Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Moltašová

Sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu pro studenty učitelství fyziky

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dana Mandíková, CSc.

Studijní program: Fyzika-matematika pro základní vzdělávání

2006

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucí bakalářské práce RNDr. Daně Mandíkové, CSc. za ochotu a vedení při vypracování bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím *zveřejňováním.*

V Praze dne 20.května 2006 Jana Moltašová

Obsah

1. Úvod **1**

1.1 Výběr problematiky 1
1.2 Cíl práce 3
1.3 Struktura práce 4

2. Sbírka úloh **5**

2.1 Struktura sbírky 5
2.2 Použité sbírky 7
2.3 Ukázka úloh ze sbírky 10

3. Závěr **36**

Literatura **37**

Příloha 1: Zadání úloh

1.1 Pohyb daný graficky
1.2 Rovnoměrný přímočarý pohyb
1.3 Zrychlený přímočarý pohyb
1.4 Pohyb po kružnici
1.5 Skládání dvou pohybů
1.6 Volný pád, vrhy

Příloha 2: Systém nápověd

2.1 Pohyb daný graficky
2.2 Rovnoměrný přímočarý pohyb
2.3 Zrychlený přímočarý pohyb
2.4 Pohyb po kružnici
2.5 Skládání dvou pohybů
2.6 Volný pád, vrhy

Příloha 3: Řešení úloh

3.1 Pohyb daný graficky
3.2 Rovnoměrný přímočarý pohyb
3.3 Zrychlený přímočarý pohyb
3.4 Pohyb po kružnici
3.5 Skládání dvou pohybů
3.6 Volný pád, vrhy

Abstrakt

Název práce: Sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu pro studenty učitelství fyziky
Autor: Jana Moltašová
Katedra (ústav): Katedra didaktiky fyziky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dana Mandíková, CSc.
e-mail vedoucího: Dana.Mandikova@mff.cuni.cz
Abstrakt: V rámci bakalářské práce byla vytvořena sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu. Sbírka má tři části, z nichž každá má šest podkapitol podle témat. Celkem sbírka obsahuje osmatřicet úloh. Úlohy ve sbírce mají různou úroveň (od základní až po vysokou školu) a různou obtížnost. Většina úloh je vybrána z již existujících sbírek a učebnic. Všechny úlohy mají zadání, podrobná řešení a výsledek. Některé úlohy mají také strukturovanou nápovědu. V úvodní části bakalářské práce je vymezena problematika a cíle práce a uvedena její struktura. V další části je popsána struktura sbírky a zdroje, z nichž jsem čerpala. Dále jsou uvedeny ukázky úloh ze sbírky.
V závěru jsou shrnuty výsledky a další perspektivy práce. Přílohy jsou zpracovány v elektronické podobě na CD a obsahují zadání a řešení všech úloh a strukturované nápovědy k části úloh.
Klíčová slova: kinematika, sbírka úloh, strukturovaná nápověda

Title: Book of problems of kinematics of mass point for students of Physics Education
Author: Jana Moltašová
Department: Department of Physics Education
Supervisor: RNDr. Dana Mandíková, CSc.
Supervisor's e-mail address: Dana.Mandikova@mff.cuni.cz
Abstract: The student thesis describes a book of problems developed to help learning of kinematics of mass point. The book of problems comprises three chapters and eighteen parts. There are total thirty eight of problems in the book. Problems cover the level from lower secondary school to introductory university lectures on classical mechanics. The book of problems contains not only answers of the problems but also detailed solutions of them. The main inovation is a structured help: each problem offers several hints enabling student to solve the problem by himself even if he or she does not know how to start, how to overcome some difficultes etc. without the neccesity to give up and read the complete solution. The thesis describes the structure of problems and fundamental aspects of creation of the book in the first part of thesis. Then there are some examples of the problems with their solutions and structured help in the next part. The last part of thesis contains the effects of this thesis with future development. CD comprises whole book of problems in electronic form.
Keywords: kinematics, book of problems, structured help

1. Úvod

1.1 Výběr problematiky

V rámci bakalářské práce jsem sestavila sbírku fyzikálních úloh určenou především studentům učitelství fyziky, se kterou navazuji na sbírku úloh Hany Koudelkové [2].

Zaměřila jsem se na kinematiku hmotného bodu. Tato část klasické mechaniky se obvykle považuje za vůbec nejjednodušší, přesto jsou v ní témata, která činí problémy jak žákům základních a středních škol, tak i často studentům prvních ročníků vysokých škol se zaměřením na studium fyziky.

Mezi obtížné řadí žáci nejčastěji úlohy spojené s tvorbou a čtením různých grafů, jako je například sestrojení grafů závislostí dráhy, rychlosti nebo souřadnice na čase, určení okamžité rychlosti v daném časovém okamžiku, průměrné rychlosti v daném časovém intervalu nebo sestrojení grafu závislosti dráhy na čase, známe-li průběh rychlosti nebo zrychlení v závislosti na čase a naopak apod. Transponovat pohyb do jeho grafické podoby a naopak utvořit si představu o pohybu z jeho grafického záznamu patří mezi nejobtížnější části studia mechaniky mnohdy i pro studenty vysokých škol.

Dalším problematickým místem může být uvědomit si rozdíl mezi dráhou, souřadnicí a trajektorií nebo rozdíl mezi velikostí a složkou rychlosti apod. Chybné představy si žáci vytváří například i o pojmech okamžitá a průměrná rychlost. Mnoho problémů bývá se správným chápáním pojmu zrychlení a s rozlišováním mezi zrychlením a rychlostí.

Pro učitele, kteří předkládají úlohy svým žáků, stejně tak i pro autory sbírek úloh by mělo být důležitým momentem propojení fyzikální teorie a reálného života. Mnoho žáků vidí za řešením fyzikální úlohy pouze užití správných fyzikálních vzorců a matematického aparátu. Pokud mají pocit, že při řešení postupovali správně, neodradí je ani nesmyslný výsledek, který je naprosto v rozporu s realitou, jako je například záporná vzdálenost. Někteří z nich ani nemají představu o tom, jakou rychlostí se pohybují například při chůzi nebo běhu nebo jaký je rozdíl mezi rychlostí automobilu a letadla.

Právě úlohy z kinematiky (a na ně navazující úlohy z dynamiky) by měly být úzce spjaty s reálným životem, jejich zadání by mělo z reality přímo vycházet, hlavně proto, že jejich využití v běžném denním životě je velice časté (např. v kolik hodin musím vyjít či vyjet z domova, abych byla včas na daném místě, v jakém místě musím začít brzdit, abych nenarazila na překážku apod.).

Úlohy koncipované do běžného života jsou žáky daleko lépe přijímány. Jsou pro ně zajímavější a žáci sami je vnímají jako užitečnější než jiné úlohy, aniž by tušili, že pro ně mají z hlediska studia fyziky daleko hlubší význam - rozvíjí jejich fyzikální představivost a odbourávají některé jejich nesprávné intuitivní představy.

1.2 Cíl práce

Cíle mé práce byly následující:

1. Vytvořit sbírku úloh z kinematiky hmotného bodu určenou především pro studenty učitelství fyziky.
2. K jednotlivým úlohám vypracovat podrobná řešení.
3. K vybraným úlohám vytvořit strukturované nápovědy.

Sbírka úloh je určena jak studentům učitelství fyziky pro střední školy tak i studentům učitelství fyziky pro základní školy. Sbírka je koncipována tak, aby pomohla procvičit a pochopit základní partie kinematiky hmotného bodu, proto jsem se do ní snažila zařadit co největší počet typů příkladů, s nimiž se mohou studenti potkat. Sbírka obsahuje úlohy různé úrovně a obtížnosti, v podstatě od úloh řešitelných na základní škole až po vysokoškolské. Znalosti a zkušenosti studentů prvního ročníku s řešením fyzikálních úloh jsou velmi různorodé a mnohdy je třeba začít u těch opravdu základních. Různá úroveň a obtížnost úloh ve sbírce může pomoci studentům při posouzení úrovně vlastních znalostí a zjištění případných mezer a nedostatků a pomoci jim tak v začátcích studia.

