $F(\lambda_n)$ (pro $n > 2$) je ve tvaru

$$F(\lambda_n) = \exp\left(-\gamma_n \frac{\log\log n}{n}\right), \text{ kde } \frac{1}{2} \leq \gamma_n \leq 2. \tag{13}$$

Vzhledem k tomuto předpokladu, konvergence (10) znamená konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n \cap E_{n+1}^c) = \sum_{n=1}^{\infty} (F(\lambda_n))^n (1 - F(\lambda_{n+1}))$$

a toto ve spojení s Lemmatem 3.1 ukazuje platnost konvergenční části Věty 3.1.
Nechť

$$m_n = \left[e^{\frac{n}{\log n}}\right] \text{ pro } n = 2, 3, \ldots.$$

Důkaz Věty 3.1 dokončíme tím, že ukážeme, že z divergence (10) vyplývá

$$P(\{E_{m_n} \text{ i.o.}\}) = 1.$$

Pro libovolnou posloupnost $i_1, i_2, ..., i_n, ...$ kladných celých čísel takových, že $i_n = o(\log n)$ dostáváme

$$\frac{m_{n+i_n} - m_n}{m_{n+i_n}} \sim \frac{i_n}{\log(n + i_n)} \text{ když } n \to \infty. \tag{14}$$

Jestliže (10) diverguje, potom

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(E_{m_n}) = \sum_{n=2}^{\infty} (F(\lambda_{m_n}))^{m_n} \tag{15}$$

jestliže

$$\sum_{n=m_2}^{\infty} (F(\lambda_n))^n \frac{\log\log n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{r=m_n}^{m_{n+1}-1} (F(\lambda_r))^r \frac{\log\log r}{r}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (F(\lambda_{m_n}))^{m_n} \frac{m_{n+1} - m_n}{m_n} \log\log m_{n+1}$$

a

$$\frac{m_{n+1} - m_n}{m_n} \log\log m_{n+1} \to 1 \text{ když } n \to \infty.$$

Tedy, vzhledem k (13), pro nějaké $\delta, 0 < \delta < 1$, a nějaké kladné číslo n_0, existují kladná čísla n_1 a n_2 taková, že $n_0 \leq n_1 < n_2$ a

$$\delta < \sum_{n=n_1+1}^{n_2} P(E_{m_n}) < 2\delta. \tag{16}$$

Přímá aplikace Kolmogorovova 0-1 zákona nám dává, že $P(\{E_{m_n} \text{ i.o.}\})$ je buď 0 nebo 1. Tedy, abychom dokončili důkaz, stačí zřejmě dokázat existenci konstanty $c > 0$ takové, že pro všechna dostatečně velká n_0

$$P\left(\bigcup_{n=n_1+1}^{n_2} E_{m_n}\right) \geq c,$$

kde n_1 a n_2 odpovídá hodnotě δ , která bude určena později.
Nyní máme

$$P\left(\bigcup_{n=n_1+1}^{n_2} E_{m_n}\right) = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} P\left(E_{m_n} \cap \bigcap_{r=n+1}^{n_2} E_r^c\right) \tag{17}$$

$$= \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \left(P(E_{m_n}) - P\left(E_{m_n} \cap \bigcup_{r=n+1}^{n_2} E_r\right)\right),$$

a proto stačí dokázat existenci konstanty $\delta_0, 0 < \delta_0 < 1$, a konstanty $\theta, 0 < \theta < 1$, takové, že pro $\delta = \delta_0, n_1 < n \leq n_2$ a všechna dostatečně velká n_0

$$P\left(E_{m_n} \cap \bigcup_{r=n+1}^{n_2} E_r\right) \leq \theta P(E_{m_n}). \tag{18}$$

Opravdu, (16),(17),(18) nám dává

$$P\left(\bigcup_{n=n_1+1}^{n_2} E_{m_n}\right) \geq (1-\theta)\delta_0. \tag{19}$$

Položme

$$a_n = 5[\log\log n]$$

a

$$b_n = 2[\log n \log\log n].$$

Potom

$$P\left(E_{m_n} \cap \bigcup_{r=n+1}^{n_2} E_{m_r}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \tag{20}$$

kde

$$S_1 = P(E_{m_n} \cap E_{m_{n+1}}),$$

$$S_2 = P\left(E_{m_n} \cap E^c_{m_{n+1}} \cap \bigcup_{r=n+2}^{n+a_n} E_{m_r}\right),$$

$$S_3 = P\left(E_{m_n} \cap \bigcup_{r=n+a_n+1}^{n+b_n} E_{m_r}\right),$$

$$S_4 = P\left(E_{m_n} \cap \bigcup_{r=n+b_n+1}^{n_2} E_{m_r}\right).$$

Pro zjednodušení položme

$$\varphi_n = F(\lambda_n),$$

nejprve obdržíme

$$S_1 = P(E_{m_n})\varphi_{m_{n+1}}^{m_{n+1}-m_n} \leq P(E_{m_n})\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m_{n+1}-m_n}{m_{n+1}}\log\log m_{n+1}\right) \tag{21}$$

$$\leq P(E_{m_n})e^{-\frac{1}{4}}$$

pro všechna dostatečně velká n_0, vzhledem k (14) dostáváme

$$\frac{m_{n+1}-m_n}{m_{n+1}}\log\log m_{n+1} \to 1 \text{ jestliže } n \to \infty.$$

