Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Hejmová

Limitní věty v pravděpodobnosti, rychlost konvergence

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Kupsa, Ph.D

Studijní program: Finanční matematika

2006

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu bakalářské práce za cenné rady a čas strávený se mnou při konzultacích.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 31.května 2006

Barbora Hejmová

Barbora Hejmová

Obsah

Název bakalářské práce: Limitní věty v pravděpodobnosti, rychlost konvergence
Autor: Barbora Hejmová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Kupsa, Ph.D
e-mail vedoucího: kupsa@utia.cas.cz

Abstrakt: Centrální limitní věta se často uvádí pro nezávislé náhodné veličiny. Obsahem této práce, je ukázat variantu centrální limitní věty pro ne zcela nezávislé veličiny. Tuto větu budu ověřovat pro ergodické striktně stacionární Markovovy řetězce s konečnou množinou stavů. Na závěr práce zformuluji CLV, která platí pro tyto řetězce s dvouprvkovou množinou stavů.

Klíčová slova: Centrální limitní věta, Markovův řetězec, Mixující proces

Title: Limit theorem in probability, speed of konvergence
Author: Barbora Hejmová
Department: Department od probability and Mathematical Statistic
Supervisor: Mgr. Michal Kupsa, Ph.D
Supervisor's e-mail adress: kupsa@utia.cas.cz

Central limit theorem is usually formed for indipendent identially distributed random variables. Purpose of this work is to present version of central limit theorem for non indipendent random variables. I will prove this theorem for ergodic strictly stationary Markov chains with finite set of state. At the end of this work I will formulize CLT which holds for this chains with two-element set of state.

Keywords: Central limit theorem, Markov chain, Mixing process

Úvod

Jedna z nejdůležitějších vět v matematické statistice a pravděpodobnosti je Centrální limitní věta (CLV). Různé verze této věty mluví o tom, za jakých podmínek, se rozdělení průměru velkého stejně rozdělených náhodných veličin blíží normální rozdělení. CLV bývá nejčastěji formulována pro nezávislé náhodné veličiny. Předpoklad nezávislosti ovšem v praxi často nemůžeme zaručit. Proto je snaha tento předpoklad různými způsoby oslabit.

V této práci chceme čtenáře seznámit s CLV pro striktně stacionární uniformně mixující náhodné procesy, vyslovenou autory Dehlingem, H., Denkerem a M. Phillippem. Uniformně mixující vlastnost, která mluví o klesající závislosti proměnných, zde zastupuje podmínku úplné nezávislosti. Ukážeme, že tuto vlastnost mají nejen posloupnosti vzájemně nezávislých veličin, ale též všechny ergodické striktně stacionární Markovovy řetězce na konečné množině stavů. Pro tyto řetězce přeformulujeme větu Dehlinga, Denkera a Philippa. Ověříme, že v případě dvouprvkové množiny stavů jsou už všechny předpoklady věty splněné. Tím najdeme příklady posloupností náhodných veličin, pro které platí tvrzení CLV, ačkoliv tyto veličiny nejsou nezávislé.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole je uvedena CLV pro striktně stacionární uniformně mixující náhodný proces. Ukážu, že tato věta je rozšířením klasické CLV pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny.

V druhé kapitole budu ověřovat egrodické striktně stacionární Markovovy řetězce s konečnou množinou stavů, zda splňují všechny podmínky CLV pro uniformně mixující náhodný proces. Na konec kapitoly vyslovím CLV pro tyto Markovovy řetězce.

V závěru celé práce ukážu, že CLV platí pro všechny tyto Markovovy řetězce s dvouprvkovou množinou stavů.

Kapitola 1

Centrální limitní věta pro uniformně mixující náhodný proces

Centrální limitní věta zdůvodňuje výsadní postavení normálního rozdělení. Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny, která vznikla jako součet velkého počtu vzájemně nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, se blíží rozdělení normálnímu.

Úvod této kapitoly věnuji definování pojmů, které jsou potřebné pro vyslovení Centrální limitní věty pro uniformně mixující náhodný proces.

Definici uniformně mixujícího procesu uvedli téměř ve stejnou dobu nezávisle na sobě Ibragimov a Rozanov, Volconski. Tento pojem popisuje asymptotickou nezávislost náhodných veličin když rozdíl jejich indexů jde do nekonečna.

Definice 1.1 (Pravděpodobnostní prostor): *$(\Omega, \Im, P)$ nazveme pravděpodobnostní prostor, je-li Ω množina elementárních jevů, $\Im$ je σ-algebra na Ω a P je pravděpodobnostní míra na $\Im$.*

Definice 1.2 (Náhodná veličina): *Měřitelná reálná funkce $X:(\Omega,\Im)\to(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ se nazývá náhodná veličina.*

Definice 1.3 (Náhodný proces): *Nechť $(\Omega,\Im,P)$ je pravděpodobnostní prostor. Posloupnost reálných náhodných veličin $(X_n, n\geq 1)$ definovaných na $(\Omega,\Im,P)$ se nazývá náhodný proces.*

Definice 1.4 ($\sigma-$*algebra*): *Systém O podmnožin množiny Ω se nazývá sigma algebra, pokud*
a) $\Omega \in O$
b) $A\in\Im \Rightarrow \Omega\setminus A\in O$
c) $A_1, A_2, \ldots \in O \Rightarrow \bigcup A_i \in O$

$\sigma-$algebra je tedy uzavřená na spočetná sjednocení a spočetné průniky.

Je-li O libovolný systém podmnožin množiny Ω, potom existuje nejmenší $\sigma-$algebra obsahující Ω. Tuto algebru dostaneme jako průnik všech $\sigma-$algebra obsahujících Ω a značíme ji $\sigma(\Omega)$.

Dále označme:

$$\Im_a^b = \sigma(\{X_n^{-1}(B), n\in[a,b], B\in B(\mathbb{R})\})$$
$$\Im_a^\infty = \sigma(\{X_n^{-1}(B), n\in[a,\infty), B\in B(\mathbb{R})\})$$

Nyní si již můžeme uvést definici mixujícího procesu.