Práce je součástí širšího záměru, jehož cílem je postupně inovovat celou stávající sbírku úloh z mechaniky [1] a převést ji do elektronické podoby. Ke všem úlohám by pak měla být vytvořena úplná řešení a hlavně strukturované nápovědy tak, aby se sbírkou mohli studenti interaktivně a samostatně pracovat. Elektronická forma sbírky dovolí uživateli volit si úlohy podle různých kritérií, jako jsou například obsah, různá úroveň či obtížnost nebo právě procvičovaná látka. Sbírka v této formě bude moci sloužit například i studentům středních škol, kteří se připravují na vysokoškolské studium, či jejich učitelům.

1.3 Struktura práce

Práce je rozdělena do tří kapitol a má tři přílohy.

V úvodu vymezuji problematiku, zamýšlím se nad výběrem tématu práce, kterým je sbírka fyzikálních úloh pro studenty učitelství fyziky, a nad důvody, které mne vedly k omezení tématu na sbírku úloh z kinematiky hmotného bodu. Dále uvádím cíle práce, naznačuji možnosti praktického využití a budoucího rozšíření sbírky o její elektronickou podobu. Úvodní část končím popisem struktury práce.

V druhé části nejprve popisuji strukturu sbírky, její tématické členění, jaké druhy úloh sbírka obsahuje a jaká je jejich úroveň a obtížnost. Dále se podrobněji zabývám jednotlivými literárními prameny, ze kterých jsem čerpala, proč a jaké úlohy jsem z nich vybírala a jakým způsobem jsem je upravovala. V závěru druhé části práce uvádím ukázku konkrétních úloh z jednotlivých témat sbírky.

V třetí části stručně shrnuji výsledky své práce, jak se mi podařilo splnit stanovené cíle a jaký přínos pro mne práce na sbírce fyzikálních úloh měla. V závěru naznačuji budoucí perspektivy práce, rozšíření sbírky a její zpracování do elektronické formy.

Poslední částí práce jsou přílohy, v nichž je obsažena celá sbírka. První příloha obsahuje zadání všech úloh, druhá systém nápověd k části úloh a třetí úplná řešení všech úloh. Úlohy jsou v přílohách rozčleněny do podkapitol podle probíraného tématu. Přílohy vzhledem ke své rozsáhlosti nejsou k práci přiloženy v tištěné formě, ale pouze ve formě elektronické (na CD).

2. Sbírka úloh

2.1 Struktura sbírky

Sbírka úloh má tři části (*Zadání úloh*, *Systém nápověd* a *Řešení úloh*), každá z těchto částí obsahuje šest podkapitol. Úlohy jsou do podkapitol členěny podle tématu, kterým se zabývají.

V každé podkapitole jsou úlohy různé úrovně (od základní až po vysokou školu) a s různou obtížností. Každá úloha má své zadání popřípadě i s náčrtkem pro lepší pochopení problému (první část) a své řešení, které je zpracováno velmi podrobně (třetí část). Obsahuje vždy podrobné vysvětlení postupu řešení úlohy tak, jak by při něm zřejmě čtenář postupoval podle systému nápověd. U některých úloh je uvedeno také grafické řešení.

K části úloh je vytvořena strukturovaná nápověda (druhá část). Nápověda má většinou formu otázek či úvah, které by měly čtenáři umožnit proniknout do podstaty úlohy, ukázat mu, na co by měl soustředit svou pozornost, orientovat jeho myšlení správným směrem a pomáhat mu analyzovat své chyby. Nápověda ovšem může také čtenáři pouze pomoci překonat obtížnou část úlohy a tím ho při jejím řešení „posunout o krok dopředu“.

Věřím, že systém nápověd především přivede čtenáře k tomu, aby se nad úlohou co nejvíce zamýšlel a pokusil se ji vyřešit samostatně. Zastává tu funkci učitele, který by se měl snažit vhodně volenými otázky dovést svého žáka k úspěšnému vyřešení úlohy.

Úvodní podkapitola *Pohyb daný graficky* obsahuje čtyři základní úlohy na použití grafů v kinematice hmotného bodu.
V pořadí druhá podkapitola s názvem *Rovnoměrný přímočarý pohyb* obsahuje celkem osm úloh, od základních na výpočet průměrné rychlosti na trase přes méně typické, jako jsou *Pozorování letadla* nebo *Jak dlouhý je bazén?*, až po náročnější úlohy, jakou je například *Myš a kočka.*

Třetí podkapitola se nazývá *Zrychlený přímočarý pohyb*. Obsahuje také celkem osm úloh. První tři úlohy jsou méně složité, k jejich řešení stačí základní znalosti zrychleného přímočarého pohybu. Zbylých pět úloh má náročnější charakter. Objevuje se v nich použití funkcí, grafů a tabulek (pohyb je popsán vektorovou funkcí, k popisu pohybu je použita souřadnicová mřížka nebo hodnoty zrychlení pohybu v závislosti na čase jsou zaznamenány v tabulce atd.), tedy oblasti řešení mechanických úloh, které patří mezi nejobtížnější dokonce i pro studenty vysokých škol.

Čtvrtá podkapitola s názvem *Pohyb po kružnici* obsahuje tři základní úlohy, jako jsou *Brusný kotouč*, *Pohyb kola*, *Otáčení kola* a trochu netradiční úlohu *Řemenice* na pohyb zadaný číselnou rovnicí; tedy celkem čtyři úlohy.

Pátá podkapitola *Skládání dvou pohybů* obsahuje šest úloh, první tři úlohy (*Mravenec na tyči*, *Beruška na válci* a *Pohyb kapky*) jsou typově podobné a opět patří mezi obtížná témata řešení úloh z mechaniky.

Poslední je podkapitola *Volný pád, vrhy* s osmi úlohami, zabývajícími se pohyby těles v gravitačním poli Země. Poslední dvě úlohy (*Basketbalista* a *Zahradní hadice*) rozebírají témata úzce svázaná s běžným denním životem a proto by mohlo být jejich řešení pro čtenáře zajímavé a inspirující.

Sbírka obsahuje celkem osmatřicet úloh s podrobným řešením. Strukturovaná nápověda je vytvořena k šestnácti úlohám.

2.2 Použité sbírky

Při tvorbě sbírky jsem vycházela z těchto literárních pramenů:

- [1] Mandíková, D., Rojko, M.: Soubor úloh z mechaniky pro studium učitelství, I. část; MFF UK, Praha 1994:

  Sbírka úloh k cvičením z předmětu Fyzika I pro první semestr učitelství na MFF UK. Obsahuje příklady i s výsledky k tématům *Kinematika hmotného bodu*, *Dynamika posuvného pohybu hmotného bodu*, *Dynamika kruhového pohybu hmotného bodu*, *Inerciální a neinerciální soustavy souřadnic*, *Hybnost, impuls, práce, výkon, energie*, *Statika tuhého tělesa*, *Těžiště, hmotný střed, moment setrvačnosti*, *Dynamika tuhého tělesa*, *Gravitační pole*, *Pružnost, pevnost*. Z této sbírky, konkrétně z části *Kinematika hmotného bodu* jsem využila řadu osvědčených úloh s nejrůznější obtížností od téměř základoškolských až po úlohy složité i pro vysokoškolské studenty. Často jsem ovšem upravovala text tak, aby vycházel z reálných situací nebo byl alespoň pro studenty poutavější. S tím souvisela například i úprava zadaných hodnot (například úloha *Malý Pavlík* nebo *Myš a kočka*).

- [2] Koudelková, H.: Elektronická sbírka příkladů k úvodním partiím klasické mechaniky, Diplomová práce; MFF UK, Praha 2003:

  Diplomová práce absolventky studia učitelství fyziky na MFF UK, v rámci které byla vytvořena sbírka příkladů z kinematiky a dynamiky hmotného bodu. Sbírka má formu WWW stránek, k jejímu používání stačí internetový prohlížeč. Je také nezávislá na platformě a pracuje off-line. Úlohy ve sbírce mají různou úroveň i obtížnost a u části z nich je ve sbírce vypracováno podrobné řešení a strukturovaná nápověda. Na tuto sbírku jsem ve své práci navazovala, ovšem s tím, že jsem se soustředila pouze na část kinematiky hmotného bodu. Z této sbírky jsem také použila myšlenku strukturované nápovědy, její realizaci jsem však pojala trochu odlišným způsobem. Sbírka Hany Koudelkové byla pro mne inspirací i co se týče výběru úloh (například úloha *Plavba voru*, která je modifikací úlohy *Plující loďka*).

