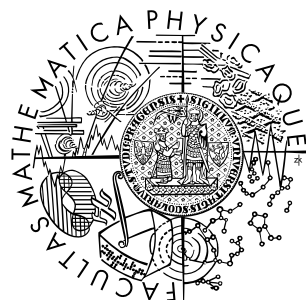


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petr Hruška

Neexponenciální rozpad a kvantový Zenónův jev

Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.

Studijní program: Obecná fyzika

2006

Rád bych na tomto místě poděkoval Doc. Pavlu Cejnarovi za cenné rady a připomínky. Dále děkuji své rodině za její tolerantní přístup k mému studiu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Petr Hruška

Obsah

1	Exponenciální rozpadový zákon	6
1.1	Odvození exponenciálního rozpadového zákona	7
1.2	Poissonovo rozdělení	7
2	Rozpadový zákon v kvantové mechanice	10
2.1	Rozvoj Schrödingerovy rovnice podle času	11
2.2	Rozpad atomu poruchovým počtem	12
2.3	Odvození Breit-Wignerova rozdělení	14
2.4	Vlastnosti Breit-Wignerova rozdělení	16
2.5	Vliv oříznutí Breit-Wignerova rozdělení	18
3	Vliv měření na rozpad kvantového systému	20
3.1	Zenónův jev	21
3.2	Anti-Zenónův jev	21
3.3	Pravděpodobnost anti-Zenónova jevu	22
4	Experimentální ověřování anti-Zenónova a Zenónova jevu	25
4.1	Optický Zenónův jev	25
4.2	Dvouhladinový experiment	26
4.3	Tunelování sodíkových atomů	27
4.4	Nekonečně časté měření	28
4.5	Další experimenty	30
5	Závěr	31
6	Dodatky	33
6.1	Rozpad atomů pomocí teorie spolehlivosti	33
6.2	Poslední kapka	34
6.3	Binomické rozdělení	37
6.4	Souvislost Poissonova a binomického rozdělení	37
6.5	Výpočty k rozpadu poruchovým počtem	38
6.5.1	Alternativní definice $g(t)$	43
6.5.2	Příklad neexponenciálního rozpadu	44
6.5.3	Rozvoj pro krátké časy	46
6.6	Odvození pravděpodobnosti anti-Zenónova jevu	47

Název práce: Neexponenciální rozpad a kvantový Zenónův jev

Autor: Petr Hruška

Katedra (ústav): Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.

e-mail vedoucího: cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V první části této práce je studován klasický rozpadový zákon. Je odvozen exponenciální rozpadový zákon a Poissonovo rozdělení. Ve druhé části je obecně spočítána pravděpodobnost rozpadu kvantového systému a odvozena souvislost Breit-Wignerova rozdělení s exponenciálním průběhem pravděpodobnosti rozpadu. Ukazujeme, že přesně exponenciální rozpadový zákon je nefyzikální, protože vede k nekonečnému rozptylu energie. Ve třetí části zavádíme kvantový Zenónův jev a anti-Zenónův jev. Čtvrtá část je věnována experimentům, které se týkají kvantového Zenónova a anti-Zenónova jevu.

Klíčová slova: kvantový Zenónův jev, inverzní Zenónův jev, anti-Zenónův jev, rozpadový zákon.

Title: Nonexponential decay and quantum Zeno effect

Author: Petr Hruška

Department: Institute of Particle and Nuclear Physics

Supervisor: Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.

Supervisor's e-mail address: cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz

Abstract: The first part of the present work studies classical decay law. Exponential decay law and Poisson distribution are derived. Decay probability of a quantum system is derived in the second part. Connection between Breit-Wigner distribution and exponential decay probability is derived as well. We show that strictly exponential decay is unphysical, because it leads to unlimited energy spread. In the third part we introduce quantum Zeno effect and anti-Zeno effect. Fourth part is dedicated to experiments verifying these effects.

Keywords: quantum Zeno effect, inverse Zeno effect, anti-Zeno effect, decay law.

Úvod

Tato práce pojednává o rozpadech fyzikálních systémů. Nejprve je podrobně prozkoumán klasický rozpad, jehož popis je čistě statistický. Je kladen důraz na odvození a na použité předpoklady. Následuje popis rozpadu v kvantové mechanice. Zdlouhavé výpočty jsou většinou podrobně provedeny v dodatcích.

Dále se práce zabývá vlivem měření na rozpad systému, tj. Zenónovým a anti-Zenónovým jevem. Jevy jsou nejprve popsány teoreticky, následuje několik vybraných experimentů.

Kapitola 1

Exponenciální rozpadový zákon

Exponenciální rozpadový zákon je velmi úspěšný popis pravěpodobnosti klasického rozpadu. V této kapitole odvodíme jeho statistické vlastnosti. Podrobnosti lze najít například v [1] či [2].

Předpokládejme, že rozpady atomů jsou detekovány ideálním detektorem. Dále předpokládejme, že jednotlivé rozpady jsou na sobě nezávislé, tj. rozpad jednoho atomu nijak neovlivňuje chování dalších. Budeme se zajímat o počet rozpadů v malém časovém intervalu dt .



Sir Ernest Rutherford jako první zformuloval exponenciální rozpadový zákon. Tehdejší interpretace byla založena na předpokladu, že intenzita rozpadu je úměrná zbývající energii. Objev exponenciálního rozpadového zákona byl zastíněn dalšími významnými Rutherfordovy objevy, například novými druhy záření, které pojmenoval alfa a beta. V roce 1908 dostal Nobelovu cenu za chemii.

1.1 Odvození exponenciálního rozpadového zákona

Označme pravděpodobnost registrace právě k rozpadů za časový interval dt jako $P_k(dt)$. Musí platit

$$P_0(dt) + P_1(dt) + P_2(dt) + \dots = 1. \quad (1.1)$$

Předpokládejme, že se pravděpodobnost $P_1(dt)$ v malém časovém intervalu dt je dána jako

$$P_1(dt) = \eta(t)dt.$$

Veličina $\eta(t)$ je *intenzita rozpadu*, obecně může být závislá na čase.

Je zřejmé, že pravděpodobnost rozpadu více než jednoho atomu za čas dt je mnohem menší než pravděpodobnost $P_1(dt)$. To nás opravňuje zanedbat pravděpodobnosti $P_k(dt)$, kde $k \geq 2$. Z rovnice (1.1) tak dostáváme

$$P_0(dt) \simeq 1 - P_1(dt). \quad (1.2)$$

Nyní se budeme zajímat o pravděpodobnosti v libovolném čase t . Označme $P_0(t)$ pravděpodobnost, že v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ nedošlo k žádnému rozpadu. Tuto pravděpodobnost lze vyjádřit pomocí pravděpodobností $P_0(dt)$, kde infinitesimálně malý interval dt nahradíme malým konečným intervalem Δt :

$$P_0(t) \simeq \prod_{k=1}^N P_0(\Delta t) = \prod_{k=1}^N (1 - \eta(t')\Delta t), \quad (1.3)$$

kde $N \equiv t/\Delta t$ a $t' = tk/N$.

Dále budeme pro jednoduchost *předpokládat*, že *intenzita rozpadu se s časem nemění*. Tento předpoklad nám umožní spočítat pravděpodobnost (1.3).

$$P_0(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^N (1 - \eta\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \eta\Delta t)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \eta \frac{t}{N}\right)^N.$$

Poslední výraz na pravé straně je známá limita

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N = e^{-x},$$

takže

$$P_0(t) = e^{-\eta t}.$$

1.2 Poissonovo rozdělení

Opustíme oblast přesných výpočtů. Poissonovo rozdělení určuje pravděpodobnost, že v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ bylo naměřeno právě k rozpadů. Toto rozdělení je pouze aproximace, platilo by přesně pro vzorek s nekonečným množstvím atomů, který by měl pouze konečný počet rozpadů za jednotku času.¹

¹Takový vzorek by nesnižoval svou aktivitu v důsledku úbytku atomů, to je nutný předpoklad pro použití Poissonova rozdělení.

Zavedeme veličiny $P_k(dt)$ a $P_k(t)$ stejně jako v první kapitole. Pravděpodobnost registrace právě k rozpadů v malém časovém intervalu dt je $P_k(dt)$. Musí platit

$$P_0(dt) + P_1(dt) + P_2(dt) + \dots = 1.$$

Pravděpodobnost registrace právě k rozpadů v čase t značíme jako $P_k(t)$. Pravděpodobnost registrace $k \geq 1$ částic v čase $t + dt$ je

$$P_k(t + dt) = P_k(t)P_0(dt) + P_{k-1}(t)P_1(dt) + \dots + P_0(t)P_k(dt)$$

Opět zanedbáme všechny pravděpodobnosti $P_k(dt)$ pro $k \geq 2$ a dostáváme

$$P_k(t + dt) \doteq P_k(t)P_0(dt) + P_{k-1}(t)P_1(dt).$$

Stejně jako v předchozí části budeme předpokládat $P_0(dt) \simeq 1 - \eta(t)dt$, což nám umožní vyjádřit pravděpodobnost ve tvaru

$$P_k(t + dt) \simeq P_k(t)(1 - \eta(t)dt) + P_{k-1}(t)\eta(t)dt. \quad (1.4)$$

Tutéž pravděpodobnost můžeme napsat také jako

$$P_k(t + dt) = P_k(t) + \frac{dP_k(t)}{dt}dt. \quad (1.5)$$

Srovnáním (1.4) a (1.5) dojdeme k rovnici

$$\frac{dP_k}{dt} + \eta(t)P_k = \eta(t)P_{k-1}, \quad (1.6)$$

kteřou se pokusíme vyřešit. Z definice pravděpodobnosti $P_k(0)$ máme pro každé $k > 0$ počáteční podmínku $P_k(0) = 0$.

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že se $\eta(t)$ mění jen velmi pomalu², jinak formulováno $d\eta(t)/dt = 0$. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$P_k(t) = C_k(t)e^{-\eta t}.$$

Dosadíme do (1.6) a dostaneme

$$-\eta C_k e^{-\eta t} + \dot{C}_k e^{-\eta t} + \eta C_k e^{-\eta t} = \eta C_{k-1} e^{-\eta t}.$$

Po úpravě získáme

$$\dot{C}_k(t) = \eta(t)C_{k-1}(t),$$

čili

$$C_k(t) = \int_0^t \eta(t')C_{k-1}(t')dt.$$

Máme rekurzivní integrální rovnici pro $C_k(t)$. Všechny funkce $C_k(t)$ jsou dány jedinou funkcí $C_0(t)$, která přímo souvisí s pravděpodobností $P_0(t) = C_0(t)e^{-\eta t}$.

²Veličina $\eta(t)$ byla definována v první části jako intenzita rozpadu, tento význam zůstává zachován.

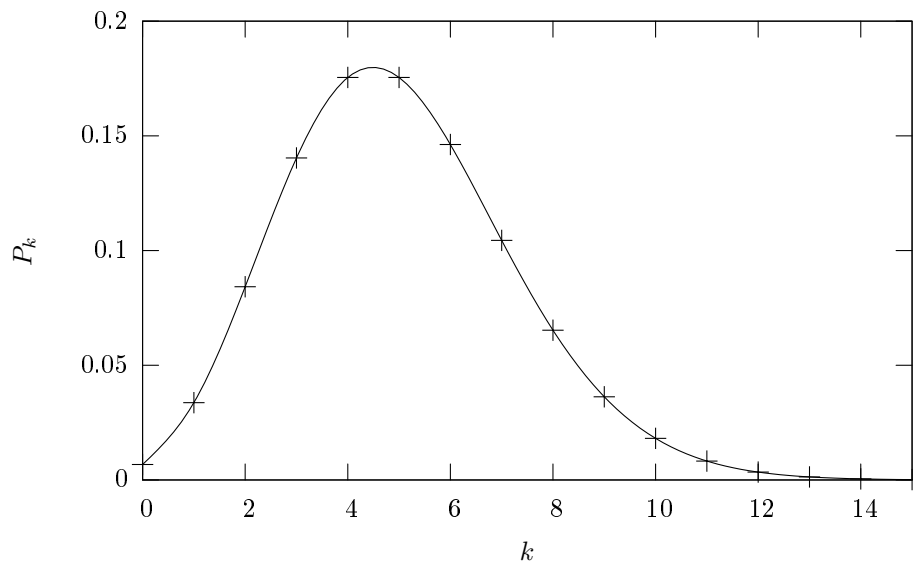
Budeme předpokládat konstantní hodnotu $C_0(t)$. Vzhledem k počáteční podmínce $P_0(0) = 1$ musíme volit $C_0(t) = 1$.³ Teď už lze snadno dopočítat ostatní funkce

$$C_k(t) = \frac{(\eta t)^k}{k!}.$$

Pravděpodobnost naměření k částic od počátku měření do času t je tedy rovna

$$P_k = \frac{(\eta t)^k}{k!} e^{-\eta t},$$

což je známé Poissonovo rozdělení.



Obrázek 1.1: Poissonovo rozdělení pro $\eta t = 5$.

³Volba $C_0 = 1$ nepředstavuje příliš velkou újmu na obecnosti. Pravděpodobnost $P_0(t) = e^{-\eta(t)}$ nemusí být nutně exponenciální, neboť $\eta(t)$ závisí na čase.

Kapitola 2

Rozpadový zákon v kvantové mechanice

V předchozí kapitole jsme předpokládali, že jednotlivé rozpady atomů jsou navzájem nezávislé. Na základě tohoto předpokladu jsme odvodili Poissonovo rozdělení. Přitom jsme o atomech nepotřebovali vědět nic bližšího. Nyní naopak ze znalosti chování kvantových systémů odvodíme rozpadový zákon.

Pro popis rozpadu v kvantové mechanice je potřeba uvažovat hamiltonián systému, který se skládá z atomového jádra (nebo jiného nestabilního systému, například částice)¹ a vakua. V případě, že tento systém jako celek není ve vlastním (stacionárním) stavu hamiltoniánu, podléhá časovému vývoji.