Definice 1.5 (uniformně mixující náhodný proces): *Řekneme, že náhodný proces* $(X_n, n \geq 1)$ je *uniformně mixující pokud* $\varphi(n) \searrow 0$ *pro* $n \to \infty$ *kde*

$$\varphi(n) := \sup\left\{\left|P(B|A) - P(B)\right| : k \geq 1, A \in \Im_1^k, B \in \Im_{k+n}^{\infty}, P(A) > 0\right\}.$$

Nyní již víme jaké podmínky musí splňovat náhodný proces abychom mohli o něm říct, že je uniformně mixující. Definujme si ještě následující pojem, pro který pak vyslovíme CLV pro uniformně mixující náhodný proces.

Definice 1.6 (Striktně stacionární náhodný proces): *Řekněme, že náhodný proces* $(X_n, n \geq 1)$ *je striktně stacionární, jestliže pro všechny* $n, k \in \mathbb{N}$ *a všechny* $B_1, B_2, \dots, B_n \in B(\mathbb{R})$ *platí*

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P\left(X_{k+1} \in B_1, \dots, X_{k+n} \in B_{k+n}\right).$$

Z definice striktní stacionarita procesu plyne, že všechny náhodné veličiny X_n mají stejné rozdělení.

Věta 1.7 (CLV pro uniformně mixující náhodný proces) [2]: *Nechť je posloupnost náhodných veličin* $(X_n, n \geq 1)$ *striktně stacionární náhodný proces, kde* $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$. *Označme* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *a definujme* $\sigma(n)^2 = \sigma_n^2 := ES_n^2$. *Pokud platí následující podmínky:*

1) náhodný proces $(X_n, n \geq 1)$ *je uniformně mixující* *(1.1)*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2^n)^{1/2} < \infty$ *(1.2)*

3) $\lim_{n \to \infty} \sigma_n^2 = \infty$ *(1.3)*

pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n}{\sigma_n} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Ještě si uveďme CLV pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny.

Věta 1.8 (Centrální limitní věta): *Nechť* $X_1, X_2, \dots$ *jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou* μ *a konečným rozptylem* σ^2. *Nechť* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *pak*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

kde $\Phi(x)$ *je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.*

Znění CLV si uvedeme i pro náhodné veličiny se střední hodnotu rovnou 0 a rozptylem rovným 1. Každý snadno nahlédne, že následující věta je speciální varianta věty 1.8. Uvědomme si, že i naopak z věty 1.9 vyplývá věta 1.8.

Věta 1.9: *Nechť* $X_1, X_2, \ldots$ *jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a rozptylem 1. Nechť* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

kde $\Phi(x)$ *je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.*

Snadno ověříme, že CLV pro uniformně mixující náhodný proces, je zobecněním věty 1.9.

Nechť máme náhodný proces $(X_n, n \ge 1)$. Předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \ge 1$ jsou navzájem nezávislé a platí, že $EX_1 = 0,\ EX_1^2 = 1$, potom:
Řetězec je striktně stacionární

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n) =$$
$$= P(X_{k+1} \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_{k+n} \in B_n) = P\left(X_{k+1} \in B_1, \ldots, X_{k+n} \in B_{k+n}\right).$$

Nechť $A \in \Im_1^k$ a $B \in \Im_{n+k}^{\infty}$. Z nezávislosti náhodných veličin plyne $P(B|A) - P(B) = P(B) - P(B) = 0$ a pak je řetězec uniformně mixující neboť $\varphi(n) = 0$. Triviálně je splněna i podmínka $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2^n)^{1/2} = 0 < \infty$. Dále také $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \infty$ neboť $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_i X_j) = n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} EX_i \cdot EX_j = n$.
Jsou tedy splněny všechny podmínky věty 1.8 a proto

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

V další kapitole budeme vyšetřovat větu 1.7 pro egrodické striktně stacionární Markovovy řetězce s konečnou množinou stavů.

Kapitola 2

CLV pro egrodický striktně stacionární Markovův řetězec s konečnou množinu stavů

V této kapitole chci ukázat, že CLV pro uniformně mixující náhodný proces se dá také formulovat pro egrodické striktně stacionární Markovovy řetězce s konečnou množinou stavů.

Nejdříve se v podkapitole 2.1 seznámíme s pojmem egrodický Markovův řetězec s konečnou množinou stavů a jaké podmínky musí splňovat, aby byl i striktně stacionární.

V další podkapitole ověřím, že tyto řetězce jsou uniformně mixující a také splňují podmínku *(1.2)*.

Poslední část je věnována podmínce *(1.3)*, která však není lehce ověřitelná. Proto si uvedu jinou, snáze ověřitelnou, podmínku, která když bude splněna, tak je zároveň i splněna podmínka *(1.3)*

Na závěr celé kapitoly vyslovíme CLV pro egrodický striktně stacionární Markovův řetězec s konečnou množinu stavů.

2.1 Striktně stacionární Markovův řetězec

V kapitole 2.1 se seznámíme s pojmy týkající se Markovových řetězců, potřebné pro formulaci CLV pro egrodický, striktně stacionární Markovův řetězec s konečnou množinou stavů.

Věty, jež jsou uvedené v této kapitole, můžeme nalézt [1] a zde najdeme i jejich důkazy.

Mějme posloupnost náhodných veličin $X_n : \Omega \to K$, pro všechny $n \geq 1$, definovaných na pravděpodobnostním prostoru, která nabývá konečně mnoho hodnot. Nechť $S \in K$ je množina čísel i takových, že $i \in S$ právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $P(X_n = i) > 0$. Množinu S budeme nazývat množinou stavů náhodného procesu $(X_n, n \geq 1)$ a jejich prvky budeme nazývat stavy.

Definice 2.1.1 (Markovův řetězec): *Mějme náhodný proces $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů S. Tento proces se nazývá Markovův řetězec, jestliže pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_1 \in S$ taková, že*

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) > 0.$$

platí tzv. Markovská vlastnost:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Definice 2.1.2 (pravděpodobnost přechodu): *Mějme Markovův řetězec s konečnou množinou stavů S.*

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+1) \quad i, j \in S$$

se nazývá pravděpodobnost přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase n+1 (někdy též pravděpodobnost přechodu 1.řádu). Podobně podmíněné pravděpodobnosti

$$P(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+m) \quad i, j \in S$$

pro $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ se nazývají pravděpodobnosti přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+m$ (někdy též pravděpodobnosti přechodu m-tého řádu).

Pravděpodobnostní rozdělení $p_i = P(X_0 = i), i \in S$ se nazývá počáteční rozdělení.