Za druhé dostáváme

$$S_2 \leq P(E_{m_n})\sum_{r=n+2}^{n+a_n} P\left(\left\{\lambda_{m_{n+1}} < \max_{m_n<v\leq m_{n+1}} X_v \leq \lambda_{m_r}\right\}\right)$$

$$\leq P(E_{m_n})a_n(\varphi_{m_{n+a_n}}^{m_{n+1}-m_n} - \varphi_{m_{n+1}}^{m_{n+1}-m_n})$$

$$\leq P(E_{m_n})a_n(m_{n+1}-m_n)(\varphi_{m_{n+a_n}} - \varphi_{m_{n+1}}),$$

kde

$$\varphi_{m_{n+a_n}} - \varphi_{m_{n+1}} \leq \gamma_{m_{n+1}}\frac{\log\log m_{n+1}}{m_{n+1}} - \gamma_{m_n+a_n}\frac{\log\log m_{n+a_n}}{m_{n+a_n}}$$

$$\leq 2\log\log m_{n+1}\left(\frac{1}{m_{n+1}} - \frac{1}{m_{n+a_n}}\right)$$

ze vztahu

$$\varphi_{m_{n+1}}^{m_{n+1}} \geq \varphi_{m_{n+a_n}}^{m_{n+a_n}}$$

vyplývá

$$\gamma_{m_{n+a_n}}\log\log m_{n+a_n} \geq \gamma_{m_{n+1}}\log\log m_{n+1}.$$

Z (14) vyplývá, že

$$a_n\frac{m_{n+a_n}-m_{n+1}}{m_{n+a_n}} \to 0 \text{ když } n \to \infty.$$

Tedy, pro dostatečně velká n_0, dostáváme

$$S_2 \leq P(E_{m_n})2a_n\left(1 - \frac{m_{n+1}}{m_{n+a}}\right)\frac{m_{n+1}-m_n}{m_{n+1}}\log\log m_{n+1} \tag{22}$$

$$\leq P(E_{m_n})\frac{1-e^{-\frac{1}{4}}}{4}.$$

Za třetí jsme zjistili, že

$$S_3 \le P(E_{m_n}) \sum_{r=n+a_n+1}^{n+b_n} \varphi_{m_r}^{m_r - m_n} \le P(E_{m_n}) b_n \varphi_{m_{n+a_n}}^{m_{n+a_n} - m_n},$$

kde

$$\varphi_{m_{n+a_n}}^{m_{n+a_n} - m_n} \le \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m_{n+a_n} - m_n}{m_{n+a_n}} \log\log m_{n+a_n}\right).$$

Z (15) vidíme, že

$$\frac{m_{n+a_n} - m_n}{m_{n+a_n}} \log\log m_{n+a_n} \sim a_n \sim 5 \log\log n.$$

Tedy, pro dostatečně velké n_0

$$S_3 \le P(E_{m_n}) b_n e^{-2\log\log n} \le P(E_{m_n}) \frac{1 - e^{-\frac{1}{4}}}{4} \qquad (23).$$

Nakonec, dostáváme

$$S_4 \le P(E_{m_n}) \sum_{r=n+b_n+1}^{n_2} \varphi_{m_r}^{m_r - m_n} \le P(E_{m_n}) \varphi_{m_{n+b_n}}^{-m_n} 2\delta,$$

kde

$$\varphi_{m_{n+b_n}}^{-m_n} \le \exp\left(2 \frac{m_n}{m_{n+b_n}} \log\log m_{n+b_n}\right).$$

Je snadné nahlédnout, že

$$\frac{m_n}{m_{n+b_n}} \log\log m_{n+b_n} \sim \exp\left(-\frac{b_n}{\log(n+b_n)}\right) \log n \to 0 \text{ jestliže } n \to \infty.$$

Čísla $\varphi_{m_{n+b_n}}^{-m_n}$ jsou v důsledku tohoto omezená zeshora nějakou konstantou c_0 a

$$S_4 \le P(E_{m_n}) 2c_0\delta. \qquad (24)$$

Pro shrnutí, z (20),(21),(22),(23) a (24) dostáváme

$$P\left(E_{m_n} \cap \bigcup_{r=n+1}^{n_2} E_{m_r}\right) \le \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} + 2c_0\delta\right) P(E_{m_n}).$$

Tedy, jestliže zvolíme

$$\delta = \delta_0 = \frac{1}{2c_0} \frac{1 - e^{-\frac{1}{4}}}{4}$$

a

$$\theta = \frac{3 + e^{-\frac{1}{4}}}{4},$$

takže (19) platí pro všechna dostatečně velká n_0. □

Věta 3.2.
$$P(\{E_n^c\ i.o.\}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \ jestliže \sum_{n=1}^{\infty}(1 - F(\lambda_n)) \begin{cases} < \infty \\ = \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Toto plyne z Borelova-Cantelliho lemmatu a skutečnosti
$$P(\{E_n^c \text{ i.o.}\}) = P(\{X_n > \lambda_n \text{ i.o.}\})$$
□

3.2 Zlepšení 0-1 zákona pro maximum

Následující věta je velmi známý výsledek.