- [3] WWW stránky fyzikální olympiády: http://fo.cuni.cz

Tato webová stránka obsahuje zadání a řešení úloh použitých v domácích, regionálních a celostátních kolech všech kategorií fyzikální olympiády (školní rok 1997-2005). Z této internetové stránky jsem převzala některé úlohy do své sbírky (například úloha *Sprinter* nebo *Basketbalista*).

- [4] Mičkal, K.: Sbírka úloh z technické mechaniky, SNTL, Praha 1988

Sbírka úloh pro střední odborná učiliště a střední školy s technickým zaměřením. V této knize byly úlohy podány většinou nezajímavým způsobem nebo byla jejich řešení příliš technicky zaměřená. Přesto mě ale některé úlohy zaujaly do té míry, že jsem je použila do své sbírky, přičemž jsem modifikovala některá zadání a tím i řešení úloh (například úloha *Zahradní hadice* nebo *Kamínek na římse*).

- [5] Reichl, J.: Sbírka příkladů z fyziky, SPŠST Panská Praha

Sbírka příkladů z fyziky určená původně studentům 1. ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu fyziky, kterou Jaroslav Reichl sestavil pro své studenty ze SPŠST Panská Praha. Obsahuje celkem sedm kapitol, *Kinematika hmotného bodu*, *Pohyb po kružnici*, *Dynamika hmotných bodů*, *Práce, energie, výkon*, *Gravitační pole*, *Mechanika tuhého tělesa* a *Mechanika kapalin*.
K jednotlivým úlohám jsou připojeny i číselné výsledky.
Některé úlohy mě inspirovaly při vytváření mých vlastních úloh, některé, například úlohu o dvou plavcích, jejíž text jsem upravila, jsem použila ve své sbírce (úloha *Jak dlouhý je bazén?*).

- [6] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, vysokoškolská učebnice obecné fyziky; VUTIUM, Brno 2000

České vydání americké vysokoškolské učebnice. V pěti dílech této učebnice je obsažen celý kurs obecné fyziky. První a druhý díl (I. část) se zabývají mechanikou, druhý díl (II. část) termodynamikou, třetí díl elektřinou a magnetismem. Ve čtvrtém díle se probírají elektromagnetické vlny, optika a relativita a pátý díl je věnován moderní fyzice. Způsob výkladu v učebnici je názorný, podrobný, bez dlouhého matematického odvozování. Lze tu najít velké množství motivačních otázek (na začátku každé kapitoly), kontrolních otázek (v průběhu kapitoly), řešených příkladů, cvičení a úloh, které mají úzký vztah k realitě.
Z této učebnice jsem převzala například úlohu *Výtah* a zařadila mezi úlohy zadané graficky.

- [7] Hecht, E.: Physics: Calculus, second edition; Brooks/Cole, Pacifik Grove, CA 2000

Úvodní vysokoškolská učebnice fyziky v angličtině. Učivo je členěno do kapitol a podkapitol. V celé učebnici je text prokládán různými fotografiemi

a obrázky.
V této knize jsem se inspirovala převážně druhou částí úvodní kapitoly s názvem The Language of Physics, která obsahuje články o rovnicích, grafech a funkcích.

2.3 Ukázka úloh ze sbírky

Do této kapitoly jsem zařadila ukázky konkrétních úloh z jednotlivých témat. U každé úlohy uvádím její zadání, strukturovanou nápovědu a její úplné řešení. Z podkapitoly nazvané *Pohyb daný graficky* jsem vybrala úlohu *Pohyb daný graficky 1*, z podkapitoly *Rovnoměrný přímočarý pohyb* úlohu *Jak dlouhý je bazén?*, jako ukázku podkapitoly *Zrychlený přímočarý pohyb* jsem zařadila úlohu *Brouk na desce* a z podkapitoly *Pohyb po kružnici* jsem vybrala úlohu *Brusný kotouč*. Předposlední téma *Skládání dvou pohybů* reprezentuje úloha *Mravenec na tyči* a poslední, *Volný pád, vrhy*, úloha *Zahradní hadice*.

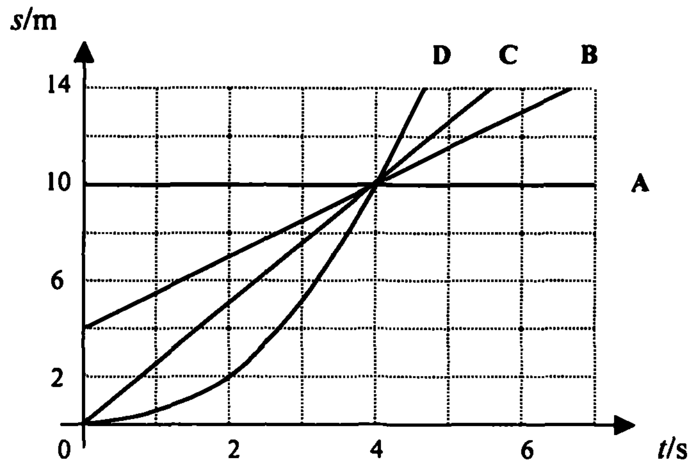
Pohyb daný graficky

Pohyb daný graficky 1

Zadání:

Na obrázcích jsou grafy závislosti dráhy na čase pohybů autíček A, B, C, D.

a) Charakterizujte slovy jednotlivé pohyby.
b) Určete průměrnou velikost rychlosti jednotlivých pohybů v časovém intervalu od 0 s do 4 s.
c) Určete velikost okamžité rychlosti jednotlivých pohybů v čase 4 s.
d) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase jednotlivých pohybů.
e) Určete celkovou uraženou dráhu v čase $t_1 = 10$ s jednotlivých pohybů (včetně případné počáteční nenulové dráhy), pokud by pohyb pokračoval podle grafické závislosti.



<u>**Strukturovaná nápověda:**</u>

Nápověda 1 pro a):
G r a f A: Mění se dráha s časem?
G r a f B,C: Jaká matematická funkce popisuje závislost dráhy na čase těchto pohybů? Co můžete říct o přírůstku dráhy za stejné časové intervaly u těchto pohybů a co o rychlosti?
G r a f D: Jaká matematická funkce popisuje závislost dráhy na čase u tohoto pohybu? Jak se bude měnit s časem rychlost tohoto pohybu?

Odpověď:
G r a f A: Dráha se nemění. Autíčko je v klidu.
G r a f B, C: Jedná se o lineární závislost dráhy na čase.
Za stejný časový interval vzroste dráha u těchto pohybů o stejnou hodnotu.
Rychlost pohybu se nemění.
Jedná se o rovnoměrný pohyb.
G r a f D: Grafem dráhy je parabola – dráha narůstá kvadraticky s časem.
Rychlost pak roste lineárně s časem.
Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený.

Nápověda 2 pro b):
Jakou dráhu urazila autíčka v časovém intervalu od 0 s do 4 s ?
Jak spočítáte velikost průměrné rychlosti, znáte-li dráhu a čas ?

Odpověď:
Velikost průměrné rychlosti v_p je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího časového intervalu 4 s:

A: $v_p = 0$.

B: $v_p = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

C: $v_p = 2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

D: $v_p = 2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Nápověda 3 pro c):
G r a f A, B, C: Jak se s časem mění rychlost u těchto pohybů?

Graf D: Kde je v grafech *s(t)* „schovaná“ rychlost?
Jak se s časem mění dráha rovnoměrně zrychleného pohybu?
Umíte s využitím hodnot z grafu spočítat zrychlení? Co pak platí pro okamžitou rychlost?

Odpověď:

Graf A,B,C: Rychlost se s časem nemění. Je tedy rovna průměrné rychlosti spočítané v b). Rychlost je daná sklonem přímek – jejich směrnicí.

Graf D: $s = \frac{at^2}{2}$, z grafu $s(4) = 10$, tzn. $10 = \frac{a \cdot 4^2}{2}$, z toho $a = 1{,}25\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

a pak $v = at = 5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Nápověda 4 pro d):
Řešení bodu d) najdete v odpovědích na předchozí otázky.

Nápověda 5 pro e):
Vyjádřete matematicky závislosti *s(t)* dané grafem. (Pro graf D najdete odpověď v řešení bodu c)).
Pak zjistěte hodnotu dráhy pro $t = t_1$.