Definice 2.1.3 (HMŘ): *Jestliže pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(n, n+m)$ nezávisí na časových okamžicích n a $n+m$, ale jen na rozdílu m, říkáme, že příslušný Markovův řetězec je homogenní tj. $\forall i, j \in S$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$:*

$$p_{ij}(n, n+m) = p_{ij}(1, 1+m)$$

Uvažujme nyní homogenní Markovův řetězec s konečnou množinou stavů. Pravděpodobnosti přechodu prvního řádu $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ jsou v tomto případě nezávislé na n; budu je značit p_{ij}. Protože pro každé $i \in S$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $P(X_n = i) > 0$ tak je p_{ij} dobře definované pro každou dvojici stavů. Všechny tyto pravděpodobnosti můžeme sestavit do čtvercové matice $\mathbf{P} = \left\{p_{ij}, i, j \in S\right\}$, kterou nazveme maticí pravděpodobnosti přechodu. Zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S \ ; \ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad i \in S. \ (2.1)$$

Matice která splňuje vlastnosti (2.1) se nazývá stochastická matice.

Analogicky můžu sestavit počáteční rozdělení do vektoru $\mathbf{p} = \left\{p_i, i \in S\right\}$. Pro vektor zřejmě platí, že

$$p_i \geq 0, \quad i \in S \ \sum_{i \in S} p_i = 1. \ (2.2)$$

Vektor, který splňuje vlastnost (2.2) se nazývá pravděpodobnostní vektor.

Vlastnost, pravděpodobnosti přechodu n-tého řádu HMŘ, uvedeme v následující větě.

Nejprve pro přirozené číslo n a pro všechny stavy $i, j \in S$ definujme $p_{ij}^{(n)}$ takto: položme $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kronekerův symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Pro přirozené číslo $n \geq 1$ definujeme postupně

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Definice $p_{ij}^{(n)}$ odpovídá definici maticového součinu. Označíme-li $\mathbf{P}^{(n)} = \left\{p_{ij}^{(n)}; i, j \in S, n \in \mathbb{N}\right\}$ matici pravděpodobností přechodu n-tého řádů, pak platí:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \overbrace{\mathbf{P} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}}^{n} = \mathbf{P}^n.$$

Věta 2.1.4: *Nechť $(X_n, n \geq 1)$ je HMŘ s konečnou množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Potom pro pravděpodobnosti přechodu n-tého řádu platí*

$$P(X_{n+m} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)} \quad i, j \in S$$

pro všechna přirozená $m \geq 0, n \geq 0$ a $P(X_m = i) > 0$.

Definice 2.1.5 (nerozložitelnost): *HMŘ s konečnou množinou stavů S se nazývá nerozložitelný, jestliže pro všechny dvojice stavů $i, j \in S$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové že $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Definice 2.1.6 (periodický, neperiodický): *Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, pro které $p_{jj}^{(n)} > 0$. Je-li $d_j > 1$, říkáme, že stav je periodický s periodou d_j, je-li $d_j = 1$, říkáme, že stav j je neperiodický.*

Pokud jsou všechny stavy v řetězci neperiodické (resp. periodické) říkáme, že řetězec je neperiodický (resp. periodický).

Věta 2.1.7: *V nerozložitelném HMŘ s konečně mnoha stavy jsou všechny stavy buď periodické nebo jsou všechny stavy neperiodické.*

Definice 2.1.8 (ergodický řetězec) : *Markovův řetězec nazveme ergodickým řetězcem, jestliže je řetězec nerozložitelný a neperiodický.*

Další část této kapitoly je věnována stacionárnímu rozdělení a jeho existenci. Ukážeme, jak pro egrodický Markovův řetězec, stacionární rozdělení vypadá a že takové existuje právě jedno.

Definice 2.1.9 (stacionární rozdělení): *Nechť $(X_n, n \geq 1)$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Nechť $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$ je nějaké pravděpodobnostní rozdělení na množině S, tj. $\pi_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$. Potom $\boldsymbol{\pi}$ se nazývá stacionární rozdělení daného řetězce, jestliže platí*

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P} \text{ (nebo-li } \pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, j \in S\text{)},$$

kde $\boldsymbol{\pi}$ je sloupcový vektor.

Věta 2.1.10: *Nechť počáteční rozdělení homogenního Markovova řetězce je stacionární. Potom Markovův řetězec $(X_n, n \geq 1)$ je striktně stacionární náhodný proces, tj. pro všechny $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a libovolná $i_1, \ldots, i_n \in S$ platí*

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{k+1} = i_1, X_{k+2} = i_2, \ldots, X_{k+n} = i_n)$$

Speciálně, pro absolutní pravděpodobnosti platí $p_j = P(X_n = j) = \pi_j, j \in S$, kde π_j jsou počáteční stacionární pravděpodobnosti.

Homogenní Markovův řetězec se striktně stacionárním počátečním rozdělením a konečnou množinou stavů nazveme striktně stacionární Markovův řetězec (SSMŘ) s konečnou množinou stavů.

Věta 2.1.11: *Máme-li nerozložitelný homogenní Markovův řetězec $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů, pak existuje stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$ a je jediné. Je-li navíc řetězec neperiodický, potom pro stacionární pravděpodobnosti π_j platí*

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad i, j \in S$$

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_j^{(n)} > 0 \qquad j \in S .$$

Lemma 2.1.12 [3]: *Mějme egrodický SSMŘ* $(X_n, n \geq 1)$ *s konečnou množinou stavů* S *a maticí přechodu* $\mathbf{P} = \left\{ p_{ij}; i, j \in S \right\}$. *Pak existuje* $c \geq 0$ *a* $0 \leq o < 1$ *takové, že platí*

$$\left| p_{ij}^{(n)} - \pi_j \right| \leq c o^n$$

pro přirozené číslo n a pro všechny stavy $i, j \in S$.

2.2 Mixující vlastnost

Tato kapitola je rozdělena do dvou částí. Na úvod uvedeme pojmy potřebné k ověření, mixující vlastnosti a v druhé části tuto vlastnost dokážeme pro egrodické striktně stacionární Markovovy řetězce s konečnou množinou stavů. Dále ukážeme, že pro takovéto Markovovy řetězce je splněna podmínka *(1.2)*.

V celé této kapitole uvažujme náhodný proces $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů S na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \Im, P)$.