Věta 3.3. *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost náhodných proměnných a nechť $\{b_n\}$ je jakákoliv neklesající reálná posloupnost taková, že $b_n \to \infty$, když $n \to \infty$. Definujeme dílčí maximum $X_{(n)} = \max_{1\le k\le n} X_k, n \ge 1$. Potom*
$$P[X_{(n)} > b_n\ i.o.] = P[X_n > b_n\ i.o.]. \tag{25}$$

Přirozeně se nabízí otázka, jestli vztah (25)platí i v případě, kdy $b_n \to \infty$, ale $\{b_n, n \ge 1\}$ není neklesající? Odpověď je záporná. Příkladem může být následující případ: $X_{2n-1} = 2n, X_{2n} = 0, b_{2n-1} = 4n$ a $b_{2n} = n, n \ge 1$, potom $X_n < b_n$ pro každé n, zatímco $X_{(2n)} = 2n > n = b_{2n}, n \ge 1$. Navíc odpověď zůstává negativní dokonce i když $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Toto tvrzení dokazuje následující příklad: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem jedna. Definujeme
$$b_n = \begin{cases} 2\log k & , \text{jestliže } n = 2^k \text{ pro nějaké } k \ge 1, \\ 2\log n & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom
$$\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n > b_n] < \sum_{n=1}^{\infty} P[X_n > 2\log n] + \sum_{k=1}^{\infty} P[X_{2^k} > 2\log k] = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Podle Borelova-Canteliho lemmatu je $P[X_n > b_n \text{ i.o.}] = 0$. Nicméně, $X_{(n)}/\log n \to 1$ skoro jistě, takže $P[X_{(n)} \le (\log n)/2 \text{ i.o.}] = 0$. Což znamená, že jev $A = [2X_{(n)} > \log n$ pro dostatečně velká $n]$ má pravděpodobnost jedna. Nechť $\omega \in A$. Potom existuje celé číslo $k_0 = k_0(\omega) \ge 16$ takové, že $X_{(2^k)}(\omega) > (k/2)\log 2$ pro všechna $k \ge k_0$. Ale $k\log 2 \ge 4\log k$ pokud $k \ge 16$, takže $X_{(2^k)}(\omega) > 2\log k = b_{2^k}, k \ge k_0$. Tedy $P[X_{(2^k)} > b_{2^k}$ pro všechna velká $k] = 1$ a proto $P[X_{(n)} > b_n \text{ i.o.}] = 1$.

Vzhledem k důležitosti věty 3.3 ve studiích limitního chování $\{X_{(n)}, n \ge 1\}$ se zdá užitečné hledat analogii věty 3.3 v případě, že posloupnost $\{b_n\}$ je divergentní, ale není neklesající. Následující věta je takové řešení.

Věta 3.4. *Mějme $X_1, X_2, \dots$ posloupnost náhodných veličin, a definujeme $\{X_{(n)}, n \geq 1\}$ stejně jako ve větě 3.3. Nechť $\{b_n, n \geq 1\}$ je libovolná posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Potom*

$$P[X_{(n)} > b_n \text{ i.o. }] = P[X_{(n)} > b_n^* \text{ i.o.}] = P[X_n > b_n^* \text{ i.o.}], \tag{26}$$

kde $b_n^* = \inf_{m\geq n} b_m, n \geq 1$. Navíc, pokud $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny, potom $P[X_{(n)} > b_n \text{ i.o.}] = 0$ nebo 1 v závislosti na tom, zda $\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n > b_n^*]$ konverguje nebo diverguje.

Důkaz. Jestliže je $\{b_n^*, n \geq 1\}$ neklesající a $b_n^* \to \infty$, druhá rovnost v (26) plyne z (25). Definujme $n_1 = 1$ a pro $k > 1$ nechť $n_k = \min\{n > n_{k-1}; b_n^* > b_{n_{k-1}}^*\}$. Pro přehlednost, nechť $m_k = n_{k-1}, k \geq 1$. Poznamenejme, že $\{n_k, k \geq 1\}$ je dobře definovaná, jestliže $b_n^* \to \infty$. A tak $b_n^* = b_{m_k}^*$, pokud $n_{k-1} \leq n < n_k$, jestliže $\{b_n^*\}$ je neklesající. Navíc $b_n^* = \min(b_n, b_{n+1}^*), n \geq 1$, takže konkrétně, $b_{n_{k-1}}^* = b_{m_k}^* = \min(b_{m_k}, b_{n_k}^*) = b_{m_k}, k \geq 1$, protože $b_{n_k}^* > b_{n_{k-1}}^*$ z definice $\{n_k\}$. Proto,

$$\begin{aligned}
P[X_{(n)} > b_n^* \text{ i.o.}] &= P\left[\max_{n_{k-1}\leq n<n_k} (X_{(n)}/b_n^*) > 1 \text{ i.o. (v } k \text{)}\right] \\
&\leq P\left[\max_{n_{k-1}\leq n<n_k} X_{(n)} > b_{n_{k-1}}^* \text{ i.o.}\right] \\
&= P\left[X_{(m_k)} > b_{m_k} \text{ i.o.}\right] \\
&\leq P\left[X_{(n)} > b_n \text{ i.o.}\right] \\
&\leq P\left[X_{(n)} > b_n^* \text{ i.o.}\right]
\end{aligned}$$

jestliže $b_n \geq b_n^*$; takže (26) platí. Zbytek věty vyplývá jako důsledek z Borelova nula-jedničkového zákona. □

3.3 Silná limitní kritéria pro posloupnost pohyblivých maxim

Předpokládejme $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny, stejně rozdělené na jednotkovém intervalu a $a_1, a_2, \dots$ jsou celá čísla splňující $1 \leq a_n \leq n$. Odpovídající posloupnost, $X_{(n)}$, pohyblivých maxim je definována následujícím způsobem:

$$X_{(n)} = \max\{X_i : n - a_n < i \leq n\}, n \geq 1.$$

Několik autorů studovalo limitní skoro jisté chování těchto maxim v případě, že $a_n \equiv n$. Motivací pro tuto práci jsou následující výsledky plynoucí z Barndorff- Nielsenovy práce (viz podkapitola 3.1).