Na počátku je systém ve stavu excitované (t.j. nerozpadlé) jádro + vakuum. Tento stav je svázán se stavem deexcitované (rozpadlé) jádro + excitované pole prostřednictvím maticových elementů hamiltoniánu. Díky nenulovosti těchto elementů může dojít k rozpadu.

Stav systému je reprezentován vlnovou funkcí $|\psi(t)\rangle$. Časový vývoj je daný hamiltoniánem \hat{H} a Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

Počáteční stav systému v čase $t_0 = 0$ označíme $|\phi\rangle = |\psi(0)\rangle$. Navíc budeme předpokládat, že na atomu můžeme provést měření, jehož operátor označíme \hat{A} a že $|\phi\rangle$ je vlastním vektorem operátoru \hat{A} .

Předpokládejme, že první měření systému provedeme v čase $t \geq 0$, v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ nebylo provedeno žádné měření a systém se vyvíjel podle Schrödingerovy rovnice. Najdeme-li atom opět ve stavu $|\phi\rangle = |\psi(t)\rangle$, pak nedošlo k rozpadu atomu. Všechny ostatní výsledky měření budeme považovat za rozpad.

Rozpad atomu v kvantové mechanice je obecnější než klasický rozpadový zákon. Jedna ze základních odlišností spočívá mimo jiné v tom, že záleží na volbě počátečního stavu $|\phi\rangle$. Při volbě stacionárního stavu, tj. když platí

$$E|\phi\rangle = \hat{H}|\phi\rangle,$$

atom setrvává v počátečním stavu věčně a pravděpodobnost rozpadu je nula.

¹V dalším textu budeme používat atom jako příklad takového systému, ačkoliv výsledky jsou platné i pro mnoho jiných systémů.

Při jiné (nestacionární) volbě počátečního stavu je pravděpodobnost rozpadu nenulová, takže *pravděpodobnost rozpadu atomu závisí na volbě počátečního stavu*.

2.1 Rozvoj Schrödingerovy rovnice podle času

V této části odvodíme chování systému pro velmi krátké časy, budeme předpokládat $t \ll 1$. Tato metoda byla převzata z [3].

Předpokládejme opět hamiltonián \hat{H} nezávislý na čase a počáteční stav $|\phi\rangle$. Stav systému v čase t označíme jako $|\psi(t)\rangle$. Vývoj podle Schrödingerovy rovnice je možné zapsat pomocí evolučního operátoru $\hat{U}(t)$:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\phi\rangle,$$

kde

$$\hat{U}(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right\}.$$

Dále položíme $\hbar = 1$ a provedeme rozvoj výrazu $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right\}$, pro malé t podle vzorce

$$\exp x \doteq 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Dostáváme

$$|\psi(t)\rangle \doteq |\phi\rangle - i\hat{H}|\phi\rangle t - \frac{1}{2}\hat{H}^2|\phi\rangle t^2.$$

Pravděpodobnost přežití² je $|\langle\phi|\psi(t)\rangle|^2$. Spočítáme nejprve

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle \doteq \langle\phi|\phi\rangle - i\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle t - \frac{1}{2}\langle\phi|\hat{H}^2|\phi\rangle t^2,$$

přeznačíme

$$\begin{aligned}\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle &\equiv \langle\hat{H}\rangle \\ \langle\phi|\hat{H}^2|\phi\rangle &\equiv \langle\hat{H}^2\rangle\end{aligned}$$

a s využitím $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ máme

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle \doteq 1 - i\langle\hat{H}\rangle t - \frac{1}{2}\langle\hat{H}^2\rangle t^2.$$

Spočítáme pravděpodobnost přežití atomu. Při úpravách budeme zanedbávat všechny členy, které jsou úměrné t^4 (členy úměrné t^3 se odečtou).

$$\begin{aligned}|\langle\phi|\psi(t)\rangle|^2 &\doteq \left(1 - i\langle\hat{H}\rangle t - \frac{1}{2}\langle\hat{H}^2\rangle t^2\right) \left(1 + i\langle\hat{H}\rangle t - \frac{1}{2}\langle\hat{H}^2\rangle t^2\right) \\ &= 1 + \langle\hat{H}\rangle^2 t^2 - \langle\hat{H}^2\rangle t^2 = 1 - \left(\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2\right) t^2 \\ &= 1 - (\Delta\hat{H})^2 t^2,\end{aligned}$$

²Jde o pravděpodobnost, která říká, jakou máme šanci najít atom nerozpadlý, pokud bychom v čase t provedli měření. Tuto pravděpodobnost budeme značit $1 - p(t)$.

kde $(\Delta\hat{H})^2$ je rozptyl energie.

Pravděpodobnost přežití $1 - p(t)$ pro počáteční časy má tedy tvar

$$\boxed{1 - p(t) \doteq 1 - (\Delta\hat{H})^2 t^2} \quad (2.2)$$

a pro libovolný konečný rozptyl $(\Delta\hat{H})^2$ má funkce $p(t)$ v počátku nulovou derivaci. To znamená, že *pro konečný rozptyl $(\Delta\hat{H})^2$ nemůže mít pravděpodobnost přežití atomu exponenciální průběh.*

2.2 Rozpad atomu poruchovým počtem

Při popisu systému uvedeném na počátku této kapitoly je možné přesně (i když obecně) vyřešit Schrödingerovu rovnici. Celý postup je převzat z [4].

Pravděpodobnost naměření rozpadu v čase t , je dána výrazem

$$p(t) = 1 - |\langle\psi(t)|\phi\rangle|^2 = 1 - \langle\psi(t)|\phi\rangle\langle\phi|\psi(t)\rangle = 1 - \langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle,$$

kde projektor \hat{P} je definován jako

$$\hat{P} \equiv |\phi\rangle\langle\phi|.$$

Známe-li hamiltonián systému \hat{H} a počáteční stav $|\phi\rangle = |\psi(0)\rangle$, můžeme vyřešit Schrödingerovu rovnici (2.1) a spočítat $p(t)$.

Intuitivně můžeme předpokládat, že atomy ve stavech blízkých k nějakému stacionárnímu stavu hamiltoniánu \hat{H} mají delší dobu života. Budeme se zajímat o takové případy. Je-li $|\phi\rangle$ vektor blízký vlastnímu vektoru hamiltoniánu, pak můžeme najít operátor měření \hat{A} , který je blízký k \hat{H} . Tato intuitivní úvaha je motivací pro další postup výpočtu.

Detaily výpočtu je možné najít v úvodní části dodatku 6.5. Definujeme operátor \hat{H}_0 , pro který platí

$$\hat{H}_0|\phi\rangle = E_0|\phi\rangle,$$

tj. $|\phi\rangle$ je jeho vlastním vektorem. Dále chceme, aby rozdíl \hat{H} a \hat{H}_0 byl co nejmenší, označíme jej

$$\hat{V} \equiv \hat{H} - \hat{H}_0.$$

Definujeme bázi $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$, která splňuje následující podmínky:

$$\begin{aligned} \langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \delta_{ij}, \\ |\phi\rangle &= |\psi_0\rangle, \\ \hat{H}_0|\psi_i\rangle &= E_i|\psi_i\rangle. \end{aligned}$$

Operátor H_0 lze volit tak, že maticové elementy $\langle\psi_i|\hat{V}|\psi_j\rangle$ mají podobu

$$\langle\psi_i|\hat{V}|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & V_1 & V_2 & \dots \\ \bar{V}_1 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{V}_2 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde označíme $V_m \equiv \langle \psi_0 | \hat{V} | \psi_m \rangle$.

Řešení Schrödingerovy rovnice budeme hledat ve tvaru

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) e^{-iE_m t} |\psi_m\rangle,$$

takže $p(t) = 1 - |a_0(t)|^2$. Dosazením do Schrödingerovy rovnice dojdeme k rovnici

$$\dot{a}_0(t) = - \int_0^t g(t-t') a_0(t') dt', \quad (2.3)$$

kde

$$g(t) \equiv \int_E e^{-i(E-E_0)t} dF(E). \quad (2.4)$$

Funkce $F(E)$ je definována jako

$$F(E) \equiv \sum_{E_m \leq E} |V_m|^2.$$

Pojďme prozkoumat jaký tvar musí mít elementy V_m a energie E_m , aby byla pravděpodobnost rozpadu exponenciální.

Předpokládejme $\dot{a}_0(t) = -K a_0(t)$, tj. exponenciální průběh. Rovnice (2.3) pak dává

$$-K a_0(t) = - \int_0^t g(t-t') a_0(t') dt'$$

a Laplaceovou transformací dostáváme

$$\begin{aligned} -K A(s) &= -G(s) A(s) \\ K &= G(s), \end{aligned}$$

čemuž odpovídá Laplaceův vzor

$$g(t) = K \delta(t).$$

Přepsáním definice (2.4) a zpětnou Fourierovou transformací zjistíme hustotu³ $dF(E)/dE$:

$$\begin{aligned} g(t) &\equiv \int_E e^{-i(E-E_0)t} \frac{dF(E)}{dE} dE \\ \frac{dF(E)}{dE} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t) e^{i(E-E_0)t} dt = \frac{K}{2\pi}, \end{aligned}$$

takže

$$F(E) = \frac{KE}{2\pi}.$$

³ derivaci $dF(E)/dE$ je nutné chápat jako distributivní derivaci.

Pro exponenciální průběh rozpadu tedy musí být spektrum spojité a maticové elementy V_m musí mít stejné hodnoty. Ukazuje se, že takový požadavek zhruba znamená stejnou pravděpodobnost přechodu do všech stavů $|\psi_i\rangle$ z počátečního stavu $|\phi\rangle$.

V dodatku 6.5, vztah (6.18), je ukázáno, že

$$\lim_{E \rightarrow \infty} F(E) = (\Delta \hat{H})^2,$$

odkud v tomto případě máme

$$(\Delta \hat{H})^2 = \infty. \quad (2.5)$$

Tento výsledek byl očekáván již v závěru části 2.1. Lze shrnout, že pravděpodobnost rozpadu atomu nemůže být přesně exponenciální, nicméně to může být dobré přiblížení.

2.3 Odvození Breit-Wignerova rozdělení

V minulé části jsme ze stavu atomu, daného počátečním stavem a hamiltoniánem odvodili obecné vztahy pro pravděpodobnost rozpadu. V této kapitole budeme naopak z předpokladu exponenciálního rozpadu atomu odvozovat energetické spektrum počátečního stavu. Čtenáře odkazujeme například na klasickou učebnici [5].

Opět budeme předpokládat, že systém je v čase $t = 0$ ve stavu $|\phi\rangle = |\psi(0)\rangle$, což je stav nerozpadlého atomu, a že všechny stavy $|\chi\rangle$, pro které platí $\langle \phi | \chi \rangle = 0$, odpovídají rozpadu.

Stav systému v libovolném okamžiku charakterizuje vlnová funkce

$$|\psi(t)\rangle = a_0(t)|\phi\rangle + |\varphi(t)\rangle,$$

kde $a_0(t)$ je stejný koeficient jako v minulé kapitole. Požadujeme, aby

$$\langle \phi | \varphi(t) \rangle = 0.$$

Z funkce $|\psi(t)\rangle$ můžeme snadno vyjádřit $a_0(t)$:

$$\langle \phi | \psi(t) \rangle = \langle \phi | a_0(t) | \phi \rangle + \langle \phi | \varphi(t) \rangle = a_0(t) \langle \phi | \phi \rangle = a_0(t) \quad (2.6)$$

Pravděpodobnost přežití atomu je $|a_0(t)|^2$. Budeme předpokládat exponenciální průběh pravděpodobnosti:

$$|a_0(t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} \quad \text{pro } t \geq 0.$$

To nám určuje amplitudu pravděpodobnosti $a_0(t)$ až na fázový faktor $e^{i\omega(t)}$. Pro jednoduchost budeme volit $\omega(t) = -\omega_0 t$. Jak bude ukázáno později, hodnota $\hbar\omega_0$ odpovídá střední hodnotě energie systému. Máme tedy

$$a_0(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t} e^{-i\omega_0 t} \quad \text{pro } t \geq 0.$$

Průběh funkce $|\psi(t)\rangle$ je dán hamiltoniánem systému \hat{H} , kterému přísluší vlastní vektory $|E\rangle$.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\phi\rangle$$

Hodnoty $a_0(t)$ pro $t \leq 0$ můžeme dopočítat pomocí (2.6):

$$\begin{aligned} a_0(-t) &= \langle \phi | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(-t)} | \psi(0) \rangle \\ &= \langle \psi(0) | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | \psi(0) \rangle^* \\ &= \langle \phi | \psi(t) \rangle^* = a_0^*(t), \end{aligned}$$

takže

$$a_0(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t - i\omega_0 t} & \text{pro } t \geq 0 \\ e^{\frac{\Gamma}{2\hbar}t - i\omega_0 t} & \text{pro } t \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Přepíšeme (2.6) do energetické reprezentace a vyjádříme amplitudu $a_0(t)$ pomocí energetického spektra.

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \langle \phi | \psi(t) \rangle = \langle \phi | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | \phi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE \int_{-\infty}^{+\infty} dE' \langle \phi | E \rangle \langle E | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | E' \rangle \langle E' | \phi \rangle \end{aligned}$$

Výraz $\langle E | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | E' \rangle$ můžeme snadno upravit na příhodnější tvar

$$\langle E | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | E' \rangle = \langle E | e^{-\frac{i}{\hbar} E' t} | E' \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E' t} \langle E | E' \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E' t} \delta(E - E')$$

a dosadíme do původní rovnice:

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE \int_{-\infty}^{+\infty} dE' \langle \phi | E \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E' t} \delta(E - E') \langle E' | \phi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \langle \phi | E \rangle \langle E | \phi \rangle \end{aligned}$$

Zavedeme *energetické spektrum* stavu $|\phi\rangle$:

$$f(E) \equiv |\langle \phi | E \rangle|^2 = \langle \phi | E \rangle \langle E | \phi \rangle$$

a v posledním integrálu provedeme substituci $E = \hbar\omega$.

