Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Pechanec

Analýza úrokových měr

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika, Finanční matematika

Na tomto místě chci poděkovat vedoucímu mé práce, Doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc., za cenné rady, připomínky a hlavně za čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 31. 5. 2006 Jan Pechanec

Obsah

Název práce: Analýza úrokových měr
Autor: Jan Pechanec
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
E-mail vedoucího: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme modelování volatility na historických cenách amerických akcií S&P500 a NASDAQ. Používáme k tomu nelineární modely ARCH a GARCH. Nejdříve uvádíme, jak je lze jednoduše a intuitivně odvodit. U obou modelů uvádíme méně i více formální definici. Pojednáváme zde také o modelu EWMA, jako speciálním případu modelu GARCH(1,1). Dále ilustrujeme metodu maximální věrohodnosti ve spojení s modelem GARCH(1,1). Nakonec využijeme model GARCH(1,1) k analýze předpovídání budoucí volatility. K modelování je použit softwarový systém Mathematica 5.2.

Klíčová slova: volatilita, akcie, ARCH, GARCH modely.

Title: Analysis of Interest Rates
Author: Jan Pechanec
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study modeling of volatility for historical prices of American stocks S&P500 and NASDAQ. We use nonlinear ARCH and GARCH models. At first, we explain how we simply derive them. We show less and more formal definition of models. We deal with EWMA model as a special GARCH(1,1) model. We illustrate maximum likelihood method for GARCH(1,1) model. Finally, we use GARCH(1,1) model to analyze future volatility forecasts. We have used computer algebraic system Mathematica 5.2 for modeling.

Keywords: volatility, stocks, ARCH, GARCH models.

1. Úvod

K nejčastějším aplikacím finanční matematiky již tradičně patří analýza cenných papírů. Jedním z jejich základních prvků jsou, spolu s dluhopisy a finančními deriváty, akcie.

Akcie jsou obchodovatelné cenné papíry, které dávají akcionáři, tedy držiteli akcií, určitá práva nejen na řízení podniku, ale poskytuje také právo na část zisku společnosti. Ve své klasické podobě (*common stock*) jsou akcie na rozdíl od dluhopisů založeny nejen na kapitálovém, ale i na dividendovém zisku a i z tohoto důvodu není zisk z akcií zaručen.

Pro investory, kteří ve svém investičním portfoliu mohou mít různé druhy akcií, jsou důležité následující ukazatele:

- výnos a riziko, které bývají u akcií vyšší než u dluhopisů s vysokým ratingem,
- volatilita, neboli rizikové kolísání výnosových měr, která ale bývá rovněž vyšší, což je ale v protikladu vyššího výnosu,
- likvidita, která bývá u nejobchodovatelnějších akcií značně vysoká.

V této práci se zaměříme na druhý jmenovaný významný ukazatel, volatilitu, v souvislosti s výnosem a rizikem akcií. Budeme zkoumat její historický vývoj u dvou indexů amerických akcií (NASDAQ a S&P500) a pokusíme se o stanovení předpovědi budoucí volatility.

Pro modelování volatility z časových řad použijeme ekonometrické modely typu ARCH a GARCH s využitím softwarového systému Mathematica, ve kterém budeme provádět všechny výpočty a modelování. Modely ARCH a GARCH se využívají v různých oblastech finanční matematiky, jako je například teorie oceňování aktiv, analýza časových řad nebo optimalizace portfolií. Tyto modely, jak dále ukážeme podle [2], lze jednoduše odvodit při výpočtu hodnoty v riziku VaR (*Value at Risk*), která již ovšem není předmětem této práce.

2. Volatilita

2.1. Vztah volatility k výnosu a riziku

Výnos akcie (*stock yield*) je míra zisku plynoucí z investice do určité akcie. Výnosy akcie za jednotlivá období můžeme obecně považovat za náhodné veličiny, které nabývají hodnot dle svého pravděpodobnostního rozdělení. Tento přístup je vhodný zejména v situaci, kdy například potřebujeme odhadovat budoucí výnosy. Střední hodnota těchto náhodných veličin se nazývá střední výnos (*mean return*). Směrodatnou odchylku nazýváme riziko (*risk*) neboli volatilita (*volatility*). Směrodatná odchylka udává průměrné vychýlení od průměru a tedy volatilita udává průměrné vychýlení od průměrného výnosu. Akcie s vysokou fluktuací mající velkou směrodatnou odchylku jsou daleko rizikovější než akcie s nižší fluktuací mající menší volatilitu.

2.2. Modelování volatility

Mnoho časových řad, speciálně finančních, jako například výnosy akcií nebo směnné kurzy, vykazují značné změny rozptylu během času. Vývoj těchto změn je často objektem pozorování analytiků časových řad, kteří se pak pokouší sestrojit nějaký model zachycující pozorované chování rozptylu. Existuje množství různých způsobů, jak modelovat změny v rozptylu. Základním pravidlem je brát časové řady výnosů u_n jako posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin ε_n, $n = 1,...,N$, s jednotkovým rozptylem, násobenou faktorem σ_n (směrodatnou odchylkou):

$$u_n = \sigma_n \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n \sim \mathrm{IID}(0,1). \tag{1}$$

Jednou z možností jak modelovat rozptyl, resp. volatilitu, je pokusit se o přímý přístup, ve kterém je volatilita modelována stochastickým procesem, jako například autoregresí. Takové modely se nazývají stochastické modely rozptylu (*stochastic variance models*). Alternativním přístupem jsou ARCH modely, ve kterých je rozptyl modelován z minulých pozorování. My se dále zaměříme pouze na druhý zmíněný přístup, ARCH modely, které následně zobecníme na GARCH modely.

2.3. Formální definice volatility

V dalším budeme uvažovat časový horizont $n = 1,...,N$ o délce 1 den. Označme σ_n volatilitu výnosu z akcie v n-tý den jako odhad na konci dne n-1. Kvadrátem volatility v n-tý den σ_n^2 definujeme rozptyl neboli míru kolísání. Dále označme S_n cenu akcie na konci n-tého dne. Výnos u_n mezi koncem n-tého a koncem dne n-1 definujeme jako

$$u_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}. \tag{2}$$

Nestranný odhad rozptylu v n-tý den založený na q posledních pozorování výnosů $u_{n-q},...,u_{n-1}$ je potom

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}(u_{n-i} - \overline{u})^2 , \tag{3}$$

kde $q \in \mathbb{N}$ a $\bar{u}$ je aritmetický průměr výnosů u_n

$$\overline{u} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} u_i . \tag{4}$$

Pro účely výpočtu VaR se vzorec (3) pro odhad rozptylu obvykle mění několika způsoby:

1) výnosy u_n nově definujeme jako poměrnou změnu ceny akcie mezi koncem dne n-1 a koncem n-tého dne tak, že

$$u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} , \tag{5}$$

2) dále za $\bar{u}$ uvažujeme konstantně 0,
3) konečně q-1 nahradíme q, čímž obdržíme maximálně věrohodný odhad.

Právě popsané tři změny vedou k malým změnám odhadu rozptylu, který počítáme. Vzorec (3) pro odhad rozptylu se tedy změní na

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} u_{n-i}^2 , \tag{6}$$

kde u_n jsou určeny (5).

2.4. Využití váhového systému k odvození modelů

Je zřejmé, že rovnice (6) dává všem pozorovaným u_n^2 stejnou váhu. Sledujeme-li současnou úroveň volatility, pak nás to přirozeně nutí klást větší důraz na novější pozorování a dávat jim tak větší váhu. Upravme proto odhad rozptylu (6) následujícím způsobem:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2 , \tag{7}$$

kde α_i jsou nezáporné váhy přiřazené pozorováním před i dny, protože chceme dát menší váhu starším pozorováním, jinak řečeno $\alpha_i < \alpha_j$ právě tehdy, když $i > j$. Součet všech vah musí být vždy roven jedné a proto

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1 . \tag{8}$$

Dalším zobecněním předešlé úvahy prezentované v [2], kdy jsme dostali rovnici (7), budeme předpokládat, že známe dlouhodobou průměrnou volatilitu *V*, které bychom také měli přiřadit nějakou váhu. Tato úvaha nás vede k vyjádření

$$\hat{\sigma}_n^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2 , \tag{9}$$

kde *V* je dlouhodobá volatilita a γ je váha *V*. Protože součet vah musí být opět roven jedné, pak

$$\gamma + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1 . \tag{10}$$

Vztah (9) je znám jako ARCH(q) model, který budeme podrobněji zkoumat v následující kapitole. Nahradíme-li v rovnici γV za ω, obdržíme variantu modelu, kde se ω považuje též za neznámý parametr:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2 . \tag{11}$$

3. ARCH modely

3.1. Představení ARCH modelů

Třída modelů ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) byla poprvé představena Robertem Engelem (1982) pro modelování volatility časových řad v jakémkoliv okamžiku i pro její předpověď. ARCH modely jsou značně používané ve finančním empirickém výzkumu i dalších statistických oblastech. Jejich výhodou je především jednoduchost formulace a jednoduchá tvorba odhadů. Než přejdeme k modelu, který jsme popsali rovnicí (9), resp. (11), zaměříme se nejprve na model, který byl v pořadí prvním modelem typu ARCH.

3.2. Jednoduchý ARCH model

Prvním modelem typu ARCH, který představil Engel v roce 1982, je ARCH(1), který je také někdy nazýván model ARCH prvního řádu. Tento model vychází z teze, že známe a použijeme pouze 1 poslední pozorování výnosu. V definici odhadu rozptylu

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2, \qquad \omega > 0, \qquad \alpha \geq 0 \tag{12}$$

se požaduje, aby parametr ω byl kladný a zároveň α bylo nezáporné. V určitých případech můžeme odhadnout také celkový průměrný rozptyl V z pozorovaných dat, proto můžeme použít vyjádření odhadu rozptylu, kde ω nahradíme γV, kdy opět požadujeme kladnou hodnotu parametru γ.

3.3. Model ARCH (q)

Výše uvedený model, jednoduchý ARCH(1), však není zcela dostačující, protože rozptyl závisí pouze na jednom pozorování. Rozptyl v předcházejícím časovém období by mohl jednoduše generovat pozorování blízké nule s výsledkem, který by k současnému rozptylu mohl být relativně malý. Zpravidla by každý očekával změnu rozptylu daleko více pomalejší. To vyvolává potřebu rozšířit paměť modelu pro větší množství pozorovaných dat. Tedy vyžadujeme zapojení více intervalů do rovnice (12), což nám dává nový model pro odhad rozptylu

$$\begin{gathered} \sigma_n^2 = \omega + \alpha_1 u_{n-1}^2 + \alpha_2 u_{n-2}^2 + \ldots + \alpha_q u_{n-q}^2, \\ \text{kde } \omega > 0, \ \ \alpha_i \geq 0 \text{ pro } i = 1 \ldots q. \end{gathered} \tag{13}$$

Tento model je označován jako ARCH(q) proces. Pro odhad rozptylu využíváme posledních q pozorování, což je označeno v názvu modelu. Vidíme tedy, že v předešlém odstavci zmíněný model ARCH(1) je typem ARCH(q) s q = 1.

V praxi se zdá být užitečné, klademe-li na model ARCH(q) nějaká omezení na jeho parametry, která pak vedou k více spolehlivějšímu modelu. Můžeme uvést příklad lineárního poklesu, který může být určen třeba následovně:

$$\alpha_i = \alpha \frac{9-i}{36}, \quad i = 1,...,8, \tag{14}$$

čímž ponecháme pouze dva volné parametry (α, ω) pro odhadování.

Z více formálního i matematického hlediska je model ARCH(q) definovaný následovně:

$$\begin{aligned} E[u_n | u_{n-1}] &= 0, \\ V[u_n | u_{n-1}] &= \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2, \end{aligned} \tag{15}$$

kde u_n jsou, v našem případě, výnosy cen akcií, kde $n = 1,...,N$, $q \in \mathbb{N}$, $\omega = \gamma V$ a γ, α_i, jsou váhy pro $i = 1,...,q$.

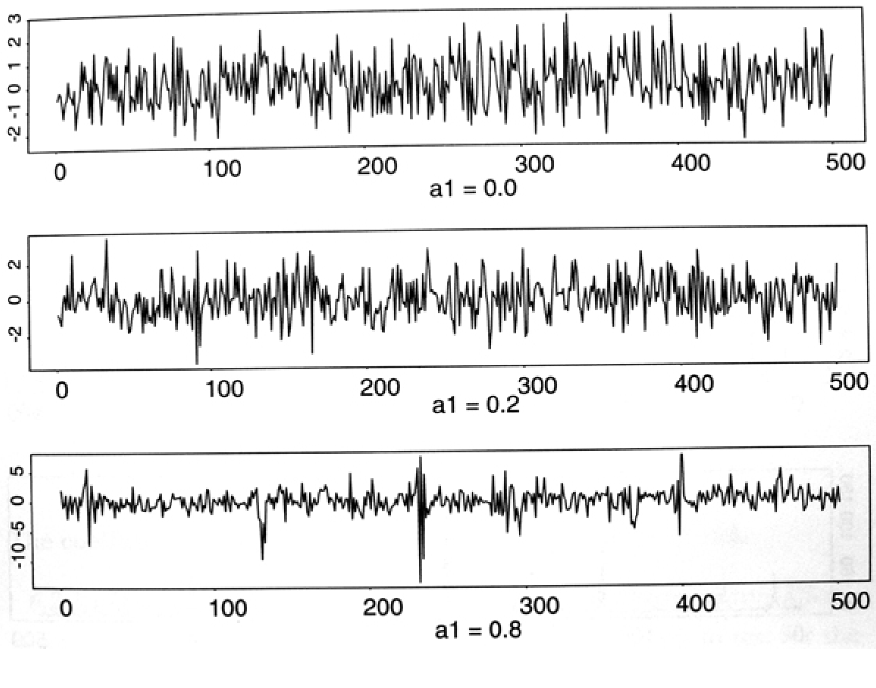
Nelineární autoregresivní specifikace výnosu je pak

$$u_n = 0 + \varepsilon_n \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2}, \tag{16}$$

kde časová chyba ε_n je náhodná veličina, pro kterou

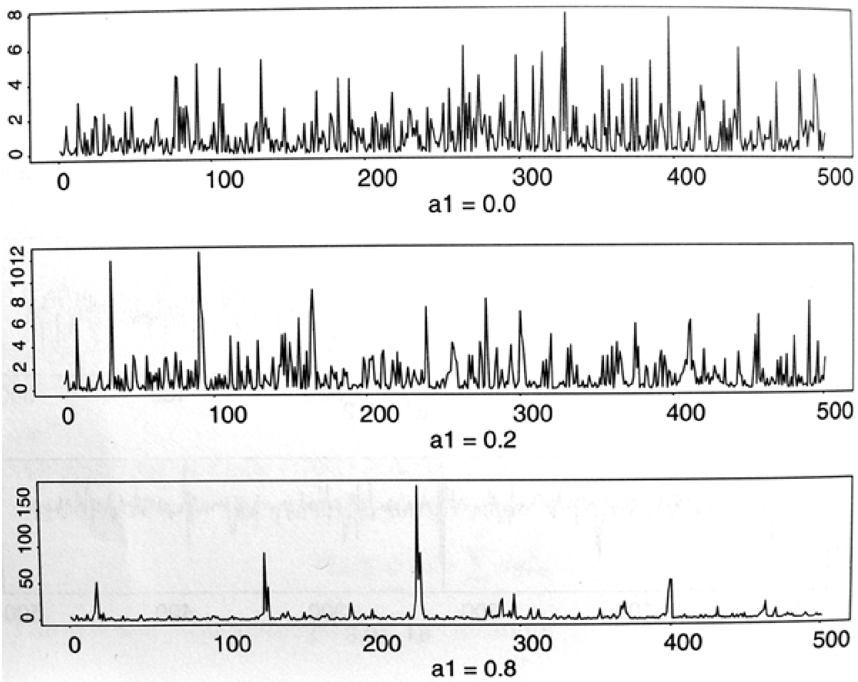
$$\begin{aligned} E[\varepsilon_n | u_{n-1}] &= 0, \\ V[\varepsilon_n | u_{n-1}] &= 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Poznamenejme, že porovnáme-li vzorec (16) se vzorcem (1) uvedeném v odstavci 2.2, zjistíme, že jsou navzájem ekvivalentní.



Obrázek 1 Závislost autokorelace na parametru α_1

Pro ilustraci dynamických vlastností ARCH modelů uvažme model s $q = 1$ a $\omega = 1$ s rozdílnými hodnotami parametru a_1. Na první pohled vidíme, že čím větší je parametr a_1 (Obrázek 1), tím větší je autokorelace volatility. Tato důležitá vlastnost je dokonce zřetelnější tehdy, když uvažujeme kvadráty proměnných (Obrázek 2).



Obrázek 2 Závislost kvadrátů autokorelace na parametru α_1

3.4. Příklad modelu založeném na ARCH modelu

Jedním z významných modelů, které rozšiřují možnosti ARCH modelu, je ARCH-M model. Tento model byl publikován v roce 1987 skupinou Engel, Liliean a Robbis. Ve finanční praxi se používá při studii prémie za riziko (*risk premium*) tím, že zavádí volatilitu do rovnice se střední hodnotou. Z tohoto důvodu se proces nazývá ARCH-M (*ARCH in mean*) kvůli vlivu střední hodnoty. Model lze zapsat následovně:

$$y_t = x_t b + c\sigma_t^2 + u_t, \tag{18}$$

kde u_t je GARCH a $\sigma_t^2 = V[u_t | u_{t-1}]$.

Koeficient c můžeme interpretovat jako jednotkovou cenu rizika.

4. GARCH modely

4.1. Představení GARCH modelů

Nyní přejdeme k velmi důležitým modelům pro modelování rozptylu, resp. volatility časových řad, které vznikly na základě ARCH modelů, k tzv. GARCH modelům (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Modely GARCH byly navrženy T. Bollerslevem v roce 1986. Jak již bylo řečeno dříve, GARCH modely jsou zobecněním ARCH modelů.

4.2. GARCH(1,1)

Stejně jako u ARCH modelů začneme s nejjednodušším avšak zároveň nejpopulárnějším GARCH modelem, kterým je GARCH(1,1). Pomocí něj budeme v následující, páté kapitole modelovat volatilitu z historických dat. Označení „(1,1)“ znamená, že odhad rozptylu je založen na posledním pozorování u^2 a posledním odhadu rozptylu.

Srovnáme-li definici tohoto modelu a modelu ARCH (1), zjistíme, že je rozšířením o informaci o rozptylu z předchozího období

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \tag{19}$$

kde γ je váhou pro V, α je váhou pro předchozí výnos u_{n-1}^2 a β je váhou pro předchozí rozptyl σ_{n-1}^2. Protože součet vah musí být vždy roven jedné, tak

$$\gamma + \alpha + \beta = 1. \tag{20}$$

Změníme-li rovnici (14) tak, že $\gamma V = \omega$, můžeme model GARCH(1,1) přepsat do podoby

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2. \tag{21}$$

Tato formulace modelu je obvyklá pro odhad parametrů. Jakmile ω, α a β máme již odhadnuté, můžeme počítat γ jako $1-\alpha-\beta$. Dlouhodobý rozptyl V pak spočítáme jako ω/γ. Pro stabilní proces GARCH(1,1) požadujeme, aby $\alpha+\beta<1$. Jinými slovy, váhy aplikované na dlouhodobý rozptyl jsou kladné.

Na závěr této kapitoly ukážeme jeden velmi důležitý speciální případ modelu GARCH (1,1). Nejdříve se ale podíváme na obecnou formulaci GARCH modelů.

4.3. Obecný model GARCH

Definice obecného GARCH(*p,q*) modelu využívá posledních *q* pozorovaných výnosů a posledních *p* naměřených rozptylů:

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j u \sigma_{n-j}^2, \qquad (22)$$

$$\text{kde } \omega > 0,\ \ \alpha_i, \beta_j \geq 0 \text{ pro } i = 1...q, j = 1...p.$$

Přesná matematická definice GARCH(p,q) modelu je sestavena podobně jako ARCH(q) model až na rozšíření o informaci o minulých rozptylech:

$$\begin{aligned} &E(u_n | u_{n-1}) = 0, \\ &V(u_n | u_{n-1}) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j u \sigma_{n-j}^2. \end{aligned} \qquad (23)$$

4.4. Model EWMA

Speciálním případem GARCH(1,1) je model EWMA (*Exponencially Weighted Moving Average*). V tomto modelu volíme parametry následovně: $\gamma = 0$, $\alpha = 1\text{-}\lambda$ a $\beta = \lambda$. Proto tento model lze zapsat následujícím způsobem:

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda) u_{n-1}^2 + \lambda \sigma_{n-1}^2. \qquad (24)$$

Podíváme-li se pozorně na uvedenou definici modelu EWMA, zjistíme jeho zajímavou vlastnost, kdy potřebujeme mít v paměti uloženo relativně málo dat oproti modelu GARCH(1,1). V jakémkoliv čase si potřebujeme pamatovat pouze okamžitý odhad minulého rozptylu a poslední pozorování naměřeného výnosu. Vždy, když získáme další pozorování výnosu akcií, spočítáme novou hodnotu u^2 a použijeme rovnici (24) k aktualizaci okamžité hodnoty odhadu rozptylu. Starý odhad rozptylu a starou hodnotu výnosu pak můžeme zapomenout.

Tento model byl navržen k tomu, aby sledoval libovolně velké změny ve volatilitě. Předpokládejme, že nastane velký pohyb (ať už směrem nahoru nebo dolů) ceny akcií a tedy i jejich výnosů dne n-1, proto je u_{n-1}^2 velké. Z rovnice (24) vidíme, že to silně ovlivní odhad rozptylu a tedy i volatility. V obou případech to zvýší hodnotu jejich odhadu. Váha λ u minulého rozptylu určuje, jak citlivý je odhad denního rozptylu, resp. volatility na nejnovější pozorování u_{n-1}^2. Nízká hodnota λ vede k výraznému ohodnocení posledního pozorování u_{n-1}^2 a tím i k přiřazení menší váhy poslednímu rozptylu. Naopak vysoká hodnota λ přináší odhady denní volatility, které reagují relativně pomalu na nové informace poskytnuté hodnotou posledního výnosu u_{n-1}^2.

5. Použití modelu GARCH(1,1) v praxi

5.1. Metoda maximální věrohodnosti

Zásadní otázkou při analýze volatility akcií s použitím výše uvedených modelů je, jak v těchto modelech odhadnout jejich parametry z historických cen akcií. Prezentujeme zde velmi rozšířený postup známý jako metoda maximální věrohodnosti MMV (*maximum likelihood method*), která poskytuje vhodnou volbu hodnot parametrů. Metodu budeme ilustrovat na modelu GARCH(1,1).

Nejprve ukážeme velmi jednoduchý příklad převzatý z [2], abychom nastínili použitou metodu. Předpokládejme, že testujeme namátkově 10 různých akcií v jistém dni a zjistíme, že cena jedné z nich v tento den klesá a ceny ostatních devíti akcií zůstanou stejné nebo rostou. Co je naším dobrým odhadem podílu klesající akcie se všemi akciemi? Přirozená odpověď je 10%. Dále uvidíme, že tento výsledek nám poskytuje metoda maximální věrohodnosti.

Předpokládejme, že podíl akcií s klesající cenou je *p*. Pravděpodobnost, že cena jedné akcie klesá a dalších devíti roste je $p(1-p)^9$. Použijeme-li MMV, je nejlepší odhad *p,* který maximalizuje $p(1-p)^9$, pouze jeden. Položením derivace podle *p* tohoto výrazu rovno 0, najdeme, že hodnota $p = 0.1$ maximalizuje výraz. To ukazuje, že maximálně věrohodný odhad (MVO) $p = 10\%$ je tedy stejný jako naše očekávání.

Odhady parametrů v modelu s konstantním rozptylem

Nejprve se zabývejme problémem odhadů rozptylu z q pozorování, jestliže výchozí rozdělení u_n je normální a rozptyl považujeme za konstantní. Předpokládejme, že naše pozorování $u_1,...,u_N$ jsou nezávislá, stejně rozdělená a střední hodnota je nulová. Označme rozptyl σ^2. Hustota pro n-té pozorování u_n je hustota normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2:

$$f(u_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-u_n^2}{2\sigma^2}\right). \tag{25}$$

Sdružená hustota všech N pozorování je pak

$$f(u_1,...,u_N) = \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2\sigma^2}\right)\right]. \tag{26}$$

Použitím MMV je nejlepším odhadem rozptylu σ^2 hodnota maximalizující výraz (26). Maximalizace je ekvivalentní maximalizaci logaritmu tohoto výrazu, což nám ulehčí práci při výpočtu, protože budeme pracovat se součtem místo součinem. Vezmeme-li logaritmus výrazu (26) a zanedbáme multiplikativní faktory, vidíme, že potřebujeme maximalizovat výraz

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-\ln(\sigma^2)-\frac{u_i^2}{\sigma^2}\right], \tag{27}$$

neboli

$$-N\ln(\sigma^2)-\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2}{\sigma^2}. \tag{28}$$

Derivací výrazu (28) podle σ^2 a položením výsledku rovno 0, uvidíme, že maximálně věrohodný odhad rozptylu σ^2, je

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i^2. \tag{29}$$

Odhady parametrů při měnící se volatilitě

Nyní předpokládejme, že odhady rozptylu zkoumáme v podmínkách měnící se volatility. Definujme σ_n^2 jako odhad rozptylu pro n-tý den. Předpokládáme, že distribuční funkce u_n podmíněná rozptylem má normální rozdělení. Analogickým způsobem jako v předcházejícím odstavci zjistíme, že výraz který chceme maximalizovat, je

$$f(u_1,\ldots,u_N)=\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\left(\frac{-u_i^2}{2\sigma_i^2}\right)\right]. \tag{30}$$

Dále zlogaritmováním výrazu (30) vidíme, že jeho maximalizace je ekvivalentní s maximalizací věrohodnostní funkce

$$f(u_1,\ldots,u_N)=\sum_{i=1}^{N}\left[-\ln(\sigma_i^2)-\frac{u_i^2}{\sigma_i^2}\right]. \tag{31}$$

Pozorujeme, že toto vyjádření je stejné jako výraz v rovnici (27) až na to, že σ^2 je nahrazeno σ_n^2. Zde ale již zřejmě nelze použít jednoduchý způsob výpočtu odhadu rozptylů. Proto musíme odhady rozptylu hledat nějakou iterační metodou tak, abychom maximalizovali (31). Pro výpočty proto použijeme k hledání parametrů systém Mathematica 5.2, ve kterém využijeme nějakou zabudovanou iterační metodu.

5.2. Použití MMV na modelu GARCH(1,1)

Pro ilustraci metody maximální věrohodnosti na modelu GARCH(1,1) použijeme historické ceny amerických akcií S&P500 a NASDAQ v týdenních intervalech od ledna roku 1971 do dubna roku 2006 pořízené z údajů na internetových stránkách [7]. Definici délky mezi pozorováními proto změníme na 1 týden.

a

b

Obrázek 3 Vývoj cen amerických akcií S&P500 (a) a NASDAQ (b)

Než začneme používat metodu maximální věrohodnosti na historických datech, je důležité si nejprve data připravit do podoby, ze které mohou být nějakým způsobem zpracována. Nejjednodušším přístupem je uspořádat si je do nějaké přehledné tabulky. Ukázka, jak takové uspořádání může vypadat a ze kterého také vycházíme, je zobrazena v následující tabulce (Tabulka 1). V této zkrácené tabulce jsou data akcií S&P500.

Datum	Týden n	S_n	u_n	σ_n^2	$-\ln\sigma_n^2 - u_n^2/\sigma_n^2$
04.01.1971	1	92,19			
11.01.1971	2	93,03	0,00911162		
18.01.1971	3	94,88	0,01988606	0,00008302	4,63312614
25.01.1971	4	95,88	0,01053963	0,00012171	8,10117465
01.02.1971	5	96,93	0,01095119	0,00012904	8,02599851
08.02.1971	6	98,43	0,01547509	0,00013635	7,14394012
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
20.03.2006	1838	1302,95	-0,00328935	0,00024196	8,28200923
27.03.2006	1839	1294,87	-0,00620131	0,00022587	8,22528288
03.04.2006	1840	1295,50	0,00048654	0,00021426	8,44721668
					12527,20312259

Tabulka 1 Uspořádání dat pro MMV

V prvním sloupci tabulky je datum dne, ve kterém byla cena akcií zaznamenána. Ve druhém sloupci je pořadí týdne, resp. dne měření, poskytující ceny akcií. Třetí sloupec ukazuje cenu akcie S_n v n-tý týden. Čtvrtý sloupec sleduje poměrnou změnu ceny akcií mezi týdnem n-1 a n. To je $u_n = (S_n - S_{n-1})/S_{n-1}$, což je shodné s úpravou výpočtu výnosu (5) v odhadu rozptylu pro výpočet VaR. Pátý sloupec ukazuje odhad rozptylu σ_n^2 pro n-tý týden podle modelu GARCH(1,1).

Konečně šestý sloupec ukazuje míru věrohodnosti $-\ln\sigma_n^2 - u_n^2/\sigma_n^2$. První čtyři sloupce získáme velmi jednoduše ze sledovaných dat. Pátý a šestý sloupce ovšem musíme nějak spočítat.

Doplnění tabulky začneme tím, že pro třetí týden položíme odhad rozptylu roven u_2^2. Pro následující týdny se k vypočítání odhadu rozptylu používá rovnice (19). Je zřejmé, že hodnoty v pátém a šestém sloupci jsou založeny na zkoušení okamžitých odhadů ω, α a β. Nás zajímá volba ω, α a β tak, abychom maximalizovali součet všech hodnot v šestém sloupci. Tento přístup proto vyžaduje pro hledání parametrů nějakou iterační metodu.

Jak jsme již v předchozím textu naznačili, k hledání parametru použijeme systém Mathematica 5.2. V něm využijeme přídavný balík funkcí Time Series. Pomocí něj zjistíme, že hledané optimální hodnoty parametru jsou u akcií S&P500 $\alpha = 0,09453200$, $\beta = 0,88409700$ a $\omega = 0,00001093$ a u akcií NASDAQ $\alpha = 0,14003194$, $\beta = 0,82977010$ a $\omega = 0,00002304$. To znamená, že maximum věrohodnostní funkce (31) spočítané námi zvolenou konečnou iterační metodou je 12 527,203, resp. 11 541,848.

Dlouhodobý rozptyl V je pro akcie S&P500 roven

$$V = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0,00001093}{0,02137100} = 0,00051149$$

a dlouhodobá volatilita je $\sqrt{0,00051149} = 0,02261619 = 2,261\%$ týdně.

Dlouhodobý rozptyl V je pak pro akcie NASDAQ roven

$$V = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0,00002304}{0,03019796} = 0,00076296$$

a dlouhodobá volatilita je $\sqrt{0,00076296} = 0,02762180 = 2,762\%$ týdně.

5.3. Využití GARCH(1,1) pro předpověď budoucí volatility

Substitucí $\gamma = (1-\alpha-\beta)$ v rovnici (19) je odhad rozptylu pro n-tý týden roven

$$\sigma_n^2 = (1-\alpha-\beta)V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2, \tag{32}$$

neboli

$$\sigma_n^2 - V = \alpha(u_{n-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{n-1}^2 - V). \tag{33}$$

Pro $n+k$-tý den v budoucnosti pak máme

$$\sigma_{n+k}^2 - V = \alpha(u_{n+k-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{n+k-1}^2 - V). \tag{34}$$

Střední hodnota u_{n+k-1}^2 je σ_{n+k-1}^2, což nám dává

$$E[\sigma^2_{n+k} - V] = (\alpha + \beta)E[\sigma^2_{n+k-1} - V]. \tag{35}$$

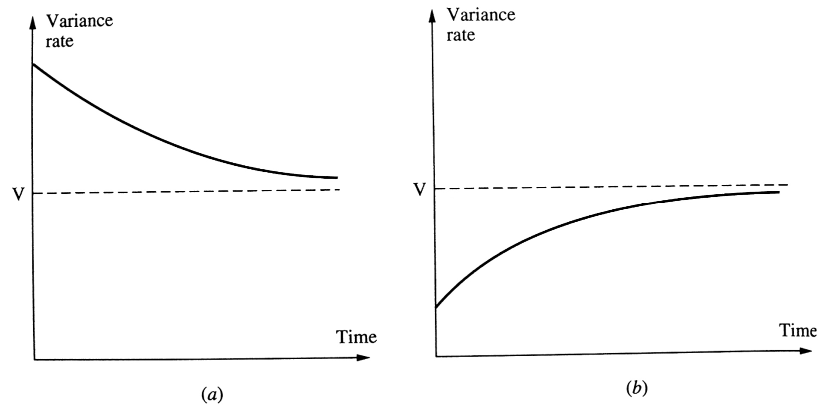
Opakovaným použitím této rovnice získáme

$$E[\sigma^2_{n+k} - V] = (\alpha + \beta)^k (\sigma^2_n - V), \tag{36}$$

neboli

$$E[\sigma^2_{n+k}] = V + (\alpha + \beta)^k (\sigma^2_n - V). \tag{37}$$

V případě modelu EWMA kombinace rovnice (37) a omezení $\alpha + \beta = 1$ ukazuje, že očekávaný budoucí rozptyl se rovná současnému rozptylu. V případě modelu GARCH(1,1) kdy $\alpha + \beta < 1$ pak konečný výraz v rovnici postupně klesá s rostoucím časem.



Obrázek 4 Očekávaný rozptyl v závislosti na čase

Obrázek 4 ukazuje očekávanou cestu rozptylu v situaci, kdy současný rozptyl je odlišný od dlouhodobého průměrného rozptylu *V*. Na levém obrázku (a) je okamžitý rozptyl vyšší než *V*, na pravém (b) je nižší.

V našem příkladě u akcií S&P500 je $\alpha + \beta = 0{,}896487$ a $V = 0{,}00051149$. Předpokládejme, že současný rozptyl za týden je 0.00006. Za 50 týdnů je očekávaný rozptyl roven

$$0{,}00051149 \; + \; 0{,}97862900^{50}(0{,}00006 - 0{,}00051149) \; = \; 0{,}00035819.$$

Odhad rozptylu za 200 týdnů je

$$0{,}00051149 \; + \; 0{,}97862900^{200}(0{,}00006 - 0{,}00051149) \; = \; 0{,}00050549,$$

což odpovídá našemu očekávání o konvergenci k dlouhodobému rozptylu *V* a tedy i o konvergenci k dlouhodobé volatilitě, kdy očekávaná volatilita za 200 týdnů 2,248% je velmi blízko dlouhodobé volatilitě.

6. Seznam literatury

[1] Cipra, T.: *Matematika cenných papírů*, HZ Praha, Praha, 2000.

[2] Hull, J.C.: *Options, Futures, and other Derivative Securities*, Prentice-Hall, Uper Saddle River, 2000.

[3] Jasiak, J., Gourieroux Ch.: *Financial Econometrics*, Princeton Univerzity Press, New Baskerville, 2001.

[4] Fuentes, R.: *ARCH-type Models*, Term paper, University of Essen, 2001.

[5] Harvey, A.: *Time Series Models*, Harvester Wheatsheaf, Hertfordshire, 1993.

[6] Rose C., Smith M.: *Mathematical Statistics with Mathematica*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[7] http://finance.yahoo.com.

[8] Wolfram, S.: *The Mathematica Book*, 5th ed., Woflram Media, 2003.