Odpověď:

A: Autíčko je stále v klidu:
$s_0 = s_1 = 10\,\mathrm{m}$.

B: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nenulovou počáteční dráhou:
$s_1 = s_0 + vt_1 = (4 + 1{,}5 \cdot 10)\mathrm{m} = 19\,\mathrm{m}$.

C: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nulovou počáteční dráhou:
$s_1 = vt_1 = (2{,}5 \cdot 10)\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$.

D: Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou:
$s_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{(1{,}25 \cdot 100)\mathrm{m}}{2} = 62{,}5\,\mathrm{m}$.

<u>Řešení:</u>

a) Graf A představuje klid hmotného bodu s počáteční uraženou dráhou 10 m, graf B rovnoměrný pohyb s počáteční uraženou dráhou 4 m, graf C rovnoměrný pohyb s nulovou počáteční dráhou a graf D rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou a nulovou počáteční rychlostí.

b) Velikost průměrné rychlosti v_p je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího časového intervalu 4 s:

A: $v_p = 0$.

B: $v_p = 1{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

C: $v_p = 2{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

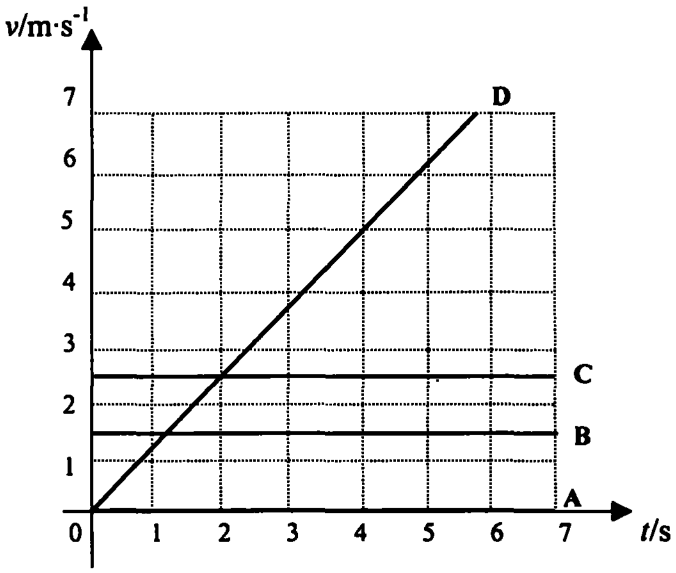
D: $v_p = 2{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

c) V případech A, B, C je velikost okamžité rychlosti v stálá a v každém okamžiku má stejnou hodnotu jako velikost průměrné rychlosti v_p ve zvoleném časovém intervalu.

V případě D platí: $v = at$, $s = \frac{at^2}{2}$, tedy $v = \frac{2s}{t}$.

Číselně: $s = 10\,\text{m}$, $t = 4\,\text{s}$, tedy $v = \frac{(2 \cdot 10)\text{m}}{4\text{s}} = 5\,\text{m·s}^{-1}$.

d) Grafy závislostí rychlostí na čase jednotlivých pohybů:



Pohyb A: $v = 0$.

Pohyb B: $v = 1{,}5\,\text{m·s}^{-1}$.

Pohyb C: $v = 2{,}5\,\text{m·s}^{-1}$.

Pohyb D: Z grafu závislosti dráhy na čase: $s = \frac{at^2}{2}$

$$10 = \frac{a \cdot 4^2}{2}$$

$$a = 1{,}25\,\text{m·s}^{-2}.$$

Tedy pro závislost rychlosti na čase platí: $v = at$

$$v = 1{,}25\,\text{m·s}^{-2} \cdot t.$$

e) A: Autíčko je stále v klidu:

$s_0 = s_1 = 10\,\text{m}$.

B: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nenulovou počáteční dráhou:

$s_1 = s_0 + vt_1 = (4 + 1{,}5 \cdot 10)\text{m} = 19\,\text{m}$.

C: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nulovou počáteční dráhou:

$s_1 = vt_1 = (2{,}5 \cdot 10)\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$.

D: Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{(1{,}25 \cdot 100)\mathrm{m}}{2} = 62{,}5\,\mathrm{m}.$$

Rovnoměrný přímočarý pohyb

Jak dlouhý je bazén?

Zadání:

Dva plavci – Karel a Petr – trénují na sousedních drahách bazénu. Odstartují ve stejný okamžik a oba plavou konstantní rychlostí. Karel je lepší plavec, proto předežene Petra, doplave na konec dráhy a vrací se zpět. Na zpáteční cestě potká Petra právě s metrů od konce dráhy, plave dál, doplave na místo startu, otočí se a plave opět zpátky. Přitom potká Petra ve vzdálenosti od místa startu rovné jedné n -tině délky bazénu. Jak dlouhý je bazén? Předpokládejte, že se oba plavci pohybují stále konstantní rychlostí (zanedbejte tedy změny velikosti rychlosti při otočkách).
Řešte pro hodnoty: $s = 5$ m, $n = 5$.

Strukturovaná nápověda:

Nápověda 1:
Označte si délku bazénu x.
Vyjádřete si celkovou dráhu, kterou uplaval Karel do prvního setkání a totéž udělejte pro Pavla.
Čemu je roven poměr těchto drah?
Uvědomte si, co platí pro čas, za který tyto dráhy uplavali.

Odpověď:
Předpokládejme, že oba plavci se pohybují rovnoměrně přímočaře. Při prvním setkání plavců (v čase t) musí platit:

$v_k t = x + s$, kde v_k je rychlost Karla a $x + s$ je dráha, kterou uplaval do chvíle, než potkal Petra .

$v_p t = x - s$, kde v_p je rychlost Pavla a $x - s$ je dráha, kterou uplaval do chvíle, než potkal Karla .

Pro poměr rychlostí obou plavců tedy platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x - s}{x + s}.$$

Nápověda 2:
Obdobně si vyjádřete dráhy, které Karel a Pavel uplavali do druhého setkání.

Co opět platí pro jejich poměr?

Odpověď:
Při druhém setkání plavců (v čase t') už Karel uplaval dvě celé délky bazénu a ještě jednu n-tinu bazénu, tedy:

$$v_k t' = 2x + \frac{1}{n}x \ ,$$

zatímco Petr uplaval jen jednu délku bazénu a část délky bazénu, ve které se setkal s Karlem (protože Karel uplaval $\frac{1}{n}$ bazénu , Petr musel uplavat $\frac{n-1}{n}$ bazénu):

$$v_p t' = x + \frac{n-1}{n}x \, .$$

Pro poměr rychlostí obou plavců platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x + \frac{n-1}{n}x}{2x + \frac{1}{n}x} = \frac{1 + \frac{n-1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2n-1}{2n+1} \, .$$

Nápověda 3:
Porovnej oba poměry drah. Stačí nám to k výpočtu délky bazénu?

Odpověď:
Ano. Srovnáním vztahů:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x-s}{x+s} \quad \text{a} \quad \frac{v_p}{v_k} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

dostaneme: $$\frac{x-s}{x+s} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

a úpravou: $$x = 2ns \ .$$

<u>**Řešení:**</u>

Délku bazénu si označíme x.
Předpokládejme, že oba plavci se pohybují rovnoměrně přímočaře. Při prvním setkání plavců (v čase t) musí platit:

$v_k t = x + s$, kde v_k je rychlost Karla a $x+s$ je dráha, kterou uplaval do chvíle, než potkal Petra .

$v_p t = x - s$, kde v_p je rychlost Pavla a $x-s$ je dráha, kterou uplaval do chvíle, než potkal Karla .

Pro poměr rychlostí obou plavců tedy platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x-s}{x+s} \qquad (1) \, .$$

Při druhém setkání plavců (v čase t') už Karel uplaval dvě celé délky bazénu a ještě jednu n-tinu bazénu, tedy:

$$v_k t' = 2x + \frac{1}{n} x \ ,$$

zatímco Petr uplaval jen jednu délku bazénu a část délky bazénu, ve které se setkal s Karlem (protože Karel uplaval $\frac{1}{n}$ bazénu, Petr musel uplavat $\frac{n-1}{n}$ bazénu):

$$v_p t' = x + \frac{n-1}{n} x \ .$$

Pro poměr rychlostí obou plavců platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x + \frac{n-1}{n} x}{2x + \frac{1}{n} x} = \frac{1 + \frac{n-1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2n-1}{2n+1} \qquad (2) \ .$$

Srovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme:

$$\frac{x-s}{x+s} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

a úpravou:

$$x = 2ns \ .$$

Číselně: $x = (2 \cdot 5 \cdot 5)\text{m} = 50 \text{ m}$.

Zrychlený přímočarý pohyb

Brouk na desce

Zadání:

K popisu pohybu brouka lezoucího po dřevěné desce jsme si na desku nakreslili mřížku. Z mřížky jsme vyčetli, že se pohyboval po přímce dané rovnicí $y = 2x + 3$.
Napište parametrické rovnice pohybu brouka pro případ:

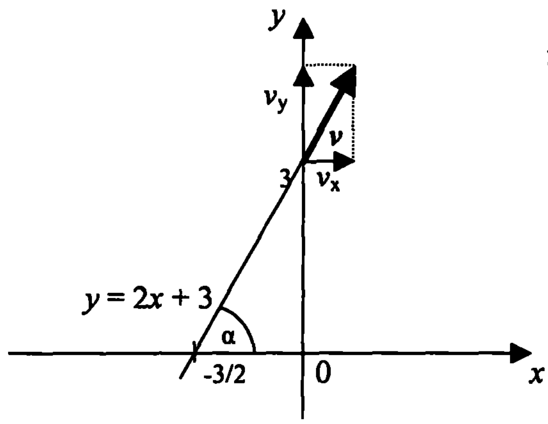
a) Brouk se pohyboval rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí $v = 2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ a v čase $t = 0$ s se nacházel v bodě o souřadnicích [0, 3] cm .
b) Brouk se pohyboval rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a = 0{,}25 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$. V čase $t = 0$ s byla počáteční rychlost brouka $v_0 = 1{,}5 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ a brouk se nacházel v bodě [0, 3] cm .

Strukturovaná nápověda:

Nápověda 1 pro a):
Zakresli si danou přímku do grafu a vyznač počáteční polohu brouka. Pak vyznač, kde se bude brouk nacházet za okamžik t (pozor, jsou dvě možnosti).

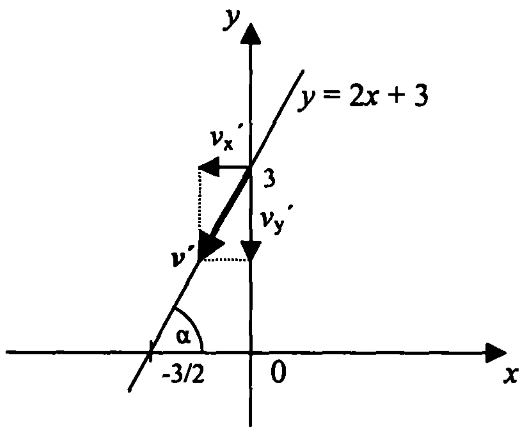
Odpověď:

Obrázek 1:



nebo

Obrázek 2:



Nápověda 2 pro a):

Varianta 1:

Jakou dráhu brouk za čas t ulezl? Jaká je jeho x-ová a y-ová souřadnice v čase t?
(Úhel, který svírá přímka s osou x zjistíte z jejích průsečíků s osami x a y.)

Varianta 2:

Úlohu můžete řešit také tak, že si pohyb brouka rovnou rozložíte do směru osy x a y. Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy x a jakou rychlostí? Jak se bude s časem měnit jeho x-ová souřadnice?
Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy y a jakou rychlostí a jak se bude s časem měnit jeho y-ová souřadnice?

Odpověď:

Jedná se o pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí $v = 2\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.
Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$y = 1\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot t$,

pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíši.

$$x = \pm v_x t$$

$$y = \pm v_y t + 3$$

$$v_x = v \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$v_y = v \sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{v_y}{v}$$

Z obrázku 1,2:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y &= \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}t+3 \end{aligned}}\ .$$

Nápověda 3 pro b):

Obdobně postupujte u řešení úkolu b). Rozložte si pohyb brouka do směru osy x a y. Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy x a jakou počáteční rychlostí? Jaké bude jeho zrychlení ve směru osy x? Jak se bude s časem měnit jeho x-ová souřadnice?

Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy y a jakou počáteční rychlostí? Jaké bude jeho zrychlení ve směru osy y? Jak se bude s časem měnit jeho y-ová souřadnice?

Odpověď:

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a = 0{,}25\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$ a s počáteční rychlostí $v_0 = 1{,}5\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$:

$$v_{0x} = \pm v_0\cos\alpha$$
$$v_{0y} = \pm v_0\sin\alpha$$

$$v_{0x} = \pm 1{,}5\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm\cdot s^{-1}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{10}\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$
$$v_{0y} = \pm 1{,}5\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm\cdot s^{-1}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$

$$a_x = \pm a\cos\alpha$$
$$a_y = \pm a\sin\alpha$$

$$a_x = \pm 0{,}25\ \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm\cdot s^{-2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$$

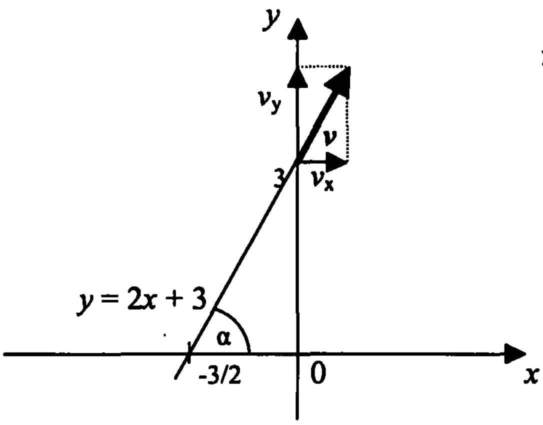
$$a_y = \pm 0{,}25\frac{2\sqrt{5}}{5}\,\text{cm·s}^{-2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}\,\text{cm·s}^{-2}$$

$$v_x = \pm(v_{0x} + a_x t)$$
$$v_y = \pm(v_{0y} + a_y t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \pm\, v_{0x}t \pm \frac{1}{2}a_x t^2 + x_0 = \pm\,\frac{\sqrt{5}}{40}t^2 \pm \frac{3\sqrt{5}}{10}t \\ y &= \pm\, v_{0y}t \pm \frac{1}{2}a_y t^2 + y_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}t^2 \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}t + 3 \end{aligned}}$$

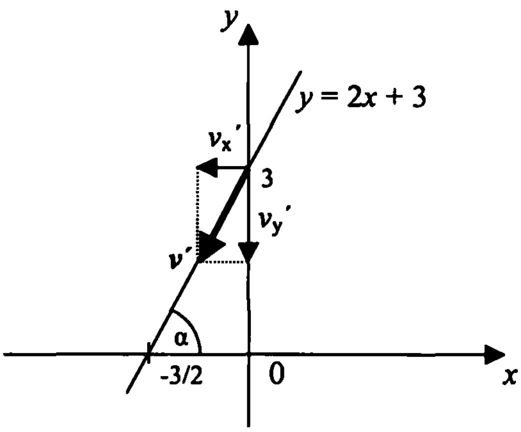
Řešení:

Obrázek 1:



nebo

Obrázek 2:



Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.
$y = 1\text{ m} - 2\text{ m·s}^{-1}\cdot t$,
pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíši.

a) Pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí $v = 2$ cm·s^{-1} :

$$x = \pm v_x t$$
$$y = \pm v_y t + 3$$

$$v_x = v\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$v_y = v\sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{v_y}{v}$$

Z obrázku 1,2:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y &= \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}t + 3 \end{aligned}}\;.$$

b) Pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $a = 0{,}25\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$ a s počáteční rychlostí $v_0 = 1{,}5\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$:

$$v_{0x} = \pm v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = \pm v_0 \sin\alpha$$

$$v_{0x} = \pm 1{,}5\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{10}\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$$
$$v_{0y} = \pm 1{,}5\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$$

$$a_x = \pm a\cos\alpha$$
$$a_y = \pm a\sin\alpha$$

$$a_x = \pm 0{,}25\ \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm{\cdot}s^{-2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$$

$$a_y = \pm 0{,}25\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{cm{\cdot}s^{-2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$$

$$v_x = \pm\left(v_{0x} + a_x t\right)$$
$$v_y = \pm\left(v_{0y} + a_y t\right)$$

$$x = \pm\, v_{0x}t \pm \frac{1}{2}a_x t^2 + x_0 = \pm\, \frac{\sqrt{5}}{40}t^2 \pm \frac{3\sqrt{5}}{10}t$$
$$y = \pm\, v_{0y}t \pm \frac{1}{2}a_y t^2 + y_0 = \pm \frac{\sqrt{5}}{20}t^2 \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}t + 3$$.

Pohyb po kružnici

Brusný kotouč

Zadání:

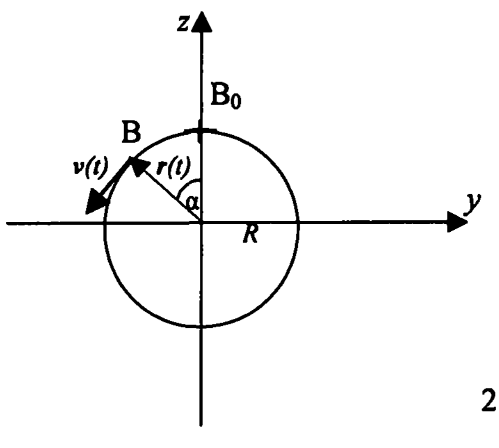
Brusný kotouč o poloměru R se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením ε okolo vodorovné osy v kladném smyslu. V čase $t = 0$ s se bod B na jeho okraji nachází v poloze $B_0 = [0, R]$ nad osou.

a) Určete závislost polohového vektoru bodu B $\boldsymbol{r(t)}$ a jeho rychlosti $\boldsymbol{v(t)}$ a zrychlení $\boldsymbol{a(t)}$ na čase.
b) Určete závislost tečného zrychlení na čase $a_t(t)$.
c) Určete závislost normálového zrychlení na čase $a_n(t)$.
d) Určete úhel, který svírá celkové a normálové zrychlení.

Strukturovaná nápověda:

Nápověda 1 pro a):
Nakreslete si obrázek, vyznačte počáteční polohu bodu B_0 a polohu bodu B za okamžik t. Vyznačte i úhel α, o který se bod za čas t pootočil. Zapište souřadnice bodu B v čase t s pomocí poloměru kola a úhlu α.

Odpověď:
Obrázek:



Průběh polohy bodu B :

$$y = -R\sin\alpha$$
$$z = R\cos\alpha \quad .$$

Nápověda 2 pro a):
Kotouč se roztáčí se zrychlením ε. Jak se mění s časem úhlová rychlost ω a jak úhel α?

Odpověď:
Výpočet velikosti úhlové rychlosti ω a úhlu α :

ε = konst.

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + c \ .$$

Pro $t = 0$ je $\omega = 0 = 0 + c$ a tedy $c = 0$.

$$\alpha = \int \omega dt = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + k \ .$$

Pro $t = 0$ je $\alpha = 0 = 0 + k$ a tedy $k = 0$.

Nápověda 3 pro a):
Víte, jak se mění s časem souřadnice bodu B, zapište s jejich pomocí jeho polohový vektor.

Odpověď:
$\boldsymbol{r}(t) = -R\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\boldsymbol{j} + R\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory .

Nápověda 4 pro a):
Jak od souřadnice $x(t)$ a $y(t)$ přejdete ke složkám rychlosti $v_x(t)$ a $v_y(t)$? S jejich pomocí pak zapište vektor rychlosti $\boldsymbol{v}(t)$.

Odpověď:
Pro průběh rychlosti bodu B na obvodu kotouče platí:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$
$$v_y = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$
$$v_z = -R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$v(t) = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} - R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k}$$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory.

Nápověda 5 pro a):
Obdobně jako jste došli od souřadnice k složkám rychlosti, přejděte od složek rychlosti ke složkám celkového zrychlení. Pomocí složek pak zapište vektor zrychlení.

Odpověď:
Průběh zrychlení:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$a_y = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$a_z = -R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon^2 t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$a(t) = \left(R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) \boldsymbol{j} - \left(R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) \boldsymbol{k} ,$$

kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory.

Nápověda 6 pro b):
Jak spočítáte velikost tečného zrychlení? Jakým směrem míří tečné zrychlení? Jak zapíšete jednotkový vektor ve směru rychlosti?
(Velikost rychlosti s pomocí jejích složek jistě snadno určíte.)

Odpověď:

$$v(t) = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = R\varepsilon t$$

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varepsilon t) = R\varepsilon \ .$$

Tečné zrychlení má směr rychlosti.

Jednotkový vektor ve směru rychlosti:

$$v_{ok} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}}{v} = -\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} - \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k}$$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory.

Nápověda 7 pro b):
Znáte velikost tečného zrychlení a jednotkový vektor v jeho směru. Jak zapíšete vektor tečného zrychlení?

Odpověď:
Tečné zrychlení:

$$\boldsymbol{a}_t = a_t\, \boldsymbol{v}_{ok} = a_t\left(-\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} - \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k} \right)$$

$$\boldsymbol{a}_t(t) = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} - R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k}$$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory.

Nápověda 8 pro c):
Jak spočítáte velikost normálového zrychlení? Jakým směrem míří normálové zrychlení? Jak zapíšete jednotkový vektor ve směru polohového vektoru?
(Velikost polohového vektoru s pomocí jeho složek jistě snadno určíte.)

Odpověď:

$$|\boldsymbol{r}(t)| = R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \varepsilon^2 t^2}{R} = R\varepsilon^2 t^2$$

Normálové zrychlení má směr polohového vektoru, ale je opačně orientované.

Jednotkový vektor ve směru polohového vektoru:

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} + \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k}$$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory.

Nápověda 9 pro c):
Znáte velikost normálového zrychlení a jednotkový vektor v jeho směru. Jak zapíšete vektor normálového zrychlení?

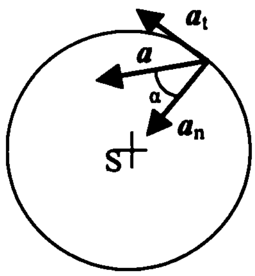
Odpověď:
Normálové zrychlení:

$$\boldsymbol{a}_n(t) = a_n \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) = a_n \left(\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} - \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k} \right)$$

$$\boldsymbol{a}_n(t) = \varepsilon^2 R t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{j} - \varepsilon^2 R t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\, \boldsymbol{k}$$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory.

Nápověda 10 pro d):
K určení úhlu, který svírá celkové a normálové zrychlení nakreslete obrázek, ve kterém vyznačíte normálové, celkové a tečné zrychlení. Jaká goniometrická funkce je spojuje, jistě snadno objevíte. Musíte ale ještě spočítat velikost celkového zrychlení. Pomůže vám buď znalost a_t a a_n nebo a_y a a_z.

Odpověď:
Obrázek:

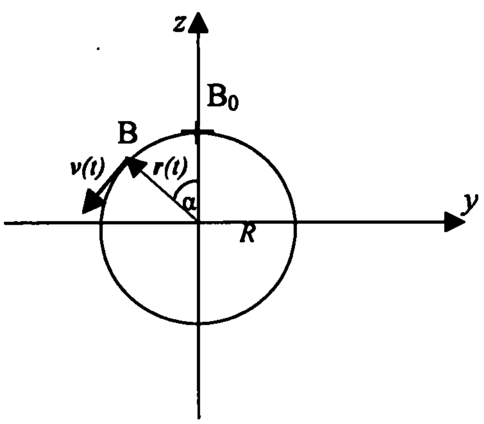


$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{R\varepsilon^2 t^2}{R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}} = \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2 t^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

<u>Řešení:</u>

Odpověď:
Obrâzek 1:



a) Průběh polohy bodu B :

$$y = -R\sin\alpha$$
$$z = R\cos\alpha \quad .$$

Výpočet velikosti úhlové rychlosti ω a úhlu α :

ε = konst.

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + c \ .$$

Pro $t = 0$ je $\omega = 0 = 0 + c$ a tedy $c = 0$.

$$\alpha = \int \omega dt = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + k \ .$$

Pro $t = 0$ je $\alpha = 0 = 0 + k$ a tedy $k = 0$.