Definice 2.2.1. (Cylindr): *Mějme přirozená čísla* a, b, $1 \leq a \leq b$ *a posloupnost stavů* $i_a, i_{a+1}, \dots, i_b \in S$. *Jev daný podmínkami*

$$X_a = i_a, \dots, X_b = i_b$$

nazveme cylindrem nad intervalem $[a,b]$. *Množinu všech cylindrů nad* $[a,b]$ *označme* $\mathcal{E}_a^b$.

Jelikož uvažujeme konečnou množinu stavů S je i množina všech cylindrů $\mathcal{E}_a^b$ konečná.

Definice 2.2.2 (Rozklad): *Konečný soubor* $\{A_1, \dots, A_n\}$ *měřitelných podmnožin* Ω *množin nazveme rozkladem* Ω, *jestliže množiny* A_j *jsou po dvou disjunktní a*

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega.$$

Věta 2.2.3: *Množina* $\mathcal{E}_a^b$ *tvoří rozklad pravděpodobnostního prostoru* Ω.

Důkaz:

Mějme posloupnosti prvků $i_a, i_{a+1}, \dots, i_b \in S$ a $j_a, j_{a+1}, \dots, j_b \in S$. Nechť existuje $c \in (a,b)$ pro které platí $i_c \neq j_c$. Dále pak uvažujme jev $A_i \in \mathcal{E}_a^b$ daný podmínkami

$$X_a = i_a, \dots, X_c = i_c, \dots, X_b = i_b$$

a jev $A_j \in \mathcal{E}_a^b$ daný podmínkami

$$X_a = j_a, \dots, X_c = j_c, \dots, X_b = j_b.$$

Nechť $\omega \in A_i \cap A_j$, a $X_c(\omega) = i_c, X_c(\omega) = j_c$ pak $i_c = j_c$ což je spor. Tedy prvky z množiny $\mathcal{E}_a^b$ jsou po dvou disjunktní.

Buď nyní $\omega \in \Omega$. Označme $i_n = X_n(\omega)$, $n \in [a,b]$. Potom ω náleží cylindru danému podmínkami $X_a = i_a, \dots, X_c = i_c, \dots, X_b = i_b$. Proto $\bigcup_{C \in \mathcal{E}_a^b} C = \Omega$.

•

Věta 2.2.4: *$\Im_a^b$ je množina všech konečných sjednocení prvků z množiny $\mathcal{E}_a^b$.*

Důkaz:

Množinu všech konečných sjednocení prvků z množiny $\mathcal{E}_a^b$ označme $\tilde{\Im}_a^b$. Sjednocení prázdného systému množin položíme definitoricky rovno prázdné množině.

1) Nyní ukážeme, že $\tilde{\Im}_a^b \subseteq \Im_a^b$.

Buď $C \in \mathcal{E}_a^b$. Cylindr C se dá psát ve tvaru

$$C = \{\omega \in \Omega; X_a(\omega) = i_a, ..., X_b(\omega) = i_b\} = \bigcap_{n=a}^{b} \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) = i_n\} = \bigcap_{n=a}^{b} \{X_n^{-1}(\{i_n\})\}.$$

Jednoprvkové množiny $\{i_n\}$ jsou borelovské a proto $X_n^{-1}(\{i_n\}) \in \Im_a^b$. Zároveň $\Im_a^b$ je dle definice uzavřená na spočetné průniky. Proto $C \in \Im_a^b$. Jelikož $\Im_c^b$ je uzavřená na všechny spočetná sjednocení pak $\tilde{\Im}_a^b \subseteq \Im_a^b$.

2) V této části důkazu ukažme že $\Im_a^b \subseteq \tilde{\Im}_a^b$.

Nejprve dokažme, že $\tilde{\Im}_a^b$ je σ-algebra. Uvažujme nyní $A, A_1, A_2, ... \in \tilde{\Im}_a^b$

Zřejmě $\Omega = \bigcup_{C \in \mathcal{E}_a^b} C$ padne do $\tilde{\Im}_a^b$. A_i se dá napsat ve tvaru $A_i = \bigcup_{j=1}^{k(i)} C_{i,j}$ a

$A = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$, potom

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup \{C \in \mathcal{E}_a^b \exists i \geq 1, j \leq k(i) : C = C_{i,j}\}$$

$$X \setminus A = \bigcup \{C \in \Im_a^b, \forall j \leq k : C \neq C_j\}.$$

Z toho plyne, že též $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, X \setminus A$ padne do $\tilde{\Im}_a^b$. Tedy $\tilde{\Im}_a^b$ je σ-algebra.

Zbývá ukázat, že množiny $X_n^{-1}(B)$, $n \in [a,b]$, $B \in B(\mathbb{R})$, které generují σ-algebru $\Im_a^b$, náleží též σ-algebře $\tilde{\Im}_a^b$. Mějme přirozená čísla $n \in [a,b]$, $B \in B(\mathbb{R})$. Označme $\tilde{S} = B \cap S$ a definujme $G = \{f : \{a, ..., b\} \to S; f(n) \in S\}$. Potom

$$X_n^{-1}(B) = X_n^{-1}(\tilde{S}) = \bigcup_{f \in G} \{\omega \in \Omega, X_a(\omega) = f(a), ..., X_b(\omega) = f(b)\}.$$

Na pravé straně máme sjednocení cylindrů z $\mathcal{E}_a^b$. Tedy i $X_n^{-1}(B) \in \tilde{\Im}_a^b$.

•

Definice 2.2.5 (algebra): *Systém O podmnožin Ω se nazývá algebra, jestliže*

a) $\Omega \in O$

b) $A \in O \Rightarrow \Omega \setminus A \in O$

c) $A, B \in O \Rightarrow A \cup B \in O$

Algebra je tedy uzavřená na konečná sjednocení a konečné průniky.

Lemma 2.2.6: *Označme-li* $\mathfrak{A}_a^\infty = \bigcup_{a=b}^{\infty} \mathfrak{I}_a^b$, *pak* $\mathfrak{A}_a^\infty$ *je algebra a platí* $\mathfrak{I}_a^b = \sigma(\mathfrak{A}_a^\infty)$.