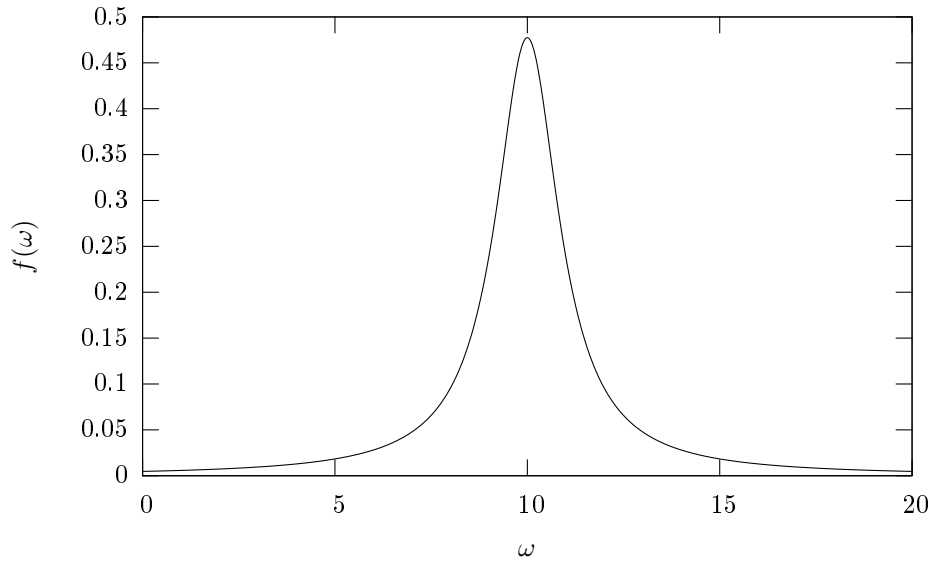
$$a_0(t) = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(\omega) d\omega \quad (2.8)$$

Vidíme, že $a_0(t)$ je vlastně Fourierovou transformací energetického spektra. Dosazením konkrétního tvaru $a_0(t)$ z (2.7) a inverzní transformací získáme průběh $f(E)$.

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\Gamma}{2\hbar}t - i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t - i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left\{ \left[\frac{e^{\frac{\Gamma}{2\hbar}t + i(\omega - \omega_0)t}}{\frac{\Gamma}{2\hbar}t + i(\omega - \omega_0)} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t + i(\omega - \omega_0)t}}{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t + i(\omega - \omega_0)} \right]_0^{+\infty} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left\{ \frac{1}{\frac{\Gamma}{2\hbar}t + i(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t + i(\omega - \omega_0)} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{2\frac{\Gamma}{2\hbar}}{\left(\frac{\Gamma}{2\hbar}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \end{aligned}$$

a jednoduchou úpravou obdržíme konkrétní tvar energetického spektra pro exponenciální průběh rozpadu:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (2.9)$$



Obrázek 2.1: Breit-Wignerovo rozdělení pro $\Gamma = 3$, $\omega_0 = 10$.

2.4 Vlastnosti Breit-Wignerova rozdělení

Breit-Wignerovo rozdělení určuje spektrální hustotu počátečního stavu. Jinými slovy hodnota $f(\omega)$ odpovídá pravděpodobnosti, že v počátečním stavu bude naměřena energie $\hbar\omega$. Spočítáme statistické vlastnosti Breit-Wignerova rozdělení.

Nejprve se přesvědčíme, že funkci $f(\omega)$ je možno považovat za hustotu pravděpodobnosti, tj. že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega = 1.$$

Dosadíme do integrálu a provedeme substituci $\frac{\Gamma}{2}\xi = (\omega - \omega_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\Gamma}{2} d\xi}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \xi^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{1}{\pi} [\arctan \xi]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dále můžeme spočítat střední hodnotu energie, která je dána integrálem

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f(\omega) d\omega.$$

Opět dosadíme a použijeme stejnou substituci jako v minulém případě:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f(\omega) d\omega &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\Gamma}{2}\xi + \omega_0}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \xi^2} \left(\frac{\Gamma}{2}\right) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\Gamma}{2}\xi + \omega_0}{1 + \xi^2} d\xi \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{1 + \xi^2} d\xi + \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \end{aligned}$$

První integrál je integrálem liché funkce, takže je roven nule. Druhý integrál je stejný jako na konci výpočtu (2.10), takže je roven π . Střední hodnota energie je tedy

$$\langle E \rangle = \omega_0,$$

což zároveň objasňuje roli parametru ω_0 .

Zbývá spočítat rozptyl, který je dán integrálem

$$\langle \Delta E \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \langle E \rangle)^2 f(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta E \rangle^2 &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \end{aligned}$$

První integrál je divergentní, druhý integrál jsme už vyřešili během výpočtu (2.10) a má konečnou hodnotu $\frac{2\pi}{\Gamma}$. Rozptyl je tedy nekonečný

$$(\Delta E)^2 = \infty. \quad (2.11)$$

Tento výsledek odpovídá závěru části 2.1.

Šířka křivky odpovídá parametru Γ , který zároveň určuje rychlost rozpadu. Maximum křivky nastává v bodě ω_0 , kde

$$f(\omega_0) = \frac{2}{\Gamma\pi}.$$

Spočítáme vzdálenost bodů ω_- a ω_+ , pro které platí $f(\omega_{\pm}) = f(\omega_0)/2 = 1/\Gamma\pi$. Snadnou úpravou rovnice

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega_{\pm} - \omega_0)^2} = \frac{1}{\Gamma\pi}$$

dojdeme k výsledku

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{\Gamma}{2}.$$

Šířka křivky v polovině výšky je tedy $\omega_+ - \omega_- = \Gamma$.

2.5 Vliv oříznutí Breit-Wignerova rozdělení

Breit-Wignerovo rozdělení má nenulové hodnoty na celé reálné ose. Ve skutečnosti musí být energie nějakým způsobem omezena. V tomto odstavci prozkoumáme vliv oříznutí (cut-off) Breit-Wignerova rozdělení na průběh pravděpodobnosti přežití. Celý postup je podrobněji proveden v [6].

Pravděpodobnost přežití je dána faktorem $|a_0(t)|^2$, který můžeme získat dosazením z (2.9) do (2.8).

$$a_0(t) = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Nyní omezíme hodnoty spektra na $\omega \in \langle -\varepsilon; \varepsilon \rangle$ a provedeme substituce $\hbar = 1$, $\omega_0 = 0$ a $\delta = \frac{1}{2}\Gamma$, takže

$$\bar{a}_0(t) = \frac{N\delta}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-i\omega t} \frac{dE}{\delta^2 + E^2}.$$

Normalizační konstanta N zajišťuje $\lim_{t \rightarrow 0} |\bar{a}_0(t)|^2 = 1$ a je rovna

$$N = \frac{\pi}{2} \left(\arctan \frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{-1}.$$

Se zvyšující se hodnotou ε se bude průběh funkce $\bar{a}_0(t)$ stále více podobat exponenciálnímu průběhu $e^{-\delta t}$. Odchylku od exponenciály můžeme vyjádřit funkcí $R(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0(t) &= N(e^{-\delta t} + R(t)), \\ R(t) &= -\frac{2\delta}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos Et}{E^2 + \delta^2} dE. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost $|\bar{a}_0(t)|^2$ můžeme přibližně vyjádřit jako

$$|\bar{a}_0(t)|^2 = N^2(e^{-2\delta t} + R^2(t) + 2e^{-\delta t}R(t)) \simeq e^{-2\delta t} + 2R(t),$$

neboť $R(t) \ll 1$ a $\delta t \ll 1$.

Člen $2R(t)$ určuje odchylku od exponenciálního chování. Hodnotu funkce $R(t)$ je možné odhadnout jako

$$|R(t)| < \frac{2\delta}{\pi\varepsilon},$$

Funkce $|R(t)|$ navíc klesá v t jako $\propto 1/t$, takže vliv oříznutí se projeví jen pro krátké časy.

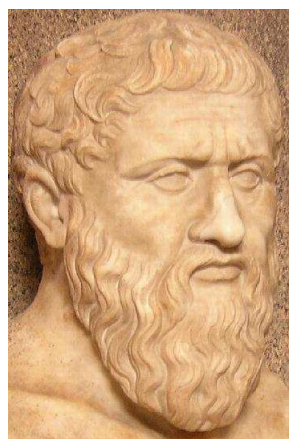
Podle teorie Fourierovy transformace souvisí hladkost vzoru s rychlostí poklesu obrazu. Díky nespojitosti v první derivaci čistě exponenciálního průběhu

$|a_0(t)|^2$ (funkce je sudá okolo počátku) klesá její fourierova transformace $f(\omega)$ jen jako $\propto 1/\omega$. V předchozím jsme uměle omezili hodnoty $f(\omega)$ (odstranili jsme vysoké frekvence), takže její vzor $\bar{a}_0(t)$ a všechny jeho derivace musí být hladké. Také funkce $|\bar{a}_0(t)|^2$ je sudá okolo počátku, takže musí mít nulovou derivaci v bodě nula. Vlivem oříznutí spektra může nastat Zenónův jev.

Kapitola 3

Vliv měření na rozpad kvantového systému

V minulé části jsme se zabývali systémem, který je připraven v nějakém počátečním stavu a který se volně, bez měření, vyvíjí podle Schrödingerovy rovnice. Ukazuje se, že měření kvantového systému může jeho vývoj značně ovlivnit. V extrémním případě může dojít až k zastavení časového vývoje. Takovému jevu se říká *Zenónův jev*. Jako první tento název zavedli B. Mishra a E. C. G. Sudarshan v roce 1977, viz [7].



Řecký filosof Zenón z Eleje (přibližně 490 př.n.l. až 430 př.n.l.) vymyslel asi 40 paradoxů, z nichž se do dnešní doby zachovaly tři.

Nejznámějším paradoxem je Achilles a želva. Podle něj Achilles nikdy nedoběhne želvu, protože než doběhne na místo, kde byla želva před chvílí, je želva již o kousek dál. Tato situace se opakuje do nekonečna.

Druhým známým paradoxem je letící šíp, který se nemůže pohybovat, protože v každém okamžiku stojí. Je zajímavé, že neslučitelnost polohy a pohybu je jedním ze základních výsledků kvantové mechaniky.

Budeme předpokládat, že systém je pravidelně měřen, přičemž měření nastává v pravidelných krátkých intervalech. Při každém měření nastane kolaps vlnové funkce do vlastního stavu operátoru měřené veličiny, označme jej \hat{A} . Dále budeme předpokládat, že počáteční stav systému je vlastním vektorem operátoru \hat{A} (systém mohl být připraven do počátečního stavu prostým změřením).

Jednotlivá měření budeme uvažovat v časech $t_i = i \Delta t$. Pravděpodobnost přežití atomu po měření v čase t_i označíme $Q(t_i)$.

3.1 Zenónův jev

Přežití systému v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$, pokud je pravidelně měřen v časech $t_i = i \Delta t$, je dáno součinem pravděpodobností přežití v každém intervalu $\langle t_i; t_{i+1} \rangle$. Z rovnice (2.2) máme

$$1 - p(t) = \left(1 - (\Delta \hat{H})^2 \Delta t^2\right)^N,$$

kde $N = t/\Delta t$.

V extrémním případě, kdy měření probíhá neustále, dostáváme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - (\Delta \hat{H})^2 \Delta t^2\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(\Delta \hat{H})^2 t^2}{N^2}\right)^N = 1, \quad (3.1)$$

takže je-li $\Delta t \rightarrow 0$, platí $p(t) = 0$ pro každé $t \geq 0$. Pravděpodobnost rozpadu je nula.

V systému, který je podroben neustálému měření se zastaví časový vývoj. Viz též kapitola o kvantovém Zenónově jevu v [8].

3.2 Anti-Zenónův jev

Pozastavení časového vývoje při Zenónově jevu je umožněno pomalým poklesem pravděpodobnosti přežití pro krátké časy. Pokud vhodně zvolíme interval Δt , který už nemusí být malý, můžeme naopak rozpad systému urychlit. Takovému jevu se říká *anti-Zenónův jev*. Důkladný rozbor lze nalézt v [9], [10].

Vezměme jako příklad průběh pravděpodobnosti přežití

$$p(t) = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta t)^2 + t^2}.$$

Platí $p(0) = 1$ a $dp(t)/dt < 0$.

Uvažujme nejprve případ, kdy systém *není* pravidelně měřen (je změřen jen jednou na konci experimentu). Pravděpodobnost přežití po provedení jediného měření v čase t klesá pro velké t jako $\propto 1/t^2$.

Pokud naopak budeme systém měřit pravidelně v časech $t_i = i \Delta t$, přežije systém první měření s pravděpodobností

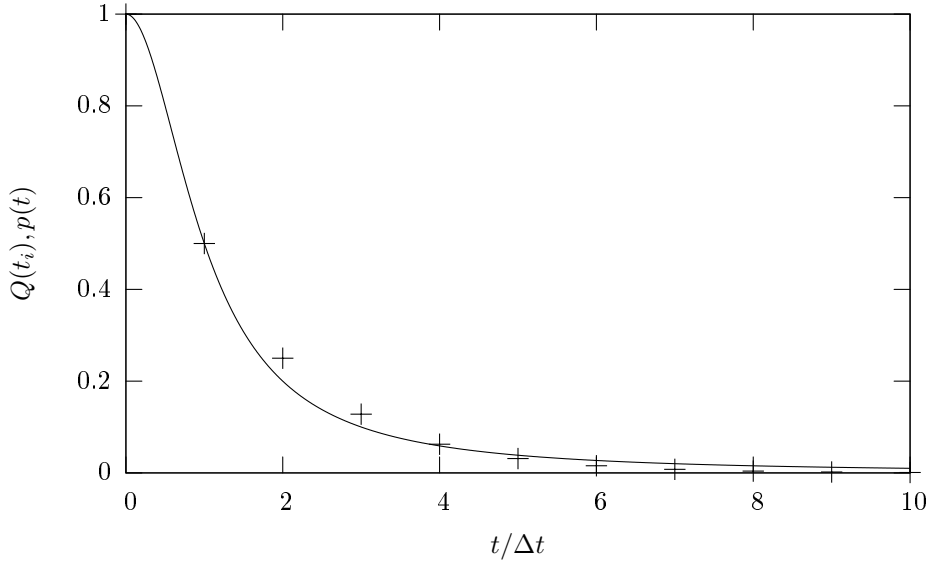
$$p(\Delta t) = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta t)^2 + (\Delta t)^2} = \frac{1}{2}.$$

Přežije-li systém první měření, bude opět v počátečním stavu $|\phi\rangle$, takže situace bude naprosto stejná jako v čase $t = 0$. Druhé měření systém přežije také s pravděpodobností $1/2$. Dokud se systém nerozpadne, bude pravděpodobnost přežití každého dalšího měření $1/2$.

Pravděpodobnost $Q(t_i)$ přežití systému po měření v čase t_i klesá exponenciálně

$$Q(t_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i,$$

takže měření výrazně přispívá k rozpadu systému. Je také vidět, že pravděpodobnost přežití každého systému, který je periodicky měřen, klesá exponenciálně.



Obrázek 3.1: Průběh pravděpodobnosti rozpadu s jediným měřením (křivka) a s pravidelným měřením (body). Pro měření v časech t_2, t_3, t_4 nastává Zenónův jev. Pro další měření již nastává anti-Zenónův jev.

3.3 Pravděpodobnost anti-Zenónova jevu

Z předchozího víme, že měření může ovlivnit systém. Může ho ovlivnit dvojím způsobem: buď rozpad zpomalit (Zenónův jev), nebo ho naopak urychlit (anti-Zenónův jev). Pro extrémně krátké časy nastává Zenónův jev. Pro makroskopické časy není vliv měření obvykle pozorovatelný. Intuitivně je jasné, že anti-Zenónův jev by mohl nastávat někde mezi. Provádíme-li „pozorování“ například pomocí bombardování atomového jádra fotonem, očekáváme spíše urychlení rozpadu, než jeho potlačení.

Podle autorů [9] je anti-Zenónův jev mnohem přirozenější a nastává u většiny systémů. S narůstající frekvencí měření se systém rozpadá stále rychleji. Od určité hodnoty frekvence může v některých případech dojít k obratu a projeví se Zenónův jev. Autoři zdůrazňují, že pro *většinu* situací se projevuje spíše anti-Zenónův jev. V některých případech je potřebná frekvence pro potlačení rozpadu dokonce nedosažitelná, protože neodpovídá relaci neurčitosti $\Delta E \Delta t \leq \hbar$, případně měření ovlivní systém natolik, že změní jeho podstatu. Příklad nedosažitelnosti Zenónova jevu uváděný v [9] je právě rozpad atomového jádra.

Východiskem je pečlivější analýza vzorce (2.3), který lze, pro $t \ll 1$ po dosazení $a_0(t) = 1$ na pravé straně, přepsat jako

$$a_0(t) = 1 - \int_0^t (t - t')g(t')dt'. \quad (3.2)$$

Po provedení n měření v časech $t_i = i\tau$, kde $i = 1 \dots n$, bude pravděpodobnost přežití systému

$$1 - p(t) = |a_0(\tau)|^{2n} = \exp(-Rt),$$

kde $t = n\tau$. Další úpravou můžeme vyjádřit τR :

$$\begin{aligned} |a_0(\tau)|^2 &= \exp\left(-\frac{Rt}{n}\right) \\ |a_0(\tau)|^2 &= 1 - R\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vzhledem k $\tau \ll 1$ je hodnota integrálu v rovnici (3.2) malá, takže koeficient $a_0(t)$ má tvar $a_0(\tau) = 1 - \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$, kde

$$\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt'$$

a platí $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$. Hodnotu $|a_0(\tau)|^2$ pak můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} |a_0(\tau)|^2 &= a_0(\tau)\bar{a}_0(\tau) = (1 - \varepsilon_1 - i\varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \\ &= 1 - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \doteq 1 - 2\varepsilon_1, \end{aligned}$$

takže

$$|a_0(\tau)|^2 \doteq 1 - 2\text{Re} \int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt'.$$

Vyjádříme R pomocí $g(t)$. Dosadíme za $|a_0(\tau)|^2$ do (3.3)

$$\begin{aligned} 1 - 2\text{Re} \int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt' &= 1 - R\tau \\ \tau R &= 2\text{Re} \int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Další úpravou, která je podrobně provedena v dodatku 6.6, dojdeme k

$$R = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{2} G(\omega) d\omega$$

Definujme funkci $H(\omega)$ posunutím funkce $G(\omega)$

$$H(\omega) \equiv G(\omega - \omega_0) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\pi |V_m|^2 \delta(\omega_m - \omega). \quad (3.5)$$

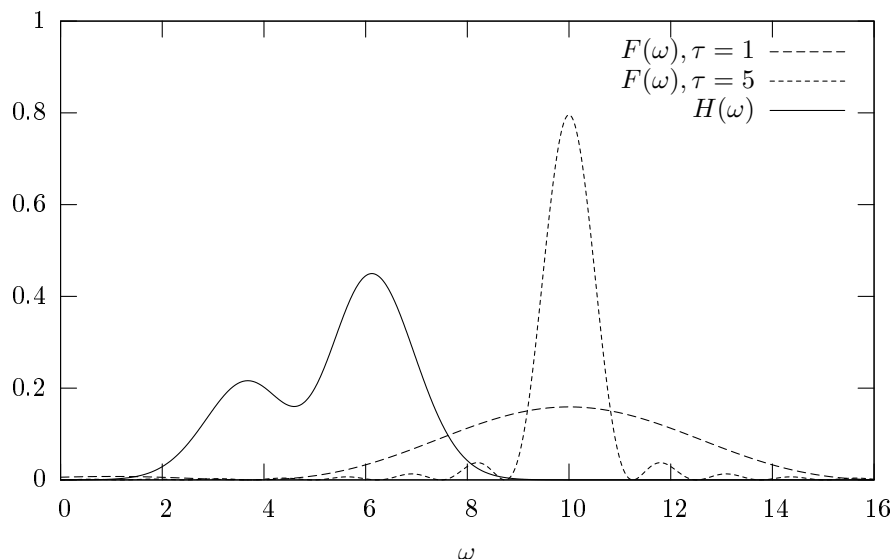
Funkce H charakterizuje hamiltonián.

Dále definujeme funkci F :

$$F(\omega) \equiv \frac{\tau}{2\pi} \text{sinc}^2 \left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right).$$

Rychlost rozpadu R můžeme pak vyjádřit jednoduchým vztahem

$$\boxed{R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)H(\omega)d\omega} \quad (3.6)$$



Obrázek 3.2: Příklad funkcí $H(\omega)$ a $F(\omega)$. $H(\omega)$ představuje obecný průběh spektrální hustoty. Funkce $F(\omega)$ se rozšiřuje při snížení periody měření τ . Pro $\tau = 5$ se systém prakticky nerozpadá, viz (3.6). Při zvýšení frekvence měření na $\tau = 1$ R roste.

Funkce $F(\omega)$ vybírá ze spektra $H(\omega)$ jen určitou oblast. Šířka je dána periodou měření τ . Oblast je tím širší, čím je měření častější. Oblast je navíc symetrická okolo bodu ω_0 .

Snižujeme-li postupně periodu měření od makroskopických hodnot τ , dostaneme se k hodnotám, pro kterou už začne platit vzorec (3.6). Zpočátku je graf funkce $F(\omega)$ velmi úzký a vysoký. Podle [9] je nepravděpodobné, že by se frekvence ω_0 kryla s maximem funkce $H(\omega)$.¹ Při dalším snižování τ se bude graf funkce $F(\omega)$ rozšiřovat a snižovat. Oblast vymezená funkcí $F(\omega)$ se tak začne rozšiřovat směrem k maximu $H(\omega)$ a hodnota $R(\tau)$ bude růst.

Pro určitou hodnotu τ bude šířka grafu $F(\omega)$ tak velká, že začne zasahovat za maximum $H(\omega)$ a nastane pokles $R(\tau)$.

Pro typický systém tedy nastává nejprve anti-Zenónovská fáze, teprve potom přijde na řadu Zenónův jev. Vzhledem k tomu, že anti-Zenónův jev vyžaduje nižší frekvenci měření, je jeho výskyt snáze měřitelný a pozorovatelný.

¹Systémy s takovou vlastností jsou speciální. Nenastává u nich anti-Zenónův jev, projevuje se rovnou jev Zenónův.

Kapitola 4

Experimentální ověřování anti-Zenónova a Zenónova jevu

Zenónův jev se prakticky projeví jen při velmi častém měření. Aby mohlo dojít ke zpomalení vývoje systému, musí být systém změřen dříve než klesne pravděpodobnost rozpadu, která má podle (2.2) pro krátké časy kvadratický průběh:

$$p(t) \doteq \frac{(\Delta\hat{H})^2 t^2}{\hbar^2}.$$

Požadujeme $p(t) \doteq 1$ a dostáváme

$$\hbar^2 \doteq (\Delta\hat{H})^2 t^2,$$

což je řádový odhad pro nejdelší interval t mezi měřeními, pro který je ještě možné pozorovat Zenónův jev. Veličinu

$$\tau_Z = \frac{\hbar}{\Delta\hat{H}}$$

nazýváme *Zenónův čas*.

Zenónův jev je obtížně pozorovatelný, protože požadovaná frekvence měření je obvykle velmi vysoká. Například v [11] je Zenonův čas ($\tau_Z = \hbar/\Delta\hat{H}$) pro 2P–1S přechod atomu vodíku odhadnut na 3.59×10^{-15} s (doba života je 1.595×10^{-9} s). Přesto se podařilo uskutečnit experimenty, které většinou nepřímo Zenónův jev potvrzují.

4.1 Optický Zenónův jev

Jde o analogii rozpadu atomu s pohlcením fotonu polarizačním filtrem. Podrobnosti viz [8].

Svazek polarizovaného světla prochází opticky aktivním prostředím, které stáčí rovinu polarizace. Měření odpovídá vložení polarizačního filtru do dráhy fotonu. Polarizační filtry propouští pouze fotony, u kterých naměří vertikální polarizaci.

Označme d délku dráhy fotonu, na které dojde k přetočení polarizační roviny o 360° .

Každý filtr propustí foton s pravděpodobností $\cos^2(\alpha/2)$, kde α je úhel mezi polarizační rovinou fotonu a vertikálním směrem. Velikost úhlu je dána vzdáleností od předchozího filtru. Jsou-li filtry rozmístěny v pravidelných vzdálenostech Δ , je $\alpha = \Delta/d$.

Pravděpodobnost, že foton projde N filtrů je rovna

$$Q_N = \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]^N = \left[\cos^2 \left(\frac{\Delta}{2d} \right) \right]^N.$$

Budeme-li vkládat další filtry a zmenšovat přitom vzdálenost Δ tak, aby se zachovával součin $N\Delta \equiv x$, můžeme spočítat limitní případ pro velké množství filtrů:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = \left[\cos^2 \left(\frac{x}{2dN} \right) \right]^N.$$

Rozvojem $\cos \varepsilon$ pro $\varepsilon \ll 1$

$$\cos \varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$$

máme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = \left[1 - \left(\frac{x}{2dN} \right)^2 \right]^N = 1.$$

Poslední limita je obdoba (3.1).

Je-li v dráze světla nekonečně mnoho ideálních filtrů, projde všechno světlo.

Při praktickém provedení se používají dvě rovnoběžná zrcadla, mezi kterými se mnohonásobně odráží foton. Fotony jsou měřeny polarizátorem, který oddělí fotony s vodorovnou polarizací. Množství rozpadlých fotonů odpovídá intenzitě takto odděleného světla. Kromě polarizátoru procházejí fotony aktivním prostředím, které při každém průchodu stočí jejich polarizační rovinu. Úhel stočení odpovídá vzdálenosti Δ mezi filtry v předchozím popisu. Podrobnosti lze nalézt též v [10].

4.2 Dvouhladinový experiment

Tento experiment byl navržen v roce 1988 R. J. Cookem [12] a o dva roky později úspěšně proveden [13].

V experimentu byl využit atom $^9\text{Be}^+$ a jeho tři stavy. Stav $|g\rangle$ je základní. Stav $|e\rangle$ je metastabilní stav s relativně dlouhou dobou života. Je-li atom vystaven radiovému záření¹, začne systém pomalu oscilovat mezi stavy $|g\rangle$ a $|e\rangle$ s Rabiho frekvencí Ω .

Cílem experimentu je prodloužit dobu, po kterou atom setrvává ve stavu $|g\rangle$. Pro měření je potřeba ještě pomocný stav $|u\rangle$, který je nestabilní a velmi rychle přechází do základního stavu $|g\rangle$.

¹V experimentu [13] byla použita frekvence 320.7MHz

Během přechodu mezi stavy $|u\rangle \rightarrow |g\rangle$ dochází k emisi fotonu s frekvencí $\hbar\omega_u = E_u - E_g$.² Je-li atom v základním stavu a je-li ozařován fotony s frekvencí ω_u , dojde k absorpci fotonu a přeskoku na hladinu $|u\rangle$. Následuje vyzáření fotonu náhodným směrem a přechod do základního stavu $|g\rangle$. Svítíme-li na atom ve stavu $|e\rangle$, pak k žádné absorpci ani emisi nedochází. Lze tak zjistit stav atomu.