Polohový vektor bodu B:

$\boldsymbol{r(t)} = -R\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\boldsymbol{j} + R\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory .

Pro průběh rychlosti bodu B na obvodu kotouče platí:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

$$v_y = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$v_z = -R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$\boldsymbol{v(t)} = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\boldsymbol{j} - R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory .

Pro velikost rychlosti platí:

$$v(t) = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = R\varepsilon t \ .$$

Průběh zrychlení:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$a_y = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$a_z = -R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon^2 t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\boldsymbol{a(t)} = \left(R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \right)\boldsymbol{j} - \left(R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \right)\boldsymbol{k} \ ,$$

kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory .

b) Velikost tečného zrychlení:

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varepsilon t) = R\varepsilon \ .$$

Tečné zrychlení má směr rychlosti:

$\boldsymbol{a}_t = a_t \, \boldsymbol{v}_{ok} = a_t \left(-\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{j} - \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{k} \right)$, kde $\boldsymbol{v}_{ok} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti

a $\frac{\boldsymbol{v}}{v} = -\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{j} - \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{k}$

($\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory) .

Tečné zrychlení:

$\boldsymbol{a}_t(t) = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{j} - R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory .

c) Velikost normálového zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \varepsilon^2 t^2}{R} = R\varepsilon^2 t^2 .$$

Normálové zrychlení má směr polohového vektoru, ale je opačně orientované:

$\boldsymbol{a}_n(t) = a_n \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) = a_n \left(\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{j} - \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{k} \right)$, kde $\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{j} + \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{k}$

je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru

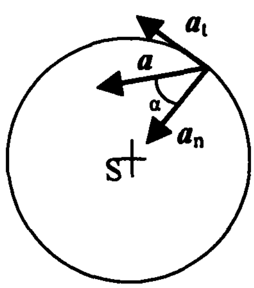
($\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory) .

Normálové zrychlení:

$\boldsymbol{a}_n(t) = \varepsilon^2 R t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{j} - \varepsilon^2 R t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \, \boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory .

d) Výpočet úhlu α, který svírá celkové a normálové zrychlení:

Obrázek 2:



$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}$$

$$\cos\alpha=\frac{a_n}{a}=\frac{R\varepsilon^2t^2}{R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}}=\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2t^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Skládání dvou pohybů

Mravenec na tyči

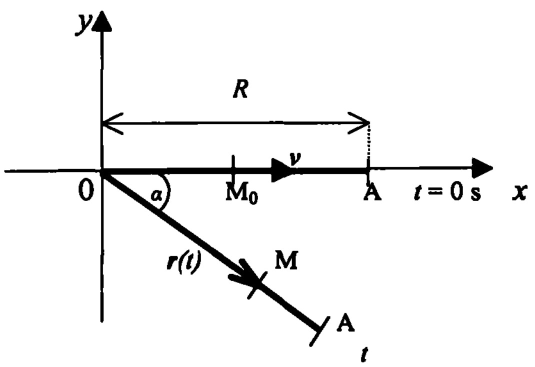
Zadání:

Tenká tyč OA délky R se otáčí úhlovou rychlostí ω ve směru pohybu hodinových ručiček kolem osy, která je kolmá k tyči a prochází bodem O. Po tyči od bodu O leze ve směru k bodu A mravenec konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzhledem k tyči. Popište průběh polohy mravence v laboratorní vztažné soustavě, byl-li v čase $t = 0$ s právě ve středu tyče.

Strukturovaná nápověda:

Nápověda 1:
Počátek souřadné soustavy zvolte v bodě 0 (bod O) a počáteční polohu tyče tak, že splývá s osou x. Nakreslete situaci pro čas $t = 0$ s a vyznačte polohu mravence. Pak nakreslete, jak se pootočí tyč za okamžik t a kam popoleze mravenec. Vyznačte polohový vektor mravence v čase t.

Odpověď:
Obrázek:



Nápověda 2:
O jaký kus popolezl mravenec za čas t a jak dlouhý bude polohový vektor mravence v čase t?
O jaký úhel se pootočila tyč za čas t?
Pomocí úhlu α vyjádřete *x-ovou* a *y-ovou* složku polohového vektoru $\boldsymbol{r(t)}$.

Odpověď:
Mravenec popolezl o vt .

Délka polohového vektoru bude $r(t) = vt + \frac{R}{2}$.

Tyč se pootočí o unel $\alpha = \omega t$.

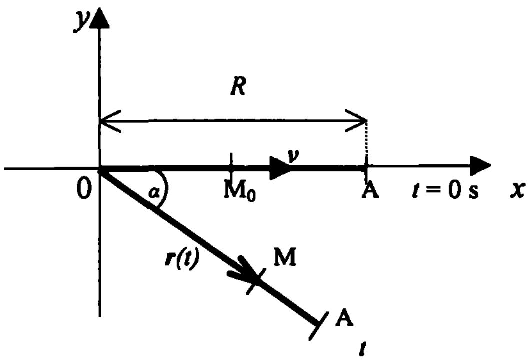
$$x = r\cos\omega t = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t$$

$$y = -r\sin\omega t = -\left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t$$

$$\boldsymbol{r(t)} = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t\ \boldsymbol{i}\ - \left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t\ \boldsymbol{j}$$, kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ jsou jednotkové vektory .

<u>Řešení:</u>

Obrázek:



Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti v a na pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí o velikosti ω :
Délka polohového vektoru se mění s časem podle vztahu:

$$r(t) = vt + \frac{R}{2}$$
$$x = r\cos\omega t = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t$$

$$y = -r\sin\omega t = -\left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t$$

$$r(t) = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t\ \boldsymbol{i}\ - \left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t\ \boldsymbol{j}$$, kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ jsou jednotkové vektory.

Volný pád, vrhy

Zahradní hadice

Zadání:

Proudem vody tryskajícím ze zahradní hadice počáteční rychlostí o velikosti v_0 chceme dostříknout co nejvýše na svislou stěnu, která se nachází ve vodorovné vzdálenosti d od ústí hadice.

a) Jak velký elevační úhel α musíme zvolit?
b) Do jaké výšky h na stěnu voda dostříkne?
c) Pod jakým úhlem φ dopadne voda na stěnu? Určete odchylku vektoru okamžité rychlosti v okamžiku dopadu od vodorovného směru.

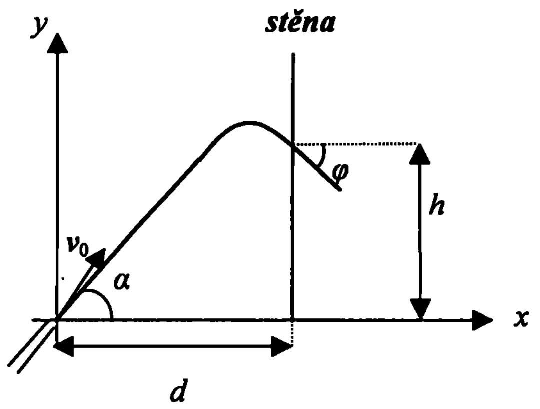
Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešte pro hodnoty: $v_0 = 15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $d = 10\ \mathrm{m}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Strukturovaná nápověda:

Nápověda 1 pro a):
Nakreslete si obrázek situace. O jaký typ pohybu se jedná? Jak se bude s časem měnit *x-ová* a *y-ová* složka rychlosti vody? Jak se bude měnit *x-ová* a *y-ová* souřadnice?

Odpověď:
Obrázek:



Počátek vztažné soustavy zvolíme v ústí hadice.

Ze vztahů pro šikmý vrh:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha$$
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Nápověda 2 pro a):
Jak dlouho poletí voda ke stěně pro daný úhel α? Jaká výška h dostřiku na stěnu odpovídá této době?

Odpověď:
Pro dobu letu vody a pro výšku místa dopadu na stěnu vztahy platí:

$$x = d \;\Rightarrow\; t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$$
$$h = d\ \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} = d\ \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2{v_0}^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right) \qquad (1)\,.$$

Nápověda 3 pro a):
Potřebujete zjistit, pro jaký úhel α bude výška h dostřiku na stěnu maximální. Hledáte tedy maximum funkce $h = h(\alpha)$. Jak se to matematicky udělá?

Odpověď:
Zjistíme, kdy je derivace funkce h podle α rovna nule:

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha} - \frac{gd^2 \sin\alpha}{{v_0}^2 \cos^3\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gd}{{v_0}^2}\mathrm{tg}\alpha\right) \quad = 0 \ \text{ pro } \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{{v_0}^2}{gd} \qquad (2)\,.$$

Pro elevační úhel $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{{v_0}^2}{gd}$ dosáhne tedy funkce $h(\alpha)$ maxima.

Pro zadané hodnoty:

$$\alpha = 66{,}4°\,.$$

Nápověda 4 pro b):
Znáte-li úhel pro maximální dostřik a závislost výšky h dostřiku na stěnu na úhlu α, jistě příslušnou maximální výšku snadno dopočítáte.

Odpověď:
Dosazením (2) do (1) dostaneme:

$$h = \frac{d{v_0}^2}{gd} - \frac{gd^2}{2{v_0}^2}\left(1 + \frac{{v_0}^4}{g^2 d^2}\right) = \frac{{v_0}^2}{2g} - \frac{gd^2}{2{v_0}^2} \quad .$$

Číselně:

$$h = 9{,}29\ m \quad .$$

Nápověda 5 pro c):
Dokreslete si do obrázku vektor rychlosti v okamžiku dopadu na stěnu a jeho složky ve směru osy x a y. Příslušný úhel s jejich pomocí snadno vyjádříte. Hodnoty obou složek v okamžiku dopadu na stěnu s pomocí Nápovědy 1 jistě určíte.

Odpověď:
Odchylku φ rychlosti dopadu od vodorovného směru určíme ze vztahu:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha \cos^2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} \quad .$$

Z toho plyne:

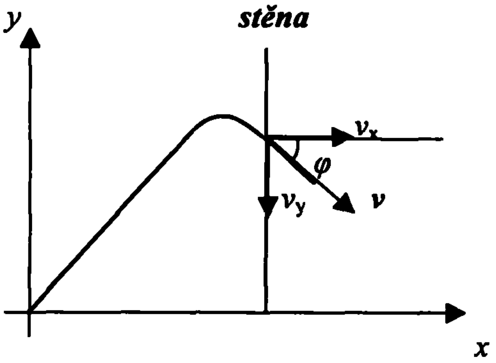
$$\varphi = -(90° - \alpha) \; .$$

Číselně:

$$\varphi = -23{,}6° \; .$$

Odchylka φ rychlosti dopadu od vodorovného směru vyšla záporná (odčítáme velikost po směru hodinových ručiček). Podívejte se na *obrázek*:

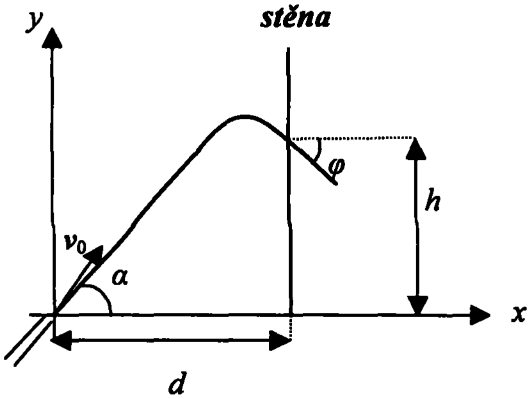
Obrázek:



Poznámka:
Pozor na úvahu, že při maximální výšce dostřiku na stěnu bude *y-ová* složka rychlosti nulová a tedy i úhel φ nulový. V úloze je pevně daná vzdálenost stěny a tím pro daný úhel i doba letu vody.

Řešení:

Obrázek 1:



a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v ústí hadice.

Ze vztahů pro šikmý vrh:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

plynou pro dobu letu vody a pro výšku místa dopadu na stěnu vztahy:

$$x = d \Rightarrow t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$$

$$h = d\ \mathrm{tg}\alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = d\ tg\alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right) \qquad (1).$$

Potřebujeme zjistit, pro jaký úhel α bude výška h dostřiku vody maximální, neboli hledáme extrém funkce $h = h(\alpha)$:

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha} - \frac{g d^2 \sin\alpha}{v_0^2 \cos^3\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{g d}{v_0^2}\mathrm{tg}\alpha\right) \qquad = 0 \quad \text{pro} \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g d} \qquad (2).$$

Pro elevační úhel $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{v_0^2}{g d}$ dosáhne tedy funkce $h(\alpha)$ maxima.

Pro zadané hodnoty:

$\alpha = 66{,}4°$.

b) Dosazením (2) do (1) dostaneme:

$$h = \frac{d v_0^2}{g d} - \frac{g d^2}{2 v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 d^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g d^2}{2 v_0^2} \quad .$$

Číselně:

$h = 9{,}29\ m$.

c) Odchylku φ rychlosti dopadu od vodorovného směru určíme ze vztahu:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd}{v_0^{\,2}\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha \cos^2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} \; .$$

Z toho plyne:

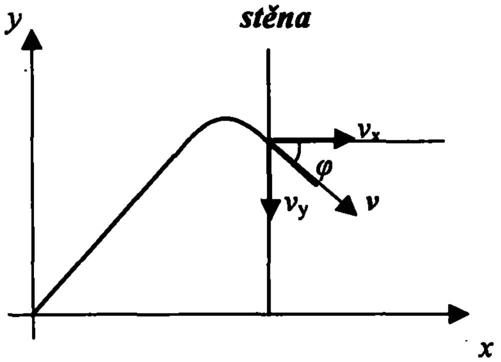
$\varphi = -(90° - \alpha)$.

Číselně:

$\varphi = -23{,}6°$.

Poznámka: Odchylka φ rychlosti dopadu od vodorovného směru vyšla záporná (odčítáme velikost po směru hodinových ručiček). Podívejte se na *obrázek 2*:

Obrázek 2:



3. Závěr

V rámci bakalářské práce byla vytvořena sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu pro studenty učitelství. Ke všem úlohám jsou uvedena podrobná a úplná řešení a k části úloh také strukturované nápovědy. Úlohy jsou seřazeny podle témat, kterými se zabývají.

Studenti mohou sbírku využít k procvičení uvedených témat, k prohloubení a lepšímu pochopení učiva a později, při své budoucí učitelské práci, jako zdroj úloh do vyučovací hodiny.

Při tvorbě sbírky jsem si zopakovala základní partie kinematiky hmotného bodu, protože jsem nejen musela všechny úlohy vyřešit, ale také k některým zpracovat systém nápověd. Pro tuto část práce bylo důležité si uvědomit, jaké problémy studenti s řešením úloh nejčastěji mívají, které oblasti kinematiky bývají pro ně obvykle nejobtížnější a také, jakým způsobem by se určité typy úloh měly studentům přiblížit nebo vysvětlit.

Do budoucna bych chtěla svou sbírku rozšířit o další typy úloh z kinematiky hmotného bodu, případně o úlohy z dynamiky hmotného bodu. Dále bych chtěla vypracovat systém nápověd u všech použitých úloh. Rovněž bych ráda vytvořila elektronickou podobu sbírky tak, aby ji mohli studenti či další zájemci využívat k samostatné práci. Nadále bych ji koncipovala jako studijní pomůcku pro studenty učitelství fyziky.

Literatura

[1] Mandíková, D., Rojko, M.: Soubor úloh z mechaniky pro studium učitelství, I. část; MFF UK, Praha 1994

[2] Koudelková, H.: Elektronická sbírka příkladů k úvodním partiím klasické mechaniky, Diplomová práce; MFF UK, Praha 2003

[3] WWW stránky fyzikální olympiády: http://fo.cuni.cz

[4] Mičkal, K.: Sbírka úloh z technické mechaniky, SNTL, Praha 1988

[5] Reichl, J.: Sbírka příkladů z fyziky (určená původně studentům 1.ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu fyziky), SPŠST Panská Praha

[6] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, vysokoškolská učebnice obecné fyziky; VUTIUM, Brno 2000

[7] Hecht, E.: Physics: Calculus, second edition; Brooks/Cole, Pacifik Grove, CA 2000

[8] Kašpar, E. a kol.: Didaktika fyziky, SPN, Praha 1978

[9] Perelman, J.: Zajímavá fyzika, Mladá fronta, Praha 1962

[10] Ungermann, Z.: Matematika a řešení fyzikálních úloh; SPN, Praha 1990