Důkaz:
Z definice plyne že $\mathfrak{I}_a^b \subseteq \mathfrak{I}_a^d$ pro všechna $a \le b \le d$. Nechť $A, B \in \mathfrak{A}_a^\infty$, potom pro některé $b \ge a$ je $A, B \in \mathfrak{I}_a^b$. Jelikož $\mathfrak{I}_a^b$ je σ-algebra, platí že $\Omega \setminus A \in \mathfrak{I}_a^b \subseteq \mathfrak{A}_a^\infty$ a $A \cup B \in \mathfrak{I}_a^b \subseteq \mathfrak{A}_a^\infty$ a $\mathfrak{A}_a^\infty$ je algebra.
Z definice víme, že $\mathfrak{I}_a^b \subseteq \mathfrak{I}_a^\infty$. Proto i $\mathfrak{A}_a^\infty \subseteq \mathfrak{I}_a^\infty$ a tedy $\sigma(\mathfrak{A}_a^\infty) \subseteq \mathfrak{I}_a^\infty$. Uvažujme $n \ge a$, $B \in B(\mathbb{R})$. Buď $b \ge n$, potom $X_n^{-1}(B) \in \mathfrak{I}_a^b \subseteq \mathfrak{A}_a^\infty \subseteq \sigma(\mathfrak{A}_a^\infty)$.

•

Následující věta je jedna ze základních tvrzení teorie míry.

Věta 2.2.7 (Aproximační věta) [4]: *Máme pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$. *Nechť máme* $\mathfrak{A}$ *je algebra měřitelných množin z* $\mathfrak{I}$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *a* $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ *existuje* $B \in \mathfrak{A}$ *taková, že*

$$P(B' \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Lemma 2.2.8: *Mějme náhodný proces* $(X_n, n \ge 1)$. *Pak*

$$\varphi(n) = \sup\left\{\left|P(B|A) - P(B)\right| : k \ge 1, A \in \mathfrak{I}_1^k, B \in \mathfrak{A}_{n+k}^\infty, P(A) > 0\right\}.$$

Důkaz:
Označme

$$\varphi'(n) := \sup\left\{\left|P(B|A) - P(B)\right| : k \ge 1, A \in \mathfrak{I}_1^k, B \in \mathfrak{A}_{n+k}^\infty, P(A) > 0\right\}.$$

Protože pro všechny přirozená čísla n, k je $\mathfrak{A}_{n+k}^\infty \subseteq \mathfrak{I}_{n+k}^\infty$, pak platí $\varphi'(n) \le \varphi(n)$. Nyní mějme $\varepsilon > 0$. Z definice $\varphi(n)$ dostáváme, že existuje $k \ge 1$ a množiny $A \in \mathfrak{I}_1^k, B \in \mathfrak{I}_{n+k}^\infty$, $P(A) > 0$ takové, že $\left|P(B|A) - P(B)\right| \ge \varphi(n) - \varepsilon$. Z věty 2.2.7 vyplývá, že existuje $B' \in \mathfrak{A}_{n+k}^\infty$ takové, že $P(B' \vartriangle B) < \varepsilon$. Potom

$$\left|P(B'|A) - P(B')\right| = \left|\frac{P(B' \cap A)}{P(A)} - P(B')\right| = \left|\frac{P(B \cap A) + P(B' - B) \cap A)}{P(A)} - P(B) + P(B' - B)\right|$$

$$\ge \left|\frac{P(B \cap A)}{P(A)} - P(B)\right| - \left|\frac{P(B' - B) \cap A)}{P(A)}\right| - \left|P(B' - B)\right|$$

$$\ge \varphi(n) - \varepsilon - \frac{\varepsilon \cdot P(A)}{P(A)} - \varepsilon \cdot P(A) \ge \varphi(n) - \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon$$

$$\ge \varphi(n) - 3\varepsilon$$

Nerovnice $\varphi'(n) \ge \left|P(B'|A) - P(B')\right| \ge \varphi(n) - 3\varepsilon$ platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, proto $\varphi'(n) \ge \varphi(n)$.

Věta 2.2.9: *Uvažujme nerozložitelný, neperiodický SSMŘ* $(X_n, n \geq 1)$ *s konečnou množinou stavů. Potom existují reálné konstanty* C, o *kde,* $0 \leq o < 1$ *takové,že*

$$\varphi(n) \leq C \cdot o^n.$$

Důkaz:

Mějme ergodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů $S = \{i_1, i_2, ..., i_z\}$, maticí pravděpodobnosti přechodu $\mathbf{P}^{(n)} = \left\{p_{ij}^{(n)}; i, j \in S, n \in \mathbb{N}\right\}$ a stacionárním rozdělením $\boldsymbol{\pi} = \left\{\pi_j, j = 1, ..., z\right\}$.

Dále uvažujme, že $A \in \mathfrak{I}_1^k, B \in \mathfrak{A}_{n+k}^{\infty}$. Tedy $B \in \mathfrak{I}_{n+k}^{n+k+m}$ pro dostatečně velké m. Jev A je disjunktní sjednocení $A = \bigcup_{e=1}^{K} A_e$, kde A_e jsou pro všechny $e = 1, ..., K$ cylindry nad intervalem $[1, k]$. Buď A_e definovaný podmínkami

$$X_e = i_{e,k}, X_{k-1} = i_{e,k-1}, \ldots, X_1 = i_{e,1}$$

Jev B je také disjunktní sjednocení $B = \bigcup_{j=1}^{D} B_j$, kde B_j jsou pro všechny $j = 1, ..., D$ cylindry nad intervalem $[n+k, n+k+m]$. Buď B_j definovaný podmínkami

$$X_{n+k} = i_{j,n+k}, X_{n+k+1} = i_{j,n+k+1}, \ldots, X_{n+k+m} = i_{j,n+k+m}.$$

Nejdříve upravme jevy $P(B|A)$ a $P(B)$.

$$P(B|A) = \sum_{j=1}^{D} \sum_{e=1}^{K} P(B_j|A_e) \cdot \frac{P(A_e)}{P(\bigcup_{e=1}^{K} A_i)}$$

Označme váhy $q_e = \dfrac{P(A_j)}{P(\bigcup_{i=1}^{K} A_i)}$, kde $\sum_{e=1}^{K} q_e = 1$.

$$P(B|A) = \sum_{e=1}^{K} \sum_{j=1}^{D} P(X_{n+k} = i_{j,n+k}, X_{n+k+1} = i_{j,n+k+1}, ..., X_{n+k+m} = i_{j,n+k+m} | X_k = i_{e,k}) \cdot q_e$$

$$= P(X_{n+k} = i_{j,n+k}, X_{n+k+1} = i_{j,n+k+1}, ..., X_{n+k+m} = i_{j,n+k+m} | X_k = i_{e,k})$$

$$= p_{i_{j,n+k} i_{j,n+k+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{j,n+k+m-1} i_{j,n+k+m}} \cdot p_{i_{e,k} i_{j,n+k}}^{(n)}.$$