Věta 3.5. *Předpokládejme, že $a_n \equiv n, 0 \leq \mu_n \leq 1$ a μ_n je neklesající. Potom, s pravděpodobností jedna, $X_{(n)} > \mu_n$ pro nekonečně mnoho n, právě když $\sum_{n\geq 1}(1 - \mu_n) = \infty$.*

Věta 3.6. *Předpokládejme, že $a_n \equiv n, 0 \leq \mu_n \leq 1, \mu_n$ je neklesající a μ_n^n je nerostoucí. Potom, s pravděpodobností jedna, $X_{(n)} < \mu_n$ pro nekonečně mnoho n, právě když $\sum_{n\geq 1}(\mu_n^n)n^{-1}\log\log n = \infty$.*

Jestliže $A_1, A_2, ...$ jsou jevy, nechť $\{A_n \text{ i.o.}\}$ opět označuje jev, kde A_n nastane pro nekonečně mnoho hodnot n. Dále nechť [x] označuje celou část x. Jestliže A je množina, označme $\sharp A$ počet prvků v této množině. Pro $n \geq 1$ označme E_n jev takový, že $X_{(n)} < \mu_n$. A označme $c \lesssim d$, když $c < \infty$ jestliže $d < \infty$ nebo $d = \infty$ jestliže $c = \infty$. Jestliže $x_1, x_2, ...$ je posloupnost splňující $0 \leq x_n \leq 1$, potom říkáme, že $\{x_n\}$ je v:

Upper-Upper (UU) třídě, jestliže $P\{X_{(n)} > x_n, \text{i.o.}\} = 0$

Upper-Lower (UL) třídě, jestliže $P\{X_{(n)} > x_n, \text{i.o.}\} = 1$

Lower-Upper (LU) třídě, jestliže $P\{X_{(n)} < x_n, \text{i.o.}\} = 1$

Lower-Lower (LL) třídě, jestliže $P\{X_{(n)} < x_n, \text{i.o.}\} = 0$.

Náš cíl je najít dvě kritéria; jedno pro rozlišení UU a UL posloupností a jiné pro rozlišení LU a LL posloupností, které jsou definovány výše.

Věta 3.7. *Předpokládejme, že $0 \leq \mu_n \leq 1$ a $1 \leq a_n \leq n$. Potom*

$$P\{X_{(n)} > \mu_n \ i.o.\} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \sum_{n\geq 1}(1-\nu_n) = \infty, \\ 0 & \text{jestliže} \sum_{n\geq 1}(1-\nu_n) < \infty, \end{cases}$$

kde $\nu_n = \inf\{\mu_j : j - a_j < n \leq j\}$.

Klasifikace μ_n jako UU nebo UL posloupnosti závisí na a_n přes definici ν_n. Jestliže μ_n je neklesající, potom $\nu_n = \mu_n$, pro $n \geq 1$, takže Věta 3.5 je obsažena v předchozím tvrzení. Dokonce když $a_n = n$, pro $n \geq 1$, (případ zahrnutý ve Větě 3.5), můžeme uvažovat $\sum(1-\mu_n) < \infty$ a $\sum(1-\nu_n) = \infty$. Například vezměme $\mu_n = 1 - 1/n$ pro n taková, že jejich odmocnina je celé číslo a $\mu_n = 1$ jinak. Jestliže $a - n \geq n^{1/2}$, potom $\sum(1-\nu_n) = \infty$. Jestliže $a_n < n^{1/(2+\varepsilon)}$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, potom $\sum(1-\nu_n) < \infty$.

Důkaz. Nechť H_1 označuje událost, kde $X_n > \nu_n$ pro nekonečně mnoho n. Jestliže $\sum(1-\nu_n) = \infty$, potom $P(H_1) = 1$. Určeme ω v H_1. Existují striktně rostoucí posloupnosti $n_j = n_j(\omega)$ a $R_j = R_j(\omega)$ pro které

$$\nu_{n_j} < X_{n_j}, R_j - a_{R_j} < n_j \leq R_j \text{ a } \nu_{n_j} \leq \mu_{R_j} < X_{n_j}, \text{ pro } j \geq 1. \tag{27}$$

Podle (27), $X_{(R_j)} \geq X_{n_j} > \mu_{R_j}$, pro $j \geq 1$. Jestliže ω je libovolná, $P\{X_{(n)} > \mu_n \text{ i.o.}\} = 1$. Nechť H_2 označuje událost, kde $X_n > \nu_n$ pro nejvíce konečně mnoho n. Jestliže $\sum(1-\nu_n) < \infty$, potom $P(H_2) = 1$. Určeme ω v H_2 a nechť $n_1 = n_1(\omega)$ je taková, že

$$X_n \leq \nu_n, \text{ pro všechna } n \geq n_1. \tag{28}$$

Jestliže $\sum(1-\nu_n) < \infty$, dostáváme $\nu_n \to 1$. Tedy, pro nějaké $n_2 = n_2(\omega) > n_1$,

$$\max_{1\le i\le n_1} X_i < \nu_n, \text{ pro všechna } n \ge n_2. \tag{29}$$

Určeme $n > n_2$ a předpokládáme $n - a_n < j \le n$. Jestliže $j \le n_1$, potom $X_j < \nu_n$ podle (29). Jestliže $j > n_1$, potom $X_j \le \nu_j \le \mu_n$ podle (28). Tedy

$$X_{(n)} \le \mu_n, \text{ pro všechna } n \ge n_2.$$

Jestliže ω je libovolná, $P\{X_{(n)} > \mu_n \text{ i.o.}\} = 0$. □

Odlišit lower třídy je těžší. Nejprve předpokládejme posloupnost, která je odražená od jedničky.