Nejprve připravíme atomy ve stavu $|g\rangle$ prostě tak, že je po dostatečně dlouhou dobu vystavíme záření s frekvencí ω_u .

Experiment probíhá tak, že zapneme radiové pole a v krátkých intervalech ozařujeme atom ve stavu $|g\rangle$. Osvětlením atomu dojde k sérii přechodů mezi $|g\rangle$ a $|u\rangle$ a tím pádem i ke kolapsu vlnové funkce do $|g\rangle$. Víme, že dokud atom emituje fotony, je stále ve stavu $|g\rangle$.

Experiment přesvědčivě prokázal, že při vyšší frekvenci měření byl zpomalen přechod do stavu $|e\rangle$.

4.3 Tunelování sodíkových atomů

V experimentu [14] byl pozorován vliv frekvence měření na vývoj systému. Pro některé frekvence byl pozorován i anti-Zenónův jev.

Pomalé sodíkové atomy byly zachyceny v téměř stojaté elektromagnetické vlně. Vlna byla vytvořena pomocí dvou protisměrných laserových paprsků. Mírným rozdílem ve frekvencích paprsků dojde k pohybu uzlů vlny. Uzly byly urychlovány, takže se vytvořil potenciál ve tvaru

$$V = V_0 \cos[2k_L x - k_L a t^2],$$

kde V_0 je dipólový optický potenciál, k_L je vlnový vektor světelného paprsku, x je pozice vůči laboratorní soustavě, a je zrychlení uzlů vůči laboratorní soustavě a t je čas.

Nenulové zrychlení způsobuje, že v soustavě spojené s uzly paprsku působí na atomy zdánlivá síla. Podle klasické fyziky zůstanou atomy při dostatečně malém zrychlení v místech, kde je potenciál nejnižší a budou vlečeny a urychlovány paprskem. Podle kvantové teorie může dojít k protunelování potenciálu.

Protunelování potenciálem je analogické rozpadu atomu. Při častém pozorování by se mělo tunelování zpomalit. Popíšeme nejprve experiment bez pozorování.

Zhruba 3×10^5 sodíkových atomů bylo soustředěno do jednoho místa. Potom byl zapnut laserový paprsek, který byl postupně urychlován se zrychlením a_{trans} . Atomy s dostatečnou kinetickou energií nebyly potenciálem zachyceny a zůstaly prakticky na místě. Atomy s nízkou kinetickou energií byly zachyceny a „odvlečeny“. Zrychlení a_{trans} bylo voleno tak, aby nedocházelo k tunelování.

Po dosažení rychlosti v_0 bylo zrychlení zvětšeno na a_{tunnel} . Během této fáze část atomů protunelovala skrz potenciálovou bariéru. Atom, který protuneloval, je s velkou pravděpodobností ve stavu, který mu umožňuje další tunelování, proto je možné považovat takový atom za volný.

Po uplynutí doby t_{tunnel} bylo zrychlení opět sníženo na hodnotu a_{trans} , takže atomy, které nestačily protunelovat, byly dále vlečeny.

Po dosažení rychlosti v_f byl vlečný paprsek vypnut. Po vypnutí zmizel potenciál a atomy pokračovaly v rovnoměrném pohybu rychlostí, kterou měly

²V experimentu [13] bylo použito elektromagnetické záření $\lambda = 313\text{nm}$.

v okamžiku vypnutí. *Rychlost atomu v okamžiku vypnutí odpovídá okamžiku, kdy opustil potenciál vlečného paprsku.* Část atomů, která měla na počátku dostatečně vysokou kinetickou energii nebyla vlečena nikdy a zůstala na místě.³ Atomy, které protunelovaly během zrychlení a_{tunnel} , měly rychlost přibližně v_0 . Atomy, které neprotunelovaly měly rychlost přibližně v_f . Vzhledem k různým rychlostem došlo po určité době od vypnutí paprsku k prostorovému rozdělení atomů podle toho, kdy opustily potenciál.

Konečná poloha atomů byla snímána CCD kamerou. Atomy sodíku byly opět zachyceny⁴, nasvíceny a jejich spontánní emise je zviditelnila. Byl vyhodnocen poměr atomů, které protunelovaly vůči těm, které zůstaly zachyceny až do konce.

Během urychlování atomů nebylo možné zjistit, které atomy již protunelovaly a které zůstávaly zachyceny potenciálem, což odpovídá volnému vývoji systému bez provedení měření.

Experiment byl zopakován s mírnou modifikací, která v principu umožnila během fáze se zrychlením a_{tunnel} zjistit, kolik atomů již opustilo potenciál. Fáze se zrychlením a_{tunnel} byla několikrát přerušena jinou fází se zrychlením a_{inter} (= a_{trans}). Došlo tak k přerušování tunelování během kterých však dále zrychlovaly dosud neprotunelované atomy, což umožnilo jejich pozdější odlišení. Celkový čas tunelování a_{tunnel} zůstal zachován. Tato varianta umožňuje zjistit, kdy atom opustil potenciál.

Výsledky potvrdily, že při častém přerušování bylo tunelování potlačeno. Pro určité frekvence přerušování bylo naopak dosaženo zvýšené pravděpodobnosti tunelování, což lze identifikovat jako anti-Zenónův jev.

4.4 Nekonečně časté měření

Nekonečně časté měření by mělo způsobit zastavení systému. Je všeobecně považováno za nefyzikální. V této kapitole budeme na příkladu demonstrovat, jak může být nekonečně časté měření v rozporu s relacemi neurčitosti. Naštěstí v tomto případě bude při hraniční frekvenci měření možné pozorovat Zenónův jev. Odhad byl převzat z [15].

Vezměme neutron, který má spin orientovaný nahoru ve směru osy z a pohybuje se ve směru osy x rychlostí v . Během svého pohybu mine N oblastí, o délce l , ve kterých je přítomno magnetické pole B , které způsobuje rotaci spinu neutronu okolo osy x . Oblasti s magnetickým polem jsou rozmístěny v pravidelných vzdálenostech d .

Neutron proletí jednu oblast s magnetickým polem za čas $t = l/v$. Celkový čas, kdy na něj bude působit magnetické pole, je $T = Nt$. Zvolíme hodnotu $T = \pi/\omega$, kde $\omega = \mu B/\hbar$ (μ je magnetický moment neutronu, $\mu = 1.92 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$). Volba T způsobí, že neutron změní po průletu N oblastí spin směrem dolů, což je analogické rozpadu.

Zenónův jev nastane, pokud budeme měřit spin neutronu po každém průletu oblastí s magnetickým polem. Vložíme mezi oblasti polarizátory. Propustí-li polarizátor neutron, máme jistotu, že neutron má opět spin orientovaný směrem

³Na počátku měly tyto atomy nejvyšší rychlost, ale konečná rychlost v_f je mnohem vyšší, takže v porovnání s urychlenými atomy se příliš nevzdálily.

⁴Tentokrát chladicími paprsky, které byly použity při přípravě atomů. Laserové chlazení využívá vyšší pravděpodobnosti absorpce fotonu proti směru pohybu (Dopplerův jev), což způsobuje zpomalení atomu. Následná emise má náhodný směr.

vzhůru. Po průchodu jednou oblastí magnetického pole je spin neutronu natočen o úhel $\phi = \omega t$. Průchod dalším polarizačním filtrem má pravděpodobnost $\cos^2 \phi$.

Celková pravděpodobnost průchodu neutronu (v ideálním případě) je

$$P_{\uparrow}^{(N)} = (\cos^2 \phi)^N$$

a platí $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\uparrow}^{(N)} = 1$.

Ukážeme, že úhel ϕ je zdola omezený pomocí relací neurčitosti. Předpokládejme nejprve, že délka oblasti s magnetickým polem l je větší než neurčitost polohy neutronu Δx . V následujících úpravách využijeme nerovnost $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

$$\phi = \frac{\mu B l}{\hbar v} > \frac{\mu B \Delta x}{\hbar v} > \frac{\mu B}{2 m v \Delta v} = \frac{1}{4} \frac{\Delta E_m}{\Delta E_k}, \quad (4.1)$$

kde m je hmotnost neutronu, $\Delta E_m \equiv 2\mu B$ je šířka energetického pásu spinu v magnetickém poli a $\Delta E_k \equiv m v \Delta v$ je rozptyl kinetické energie neutronu.

Budeme-li naopak předpokládat, že $l < \Delta x$, čili, že oblasti s magnetickým polem jsou velmi malé, můžeme uvažovat následujícím způsobem: neutron během své dráhy interaguje prostřednictvím magnetického pole s atomy, které ho vytváří. Tyto atomy podléhají principu neurčitosti stejně jako neutron. Budeme-li popisovat experiment v souřadné soustavě spjaté s neutronem, vůči kterému se atomy pohybují rychlostí $V = -v$, pak můžeme alternativně vyjádřit úhel ϕ jako

$$\phi = \frac{\mu B l}{\hbar V} > \frac{\mu B \Delta X}{\hbar V} > \frac{\mu B}{2 M V \Delta V} = \frac{1}{4} \frac{\Delta E_m}{\Delta E'_k},$$

kde ΔX je neurčitost v poloze atomu, která musí být menší než délka magnetického pole l . $\Delta E'_k$ je rozptyl v kinetické energii atomů.

Omezení úhlu ϕ zdola znamená omezení počtu měření N shora, platí totiž

$$\phi = \frac{\pi}{2N}. \quad (4.2)$$

Konkrétní hodnoty odhadu záleží na uspořádání experimentu. Budeme předpokládat případ $l > \Delta x$. Pro pomalé neutrony ($\lambda \doteq 5\text{\AA}$) s rozptylem $\Delta\lambda/\lambda = 0.1$ s pomocí

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

dopočítáme $p \doteq 1.32 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odtud

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \doteq 3.3 \text{ meV},$$

$$\Delta E_k \doteq \frac{2p\Delta p}{2m} = 0.7 \text{ meV}.$$

Vezmeme $B = 0.5\text{T}$ a dopočítáme $\Delta E_m = 2\mu B = 1.92 \times 10^{-26} \text{ J} = 1.12 \times 10^{-7} \text{ eV}$ a dosadíme do (4.1). Dostáváme $\phi > 1.6 \times 10^{-4}$. Ze vztahu (4.2) získáme odhad

$$N < 10^4.$$

Počet měření $N = 10^4$ dává prakticky $P_{\uparrow}^{(N)} \doteq 1$, takže k dochází k Zenónově jevu. Zároveň je vidět, že nekonečně časté měření je v rozporu s relacemi neurčitosti.

4.5 Další experimenty

Podrobný popis dalších experimentů bohužel překračuje rozsah této práce, kde jsme se omezili na čtyři příklady ([3], [13], [14], [15]). Experimentů bylo navrženo a provedeno mnohem více. Na závěr uvedeme malé shrnutí, které je převzato z [10]. Shrnuje především netriviální experimenty.

Proces	τ_{QZE}	τ_{AZE}
Radiative decay in a cavity [16]	ns	ns
Radiative decay in open space [9]	neexistuje	ps (Rydbergův přechod), fs (opt. přech.)
Photon polarization decay via random modulation in a cavity [17]	10 ns	10 ns
Transmission of tunneling emitting atoms [18]	?	ns
Tunelování sodíkových atomů [14]	$0.01\mu\text{s}$	μs
Electron tunneling in current-biased SQUID ("washboard" potential) [19]	?	10 ns
Nuclear β -decay [9]	neexistuje	10^{-18}s
Near-threshold photodetachment [20]	fs	ms

QZE je kvantový Zenónův jev, AZE je kvantový anti-Zenónův jev. Názvy jevů většinou raději nepřekládáme.

Ukazuje se, že experimenty, u kterých bylo možno pozorovat Zenónův jev, jsou vždy v něčem speciální, nebo jde o analogii Zenónova jevu (optický Zenónův jev). Například tunelování atomů [14] neodpovídá rozpadu samostatného systému do vakua a způsob měření je dost nepřímý. V dvouhladinovém experimentu [12] zase nejde o nestabilní systém v pravém slova smyslu, protože se může vrátit do původního stavu. Právý rozpad, kterým by mohl být například rozpad atomu ve vakuu, podle [9] pozorovat nelze.

Kapitola 5

Závěr

Klasický exponenciální rozpadový zákon lze odvodit za velmi obecných předpokladů. Nejdůležitější z předpokladů je nezávislost stavu systému na čase. Pokud je „rozpad“ žárovky popsán exponenciálním rozpadovým zákonem, pak libovolně stará žárovka (která ještě svítí) je stejně dobrá jako úplně nová. Obě totiž mají do budoucna stejné pravděpodobnosti přežití.

Poissonovská statistika se týká systému mnoha rozpadajících se částic. Lze ji dobře použít v případech, kdy je pokles počtu částic, způsobený rozpady, pomalý.

Rozpad kvantového systému je mnohem složitější. Hlavním rozdílem oproti klasickému přístupu je popis systému pomocí Schrödingerovy rovnice místo obecného statistického přístupu. Systém tak rázem získává „paměť“, čili jeho stav je závislý na čase. Jedním z důsledků je závislost pravděpodobnosti přežití na počátečním stavu. Ukazuje se, že pravděpodobnost přežití má exponenciální průběh v případě, že systém z počátečního stavu velmi rychle přechází do širokého spektra jiných stavů. Za velmi obecných podmínek lze ukázat, že odchylka od exponenciálního průběhu rozpadu souvisí s rozptylem energie systému. Čím blíže k exponenciále, tím větší rozptyl.

Kvantový Zenónův jev patří k nejzajímavějším předpovědím kvantové mechaniky. Předpovídá zpomalení vývoje systému při jeho častém měření. Jeho předpoklady jsou velmi obecné. Při výpočtech lze na mnoha místech narazit na relaci neurčitosti $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$. Zdá se, že Zenónův jev je určitým projevem této relace. Tomu odpovídá i nejjednodušší a nejznámější vzorec (2.2).

Zpomalení vývoje systému prostřednictvím pozorování bylo známo již Diracovi, avšak velký zájem o tento „paradox“ byl odstartován až v roce 1977 článkem [7]. Svou roli nepochybně sehrálo i výstižné pojmenování *Zeno effect*. Během let byla navržena a provedena řada experimentů, které Zenónův jev potvrdily. Většinou však nepřímo.

Při studiu Zenónova jevu se zjistilo, že se za jistých okolností může projevit i opačný efekt — anti-Zenónův jev. Anti-Zenónův jev je intuitivně mnohem přirozenější. Je blízky představě, že pozorováním narušujeme stabilitu systému.

Zdá se, že zájem o Zenónův jev utichnul okolo roku 2001. Podle všeho svou roli sehrál článek [9], kde bylo vhodnou aproximací dosaženo jednoduché formule (3.6), ze které vyplývá, že anti-Zenónův jev je mnohem lépe pozorovatelný, protože nastává pro nižší frekvence měření. Je-li systém pozorován, typicky se jeho rozpad urychlí. Zenónův jev se podle autorů často vůbec neuplatní, pro-

tože zenónovská frekvence měření není prakticky realizovatelná (porušuje relace neurčitosti, nebo změni podstatu chování systému¹).

¹Uvádí se například vznik nových částic při bombardování jádra fotony.

Kapitola 6

Dodatky

6.1 Rozpad atomů pomocí teorie spolehlivosti

Problém náhodného rozpadu atomu úzce souvisí se statistickou teorií spolehlivosti. V obecné matematické rovině není velký rozdíl mezi rozpadem soustruhu a rozpadem atomu. Viz též [2].

Základní veličina v teorii spolehlivosti je *pravděpodobnost bezporuchového provozu* $R(t)$, která udává pravděpodobnost, že objekt bude bez poruchy pracovat po dobu t . Budeme považovat atom za jeden takový objekt a rozpad atomu za poruchu. Veličinu $R(t)$ je možné vyjádřit statisticky. Vezměme vzorek K atomů, které budeme sledovat po dobu t . Pro velká K platí

$$R(t) = \frac{n(t)}{K},$$

kde $n(t)$ je počet nerozpadlých atomů v čase t . Funkce $n(t)$ a tedy i $R(t)$ jsou nerostoucí. Z definice je navíc zřejmé, že platí $R(0) = 1$.

Známe-li funkci $R(t)$ a počáteční počet atomů, můžeme z předchozí rovnice snadno dopočítat očekávaný počet atomů v čase t :

$$n(t) = KR(t) \tag{6.1}$$

S pomocí předchozí rovnice můžeme vyjádřit *rychlost úbytku atomů*:

$$f(t) \equiv -\frac{dn(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} [KR(t)] = -KR'(t)$$

Dále definujeme *intenzitu poruch*¹, jako poměr mezi rychlostí úbytku atomů a počtem dosud nerozpadlých atomů $n(t)$:

$$\lambda(t) \equiv -\frac{f(t)}{n(t)} = -\frac{KR'(t)}{KR(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \log R(t)$$

Z předchozí rovnice vyjádříme pravděpodobnost $R(t)$. Při integraci určíme konstantu tak, aby platilo $R(0) = 1$, tj. $\log R(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \log R(t) &= -\int_0^t \lambda(t) dt \\ R(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right) \end{aligned}$$

¹V teorii spolehlivosti *intenzita poruch objektu v časovém okamžiku t* .

V předchozí kapitole jsme zavedli pravděpodobnost $P_0(t)$, která udává pravděpodobnost, že se v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ nerozpadne žádný atom. Měříme-li systém složený z K atomů můžeme, za předpokladu že rozpady jsou nezávislé, pravděpodobnost $P_0(t)$ vyjádřit jako $P_0(t) = R(t)^K$.

$$P_0(t) = R(t)^K = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right)^K = \exp\left(-K \int_0^t \lambda(t)dt\right) \quad (6.2)$$

Úpravou rovnice (1.3) můžeme získat vztah mezi $\lambda(t)$ a $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \prod_{k=1}^N (1 - \eta\Delta t) = \exp \sum_{k=1}^N \log(1 - \eta\Delta t) = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^N -\eta\Delta\right) = \exp\left(\int_0^t -\eta(t)dt\right) \end{aligned}$$

Při úpravě jsme využili přibližnou hodnotu logaritmu

$$\log(1 - x) \simeq -x,$$

která platí pro malá x a nahradili jsme sumu integrálem.

Srovnáním s (6.2) vidíme, že $\eta(t) = K\lambda(t)$, kde K je počáteční počet atomů a obě odvození jsou ekvivalentní.

6.2 Poslední kapka

Kapky dopadající do kaluže mají přímou souvislost s rozpadem atomů. Dopad kapky je ekvivalent rozpadu atomu. Jednotlivé rozpady jsou navzájem nezávislé, stejně tak jsou nezávislé dopady jednotlivých kapek. Konstantní intenzita dopadů a rozpadů je idealizací v obou případech. V případě kaluže se během deště zvětšuje její velikost a počet kapek za jednotku času roste. V případě radioaktivního vzorku se naopak snižuje počet atomů, které se ještě nerozpadly.

Spočítáme pravděpodobnost, že při dešti spadne do kaluže určitý počet kapek během daného časového intervalu. Počet kapek závisí na intenzitě deště. Intenzitu deště λ budeme definovat jako průměrný počet kapek, který dopadne do kaluže za jednotku času. Formálně:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{počet kapek za čas } t}{t}. \quad (6.3)$$

Navíc budeme předpokládat, že se intenzita deště s časem nemění.

Bude nás zajímat pravděpodobnost, že během intervalu $\langle t_1; t_2 \rangle$ dopadlo do kaluže právě k kapek. Tuto veličinu označíme jako $P_\lambda(t_2 - t_1; k)$. Pravděpodobnost závisí jen na rozdílu časů $t = t_2 - t_1$.

$$P_\lambda(t_2 - t_1; k) = P_\lambda(t; k)$$

Nejprve odvodíme tvar pravděpodobnosti $P_\lambda(t; 0)$, tj. pravděpodobnost, že za čas t nedopadla žádná kapka.

Vezmeme-li dva po sobě následující časové intervaly o délkách t_A a t_B , pak z definice platí

$$P_\lambda(t_A + t_B; 0) = P_\lambda(t_A; 0)P_\lambda(t_B; 0),$$

čili pravděpodobnost, že nedopadne žádná kapka za čas $t_A + t_B$ je rovna pravděpodobnosti, že nedopadne žádná kapka za čas t_A a navíc nedopadne žádná kapka za čas t_B .

Spojité funkce, které splňují předchozí rovnost, mají tvar

$$P_\lambda(t; 0) = e^{-\eta t}. \quad (6.4)$$

Pravděpodobnost by měla s rostoucím časem klesat, proto očekáváme $\eta > 0$.

Vyjádříme pravděpodobnost $Q_\lambda^{t'}(t)$, že během intervalu $\langle 0; t \rangle$ dopadla poslední kapka mezi časy $\langle t' - \Delta t, t' \rangle$.

Daná kapka byla poslední, pokud po ní už žádná kapka nedopadla, byla tedy poslední s pravděpodobností $P_\lambda(t - t'; 0)$. Pravděpodobnost dopadu alespoň jedné kapky v intervalu $\langle t' - \Delta t, t' \rangle$ označíme jako $\alpha \Delta t$. Hledaná pravděpodobnost je

$$Q_\lambda^{t'}(t) = \alpha \Delta t e^{-\eta(t-t')}$$

a přirozeně nezávisí na počtu kapek k , protože jednotlivé kapky dopadají nezávisle.

Konstanta α má rozměr s^{-1} a obecně závisí na velikosti Δt . Nás bude zajímat hodnota α pro malé Δt . Pravděpodobnost dopadu alespoň jedné kapky je doplňková k pravděpodobnosti, že nedopadne žádná kapka:

$$\alpha \Delta t + P_\lambda(\Delta t; 0) = 1.$$

Dosažením z (6.4), derivací výše uvedeného vztahu podle Δt a provedením limity $\Delta t \rightarrow 0$ získáme vztah mezi α a η .

$$\begin{aligned} \alpha \Delta t + e^{-\eta \Delta t} &= 1 \\ \alpha - \eta e^{-\eta \Delta t} &= 0 \\ \alpha - \eta &= 0, \end{aligned}$$

takže

$$Q_\lambda^{t'}(t) \doteq \eta \Delta t e^{-\eta(t-t')}. \quad (6.5)$$

Poslední vztah platí jen přibližně a je tím přesnější, čím je Δt blíž k nule.

Zbývá zkonstruovat hledanou pravděpodobnost $P_\lambda(t; k)$ pomocí $Q_\lambda^{t'}(t)$. Rozdělíme možné způsoby dopadu kapek podle času dopadu té poslední a pro každý způsob spočítáme pravděpodobnost. Výsledné pravděpodobnosti nakonec sečteme.

Pravděpodobnost, že do kaluže dopadlo k kapek za čas t a poslední kapka dopadla v časovém intervalu $\langle t' - \Delta t, t' \rangle$ je

$$P_\lambda(k - 1; t) Q_\lambda^{t'}(t) \quad \text{pro } k \geq 1.$$

Celková pravděpodobnost

$$P_\lambda(k; t) \doteq \sum_{n=1}^{t/\Delta t} P_\lambda(k-1; t') Q_\lambda^{t'}(t) \quad \text{kde } t' = n \Delta t.$$

Do poslední sumy dosadíme a provedeme přechod $\sum \rightarrow \int$. Při přechodu nahradíme podle (6.5) výraz $\alpha \Delta t \rightarrow \eta dt'$. Získáme tak přesný vztah.

$$P_\lambda(k; t) \doteq \sum_{n=1}^{t/\Delta t} P_\lambda(k-1; t') \alpha \Delta t e^{-\eta(t-t')}$$

$$P_\lambda(k; t) = \int_0^t P_\lambda(k-1; t') e^{-\eta(t-t')} \eta dt'$$

Získali jsme rekurzivní integrální rovnici

$$P_\lambda(k; t) = \eta e^{-\eta t} \int_0^t P_\lambda(k-1; t') e^{\eta t'} dt', \quad (6.6)$$

ze které můžeme postupnou integrací (6.4) spočítat všechny pravděpodobnosti. Dojdeme tak k obecnému výrazu

$$P_\lambda(k; t) = \frac{(\eta t)^k}{k!} e^{-\eta t}, \quad (6.7)$$

který lze dokázat matematickou indukcí:

$$P_\lambda(k; t) = \eta e^{-\eta t} \int_0^t \frac{(\eta t')^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\eta t'} e^{\eta t'} dt' =$$

$$\frac{\eta^k e^{-\eta t}}{(k-1)!} \int_0^t (t')^{k-1} dt' = \frac{\eta^k e^{-\eta t}}{(k-1)!} \left[\frac{(t')^k}{k} \right]_0^t = \frac{(\eta t)^k}{k!} e^{-\eta t}.$$

Očekávaný počet dopadů kapek do kaluže je dán formulí

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^{\infty} k P_\lambda(k; t).$$

Po dosazení z (6.7) dostaneme známou sumu $\sum_0^{\infty} x^k/k! = e^x$.

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\eta t)^k}{k!} e^{-\eta t} = \eta t e^{-\eta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\eta t)^{k-1}}{(k-1)!} = \eta t e^{-\eta t} e^{\eta t} = \eta t \quad (6.8)$$

Srovnáním $\bar{n} = \eta t$ s (6.3) vidíme, že $\eta = \lambda$.

Odvodili jsme Poissonovo rozdělení

$$\text{Po}_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (6.9)$$

6.3 Binomické rozdělení

V tomto dodatku odvodíme pravděpodobnost, že v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ bylo naměřeno právě k rozpadů. Opět budeme předpokládat, že máme systém složený z K atomů a že rozpady atomů jsou nezávislé.

Pravděpodobnost přežití libovolného atomu od počátku měření ($t = 0$) až do času t je dána veličinou $R(t)$.²

Spočítáme pravděpodobnost, že se v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ rozpadlo právě k z původních K atomů.³ Z původní K -tice atomů můžeme $\binom{K}{k}$ způsoby vybrat ty atomy, které se rozpadnou. Pravděpodobnost, že náhodnými rozpady bude realizován konkrétní výběr k atomů, je $R(t)^{K-k}(1 - R(t))^k$. Celková pravděpodobnost rozpadu právě k atomů v čase t je tedy dána vztahem

$$B_k(t) = \binom{K}{k} R(t)^{K-k} (1 - R(t))^k.$$

Zavedeme veličinu $P(t) \equiv 1 - R(t)$, která udává pravděpodobnost, že dojde k rozpadu atomu od počátku měření do času t . Pro zkrácení zápisu budeme parametr t vynechávat.

$$B_k(t) = \binom{K}{k} P^k (1 - P)^{K-k} \quad (6.10)$$

Na základě pravděpodobností B_k můžeme spočítat očekávaný počet rozpadů $\bar{N}(t)$. Je dán vztahem

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^K k B_k = PK \equiv \lambda.$$

K sečtení sumy lze použít vztah

$$\begin{aligned} PK &= PK(P + R)^{K-1} = P \frac{\partial}{\partial P} (P + R)^K = \\ &= P \frac{\partial}{\partial P} \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} P^k R^{K-k} = \\ &= P \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} k P^{k-1} R^{K-k} = \sum_{k=0}^K \binom{K}{k} k P^k R^{K-k} \end{aligned}$$

6.4 Souvislost Poissonova a binomického rozdělení

Poissonovo rozdělení se získá ze vzorce (6.10)

$$B_k(t) = \binom{K}{k} P^k (1 - P)^{K-k},$$

²Toto je ve skutečnosti důležitý předpoklad. Není-li totiž průběh funkce $R(t)$ exponenciální, pak lze podle jejího průběhu určit stáří atomu. Jsou-li všechny atomy popsány pomocí stejné funkce $R(t)$, pak jsou stejně staré.

³Parametr k není funkce času.

pokud provedeme limitu $K \rightarrow \infty$. Limitu nelze provést zcela přímočaře, protože ve vzorku s $K \rightarrow \infty$ atomy dojde pro $P(t) > 0$ k nekonečnému množství rozpadů. Limita vyjde rovna nule.

Při počítání limity je nutno použít trik. Budeme sice počítat limitu $K \rightarrow \infty$, ale současně budeme zmenšovat čas t tak, aby platilo $P(t)K = \mu = \text{const}$.

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} B_k(t) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \binom{K}{k} P^k (1-P)^{K-k} = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K(K-1)(K-2)\dots(K-k+1)}{k!} P^k \frac{(1-P)^K}{(1-P)^k} = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K^k}{k!} P^k \frac{(1-P)^K}{R^k} = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{(KP)^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{K}\right)^K \frac{1}{R^k} = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \end{aligned}$$

Při úpravách jsme využili fakt, že pokud $\mu = \text{const}$. a $K \rightarrow \infty$, pak nutně musí být $P = \mu/K \rightarrow 0$, a tedy $1 - P = R \rightarrow 1$.

Odvozená pravděpodobnost

$$\text{Po}_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad (6.11)$$

odpovídá známému Poissonovu rozdělení. Je to přibližná pravděpodobnost, že během časového intervalu bude naměřeno k rozpadů. Ve vztahu (6.9) nevystupuje čas, ale je skrytý v parametru $\mu = P(t)K$. Platí

$$t = P^{-1}(\mu/K).$$

6.5 Výpočty k rozpadu poruchovým počtem

Definujeme operátory \hat{V} a \hat{H}_0 formulemi

$$\begin{aligned} \hat{V} &\equiv \hat{P}\hat{H} + \hat{H}\hat{P} - 2\hat{P}\hat{H}\hat{P} \\ \hat{H}_0 &\equiv \hat{H} - \hat{V}, \end{aligned}$$

kde projektor \hat{P} je definován jako

$$\hat{P} \equiv |\phi\rangle\langle\phi|.$$

Operátory \hat{H}_0 a \hat{V} jsou hermitovské, neboť \hat{P} je projektor a v definicích byly použity jen hermitovské operátory.

Kdyby byl vektor $|\phi\rangle$ vlastním vektorem \hat{H} , byl by operátor \hat{V} roven nule. Je-li $|\phi\rangle$ blízký k nějakému vlastnímu vektoru, je operátor \hat{V} malý ve srovnání s \hat{H} a \hat{H}_0 .

Vezměme libovolnou bázi $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$, která splňuje následující podmínky:

$$\begin{aligned} \langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \delta_{ij}, \\ |\phi\rangle &= |\psi_0\rangle, \\ \hat{H}_0|\psi_i\rangle &= E_i|\psi_i\rangle. \end{aligned}$$

Z předchozího vidíme

$$|\hat{P}|\psi_i\rangle = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi_i\rangle = |\psi_0\rangle\delta_{0i} = \delta_{0i}|\phi\rangle \quad (6.12)$$

a podobně

$$\langle\psi_i|\hat{P}| = \delta_{0i}\langle\phi| \quad (6.13)$$

Z podoby maticových elementů $\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle$ a $\langle\psi_i|\hat{V}|\psi_j\rangle$ je vidět smysl definice operátoru \hat{H}_0 . Při výpočtu využijeme vztahy (6.12) a (6.13).

$$\begin{aligned} \langle\psi_i|\hat{V}|\psi_j\rangle &= \langle\psi_i|\hat{P}\hat{H} + \hat{H}\hat{P} - 2\hat{P}\hat{H}\hat{P}|\psi_j\rangle \\ &= \langle\psi_i|\hat{P}\hat{H}|\psi_j\rangle + \langle\psi_i|\hat{H}\hat{P}|\psi_j\rangle - 2\langle\psi_i|\hat{P}\hat{H}\hat{P}|\psi_j\rangle = \\ &= \delta_{0i}\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle + \delta_{0j}\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle - 2\delta_{0i}\delta_{0j}\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle = \\ &= (\delta_{0i} + \delta_{0j} - 2\delta_{0i}\delta_{0j})\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle = \\ &= (\delta_{0i} - \delta_{0j})^2\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle \end{aligned}$$

Maticové elementy operátoru $\langle\psi_i|\hat{V}|\psi_j\rangle$ mají podobu

$$\langle\psi_i|\hat{V}|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & V_1 & V_2 & \dots \\ \bar{V}_1 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{V}_2 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde jsme pro $m \geq 1$ označili $\langle\psi_0|\hat{V}|\psi_m\rangle = \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_m\rangle$ jako V_m .

Matice $\langle\psi_i|\hat{H}_0|\psi_j\rangle$ má podobu

$$\langle\psi_i|\hat{H}_0|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

takže matice hamiltoniánu $\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\hat{H}_0 + \hat{V}|\psi_j\rangle$ je

$$\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} E_0 & V_1 & V_2 & V_3 & \dots \\ \bar{V}_1 & E_1 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{V}_2 & 0 & E_2 & 0 & \dots \\ \bar{V}_3 & 0 & 0 & E_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Prvky V_m mají pozoruhodný význam. Vezměme součet

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |V_m|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m \bar{V}_m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\hat{H}|\psi_0\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle\phi|\hat{H}|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\hat{H}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{H} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \right) \hat{H}|\phi\rangle \end{aligned}$$

Sumu v závorce upravíme pomocí relace úplnosti

$$\mathbf{1} = \sum_{m=0}^{\infty} |\psi_m\rangle\langle\psi_m| = |\phi\rangle\langle\phi| + \sum_{m=1}^{\infty} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$$

a máme

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |V_m|^2 &= \langle\phi|\hat{H}(\mathbf{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)\hat{H}|\phi\rangle \\ &= \langle\phi|\hat{H}^2|\phi\rangle - \langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle^2 \equiv (\Delta\hat{H})^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Přikročíme k řešení Schrödingerovy rovnice. Pro zjednodušení zápisu budeme předpokládat $\hbar = 1$. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}|\psi_m\rangle \quad (6.15)$$

který dosadíme do

$$i|\dot{\psi}(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi(t)\rangle,$$

což je jen jiný zápis (2.1). A dále upravujeme ...

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}|\psi_m\rangle &= (\hat{H}_0 + \hat{V}) \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}|\psi_m\rangle \\ i \sum_{m=0}^{\infty} [\dot{a}_m(t)e^{-iE_m t} + a_m(t)(-iE_m)e^{-iE_m t}] |\psi_m\rangle &= \\ \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}\hat{H}_0|\psi_m\rangle + \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}\hat{V}|\psi_m\rangle &= \\ i \sum_{m=0}^{\infty} \dot{a}_m(t)e^{-iE_m t}|\psi_m\rangle + \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)E_m e^{-iE_m t}|\psi_m\rangle &= \\ \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}E_m|\psi_m\rangle + \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}\hat{V}|\psi_m\rangle &= \\ i \sum_{m=0}^{\infty} \dot{a}_m(t)e^{-iE_m t}|\psi_m\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}\hat{V}|\psi_m\rangle \end{aligned} \quad (6.16)$$

Poslední rovnici vynásobíme zleva výrazem $\langle\psi_0|$

$$i \sum_{m=0}^{\infty} \dot{a}_m(t)e^{-iE_m t}\langle\psi_0|\psi_m\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}\langle\psi_0|\hat{V}|\psi_m\rangle,$$

upravíme pomocí vztahů $\langle\psi_0|\psi_m\rangle = \delta_{0m}$ a $\langle\psi_0|\hat{V}|\psi_m\rangle = V_m$:

$$i\dot{a}_0(t)e^{-iE_0 t} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)e^{-iE_m t}V_m,$$

takže

$$\dot{a}_0(t) = -i \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) e^{-i(E_m - E_0)t} V_m = -i \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) e^{-i(E_m - E_0)t} V_m. \quad (6.17)$$

Poslední rovnost plyne ze skutečnosti $V_0 = 0$.

Hodnoty $a_m(t)$ na pravé straně zjistíme násobením rovnice (6.16) výrazem $\langle \psi_k |$ pro $k \geq 1$. Dostaneme tak

$$i \sum_{m=0}^{\infty} \dot{a}_m(t) e^{-iE_m t} \langle \psi_k | \psi_m \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) e^{-iE_m t} \langle \psi_k | \hat{V} | \psi_m \rangle$$

a s využitím $\langle \psi_k | \hat{V} | \psi_m \rangle = \delta_{0m} \langle \psi_k | \hat{V} | \psi_0 \rangle = \delta_{0m} \bar{V}_k$ dostaneme

$$i \dot{a}_k(t) e^{-iE_k t} = a_0(t) e^{-iE_0 t} \bar{V}_k \quad \text{pro } k \geq 1.$$

Abysme mohli poslední rovnici dosadit do (6.17), musíme ji zintegrovat. Počáteční podmínky určují integrační konstantu. Na začátku je atom ve stavu $|\phi\rangle = |\psi_0\rangle$, takže podle (6.15) musí být

$$a_m(0) = \delta_{0m}.$$

Koeficient $a_k(t)$ pro $k \geq 1$ můžeme tedy vyjádřit jako

$$a_k(t) = -i \bar{V}_k \int_0^t a_0(t') e^{i(E_k - E_0)t'} dt'.$$

Konečně dosadíme do (6.17):

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(t) &= -i \sum_{m=1}^{\infty} -i \bar{V}_m \int_0^t a_0(t') e^{i(E_m - E_0)t'} dt' e^{-i(E_m - E_0)t} V_m \\ \dot{a}_0(t) &= - \sum_{m=1}^{\infty} |V_m|^2 \int_0^t a_0(t') e^{-i(E_m - E_0)(t-t')} dt' \\ \dot{a}_0(t) &= - \int_0^t a_0(t') \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i(E_m - E_0)(t-t')} |V_m|^2 dt'. \end{aligned}$$

Nahradíme sumu v poslední rovnici integrálem. K tomu budeme potřebovat funkci

$$F(E) \equiv \sum_{E_m < E} |V_m|^2,$$

pro kterou podle (6.14) platí

$$F(\infty) = (\Delta \hat{H})^2. \quad (6.18)$$

Provedeme přechod

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-i(E_m - E_0)(t-t')} |V_m|^2 \rightarrow \int_E e^{-i(E - E_0)(t-t')} dF(E). \quad (6.19)$$

Diferenciál $dF(E)$ lze chápat jako zkratku za $\frac{dF(E)}{dE}dE$, kde derivaci nespojitě funkce $F(E)$ vyjádříme pomocí δ -distribucí:

$$\frac{dF(E)}{dE} = \sum_{m=1}^{\infty} |V_m|^2 \delta(E - E_m).$$

Pro pohodlnější zápis definujeme funkci

$$g(t) \equiv \int_E e^{-i(E-E_0)t} dF(E), \quad (6.20)$$

a derivaci koeficientu $a_0(t)$ pak můžeme zapsat jako

$$\dot{a}_0(t) = - \int_0^t g(t-t') a_0(t') dt'.$$

Rovnici budeme řešit pomocí Laplaceovy transformace. Dostáváme

$$sA(s) - a_0(0) = -G(s)A(s),$$

kde $a_0(0) = 1$, takže

$$\begin{aligned} sA(s) + G(s)A(s) &= 1 \\ A(s) &= \frac{1}{s + G(s)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Přitom jsme zavedli

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} a_0(t) dt \\ G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Z Laplaceova obrazu $A(s)$ lze zpětnou transformací spočítat průběh $a_0(t)$. K výpočtu $A(s)$ však potřebujeme znát $G(s)$. I když se vzhledem k obecnosti hamiltoniánu \hat{H} nedá čekat, že najdeme konkrétní tvar funkce $G(s)$, můžeme ji aspoň obecně vyjádřit pomocí známých veličin.

Dosadíme do (6.22) rovnici (6.20)

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} g(t) = \int_0^{\infty} dt \int_E e^{-st} e^{-i(E-E_0)t} dF(E) \\ &= \int_0^{\infty} dt \int_E e^{-st} e^{-i(E-E_0)t} \frac{dF(E)}{dE} dE \\ &= \int_E \int_0^{\infty} dt e^{[-s-i(E-E_0)]t} W(E) dE, \end{aligned}$$

kde jsme definovali *hustotu*⁴ $W(E)$ jako

$$W(E) \equiv \frac{dF(E)}{dE}.$$

⁴Veličina $W(E)$ velmi zhruba určuje pravděpodobnost rozpadu do do stavu s energií E .

Vnitřní integrál je velmi jednoduchý:

$$\int_0^{\infty} dt e^{[-s-i(E-E_0)]t} = \left[\frac{e^{[-s-i(E-E_0)]t}}{-s-i(E-E_0)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+i(E-E_0)}$$

Máme tedy

$$G(s) = \int_E \frac{W(E)}{s+i(E-E_0)} dE. \quad (6.23)$$

Hustotu $W(E)$ můžeme vyjádřit pomocí inverzní Fourierovy transformace z definice (6.20),

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_E e^{-i(E-E_0)t} W(E) dE \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(E'-E_0)t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_E e^{-i(E-E_0)t} W(E) dE e^{i(E'-E_0)t} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(E'-E_0)t} dt &= \int_E \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(E-E')t} dt W(E) dE \end{aligned}$$

S využitím známého vztahu pro δ -distribuci

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(E-E')\xi} d\xi = 2\pi\delta(E-E_0)$$

můžeme pravou stranu zjednodušit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(E'-E_0)t} dt = 2\pi \int_E \delta(E-E') W(E) dE = 2\pi W(E'),$$

čili

$$W(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(E-E_0)t} dt.$$

6.5.1 Alternativní definice $g(t)$

Tento dodatek zmiňuje jednu pozoruhodnou definici funkce $g(t)$ z rovnice (6.20). Alternativní definice není sama o sobě nikde potřeba, ale ukazuje na speciální postavení funkce $g(t)$.

Funkci $g(t)$ je možno definovat alternativně následujícím způsobem:

$$g(t-t') \equiv \langle \phi | \left(|\hat{V}(t)\hat{V}(t')| \phi \right) \rangle,$$

kde

$$\hat{V}(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}.$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} g(t-t') &= \langle \phi | \left(|e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t'} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t'} | \phi \right) \rangle \\ &= \left(\langle \phi | e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{V} + | \right) \left(e^{-i\hat{H}_0(t-t')} \hat{V} e^{-iE_0 t'} | \phi \right) \\ &= e^{i\hat{E}_0 t} e^{-i\hat{E}_0 t'} \left(\langle \phi | \hat{V} + | \right) \left(|e^{-i\hat{H}_0(t-t')} \hat{V} | \phi \right) \end{aligned}$$

Při úpravách jsme využili faktu, že $|\phi\rangle$ je vlastní vektor operátoru \hat{H}_0 s vlastní hodnotou E_0 . Operátor \hat{V} je hermitovský, takže $\hat{V}^+ = \hat{V}$. Dvojitým vložením relace úplnosti $\sum_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| = \mathbf{1}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&= e^{i\hat{E}_0 t} e^{-i\hat{E}_0 t'} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \langle\phi|\hat{V}|\psi_m\rangle\langle\psi_m| \right) \left(\sum_{m'=0}^{\infty} |e^{-i\hat{H}_0(t-t')}|\psi_{m'}\rangle\langle\psi_{m'}|\hat{V}|\phi\rangle \right) \\
&= e^{-i\hat{E}_0(t'-t)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{V}_m \langle\psi_m| \left(\sum_{m'=0}^{\infty} e^{-iE_{m'}(t-t')} |\psi_{m'}\rangle V_{m'} \right) \\
&= e^{-i\hat{E}_0(t'-t)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \bar{V}_m V_{m'} e^{-iE_{m'}(t-t')} \langle\psi_m|\psi_{m'}\rangle \\
&= \sum_{m,m'=0}^{\infty} \bar{V}_m V_{m'} e^{-i(E_{m'}-E_0)(t-t')} \delta_{m,m'} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{V}_m V_m e^{-i(E_m-E_0)(t-t')} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i(E_m-E_0)(t-t')} |V_m|^2.
\end{aligned}$$

Srovnáním s (6.19) a s využitím faktu, že $V_0 = 0$ vidíme, že se obě definice shodují.

6.5.2 Příklad neexponenciálního rozpadu

Na konci dodatku 2.2 jsme odvodili, že pro exponenciální rozpad atomu je potřeba konstantní průběh $W(E)$. Pro zajímavost spočítejme ještě opačný extrém – předpokládejme, že nenulové hodnoty $W(E)$ jsou soustředěny jen v malém intervalu okolo hodnoty E_c .⁵ Budeme uvažovat

$$W(E) = K^2 \delta(E_c - E),$$

kde K je konstanta s rozměrem energie, a podle (6.18) platí

$$(\Delta\hat{H})^2 = \lim_{E \rightarrow \infty} F(E) = \lim_{E \rightarrow \infty} \int_0^E W(E) = K^2.$$

Podle (6.23) je

$$G(s) = \int_E \frac{K^2 \delta(E_c - E)}{s + i(E - E_0)} dE = \frac{K^2}{s + i(E_c - E_0)}.$$

Dosadíme do (6.21) a máme

$$A(s) = \frac{1}{s + \frac{KE_c}{s+i(E_c-E_0)}} = \frac{s + i(E_c - E_0)}{s^2 + is(E_c - E_0) + K^2}.$$

Teď už stačí jen provést zpětnou Laplaceovu transformaci funkce $A(s)$. Kořeny polynomu ve jmenovateli jsou

$$s_{1,2} = \frac{i}{2} \left(E_0 - E_c \pm \sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} \right),$$

⁵ Řešení lze snadno uhadnout už z tvaru maticových elementů $\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle$.

takže

$$A(s) = \frac{s + i(E_c - E_0)}{\left[s - \frac{i}{2}(E_0 - E_c + \sqrt{}) \right] \left[s - \frac{i}{2}(E_0 - E_c - \sqrt{}) \right]}.$$

Určíme rezidua v bodech s_1 a s_2 :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s_1}(G(s)) &= \frac{s_1 + i(E_c - E_0)}{s_1 - \frac{i}{2}(E_0 - E_c - \sqrt{})} \\ &= \frac{\frac{i}{2}(E_0 - E_c + \sqrt{}) + i(E_c - E_0)}{\frac{i}{2}(E_0 - E_c + \sqrt{}) - \frac{i}{2}(E_0 - E_c - \sqrt{})} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}(E_0 - E_c) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}}{\sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_0 - E_c}{\sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}} \right). \end{aligned}$$

Obdobně

$$\text{Res}_{s_2}(G(s)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_0 - E_c}{\sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}} \right).$$

Koeficient $a_0(t)$ spočítáme dosazením do

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \sum_{i=1,2} e^{s_i t} \text{Res}_{s_i}(G(s)) \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{2}(E_0 - E_c + \sqrt{})t \right\} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_0 - E_c}{\sqrt{}} \right) + \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{2}(E_0 - E_c - \sqrt{})t \right\} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_0 - E_c}{\sqrt{}} \right) \end{aligned}$$

a další úpravou dojdeme k

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{iE_0}{2} \right\} \left[\exp \left\{ \frac{i}{2}\sqrt{}t \right\} + \exp \left\{ -\frac{i}{2}\sqrt{}t \right\} \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{iE_0}{2} \right\} \frac{E_0 - E_c}{\sqrt{}} \left[\exp \left\{ \frac{i}{2}\sqrt{}t \right\} + \exp \left\{ -\frac{i}{2}\sqrt{}t \right\} \right]. \end{aligned}$$

Provedeme substituci $u = \frac{1}{2}\sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}t$ a použijeme vzorce

$$e^{iu} + e^{-iu} = 2 \cos u \quad e^{iu} - e^{-iu} = 2i \sin u.$$

Dostaneme tak hledaný koeficient:

$$a_0(t) = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{iE_0}{2} \right\} \left[2 \cos u + \frac{E_0 - E_c}{\sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}} 2i \sin u \right].$$

Vyjádříme pravděpodobnost přežití atomu:

$$|a_0(t)|^2 = \cos^2 u + \frac{(E_0 - E_c)^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} \sin^2 u.$$

Upravíme zlomek

$$\frac{(E_0 - E_c)^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} = 1 - \frac{4K^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2}$$

a máme

$$\begin{aligned} |a_0(t)|^2 &= \cos^2 u + \sin^2 u - \frac{4K^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} \sin^2 u \\ &= 1 - \frac{4K^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} \sin^2 u, \end{aligned}$$

takže pravděpodobnost rozpadu $p = 1 - |a_0(t)|^2$ je

$$p = \frac{4K^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} t.$$

Pravděpodobnost rozpadu má průběh odpovídající $\sim \sin^2 \omega t$. Během časového vývoje je stav systému určen lineární kombinací vlastních vektorů $|\psi_0\rangle$ a $|\psi_c\rangle$ operátoru \hat{H}_0 s vlastními hodnotami E_0 a E_c .

Pro malé t můžeme použít přibližný vztah $\sin t \doteq t$ a pravděpodobnost se zjednoduší na

$$p \doteq \frac{4K^2}{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{(E_0 - E_c)^2 + 4K^2} t \right)^2 = K^2 t^2.$$

6.5.3 Rozvoj pro krátké časy

V této podkapitole ukážeme ekvivalenci rovnice (2.3) a (2.2) pro $t \ll 1$. Vydeme z rovnice (2.3), kam dosadíme $g(t - t') = g(0)$

$$\dot{a}_0(t) = - \int_0^t g(0) a_0(t') dt'.$$

Z definice (2.4) spočítáme hodnotu $g(0)$

$$g(0) \equiv \int_E e^0 dF(E) = \int_E dF(E) = \lim_{E \rightarrow \infty} F(E) = (\Delta \hat{H})^2.$$

Při poslední úpravě byl využitý vztah (6.18).

Máme tedy

$$\dot{a}_0(t) \doteq - \int_0^t (\Delta \hat{H})^2 a_0(t') dt',$$

odkud integrací a požadavkem $a_0(0) = 1$ dostáváme

$$a_0(t) \doteq 1 - \frac{1}{2} (\Delta \hat{H})^2 t^2,$$

takže

$$|a_0(t)| \doteq 1 - (\Delta \hat{H})^2 t^2 + \frac{1}{4} (\Delta \hat{H})^4 t^4.$$

Poslední vztah do druhého řádu souhlasí s (2.2).

6.6 Odvození pravděpodobnosti anti-Zenónova jevu

Převědeme integrál z rovnice (3.4) do vhodnějšího tvaru:

$$\int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt' = \int_0^\tau dt' (\tau - t') \int_{-\infty}^{+\infty} dp \delta(p - t')g(p)$$

a nahradíme δ -funkci podle vztahu

$$\delta(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\omega} d\omega.$$

Máme

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt' &= \int_0^\tau dt' (\tau - t') \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i(p-t')\omega} g(p) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\tau dt' e^{-it'\omega} (\tau - t') \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip\omega} g(p). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Definujeme funkci

$$G(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip\omega} g(p).$$

Podle (6.19) a (6.20) je

$$g(p) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i(\omega_m - \omega_0)p} |V_m|^2,$$

kde $\omega_m = \hbar^{-1}E_m$, přičemž klademe $\hbar = 1$. Dosazením máme

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i(\omega_m - \omega_0 - \omega)p} |V_m|^2 dp \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |V_m|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_m - \omega_0 - \omega)p} dp = \sum_{m=1}^{\infty} 2\pi |V_m|^2 \delta(\omega_m - \omega_0 - \omega). \end{aligned}$$

Dosazením $G(\omega)$ do (6.24) máme

$$\int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\tau dt' e^{-it'\omega} (\tau - t')G(\omega).$$

Integrál přes dt' lze spočítat pomocí per partes a platí

$$\int_0^\tau e^{-it'\omega} (\tau - t')dt' = \frac{\tau}{i\omega} - \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega\tau} - 1),$$

takže

$$\int_0^\tau (\tau - t')g(t')dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\tau}{i\omega} - \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega\tau} - 1) \right] G(\omega) d\omega.$$

Nyní již můžeme podle (6.24) vyjádřit R :

$$\tau R = 2\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\tau}{i\omega} - \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega\tau} - 1) \right] G(\omega) d\omega.$$

Funkce $G(\omega)$ je reálná, takže stačí vzít reálnou část z hranaté závorky.

$$\begin{aligned} \tau R &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left[-i \frac{\tau}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega\tau} - 1) \right] G(\omega) d\omega \\ R &= \frac{1}{\tau\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\omega^2} (\operatorname{Re}\{e^{-i\omega\tau}\} - 1) \right] G(\omega) d\omega \\ R &= -\frac{1}{\tau\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega\tau - 1}{\omega^2} G(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Další úpravu provedeme s využitím vzorce $2 \sin^2(x/2) = 1 - \cos x$.

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{\tau\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{\omega^2} G(\omega) d\omega = \frac{2\tau^2}{4\tau\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega^2\tau^2}{4}} G(\omega) d\omega \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{2} G(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] Z. Prášková, K. Zvára, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, SPN, Praha (1986).
- [2] I. A. Ušakov a kol., *Příručka spolehlivosti v radioelektronice a automatizační technice*, SNTL, Praha (1989).
- [3] A. Peres, Am. J. Phys. **48**, 931 (1980).
- [4] A. Peres, Ann. Phys. **129**, 33 (1980).
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1994).
- [6] J. Dolejší, P. Exner, Czech J. Phys. **B 27**, 855 (1977).
- [7] B. Mishra, E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).
- [8] M. Dušek, *Koncepční otázky kvantové teorie*, Olomouc, 2002.
- [9] A. G. Kofman, G. Kurizki, Nature (London) **405**, 546 (2000).
- [10] A. G. Kofman, G. Kurizki, arXiv:quant-ph/0102002 (2001).
- [11] P. Facchi, S. Pascazio, Phys. Lett. A **241**, 139 (1998).
- [12] R. J. Cook, Phys. Scr. A **T21**, 49 (1988).
- [13] W. M. Itano, D. J. Heizen, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).
- [14] M. Fischer, B. Gutiérrez-Medina a M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **87**, 040402 (2001).
- [15] Z. Hradil, H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio, H. Rauch, Phys. Lett. A **239**, 333 (1998).
- [16] A. G. Kofman, G. Kurizki, Phys. Rev A **54**, R3750 (1996).
- [17] A. G. Kofman, G. Kurizki, T. Opatrný, Phys. Rev A **63**, 042108 (2001).
- [18] Y. Japha, G. Kurizki, T. Opatrný, Phys. Rev. Lett. **77**, 2909 (1996).
- [19] P. Silvestrini, V. G. Palmieri, B. Ruggiero, M. Russo, Phys. Rev. Lett. **79**, 3046 (1997).
- [20] M. Lewenstein, K. Rzażewski, Phys. Rev. A **61**, 022105 (2000).