Označme $p_j := p_{i_{j,n+k} i_{j,n+k+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{j,n+k+m-1} i_{j,n+k+m}}$

$$P(B|A) = \sum_{e=1}^{K} \sum_{j=1}^{D} p_j \cdot p_{i_{e,k} i_{j,n+k}}^{(n)} \cdot q_e$$

Nyní vyjádřeme $P(B)$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{D} P(X_{n+k} = i_{j,n+k}, X_{n+k+1} = i_{j,n+k+1}, ..., X_{n+k+m} = i_{j,n+k+m})$$

$$= \sum_{j=1}^{D} p_{i_{j,n+k} i_{j,n+k+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{j,n+k+m-1} i_{j,n+k+m}} \cdot \pi_{i_{j,n+k}} = \sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \pi_{i_{j,n+k}}$$

$$= (\sum_{e=1}^{K} q_e)(\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \pi_{i_{j,n+k}})$$

$$= \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \pi_{i_{j,n+k}} \cdot q_e$$

Sloučíme výrazy $P(B|A)$ a $P(B)$.

$$P(B|A) - P(B) = \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot p^{(n)}_{i_{e,k} i_{j,n+k}} \cdot q_e - \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \pi_{i_{j,n+k}} \cdot q_e$$

$$= \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j q_e \cdot (p^{(n)}_{i_{e,k} i_{j,n+k}} - \pi_{i_{j,n+k}})$$

Přejdeme k absolutní hodnotě:

$$\left|P(B|A) - P(B)\right| = \left|\sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j q_e \cdot (p^{(n)}_{i_{e,k} i_{j,n+k}} - \pi_{i_{j,n+k}})\right|$$

$$\le \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot q_e \cdot \left|p^{(n)}_{i_{e,k} i_{j,n+k}} - \pi_{i_{j,n+k}}\right|$$

Díky Lemma 2.1.12 omezíme $\left|p^{(n)}_{i_{e,k} i_{j,n+k}} - \pi_{i_{j,n+k}}\right|$ kde $c \ge 0$ a $0 \le o < 1$

$$\left|P(B|A) - P(B)\right| \le \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot q_e \cdot c \cdot o^n = c \cdot o^n \sum_{e=1}^{K}\sum_{j=1}^{D} p_j \cdot q_e$$

$$\le c \cdot o^n \sum_{e=1}^{K} q_e \sum_{j=1}^{D} p_j \le c \cdot o^n \cdot \sum_{j=1}^{D} p_j$$

Nyní zbývá omezit $\sum_{j=1}^{D} p_j$. Uvědomme si, že $P(B) = \sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \pi_{i_{j,n+k}} = 1$, čili $1 = \sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \pi_{i_{j,n+k}} \ge \sum_{j=1}^{D} p_j \cdot \min(\pi_i, i \in S)$ a potom $\sum_{j=1}^{D} p_j \le \frac{1}{\min(\pi_i, i \in S)}$.

Dostáváme tedy, $\left|P(B|A) - P(B)\right| \le C \cdot o^n$, kde $C = c \cdot \frac{1}{\min(\pi_i, i \in S)}$. Jelikož $C \cdot o^n$ nezávisí na k je i

$$\varphi(n) = \sup\left\{\left|P(B|A) - P(B)\right| : k \ge 1, A \in \mathfrak{F}_1^k, B \in \mathfrak{A}_{n+k}^{\infty}, P(A) > 0\right\} \le C \cdot o^n.$$

•

Věta 2.2.11 *Uvažujme egrodický SSMŘ* $(X_n, n \ge 1)$ *s konečnou množinou stavů. Pak je řetězec uniformně mixující a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2^n)^{1/2} < \infty$.

Důkaz:

Jelikož $\varphi(n) \le C \cdot o^n$ pak $\varphi(n) \to 0$ pro $n \to \infty$.

Snadno upravíme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(2^n)^{1/2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}(C\cdot o^{2^n})^{1/2} = \sqrt{C}\sum_{n=1}^{\infty}o^{2^{n-1}}$$

A jelikož $2^{n-1} \geq n$ pro všechna přirozená čísla n a $0 \leq o < 1$, pak

$$\leq \sqrt{C}\sum_{n=1}^{\infty}o^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}o^n$ je již geometrická řada, která konverguje pro $|o| < 1$. Proto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(2^n)^{1/2} < \sqrt{C}\frac{o}{1-o} < \infty \quad \text{kde } C \geq 0 \text{ a } 0 \leq o < 1.$$

•

Věta 2.2.12: *Nechť máme egrodický SSMŘ* $(X_n, n \geq 1)$ *s konečnou množinou stavů. Označme* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\sigma_n^2 = \operatorname{var} S_n$ *a* $EX_1 = \mu$. *Pokud*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 = \infty$$

pak

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma_n} \leq x\right) = \Phi(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz:

Nechť máme egrodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů $S = \{i_1, \ldots, i_z\}$, maticí pravděpodobnosti přechodu $\mathbf{P}^{(n)} = \{p_{ij}^{(n)}; i, j \in S, n \in \mathbb{N}\}$ a stacionárním rozdělením $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j = 1, \ldots, z\}$. Označme

$$EX_1 = \mu \qquad \operatorname{var} X_1 = \sigma^2 \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \sigma_n^2 = \operatorname{var} S_n$$

a předpokládejme, že $\sigma_n^2 \to \infty$ *pro* $n \to \infty$.

Potom náhodný řetězec $(\widetilde{X_n}, n \geq 1)$, kde $\widetilde{X_n} = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ pro všechna $n \geq 1$, s konečnou množinou stavů $\widetilde{S} = \{\widetilde{i_j}, j = 1, \ldots, z\}$, je také egrodický SSMŘ s maticí přechodu $\widetilde{\mathbf{P}} = \{\widetilde{p}_{\widetilde{i_g}\widetilde{i_h}}, g, h = 1, \ldots, z\}$ danou rovnicemi

$$p_{i_g i_h} = \widetilde{p}_{\widetilde{i_g}\sigma+\mu, \widetilde{i_h}\sigma+\mu}$$

a počátečním rozdělením $\widetilde{\boldsymbol{\pi}} = \{\widetilde{\pi}_{\widetilde{i_g}}, g = 1, \ldots, z\}$ danou rovnicemi

$$\pi_{i_g} = \widetilde{\pi}_{\widetilde{i_g}\sigma+\mu}.$$

Pro tento řetězec již platí $E\widetilde{X_1} = 0$ a $E\widetilde{X_1}^2 = 1$.