Věta 3.8. *Předpokládejme, že $0 \le \mu_n \le \gamma < 1$ a $1 \le a_n \le n$. Potom*

$$P\{X_{(n)} < \mu_n \ i.o.\} = \begin{cases} 1 & jestliže \sum_{n\ge1} \mu_n^{a_n} = \infty, \\ 0 & jestliže \sum_{n\ge1} \mu_n^{a_n} < \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Definujme $\Delta(n) = \mu_n^{a_n}$. Tvrzení jednoduše vyplývá v případě, kdy $\sum \Delta(n) < \infty$, jestliže $P(E_n) = \Delta(n)$. Předpokládejme $\sum \Delta(n) = \infty, \mu_n \le \gamma < 1$ a $n - a_n \to \infty$. Určeme celé číslo $M > 1$ splňující $\sum_{j\ge1} \gamma^{jM} < \frac{1}{4}$ a nechť B_n označuje množinu $\{n - a_n + 1, ..., n\}$. Pro nějaké r, pro které platí $0 \le r < M$ dostáváme $\sum_{j\ge1} \Delta(r+jM) = \infty$. Předpokládáme, bez újmy na obecnosti, že toto platí, když $r = 0$. Definujeme rostoucí posloupnost celých čísel n_k, kde $n_k \in \{jM : j \ge 1\}$ a $n - a_n > n_{k-1}$ pro $n \ge n_k$ a $k \ge 1$.
Definujeme $T_k = \{n_k + M, n_k + 2M, ..., n_{k+1}\}$ a $F_k = \bigcup_{n\in T_k} E_n$. Předpokládejme, že pro dostatečně velká k, $\sum_{n\in T_k} \Delta(n) \le \frac{1}{4}$. Jestliže to není tento případ, existuje nekonečná množina G s $\sum_{n\in T_k} \Delta(n) > \frac{1}{4}$, $k \in G$. Potom můžeme μ_n nahradit μ_n^*, splňujícím $\mu_n^* \le \mu_n$, pro $n \ge 1$ a $\sum_{n\in T_k} \Delta^*(n) = \frac{1}{4}$ pro $k \in G$, kde $\Delta^*(n) = (\mu_n^*)^{a_n}$. Pořád máme $\mu_n^* \le \gamma$ a $\sum_{j\ge1} \Delta^*(jM) = \infty$. Nyní,

$$P(F_k) \ge \sum_{n\in T_k} \left\{ P(E_n) - \sum_{j=1}^{(n_{k+1}-n)/M} P(E_n \cap E_{n+jM}) \right\}. \tag{30}$$

Jestliže $B_n \cap B_{n+jM} \ne \emptyset$, potom $P(E_n \cap E_{n+jM}) = P(E_{n+j}M|E_n)P(E_n) \le \Delta(n)\gamma^{jM}$. Jeslitže $B_n \cap B_{n+jM} = \emptyset$, potom $P(E_n \cap E_{n+jM}) = \Delta(n)\Delta(n+jM)$. Podle (30),

$$P(F_k) \ge \sum_{n\in T_k} \left\{ P(E_n) - P(E_n)\sum_{j\ge1} \gamma^{Mj} - P(E_n)\sum_{j\in T_k} \Delta(j) \right\} \ge \frac{1}{2} \sum_{n\in T_k} \Delta(n).$$

Tedy $\sum_{k\ge1} P(F_k) = \infty$, takže $\sum_{k\ge1} P(F_{2k}) = \infty$ nebo $\sum_{k\ge1} P(F_{2k+1}) = \infty$. Nyní si všimněme, že $F_{2k_0}, F_{2k_0+2}, ...,$ jsou nezávislé jevy, pokud jsou nezávislé $F_{2k_0+1}, F_{2k_0+3}, ...,$ pro nějaké $k_0 \ge 1$.
Toto ukončuje důkaz tvrzení v případě, že $n - a_n \to \infty$. Nyní odstraníme tuto podmínku.

Definujme $E = \{n : n \geq 1 \text{ a } a_n > \frac{1}{2}n\}$ a $\bar{E} = \{n : n \geq 1 \text{ a } a_n \leq \frac{1}{2}n\}$. Jestliže $\sum_{n\in E} \mu_n^{a_n} \leq \sum_{n\in E} \gamma^{n/2} < \infty$, dostáváme $\sum_{n\in \bar{E}} \mu_n^{a_n} = \infty$. Definujeme $b_n = a_n, \delta_n = \mu_n$ a $X^*_{(n)} = X_{(n)}$, jestliže $n \in \bar{E}$. Jinak definujeme $b_n = 1, \delta_n = 0$ a $X^*_{(n)} = X_n$. Jestliže $\sum_{n\geq 1} \delta_n^{b_n} = \infty$ a $n - b_n \to \infty$, dostáváme $P\{X^*_{(n)} < \delta_n \text{ i.o.}\} = 1$. Nyní si povšimněme, že jev $\{X^*_{(n)} < \delta_n\}$ je obsažen v jevu $\{X_{(n)} < \mu_n\}$ pro všechna $n \geq 1$. □

Pokud chybějí jednotná omezení pro μ_n, zaměřujeme pozornost na některé specifické rodiny posloupností a_n. V každém případě, kritéria na odlišení LU a LL zahrnují řady, jejíchž n-tý člen má podobu $\mu_n^{a_n} h(n)$. Podoba h není daná, ale spíš záleží na 'míře růstu' odpovídajícího a_n. Budeme předpokládat podmínku

$$0 \leq \mu_n \leq 1, \mu_n \text{ je neklesající a } \mu_n^{a_n} \text{ je nerostoucí} \tag{31}$$

a

$$\sup_{n\geq 1} |a_{n+1} - a_n| < B, \text{ kde } B < \infty \tag{32}$$

Věta 3.9. *Předpokládejme, že $1 \leq a_n \leq n, a_n = O(\log n)$ když $n \to \infty, 0 \leq \mu_n \leq 1$ a μ_n je konvergentní. Potom*

$$P\{X_{(n)} < \mu_n \ i.o.\} = \begin{cases} 1 & \textit{jestliže} \sum_{n\geq 1}(\mu_n^{a_n}) = \infty, \\ 0 & \textit{jestliže} \sum_{n\geq 1}(\mu_n^{a_n}) < \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení jednoduše vyplývá v případě, že $\sum \mu_n^{a_n} < \infty$. Jestliže $\sum \mu_n^{a_n} = \infty$ a $\mu_n \to c < 1$, tvrzení je důsledkem Věty 3.6 Předpokládejme $\mu_n \to 1$. Pro nějaké $B > 0, a_n < B \log n$ pro všechna $n > 1$. Tedy, $\sum(\exp(-1/B))^{a_n} \gtrsim \sum n^{-1} = \infty$. Z Věty 3.6, $P\{X_{(n)} < \exp(-1/B) \text{ i.o.}\} = 1$. Jestliže $\exp(-1/B) < \mu_n$ pro všechna velká n, dostáváme $P\{X_{(n)} < \mu_n \text{ i.o.}\} = 1$, což dokončuje důkaz. □

Věta 3.10. *Předpokládejme, že pro všechna velká $n, b(\log n)^r \leq a_n \leq c(\log n)^r$, pro nějaké $0 < b < c < \infty$ a $r > 1$ a tak platí (31). Potom*

$$P\{X_{(n)} < \mu_n \ i.o.\} = \begin{cases} 1 & \textit{jestliže} \sum_{n\geq 1}(\mu_n^{a_n})(\log n)^{1-r} = \infty, \\ 0 & \textit{jestliže} \sum_{n\geq 1}(\mu_n^{a_n})(\log n)^{1-r} < \infty \quad \textit{a (32) platí.} \end{cases}$$

Důkaz. Důkaz této věty je stejný jako důkaz věty 3.12. Nicméně zvolíme $k_n = [\frac{1}{2}bn(\log n)^r]$ a $\gamma_j = \max\{\delta_j, j^{-2/b(\log j)^r}\}$. Podrobnosti vynecháváme. □

Věta 3.11. *Předpokládejme, že pro všechna velká $n, bn^\alpha \leq a_n \leq cn^\alpha$, pro nějaké $0 < b < c < \infty$ a $0 < \alpha < 1$ a tak platí (31). Potom*

$$P\{X_{(n)} < \mu_n \ i.o.\} = \begin{cases} 1 & \textit{jestliže} \sum_{n\geq 1}(\mu_n^{a_n})(n)^{-\alpha}\log n = \infty, \\ 0 & \textit{jestliže} \sum_{n\geq 1}(\mu_n^{a_n})(n)^{-\alpha}\log n < \infty \quad \textit{a (32) platí.} \end{cases}$$

Důkaz. Nechť $k_n = [((1-\alpha)(\frac{1}{2}b)n)^{1/(1-\alpha)}]$ takže $(k_{n+1}-k_n)/k_{n+1}^{\alpha} \to \frac{1}{2}b$. Všimněme si, že pro velká n,

$$j - a_j \le k_n \text{ pro } k_n \le j \le k_{n+1}.$$

Definujme $r_n, \Gamma_n, \phi(n)$ a $\psi(n)$ jako v důkazu Věty 3.12. Nicméně definujme $\beta_n = (\mu_n^{a_n})n^{-\alpha}\log n$. Máme

$$\sum_{n\ge1}\sum_{j\in\Gamma_n}\mu_j^{a_j} \gtrsim \sum_{n\ge1}\sum_{j=1}^{\phi(n)} r_n\beta_{t(n,j-1)} \gtrsim \sum_{n\ge1}\sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}}\beta_j = \infty.$$

Jako v důkazu věty 3.12,

$$P(F_n) \ge \sum_{j\in\Gamma_n} P(E_j)\left(1 - \sum_{i=1}^{\phi(n)}\mu_{k_{n+1}}^{r_n i}\right).$$

Nyní, jestliže $\mu_{k_{n+1}}^{bk_{n+1}^{\alpha}} < n^{-1/2}$, potom $\mu_{k_{n+1}}^{r_n} < \frac{1}{3}$, takže $P(F_n) \ge \frac{1}{2}\psi_n$. Jestliže $\mu_{k_{n+1}}^{ck_{n+1}^{\alpha}} \ge n^{-1/2}$, potom $P(F_n) \ge n^{-1/2}$, takže pro velká n, $P(F_n) \ge \min(\frac{1}{2}\psi_n, n^{-1/2})$. Zbytek důkazu je stejný jako u věty 3.12.
Nyní dokažme druhou polovinu věty. Máme, jako v důkazu věty 3.12, $\sum_{n\ge1}\sum_{j\in\Gamma_n}\mu_j^{a_j} < \infty$. Definujme $\gamma_j = \max(\mu_j, j^{-2/b_j^{\alpha}})$. Poznamenejme, že γ_j je neklesající a

$$\sum_{n\ge1}\sum_{j\in\Gamma_n}\gamma_j^{a_j} < \infty.$$

Definujme $a(n,j)$, $\gamma_{n,j}$ a $X_{(n,j)}$ jako v důkazu věty 3.12. Stejně jako v tomto důkazu, pro $0 \le j \le \phi(n)-1$,

$$P\{X_{(n,j)} < \gamma_{n,j+1}\} \le \gamma_{n,j+1}^{a(n,j+1)}\gamma_{n,j+1}^{-5Br_n}.$$

Nyní pro velká n,

$$\gamma_{n,j+1}^{-5Br} \le t(n,j+1)^{10Br_n/bt(n,j+1)^{\alpha}} \le k_{n+1}^{10Br_n/bk_n^{\alpha}}$$

$$= \exp(10B(k_{n+1}-k_n)M\log k_{n+1}/bk_n^{\alpha}\log n) \le 2\exp(11BM/(1-\alpha)) = Q,$$

takže $P\{X_{(n,j)} < \gamma_{n,j+1}\} \le Q\gamma_{n,j+1}^{a(n,j+1)}$. Tedy

$$P\left(\bigcup_{j=0}^{\phi(n)-1}\{X_{(n,j)} \le \gamma_{n,j+1}\}, \text{ pro nekonečně mnoho } n\right) = 0.$$

Zbytek důkazu je stejný jako u důkazu věty 3.12. □

Věta 3.12. *Předpokládejme, že pro všechna velká* $n, bn \le a_n \le cn$, *pro nějaké* $0 < b < c < 1$ *a tak platí (31). Potom*

$$P\{X_{(n)} < \mu_n \ i.o.\} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \sum_{n\ge1}(\mu_n^{a_n})(n)^{-1}\log\log n = \infty, \\ 0 & \text{jestliže} \sum_{n\ge1}(\mu_n^{a_n})(n)^{-1}\log\log n < \infty \quad a\ (32)\ platí. \end{cases}$$

Lemma 3.4. *Předpokládejme* $|x_1| < \infty, x_n$ *je nerostoucí posloupnost* $\sum_{n\geq 1} x_n = +\infty$ *a* E *je množina přirozených čísel, pro které platí* $\liminf_{n\to\infty} \sharp(E \cap [0,n])/n > 0$. *Potom* $\sum_{k\in E} x_k = +\infty$.

Důkaz. věty 3.12 Určíme celé číslo M tak, že $e^{-M/5} < \frac{1}{3}$. Nechť $k_n = [(1-\frac{1}{2}b)^{-n}]$ takže $(k_{n+1}-k_n)/k_{n+1} \to \frac{1}{2}b$ a

$$j - a_j \leq k_n \text{ pro } k_n \leq j \leq k_{n+1}$$

jestliže n je velké. Definujme $r_n = M(k_{n+1}-k_n)/\log n$ a nechť Γ_n označuje rostoucí množinu celých čísel

$$t(n,1), t(n,2), ..., t(n,\phi(n))$$

pro která $t(n,\phi(n)) = k_{n+1}$ a (s $t(n,0) = k_n$)

$$(t(n,j) - t(n,j-1))/r_n \to 1^+ \text{ stejnoměrně v } j = 1, ..., \phi(n). \tag{33}$$

Poznamenejme, že (33) vyžaduje $M\phi(n)/\log n \to 1$. Z předpokladu, s $\beta_j = (\mu_j^{a_j})j^{-1}\log\log j$,

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\Gamma_n} \mu_j^{a_j} \gtrsim \sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{\phi(n)} r_n\beta_{t(n,j-1)} \gtrsim \sum_{n\geq 1}\sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \beta_j = \infty.$$

Nechť $F_n = \bigcup_{j\in\Gamma_n} E_j$, pak

$$P(F_n) \geq \sum_{i\in\Gamma_n}\left(P(E_i) - \sum_{i<j\in\Gamma_n} P(E_i\cap E_j)\right). \tag{34}$$

Pro i a j v Γ_n s $i<j$ dostáváme $P(E_i\cap E_j) \leq P(E_i)\mu_j^{j-i} \leq P(E_i)\mu_{k_{n+1}}^{j-i}$. Podle (34) máme

$$P(F_n) \geq \sum_{i\in\Gamma_n} P(E_i)\left(1 - \sum_{j=1}^{\phi(n)} \mu_{k_{n+1}^{r_n j}}\right). \tag{35}$$

Nyní předpokládejme, že $\mu_{k_{n+1}}^{bk_{n+1}} < n^{-1/2}$. Potom pro velké hodnoty n,

$$\mu_{k_{n+1}}^{r_n} = \left(\mu_{k_{n+1}}^{bk_{n+1}}\right)^{r_n/bk_{n+1}} \leq n^{-(k_{n+1}-k_n)M/2bk_{n+1}\log n} \leq n^{-M/5\log n} = e^{-M/5} < \frac{1}{3}$$

takže podle (35)

$$P(F_n) \geq \frac{1}{2}\sum_{j\in\Gamma_n}\mu_j^{a_j}.$$

Jestliže $\mu_{k_{n+1}}^{ck_{n+1}} \geq n^{-1/2}$ potom $P(F_n) \geq P(E_{k_{n+1}}) \geq \mu_{k_{n+1}}^{ck_{n+1}} \geq n^{-1/2}$. Tedy, pro velká n,

$$P(F_n) \geq \min\{\frac{1}{2}\psi_n, n^{-1/2}\} \qquad (36),$$

kde $\psi_n = \sum_{j\in\Gamma_n} \mu_j^{a_j}$. Nyní dokážeme, že

$$\sum_{n\geq 1} P(F_n) = \infty. \tag{37}$$

Definujme $I_n = 1$ jestliže $\psi_n \leq 2n^{-1/2}$ a $I_n = 0$ jinak. Nechť $q_n = \sharp[k : 1 \leq k \leq n, I_k = 0]/n$. Jestliže $\limsup q_n \geq \frac{1}{2}$, pro nekonečně mnoho k máme, podle (36),

$$\sum_{n\geq 1} P(F_n) \geq \int_{3k/4}^{k} x^{-1/2} dx \geq k^{1/4}$$

takže (37) platí. Předpokládejme $1 - q_n = p_n > \frac{1}{2}$ pro velká n. Podle (36), $\sum P(F_n) \geq \sum P(F_n) I_n \geq \frac{1}{2} \sum \psi_n I_n$. Podle Lemmatu 3.4, k dokázání (37) stačí dokázat

$$\liminf_{k\to\infty} (u_k/v_k) > 0, \tag{38}$$

kde $u_k = \sum_{n=1}^{k-1} I_n(\sharp\Gamma_n)$ a $v_k = \sum_{n=1}^{k} (\sharp\Gamma_n)$. K dokázání (38), poznamenejme, že $M(\sharp\Gamma_n)/\log n \to 1$ a omezíme u_k a v_k následovně:

$$u_k \geq (2M)^{-1} \int_1^{(k-1)/4} \log x dx \geq (8M)^{-1}(k-1)(\log(\frac{1}{4}(k-1)) - 1),$$

a

$$v_k \leq 2M^{-1} \int_1^k \log x dx \leq 2M^{-1} k \log k,$$

pro velká k. Jestliže poměr těchto omezení konverguje k $\frac{1}{16}$ při $k \to \infty$, (38) a tedy i (37) jsou dokázané.

Jevy $F_n, n \geq 1$ nejsou nezávislé. Nicméně $F_{r+s}, F_{r+2s}, \ldots,$ jsou nezávislé pro $0 \leq r < s$ jestliže s je velké. Pro taková s, $\sum P(F_{r+ns}) = \infty$, pro nějaké $0 \leq r < s$.

Nyní dokážeme druhou polovinu tvrzení. Máme

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{j\in\Gamma_n} \mu_j^{a_j} \lesssim \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{\phi(n)} (t(n,j) - t(n,j-1))\beta_{t(n,j)} \lesssim \sum_{n\geq 1} \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \beta_j = \sum_{n\geq 1} \beta_n < \infty. \tag{39}$$

Definujme $\gamma_j = \max\{\mu_j, (\log j)^{-2/b_j}\}$. Jestliže $\gamma_j \geq \mu_j$, je adekvátní dokázat, že $P\{X_{(n)} < \gamma_n \text{ i.o.}\} = 0$. Poznamenejme, že γ_j je neklesající a že podle (39),

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{j\in\Gamma_n} \gamma_j^{a_j} < \infty \tag{40}$$

Nechť $a(n,j) = a_{t(n,j)}$ a $\gamma_{n,j} = \gamma_{t(n,j)}$. Také definujme jev

$$X_{(n,j)} = \max\{X_i : t(n,j) - a(n,j) + 3Br_n < i \leq t(n,j)\}.$$

Pro $0 \leq j \leq \phi(n) - 1$ máme

$$P(X_{(n,j)} < \gamma_{n,j+1}) \leq \gamma_{n,j+1}^{a(n,j)-3Br_n} = \gamma_{n,j+1}^{a(n,j+1)} \gamma_{n,j+1}^{a(n,j)-a(n,j+1)-3Br_n} \leq \gamma_{n,j+1}^{a(n,j+1)} \gamma_{n,j+1}^{-5Br_n}, \quad (41)$$

jestliže platí (32).
Nyní pro velká n,

$$\gamma_{n,j+1}^{-5Br_n} \leq (\log t(n, j+1))^{10Br_n/bt(n,j+1)} \leq (\log k_{n+1})^{10Br_n/bk_n} \leq 2e^{11BM(1-b/2)} = d.$$

Všimněme si, že d je kladná konstanta, nazávislá na n a j. Podle (41)

$$P(X_{(n,j)} < \gamma_{n,j+1}) \leq d\gamma_{n,j+1}^{a(n,j+1)}.$$

Z tohoto vyplývá, že

$$P\left(\bigcup_{j=0}^{\phi(n)-1} \{X_{(n,j)} \leq \gamma_{n,j+1}\} \text{ pro nekonečně mnoho } n \right) = 0. \quad (42)$$

Nyní předpokládejme, že $X_{(n,j)} > \gamma_{n,j+1}$, pro všechna $0 \leq j \leq \phi(n) - 1$ a $k_n \leq k < k_{n+1}$. Pro nějaké $0 \leq j < \phi(n)$ dostáváme $t(n,j) \leq k < t(n, j+1)$, takže $X_{(k)} \geq X_{(n,j)} > \gamma_{n,j+1} \geq \gamma_k$ a naše tvrzení vyplývá z (42). □

Literatura

[1] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987.

[2] Bauer H.: *Probability Theory*, Walter de Gruyter, Berlin, Praha, 1996.

[3] Barndorff-Nielsen O.: *On the rate of growth of the parcial maxima of a sequence of independent indentically distributed random variables*, Math. scand. **9** (1961), 383-394.