Označme $\widetilde{S_n} = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{X_i}$ a $\widetilde{\sigma}_n^2 = E\widetilde{S}_n^2$ pak platí $\widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}$ a tudíž $\widetilde{\sigma}_n^2 \to \infty$ pro $n \to \infty$.

Pro proces $(\widetilde{X}_n, n \geq 1)$ jsou tedy splněny všechny předpoklady věty 1.7 a platí

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\widetilde{S}_n}{\widetilde{\sigma}_n} \leq x\right) = \Phi(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Ovšem $\dfrac{\widetilde{S}_n}{\widetilde{\sigma}_n} = \dfrac{\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma}}{\dfrac{\sigma_n}{\sigma}} = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma_n}$.

2.3 Konvergence rozptylu

Tato podkapitola je věnovaná podmínce $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \infty$ z předchozí věty.

Nechť máme egrodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů. Definujme $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ a $\sigma_n^2 = \operatorname{var} S_n$.

Vyjádřeme

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^2 &= \operatorname{var}(S_n + X_{n+1}) = \operatorname{var} S_n + \operatorname{var} X_{n+1} + 2\operatorname{cov}(S_n, X_{n+1}) \\ &= \operatorname{var} S_n + \operatorname{var} X_1 + 2\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_{n+1}) \\ &= \sigma_n^2 + \operatorname{var} X_1 + 2\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1, X_{r+1})\end{aligned}$$

Označme $\beta(n) = \operatorname{var} X_1 + 2\sum\limits_{r=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1, X_{r+1})$.

Lemma 2.3.1: *Mějme egrodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s konečnou množinou stavů S. Pak $\beta(n)$ konverguje pro $n \to \infty$ ke konečnému reálnému číslu D.*

Důkaz:

Uvědomme si, že $\sum\limits_{r=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1 X_{1+r})$ je absolutně konvergentní pro $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_1 X_{1+r}) &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_{ij}^{(r)} \cdot \pi_i \cdot (i-\mu)\cdot(j-\mu) \\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} (p_{ij}^{(r)} - \pi_j)\cdot \pi_i \cdot (i-\mu)\cdot(j-\mu) + \sum_{i\in S} \pi_i \cdot (i-\mu) \sum_{j\in S} \pi_j \cdot (j-\mu) \\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} (p_{ij}^{(r)} - \pi_j)\cdot \pi_i \cdot (i-\mu)\cdot(j-\mu) + (EX_1 - \mu)\cdot(EX_{r+1} - \mu) \\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} (p_{ij}^{(r)} - \pi_j)\cdot \pi_i \cdot (i-\mu)\cdot(j-\mu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{cov}(X_1 X_{1+r})\right| &= \left|\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} (p_{ij}^{(r)} - \pi_j)\cdot \pi_i \cdot (i-\mu)\cdot(j-\mu)\right| \\ &\leq \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \left|p_{ij}^{(r)} - \pi_j\right| \cdot \pi_i \cdot \left|(i-\mu)\right| \cdot \left|(j-\mu)\right|\end{aligned}$$

Z Lemma 2.1.11 vyplývá, že $\left|p_{ij}^{(n)} - \pi_j\right| \leq co^n$

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{cov}(X_1 X_{1+r})\right| &\leq \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} c\cdot o^r \cdot \pi_i \cdot \left|(i-\mu)\right| \cdot \left|(j-\mu)\right| \\ &\leq c\cdot o^r \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \left|i-\mu\right| \cdot \left|j-\mu\right|\end{aligned}$$

Označím $m = \max\limits_{i\in S} \left|(i-\mu)\right|$

$$\left|\operatorname{cov}(X_1 X_{1+r})\right| \le z^2 \cdot c \cdot o^r \cdot m^2$$

$$\left|\operatorname{cov}(X_1 X_{1+r})\right| \le G \cdot o^r \qquad \text{kde } G = z^2 \cdot c \cdot m^2 \text{ je kladné reálné číslo.}$$

Tedy řada $\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1 X_{1+r})$ konverguje absolutně.

Díle víme, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1 X_{1+r}) = \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_1 X_{1+r}) \in \mathbb{R}$ proto také

$$\lim_{n\to\infty} \beta(n) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{var} X_1 + 2\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cov}(X_1, X_{r+1})) = \operatorname{var} X_1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_1, X_{r+1}) = D$$

•

Věta 2.3.2: *Mějme egrodický SSMŘ* $(X_n, n \ge 1)$ *s konečnou množinou stavů. Definujme* $D = \operatorname{var} X_1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_1, X_{r+1})$. *Pokud*

$D > 0$ *(2.3)*

pak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \infty$$

kde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *a* $\sigma_n^2 = \operatorname{var} S_n$.

Důkaz:

Víme, že σ_n^2 můžeme přepsat pomocí σ_1^2:

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n) = \operatorname{var} X_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n)$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \operatorname{var} X_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \beta(n).$$

•

Pokud $D > 0$ pro egrodické SSMŘ s konečnou množinou stavů potom platí i $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \infty$ což je v tomto případě slabší podmínka než *(2.3)*.

Věta 2.3.3: *Mějme egrodický SSMŘ* $(X_n, n \ge 1)$ *s konečnou množinou stavů a* $EX_1 = \mu$. *Definujme* $D = \operatorname{var} X_1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_1, X_{r+1})$. *Jestliže platí*

i) $D > 0$

pak

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma_n} \le x \right) = \Phi(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ *kde* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *a* $\sigma_n^2 = \operatorname{var} S_n^2$.

Kapitola 3

CLV pro egrodický striktně stacionární Markovův řetězec s dvouprvkovou množinou stavů

V této kapitole ukážeme, pro egrodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s dvouprvkovou množinou stavů platí CLV.

Lemma 3.1: Mějme egrodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s dvouprvkovou množinou stavů a $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, potom $D' > 0$, kde $D' = 1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} E(X_1, X_{r+1})$.

Důkaz:
Mějme egrodický SSMŘ $(X_n, n \geq 1)$ s množinou stavů $S = \{i, j\}$, maticí přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ kde $a, b \in (0,1)$ a stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi}$. Nechť $EX_1 = 0$ a $EX_1^2 = 1$.

Pro výpočty použijeme program Mathematika 5.2.

Pro další výpočty si nejprve spočítejme matici $\tilde{\mathbf{P}}^r$ a stacionární rozdělení $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$.

$$\tilde{\mathbf{P}}^r = \begin{pmatrix} \frac{-1+b}{-2+a+b} - \frac{(-1+a)\,(1-b)\,(-1+a+b)^r}{(-1+b)\,(-2+a+b)} & \frac{-1+a}{-2+a+b} - \frac{(-1+a)\,(-1+a+b)^r}{-2+a+b} \\ \frac{-1+b}{-2+a+b} + \frac{(1-b)\,(-1+a+b)^r}{-2+a+b} & \frac{-1+a}{-2+a+b} + \frac{(-1+b)\,(-1+a+b)^r}{-2+a+b} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} \begin{pmatrix} -\frac{1-b}{-2+a+b} \\ -\frac{1-a}{-2+a+b} \end{pmatrix}$$

Vypočítáme $i, j \in S$

$$S1 = \{i1, j1\} = \left\{-\frac{\sqrt{\pi_2}}{\sqrt{\pi_1}\,\sqrt{\pi_1+\pi_2}}, \frac{\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}\,\sqrt{\pi_1+\pi_2}}\right\}$$

$$S2 = \{i2, j2\} = \left\{\frac{\sqrt{\pi_2}}{\sqrt{\pi_1}\,\sqrt{\pi_1+\pi_2}}, -\frac{\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}\,\sqrt{\pi_1+\pi_2}}\right\}$$

Hodnoty stavů si můžeme vyjádřit pomocí již vypočítaného stacionárního rozdělení

$$S1 = \{i1, j1\} = \left\{-\frac{\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}}}{\sqrt{-\frac{1-b}{-2+a+b}}\,\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}-\frac{1-b}{-2+a+b}}}, \frac{\sqrt{-\frac{1-b}{-2+a+b}}}{\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}}\,\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}-\frac{1-b}{-2+a+b}}}\right\}$$

$$S2=\{i2,j2\}=\{\frac{\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}}}{\sqrt{-\frac{1-b}{-2+a+b}}\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}-\frac{1-b}{-2+a+b}}},-\frac{\sqrt{-\frac{1-b}{-2+a+b}}}{\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}}\sqrt{-\frac{1-a}{-2+a+b}-\frac{1-b}{-2+a+b}}}\},$$

kde $a+b\neq 2$ neboť $a,b\in(0,1)$.

Nyní ověříme podmínku $D'>0$. Tedy ověřit, že $D'=1+2\sum_{r=1}^{\infty}E(X_1,X_{r+1})>0$.

V kapitole 2.3 jsme odvodili $E(X_1X_{1+r})=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}p_{ij}^{(r)}\cdot\pi_i\cdot i\cdot j$. Spočtěme $E(X_1X_{r+1})$ pro množinu stavů $S1=\{i1,j1\}$ a $S2=\{i2,j2\}$. Označme

$$EXX1(r):=\sum_{r=1}^{\infty}E(X_1X_{r+1})=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i\in S1}\sum_{j\in S1}p_{ij}^{(r)}\cdot\pi_i\cdot i\cdot j$$

$$EXX1(r):=\sum_{r=1}^{\infty}E(X_1X_{r+1})=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i\in S2}\sum_{j\in S2}p_{ij}^{(r)}\cdot\pi_i\cdot i\cdot j$$

Dosazením získáme $\sum_{r=1}^{\infty}EXX1(r)=\sum_{r=1}^{\infty}EXX2(r)=\frac{1-a-b}{-2+a+b}$

čili $D'=1+2\frac{1-a-b}{-2+a+b}$.

Nyní ukážeme pro jaké hodnoty $a,b\in(0,1)$ bude D' rovno 0. Řešme tedy rovnici

$$0=\frac{-a-b}{a+b-2} \qquad (2.4)$$

Rovnice (2.4) má dvě řešení: $a=-b$ a $a=0,b=0$. Jelikož prvky $a,b\in(0,1)$ ani jedna z možností nemůže nikdy nastat. A $D'>0$ pro všechny $a,b\in(0,1)$.

•

Věta 3.2: *Mějme egrodický SSMŘ* $(X_n,n\geq 1)$ *s dvouprvkovou množinou stavů a maticí přechodu* $\mathbf{P}=\{p_{gh},g,h\in S\}$ *takovou, že* $1<p_{gh}<0$. *Pokud* $D>0$ *pak*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma_n}\leq x\right)=\Phi(x)$$

pro všechna $x\in\mathbb{R}$ *kde* $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ *a* $\sigma_n^2=\operatorname{var}S_n^2$.

Důkaz:

Mějme náhodný řetězec $(\widetilde{X_n},n\geq 1)$, kde $\widetilde{X_n}=\frac{X_n-\mu}{\sigma}$ pro všechna $n\geq 1$ a $EX_1=\mu$, $\operatorname{var}X_1=\sigma^2$. Označme $D=\operatorname{var}X_1+2\sum_{r=1}^{\infty}\operatorname{cov}(X_1,X_{r+1})$. Jelikož $E\widetilde{X_1}=0$ a $E\widetilde{X_1^2}=1$ pak z předchozího lemmatu $D'>0$.

$$D'=1+2\sum_{r=1}^{\infty}E(\widetilde{X_1},\widetilde{X_{r+1}})=1+2\sum_{r=1}^{\infty}\operatorname{cov}(\widetilde{X_1},\widetilde{X_{r+1}})=1+2\sum_{r=1}^{\infty}\operatorname{cov}(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\frac{X_{r+1}-\mu}{\sigma})$$

$$= \frac{\operatorname{var} X_1}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_1, X_{1+r}) = \frac{D}{\sigma^2}$$

Z toho plyne, že i $D > 0$.

•

Literatura

[1] Přášková Z., Lachout P.: *Základy náhodných procesů*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2005

[2] Dehling, H., Denker, M. and Phillipp, W.: *Central limit theorems for mixing sequences of random variables under minimal conditions. Ann.Probab*. **14** (1986). 1359–1370.

[3] http://random.mat.sbg.ac.at/~ste/diss/node6.html, Lemma 2.9

[4] Ash, Robert B.: *Probability and Measure Theory,* Academic Press, London, 2000.

PŘIJATO K OBHAJOBĚ 31. 1. 2006

PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA