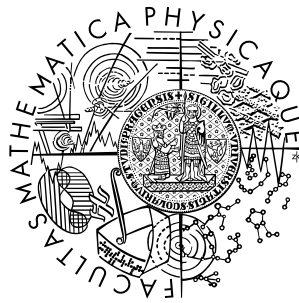


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Miroslav Černý

Analýza disperze a stability vln v kosmickém plazmatu

Katedra elektroniky a vakuové fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2006

Chtěl bych tímto poděkovat vedoucímu bakalářské práce Doc. RNDr. Ondřeji Santolíkovi, Dr. za odborné vedení, podnětné připomínky a poskytnutí počítačových programů pro numerické výpočty.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 30.5.2006

Miroslav Černý

Obsah

1	Úvod	6
2	Teorie šíření vln v plazmatu	7
2.1	Některé přístupy a aproximace	7
2.1.1	Studené plazma	8
2.1.2	Teplé plazma	8
2.1.3	Horké plazma	8
2.2	Dielektrický tenzor	8
2.2.1	Dielektrický tenzor ve studeném plazmatu	9
2.2.2	Dielektrický tenzor v teplém plazmatu	10
2.2.3	Dielektrický tenzor v horkém plazmatu	11
2.3	Disperzní relace	13
2.3.1	Disperzní relace studeného plazmatu	13
2.3.2	Disperzní relace teplého plazmatu	14
2.3.3	Disperzní relace horkého plazmatu	14
2.4	Metody zobrazení disperzních relací	14
2.4.1	CMA diagram	14
2.4.2	Disperzní povrchy	15
2.4.3	Frekvenční závislost indexu lomu	15
3	Některé výsledky výzkumu vln v kosmickém plazmatu	16
3.1	Elektrostatické a elektromagnetické vlny v kosmickém plazmatu	16
3.2	Relativistické plazma	17
3.3	Planetární rázová vlna	18
4	Numerické procedury pro analýzu vln v plazmatu	19
4.1	WHAMP	19
4.2	HOTRAY	19
4.3	WDF	20

5	Příklad použití numerických procedur pro analýzu vln v kos-	
	mickém plazmatu	21
5.1	Popis modelu plazmatu	21
5.2	Výsledky	21
6	Závěr	25
	Literatura	26

Název práce: Analýza disperze a stability vln v kosmickém plazmatu
Autor: Miroslav Černý
Katedra: Katedra elektroniky a vakuové fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.
e-mail vedoucího: ondrej.santolik@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce seznamuje s metodami analýzy plazmatických vln pomocí disperzní relace a uvádí některé výsledky, kterých bylo dosaženo při výzkumu vln v kosmickém plazmatu. Práce je zaměřena spíše teoreticky a většina výsledků se týká výpočtu dielektrického tenzoru a řešení disperzní relace v modelu horkého plazmatu pomocí analytických a numerických metod. Jsou představeny některé existující numerické procedury pro výpočty týkající se vln v plazmatu. Jako příklad použití numerických procedur je za pomoci programu WDFM je vyšetřováno šíření Langmuirových vln v oblasti foreshocku planety Saturn.

Klíčová slova: plazmatické vlny, disperzní relace, dielektrický tenzor, Langmuirovy vlny

Title: Analysis of dispersion and stability of waves in space plasmas
Author: Miroslav Černý
Department: Department of Electronics and Vacuum Physics
Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.
Supervisor's e-mail address: ondrej.santolik@mff.cuni.cz

Abstract: This work introduces methods of analysis of plasma waves through plasma dispersion relation and presents some results achieved in space plasma waves research. This work is mostly theoretical. It is related to computing of the dielectric tensor and solution of the dispersion relation in hot plasmas by analytical and numerical approaches. Some existing numerical procedures for computations relevant to plasma waves are introduced. As an example of the numerical procedures, the propagation of Langmuir waves in the Saturn foreshock is investigated using the WDFM computer code.

Keywords: plasma waves, dispersion relation, dielectric tensor, Langmuir waves

Kapitola 1

Úvod

Plazma je soustava elektricky nabitých částic (iontů, volných elektronů) a neutrálních částic. Podstatnou vlastností plazmatu je, že se v něm mohou tvořit a šířit vlny. Těchto vln může existovat mnoho druhů, lišících se svými vlastnostmi (mluvíme pak o různých módech). Výzkumem chování vln v plazmatu se lze dozvědět mnohé o vlastním plazmatu.

Důležitým případem přírodního plazmatu kosmické plazma, vyplňující meziplanetární prostor. Kosmické plazma je přístupné různým měřením pomocí umělých družic a meziplanetárních sond a umožňuje tak získat cenné poznatky o jeho vlastnostech, které mohou být užitečné i pro výzkum plazmatu z jiných oblastí, např. ve výzkumu termojaderné fúze. Studium vln v kosmickém plazmatu proto přispívá k pochopení mnoha fyzikálních jevů v různých oblastech fyziky.

Tato práce se zabývá metodami analýzy plazmatických vln pomocí disperzní relace. Jsou zde představeny některé analytické a numerické přístupy pro výpočet dielektrického tenzoru a řešení disperzní relace v modelu horkého plazmatu.

Kapitola 2

Teorie šíření vln v plazmatu

Vyšetřujeme-li šíření vln v plazmatu, nejlépe nám poslouží tzv. disperzní relace, tj. rovnice, jenž spolu svazuje (úhlovou) frekvenci ω a vlnový vektor \mathbf{k} .

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.1)$$

Z disperzní relace lze vyčíst mnoho důležitých parametrů vln, zejména fázovou rychlost

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} \quad (2.2)$$

a grupovou rychlost

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (2.3)$$

Dále lze z disperzní relace získat informace o oblasti šíření (tj. na kterých frekvencích se může vlna šířit), mezní frekvence (cutoff)¹, rezonance² a útlum, či naopak buzení daného vlnového módu.

Důležitou veličinou je také vektor indexu lomu

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{k}c}{\omega}. \quad (2.4)$$

2.1 Některé přístupy a aproximace

Základní přístup k popisu plazmatu je kinetická teorie. Jejím základem je tzv. distribuční funkce, definovaná jako hustota částic ve fázovém prostoru.

¹Index lomu jde k nule a vlna se přestává šířit.

²Index lomu diverguje.

Distribuční funkce splňuje Boltzmanovu rovnici. Momenty distribuční funkce přímo souvisí s měřitelnými veličinami³, proto z momentů Boltzmanovy rovnice lze získat rovnice pro tyto veličiny⁴. Tímto způsobem ale nikdy nedostaneme uzavřenou soustavu rovnic, jelikož každý moment Boltzmanovy rovnice obsahuje veličinu, pro jejíž výpočet je nutno vzít v úvahu vyšší moment Boltzmanovy rovnice. Pro praktické výpočty se často vyšší momenty distribuční funkce pokládají rovny nule a soustava momentových rovnic se tak redukuje na uzavřenou soustavu s konečným počtem rovnic. Podle počtu těchto rovnic pak mluvíme o studeném, nebo teplém plazmatu.

2.1.1 Studené plazma

V modelu studeného plazmatu se berou v úvahu pouze první dva momenty Boltzmanovy rovnice (rovnice kontinuity a zákon zachování hybnosti). Tenzor tlaku se pokládá roven nule. V důsledku toho se v modelu předpokládá nulová teplota a distribuční funkce je úměrná Diracově delta-distribuci, centrované na hodnotě makroskopické rychlosti. Model je použitelný, pokud je fázová rychlost mnohem větší než tepelná rychlost.

2.1.2 Teplé plazma

V modelu teplého plazmatu je oproti studenému plazmatu navíc rovnice pro energii, zanedbává se ale tok tepla. Tenzor tlaku je v tomto modelu nenulový a diagonální.

2.1.3 Horké plazma

Nejobecnější a zároveň nejsložitější je model horkého plazmatu. V tomto modelu se již žádný moment zanedbává a je nutno počítat přímo s distribuční funkcí. Často bývá nutné rovnice řešit numericky (viz kapitola 4).

2.2 Dielektrický tenzor

Disperzní relaci plazmatu lze obecně získat z podmínky existence netriviálního řešení homogenní soustavy polních rovnic. Pro dosažení do Maxwelllo-

³Např. nulovým momentem distribuční funkce je číselná hustota částic, prvním momentem střední rychlost apod.

⁴Tzv. makroskopické transportní rovnice

vých rovnic je potřeba vyjádřit hustotu elektrického proudu \mathbf{j} v plazmatu pomocí intenzity elektrického pole \mathbf{E} . Podle [Stix, 1992, str. 4] lze proud vyjádřit jako

$$\mathbf{j} = \sum_s \mathbf{j}_s = \sum_s \sigma_s \cdot \mathbf{E} = \sum_s -i\omega\epsilon_0\chi_s \cdot \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

V této rovnici se sčítá přes všechny druhy s částic, přítomných v plazmatu a \mathbf{j}_s je příspěvek částic typu s k el. proudu, $\sigma_s(\omega, \mathbf{k})$ příspěvek ke konduktivitě $\sigma(\omega, \mathbf{k})$ a $\chi_s(\omega, \mathbf{k})$ je tenzor susceptibility s -té komponenty plazmatu. Dielektrický tenzor je [Stix, 1992, str. 5]

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = I + \sum_s \chi_s(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.6)$$

kde I je jednotkový tenzor.

2.2.1 Dielektrický tenzor ve studeném plazmatu

Tvar dielektrického tenzoru v přiblížení studeného plazmatu uvádí např. [Stix, 1992, str. 7] a [Swanson, 2003, str.24].

$$\epsilon = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 & 0 \\ -\mathcal{K}_2 & \mathcal{K}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{K}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

kde S , D a P ⁵ jsou definovány takto:

$$\mathcal{K}_1 \equiv S \equiv \frac{1}{2}(R + L) \quad (2.8)$$

$$i\mathcal{K}_2 \equiv D \equiv \frac{1}{2}(R - L) \quad (2.9)$$

$$R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega + \omega_{cs})} \quad (2.10)$$

$$L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega - \omega_{cs})} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{K}_3 \equiv P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}. \quad (2.12)$$

⁵Písmena S , D , P , L a R jsou zkratkami pro *sum*, *difference*, *plasma*, *left* a *right*.

V těchto rovnicích ω_{ps} je plazmová frekvence (n_s , q_s a m_s jsou hustota, elektrický náboj a hmotnost částice typu s)

$$\omega_{ps}^2 = \frac{n_s q_s^2}{\epsilon_0 m_s} \quad (2.13)$$

a ω_s je cyklotronová frekvence částic typu s .

$$\omega_{cs} = \frac{q_s B_0}{m_s} \quad (2.14)$$

B_0 je velikost magnetické indukce. V této konvenci ω_{cs} přebírá znaménko náboje daných částic.

Zanedbáme-li iontové členy (pro ω větší než iontové cyklotronové a plazmové frekvence), redukují se složky dielektrického tenzoru na

$$\mathcal{K}_1 = 1 - \frac{X}{1-Y^2} \quad (2.15)$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{iXY}{1-Y^2} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{K}_3 = 1 - X, \quad (2.17)$$

kde

$$X = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (2.18)$$

$$Y = \frac{\omega_{ce}}{\omega}, \quad (2.19)$$

kde ω_{pe} a ω_{ce} je elektronová plazmová a cyklotronová frekvence.

2.2.2 Dielektrický tenzor v teplém plazmatu

V přiblížení teplého plazmatu má již dielektrický tenzor všech devět složek, z nichž ale jen šest je nezávislých [Swanson, 2003, str. 100].

$$\epsilon = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ -K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & -K_{yz} & K_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

kde

$$K_{xx} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 (\omega^2 - k^2 c_e^2 \cos^2 \theta)}{\mathcal{D}} \quad (2.21)$$

$$K_{xy} = \frac{i\omega_{ce}\omega_{pe}^2 (\omega^2 - k^2 c_e^2 \cos^2 \theta)}{\omega \mathcal{D}} \quad (2.22)$$

$$K_{xz} = -\frac{\omega_{pe}^2 k^2 c_e^2 \cos \theta \sin \theta}{\mathcal{D}} \quad (2.23)$$

$$K_{yy} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 (\omega^2 - k^2 c_e^2)}{\mathcal{D}} \quad (2.24)$$

$$K_{yz} = -\frac{i\omega_{ce}\omega_{pe}^2 k^2 c_e^2 \cos \theta \sin \theta}{\omega \mathcal{D}} \quad (2.25)$$

$$K_{zz} = -\frac{\omega_{pe}^2 (\omega^2 - \omega_{ce}^2 - k^2 c_e^2 \sin^2 \theta)}{\mathcal{D}}, \quad (2.26)$$

$\mathcal{D} = \omega^2(\omega^2 - k^2 c_e^2) - \omega_{ce}^2(\omega^2 - k^2 c_e^2 \cos^2 \theta)$ a c_e je tepelná rychlost elektronů.

Uvedený tenzor zahrnuje jen elektrony, iontovou složku získáme prostou záměnou $\omega_{ce} \rightarrow -\omega_{ci}$ a celkový dielektrický tenzor bude součtem dielektrických tenzorů jednotlivých složek plazmatu.

2.2.3 Dielektrický tenzor v horkém plazmatu

Dielektrického tenzoru pro obecnou distribuční funkci $f_0(p_\perp, p_\parallel)$ uvádí např. [Stix, 1992, str. 254]. Tento dielektrický tenzor je dán rovnicí 2.6, kde tenzor susceptibility má tvar

$$\chi_s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega \omega_{cs}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty 2\pi p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \left(\frac{\Omega}{\omega - k_\parallel v_\parallel - n\Omega} \mathbf{S}_n \right)_s, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \frac{n^2 J_n^2}{z^2} p_\perp U & \frac{in J_n J_n'}{z} p_\perp U & \frac{n J_n^2}{z} p_\perp W \\ -\frac{in J_n J_n'}{z} p_\perp U & (J_n')^2 p_\perp U & -i J_n J_n' p_\perp W \\ \frac{n J_n^2}{z} p_\parallel U & i J_n J_n' p_\parallel U & J_n^2 p_\parallel W \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

kde $J_n = J_n(z)$ je Besselova funkce argumentu $z = k_\perp v_\perp / \Omega$, $\Omega = \Omega(p_\perp, p_\parallel) = \omega_c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ je relativistická cyklotronová frekvence a

$$U = \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right), \quad (2.29)$$

$$W = \left(1 - \frac{n\Omega}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel} + \frac{n\Omega p_\parallel}{\omega p_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}. \quad (2.30)$$

Dosadíme-li za obecnou distribuční funkci f_0 anizotropní bimaxwellovské rozdělení s driftem ve směru neporušené složky magnetického pole \mathbf{B}_0 ,

dostaneme dielektrický tenzor ve tvaru [Swanson, 2003, str. 175]

$$\epsilon = \begin{pmatrix} K_1 + \sin^2 \psi K_0 & K_2 - \cos \psi \sin \psi K_0 & \cos \psi K_4 + \sin \psi K_5 \\ -K_2 - \cos \psi \sin \psi K_0 & K_1 + \cos^2 \psi K_0 & \sin \psi K_4 - \cos \psi K_5 \\ \cos \psi K_4 - \sin \psi K_5 & \sin \psi K_4 + \cos \psi K_5 & K_3 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

kde ψ je úhel mezi průmětem vlnového vektoru do roviny x - y a osou x , tj. $k_x = k_\perp \cos \psi$ a $k_y = k_\perp \sin \psi$. Osa z je položena ve směru neporušené složky magnetického pole \mathbf{B}_0 . Dále je

$$\begin{aligned} K_0 &= 2 \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 e^{-\lambda_s}}{\omega k_z v_{ls}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_s (I_n - I'_n) \\ &\quad \left[\left(1 - \frac{k_z v_{0s}}{\omega}\right) Z(\zeta_{ns}) + \frac{k_z v_{ls}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}}\right) \frac{Z'(\zeta_{ns})}{2} \right] \\ K_1 &= 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 e^{-\lambda_s}}{\omega k_z v_{ls}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 I_n}{\lambda_s} \\ &\quad \left[\left(1 - \frac{k_z v_{0s}}{\omega}\right) Z(\zeta_{ns}) + \frac{k_z v_{ls}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}}\right) \frac{Z'(\zeta_{ns})}{2} \right] \\ K_2 &= i \sum_s \frac{\epsilon_s \omega_{ps}^2 e^{-\lambda_s}}{\omega k_z v_{ls}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n (I_n - I'_n) \\ &\quad \left[\left(1 - \frac{k_z v_{0s}}{\omega}\right) Z(\zeta_{ns}) + \frac{k_z v_{ls}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}}\right) \frac{Z'(\zeta_{ns})}{2} \right] \\ K_3 &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 e^{-\lambda_s}}{\omega k_z v_{ls}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \left(\frac{\omega + n \omega_{cs}}{k_z v_{ls}} \right) \\ &\quad \left\{ \left[1 + \frac{n \omega_{cs}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}}\right)\right] Z(\zeta_{ns}) + \frac{2n \omega_{cs} T_{\parallel s} v_{0s}}{\omega T_{\perp s} v_{ls}} \left[Z(\zeta_{ns}) + \frac{k_z v_{ls}}{\omega + n \omega_{cs}} \right] \right\} \\ K_4 = K_6 &= \sum_s \frac{k_\perp \omega_{ps}^2 e^{-\lambda_s}}{\omega \omega_{cs} k_z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n I_n}{\lambda_s} \\ &\quad \left\{ \frac{n \omega_{cs} v_{0s}}{\omega v_{ls}} Z(\zeta_{ns}) + \left[\frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}} - \frac{n \omega_{cs}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}}\right) \right] \frac{Z'(\zeta_{ns})}{2} \right\} \\ K_5 = K_7 &= i \sum_s \frac{\epsilon_s k_\perp \omega_{ps}^2 e^{-\lambda_s}}{\omega \omega_{cs} k_z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_n - I'_n) \\ &\quad \left\{ \frac{n \omega_{cs} v_{0s}}{\omega v_{ls}} Z(\zeta_{ns}) + \left[\frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}} - \frac{n \omega_{cs}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp s}}{T_{\parallel s}}\right) \right] \frac{Z'(\zeta_{ns})}{2} \right\}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

a $\epsilon_s = q_s/|q_s|$, v_0 je podélná složka makroskopické rychlosti, v_l , resp. v_t je podélná (ve směru \mathbf{B}_0), resp. příčná složka tepelné rychlosti ($v_l^2 \equiv 2\kappa T_{\parallel}/m$ a $v_t^2 \equiv 2\kappa T_{\perp}/m$). T_{\parallel} a T_{\perp} je podélná a příčná teplota a κ je Boltzmanova konstanta. $I_n \equiv I_n(\lambda_s)$ je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu s argumentem $\lambda_s = \frac{k_\perp^2 v_{ts}^2}{2\omega_{cs}^2}$. Dále je $\zeta_{ns} = \frac{\omega + n \omega_{cs} - k_z v_{0s}}{k_z v_{ls}}$ a konečně $Z(\zeta)$ je plazmová disperzní funkce definovaná pro $Im(\zeta) > 0$ jako [viz. Swanson, 2003, str. 401]

$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{\xi - \zeta}. \quad (2.33)$$

Ve výše uvedených vzorcích suma přes s značí sčítání přes všechny druhy částic v plazmatu.

2.3 Disperzní relace

Z Maxwellových rovnic lze odvodit vlnovou rovnici ve tvaru:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0 \quad (2.34)$$

Použijeme-li dále aproximaci rovinné vlny s vlnovým vektorem \mathbf{k} a úhlovou frekvencí ω , dostaneme:

$$\frac{N^2}{k^2} \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} - N^2 \mathbf{E} + \epsilon \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.35)$$

Z podmínky existence netriviálního řešení pro \mathbf{E} , tj. aby determinant soustavy byl roven nule, obdržíme disperzní relaci 2.1.

2.3.1 Disperzní relace studeného plazmatu

Disperzní relaci studeného plazmatu můžeme psát ve tvaru (viz např. [Stix, 1992, str. 8] a [Swanson, 2003, str. 21])

$$AN^4 - BN^2 + C = 0, \quad (2.36)$$

kde

$$A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta \quad (2.37)$$

$$B = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta) \quad (2.38)$$

$$C = PRL \quad (2.39)$$

a θ je úhel mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} a osou z , kterou jsme položili ve směru neporušené složky magnetického pole \mathbf{B}_0 .

Řešení této disperzní relace pro některé hodnoty parametrů, zejména pro hodnoty $\theta = 0$ (paralelní šíření) a $\theta = \pi/2$ (vlna se šíří kolmo ke směru magnetického pole) lze najít např. v [Chen, 1984, str. 78] a [Swanson, 2003, str. 22].

2.3.2 Disperzní relace teplého plazmatu

Disperzní relaci teplého plazmatu uvádí např. [Swanson, 2003, str. 101].

$$\begin{aligned} & [(K_{xx} - N^2 \cos^2 \theta)(K_{yy} - N^2) + K_{xy}^2]K_{zz} - N^2 \sin^2 \theta [K_{xx}(K_{yy} - N^2) + K_{xy}^2] + \\ & + (2N^2 \cos \theta \sin \theta + K_{xz})[K_{xy}K_{yz} - K_{xz}(K_{yy} - N^2)] + \\ & + K_{xy}K_{yz}K_{xz} + K_{yz}^2(K_{xx} - N^2 \cos^2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.3.3 Disperzní relace horkého plazmatu

Disperzní relace v horkém plazmatu je obecně potřeba řešit numerickými metodami. Ve speciálním případě, zavedeme-li $\alpha_s \equiv \frac{\omega^2}{c^2} K_s$ a $\gamma \equiv k_z^2 - \alpha_1$, dostaneme disperzní relaci horkého plazmatu s anizotropním Maxwellovským rozdělením ve tvaru [Swanson, 2003, str.177]

$$\begin{aligned} & [\gamma(\gamma - \alpha_0 + k_\perp^2) + \alpha_2^2]\alpha_3 + k_\perp^2[(\gamma - \alpha_0 + k_\perp^2)\alpha_1 - \alpha_2^2] \\ & + \alpha_4(\gamma - \alpha_0 + k_\perp^2)(2k_\perp k_z + \alpha_4) - \alpha_5[\gamma\alpha_5 + 2\alpha_2(k_\perp k_z + \alpha_4)] = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.4 Metody zobrazení disperzních relací

2.4.1 CMA diagram

Při řešení disperzní relace studeného plazmatu (viz. rovnice 2.36) zjišťujeme, že existuje mnoho kategorií vln, rozlišené například podle směru šíření vzhledem k magnetickému poli, podle velikosti magnetického pole, podle frekvence či podle hustoty plazmatu, v němž se vlna šíří atd. Ke zpřehlednění této situace je vhodný tzv. CMA diagram⁶ (např. [Chen, 1984, str. 135] a [Stix, 1992, str. 3]). CMA diagram ukazuje tvary (normálové plochy) závislosti fázové rychlosti vlny na úhlu mezi směrem magnetického pole \mathbf{B} a vlnovým vektorem \mathbf{k} . CMA diagram říká, zda se daná vlna bude v určité oblasti šířit, a pokud ano, zobrazí její normálovou plochu. Diagram je rozdělen na oblasti rezonancemi a mezními frekvencemi. CMA diagram je vhodný jen pro zobrazení vln ve studeném plazmatu, v ostatních případech se stává pro svoji složitost nepřehledný.

⁶podle P. C. Clemmowa, R. F. Mullalyho a W. P. Allise

2.4.2 Disperzní povrchy

Dalším způsobem, jak zobrazit řešení disperzních relací, jsou tzv. disperzní povrchy. Disperzní povrch je graf závislosti frekvence na komponentech vlnového vektoru. Toto zobrazení má výhodu v tom, že ukazuje závislost frekvence na vlnovém vektoru pro všechny směry šíření vlny a jednoduše odhaluje, jak spolu jednotlivé módy souvisí. Další výhodou disperzních povrchů je, že grupovou rychlost (viz. rovnice 2.3) lze přímo odečíst z grafu; směr grupové rychlosti v daném bodě disperzního povrchu je určen směrem jeho největšího sklonu a velikost pak tímto sklonem.

Pomocí disperzních povrchů prezentoval výsledky své práce např. [André, 1985], který numericky řešil disperzní relace vln v nerelativistickém, bezsrážkovém a homogenním zmagnetizovaném plazmatu pomocí programového kódu WHAMP (viz. kapitola 4.1). Andrého práce podává přehled některých důležitých módů vln pro řadu parametrů plazmatu a dobře slouží jako průvodce při srovnávání teorie s pozorováním, vyšetřování mezi platnosti aproximativních výrazů a rovněž jako východisko pro detailnější numerické výpočty za pomocí programu WHAMP.

2.4.3 Frekvenční závislost indexu lomu

K prezentaci svých výsledků studia módové struktury v blízkosti plazmové frekvence zvolili autoři práce [Santolik a kol., 2001] metodu zobrazení indexu lomu v závislosti na frekvenci a úhlu θ mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} směrem neporušené složky magnetického pole \mathbf{B}_0 . Pro různé vlnové módy (hvizdový mód, řádný mód a Z-mód) tak mohli přímo interpretovat rezonance a mezní frekvence. Výhoda tohoto postupu spočívá ve snadné porovnatelnosti experimentálních a teoretických výsledků.

Kapitola 3

Některé výsledky výzkumu vln v kosmickém plazmatu

3.1 Elektrostatické a elektromagnetické vlny v kosmickém plazmatu

V roce 1999 byla prezentována v práci [Lakhina, Tsurutani, 1999] lineární teorie buzení širokopásmových PCBL¹ plazmatických vln (o PCBL vlnách viz. např. [Tsurutani, 2001]). O těchto vlnách, analyzovaných zejména z měření družice Polar [viz. Gurnett, 1995], se již dříve předpokládalo, že se jedná o směs elektromagnetického hvizdového módu a elektrostatické vlny. Autoři [Lakhina, Tsurutani, 1999] odvodili disperzní relaci těchto vln a ukázali, že opravdu zobecňuje disperzní relace elektrostatického a elektromagnetického módu. Tyto módy jsou obecně provázané a disperzní relaci je nutno řešit numericky.

Willes, Cairns [2000] podrobně vyšetřili vztahy mezi Langmuirovými, hvizdovými módy a Z-módy ve zmagnetizovaném plazmatu pro všechny poměry ω_c/ω_p . Ve své práci ukazují disperzní relaci zobecněné Langmuirovy vlny v longitudálním přiblížení (tj. při výpočtu disperzní relace berou v úvahu jen longitudální složku dielektrického tenzoru)²

$$\omega_L^2 = [\omega^2 \pm \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \frac{k^2 v^2}{\omega^2} f(\frac{\omega_c}{\omega}, \theta) + \dots]_{\omega^2 = \omega_{\pm}^2}, \quad (3.1)$$

¹PCBL (Polar Cap Boundary Layer) je hraniční vrstva mezi uzavřenými a otevřenými siločárami magnetického pole planety.

²Vynecháváme zde index e , značící elektronovou složku plazmatu.

kde v je tepelná rychlost,

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}[\omega_p^2 + \omega_c^2 \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_c^2 \cos^2 \theta}] \quad (3.2)$$

a

$$f(x, \theta) = 3 \cos^4 \theta - \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{x^2} - \frac{\sin^4 \theta}{x^2(1-x^2)} + \frac{(1+3x^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{x^2(1-x^2)^3} + \frac{\sin^4 \theta}{x^2(1-4x^2)}. \quad (3.3)$$

Kladné řešení ω_{L+} platí pro $\omega_c < \omega_p$ a odpovídá kombinaci Langmuirova a Z-módu. Disperzní relace se pro $\omega_c \ll \omega_p$ zjednodušuje na rovnici

$$\omega_L^2(k, \theta) = \omega_p^2 + \omega_c^2 \sin^2 \theta + 3k^2 v^2 + \dots, \quad (3.4)$$

kteřá se v limitě $\omega_c \rightarrow 0$ redukuje na disperzní relaci nezmagnetizované Langmuirovy vlny

$$\omega_L^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v^2. \quad (3.5)$$

Záporné řešení ω_{L-} platí pro $\omega_c > \omega_p$ a odpovídá kombinaci Langmuirova a hvizdového módu. Rovnice se pro $\omega_c \gg \omega_p$ zjednodušuje na

$$\omega_L^2(k, \theta) = \omega_p^2 \cos^2 \theta + 3k^2 v^2 \cos^2 \theta + \dots \quad (3.6)$$

Pro nízká vlnová čísla dominují magnetické efekty a longitudální aproximace pozbývá platnost.

Tyto analytické předpovědi autoři potvrdili numerickým řešením disperzní rovnice plazmatu, a to i za přítomnosti elektronového svazku. Rovněž stanovili rozsah platnosti použitých aproximací.

Na vztah mezi Langmuirovou vlnou a Z-modem narazil i Krauss-Varban [1989], který se v citované práci zabýval buzením Z-módu. Ukazuje, že parametr buzení Z-módu v modelu zmagnetizovaného plazmatu, skládajícího se z horkých elektronů a studeného pozadí, odpovídá parametru buzení elektrostatické Langmuirovy vlny.

3.2 Relativistické plazma

Slabě relativistickým studeným plazmatem se zabýval [Sazhin, 1987], který upozorňuje, že na mnoho aspektů šíření vln v horkém anisotropním

plazmatu, do té doby uvažovaných jen v nerelativistické limitě, je potřeba nahlížet relativisticky a to i v případě, že střední tepelná rychlost plazmatu je velmi malá vzhledem k rychlosti světla. Ukazuje například, že mezní frekvence v slabě relativistickém plazmatu jsou posunuté oproti odpovídajícím frekvencím v nerelativistickém studeném plazmatu a frekvenční oblast šíření se tak rozšiřuje.

Relativistickou disperzní relaci isotropního plazmatu uvádí Godfrey a kol. [1975]. Ve citované práci vyřešili disperzní relaci Langmuirových vln v jednodimenzionálním relativistickém plazmatu a ukázali, že je v dobré schodě s výsledky počítačových simulací.

Analytickou aproximaci pro relativistické teploty $T > m_{0e}c^2/\kappa$ (m_{0e} je klidová hmotnost elektronu) zmíněné disperzní rovnice odvodili Luo, Melrose [2004]. Ukazují, že odvozená aproximace je použitelná pro studium vln v plazmatu pulzarů, které dobře splňuje podmínky platnosti tohoto přiblížení. Dokládají to porovnáním s numerickými výpočty.

3.3 Planetární rázová vlna

Planetární rázová vlna vzniká způsobená nárazem slunečního větru, pohybujícího se vzhledem k planetě nadzvukovou rychlostí, do magnetosféry planety. Způsobuje, že se část kinetické energie slunečního větru přeměňuje v tepelnou energii plazmatu a že dochází k odklonu dopadajících částic z původního směru. Část dopadajících elektronů a iontů se od rázové vlny odráží zpět. Oblast, kam se mohou tyto částice odrážet, se nazývá foreshock. Odražené částice pak mají nenulovou rychlost vzhledem k původnímu slunečnímu větru a tento vzájemný pohyb³ způsobuje generování Langmuirových vln [Kellog, 2003].

Oblast v okolí planetárních rázových vln má velký význam pro výzkum vlnových jevů v kosmickém plazmatu. V této oblasti bylo tedy provedeno mnoho družicových měření Langmuirových vln, a to nejen u Země (např. [Cairns a kol., 1997], [Sigsbee a kol., 2004a], [Sigsbee a kol., 2004b], [Soucek a kol., 2003], [Soucek a kol., 2005]), ale také u Venuše [Hospodarsky a kol., 1994], Jupiteru, Uranu [Xue a kol., 1996] a Saturnu [Hospodarsky a kol., 2005].

³Tzv. dvojsvazková nestabilita.

Kapitola 4

Numerické procedury pro analýzu vln v plazmatu

4.1 WHAMP

WHAMP (Waves in Homogeneous Anisotropic Multi component Plasmas) je počítačový kód v jazyce FORTRAN, sestavený v roce 1982 Rönmarkem [Rönmark, 1982]. Umožňuje numerické výpočty disperzních relací vln v homogenním anisotropním plazmatu, nacházejícím se v magnetickém poli. Model plazmatu se může skládat až ze šesti složek, kde každá komponenta je určena svoji hustotou, teplotou, hmotou a elektrickým nábojem částic, anisotropií a driftovou rychlostí podél vnějšího magnetického pole. Program využívá tzv. Padého aproximaci plazmatické disperzní funkce, což umožní redukci nekonečných sum modifikovaných Besselových funkcí a dospět tak k výrazu vhodném pro numerické výpočty. Podrobněji je tento postup popsán v [Rönmark, 1983].

4.2 HOTRAY

HOTRAY je program vyvinutý Richardem Hornem [Horne, 1989], který provádí ray-tracing (sledování paprsku) v horkém bezsrážkovém zmagnetizovaném plazmatu. Umožňuje sledovat buzení či útlum široké škály vln během šíření plazmatem. Přesnost výpočtů je omezena linearitou (malými amplitudami vln), WKB¹ aproximací (tj. vlnová délka vlny musí být malá vzhle-

¹Wentzel, Kramer a Brillouin

dem k prostorovým gradientům) a na nerelativistické efekty. Relativistické rozšíření pro kvazilineární výpočty ve studeném plazmatu představili autoři v práci [Glauert, Horne, 2005] pod názvem PADIE. Tento program již pracuje s plně relativistickou disperzní relací a lze použít pro všechny lineární vlnové módy v plazmatu libovolné hustoty.

4.3 WDF

WDF (Wave distribution function) je souhrnné označení souboru kódů v jazyce FORTRAN pro řešení disperzní relace horkého plazmatu. Na rozdíl od programu WHAMP nepočítá závislost frekvence na vlnovém vektoru, nýbrž umožňuje určit index lomu v závislosti na frekvenci a směru vlnového vektoru (tj. na úhlu θ). Program je popsán v pracích [Santolik, 1995] a [Santolik, Parrot, 1996].

Kapitola 5

Příklad použití numerických procedur pro analýzu vln v kosmickém plazmatu

V této kapitole je provedena analýza šíření Langmuirových vln v plazmatu, nacházejícího se v oblasti foreshocku planety Saturn. Výsledky byly získány pomocí programu WDFM (viz. kapitola 4.3).

5.1 Popis modelu plazmatu

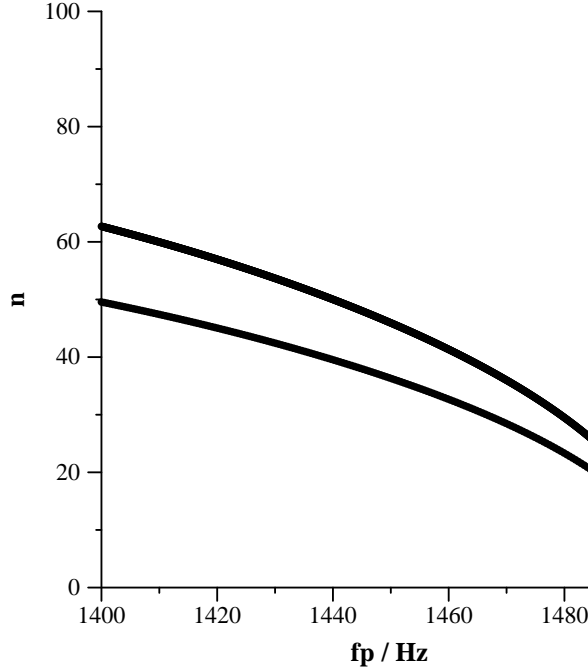
Pro výpočty byl použit model plazmatu skládající se ze studených iontů (protonů) tvořících pozadí a horkých elektronů. Cyklotronová frekvence elektronů je $\omega_{ce}=10\text{Hz}$ a teplota elektronů, pokud není uvedeno jinak $T=5\text{eV}$. Při výpočtech jsem udržoval konstantní měřící frekvenci o hodnotě $f=1500\text{Hz}$. Tyto parametry byly získány z měření sondy Cassini během jejího průletu okolo planety Saturn [Hospodarsky a kol., 2005].

5.2 Výsledky

Pro výše uvedené parametry plazmatu, pro hodnoty plazmové frekvence v okolí měřící frekvence a pro různé hodnoty úhlu θ jsem pomocí programu WDFM počítal index lomu.

V grafu č. 1. je vynesena závislost indexu lomu na plazmové frekvenci pro $\theta = 0^\circ$ a pro dvě různé teploty elektronové složky plazmatu $T = 5\text{eV}$ a

Graf č. 1. Graf závislosti indexu lomu na plazmové frekvenci pro $\theta = 0^\circ$. Horní křivka odpovídá teplotě elektronové složky plazmatu $T = 5eV$, dolní křivka teplotě $T = 8eV$.

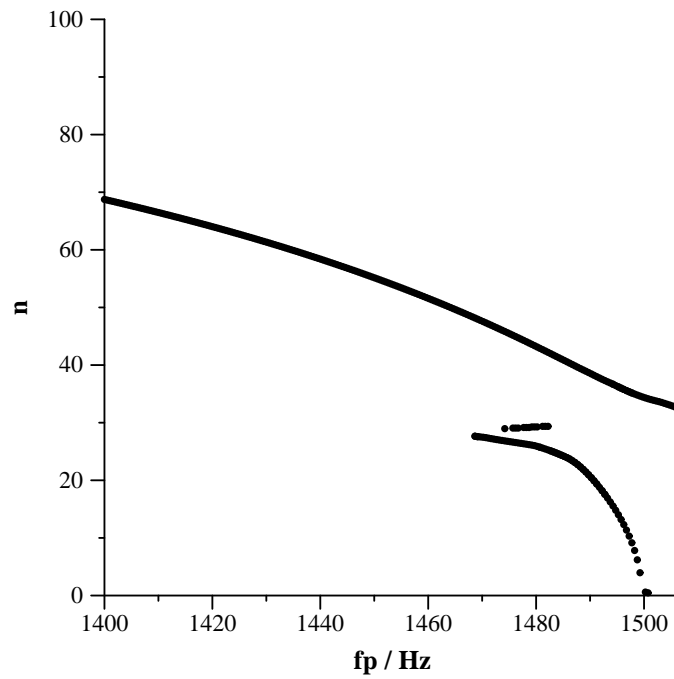


$T = 8eV$. Je vidět, že numericky získané křivky souhlasí s disperzní relací Langmuirových vln (rovnice 3.4). Vlna se šíří pokud je frekvence větší než plazmová frekvence.

V grafu č. 2 jsou společně zobrazeny závislosti indexu lomu několika vlnových módu na plazmové frekvenci pro $\theta = 10^\circ$. Nejvyšší plazmová frekvence, pro kterou se podařilo nalézt vlnový mód je přibližně $f_{p,max10} \doteq 1507\text{Hz}$. Nejnižší hodnota indexu lomu tohoto módu je zhruba $N \doteq 32$. V grafu je rovněž vidět vlnový mód, jehož index lomu klesá k nule pro $f_p = f = 1500\text{Hz}$, podobně jako v grafu č. 1. Tento mód bylo možno nalézt pro plazmové frekvence $1468\text{Hz} < f_p < 1500\text{Hz}$. Je možné, že oba módy jsou jen částmi jediného vlnového módu, čemuž nasvědčuje i několik hodnot indexu lomu $N \doteq 29$, získaných pro $1475 < f_p < 1480\text{Hz}$. Tuto hypotézu se ale zatím nepodařilo prokázat.

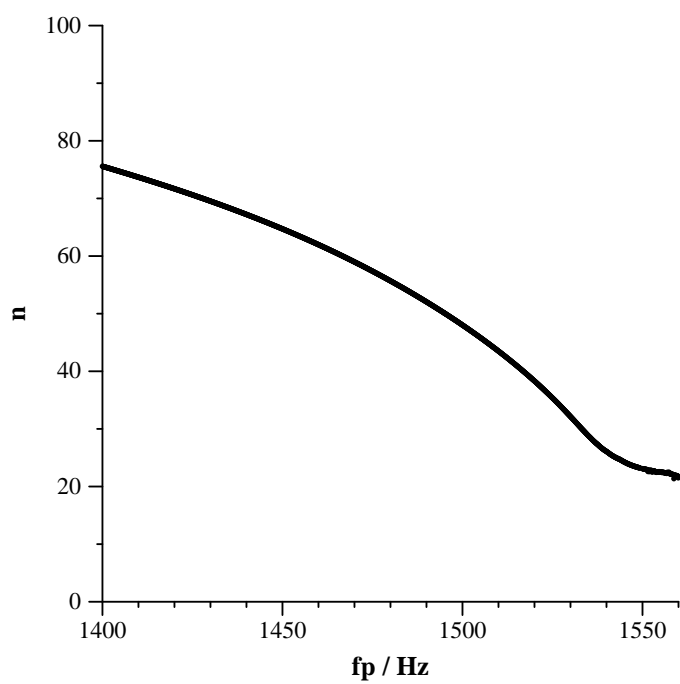
Podobné chování se objevuje i pro $\theta = 15^\circ$ (viz. grafu č. 3, kde je ale

Graf č. 2. Graf závislosti indexu lomu na plazmové frekvenci pro $\theta = 10^\circ$.



již zobrazen jen jeden vlnový mód). Po porovnání s předchozím grafem je vidět, že se posunula limitní plazmová frekvence, pro kterou se vlna ještě šíří na hodnotu přibližně $f_{p,max15} \doteq 1560$ Hz.

Graf č. 3. Graf závislosti indexu lomu na plasmové frekvenci pro $\theta = 15^\circ$.



Kapitola 6

Závěr

Jak je v této práci ukázáno, disperzní relace horkého plazmatu je velmi složitá a i po použití různých aproximací bývá nakonec nutné rovnici řešit numericky. Existuje několik numerických procedur (resp. počítačových programů), požitelné pro širokou řadu parametrů a různé modely plazmatu. Vzhledem k době vzniku programů a bouřlivému rozvoji výpočetní techniky ztrácí u některých kódů na významu přílišná optimalizace a existuje tak prostor pro jejich zpřesnění (např. Padého aproximace v kódu WHAMP).

V předchozí kapitole jsem prezentoval některé výsledky použití programu WDFM pro studium módů horkého plazmatu v okolí plazmové frekvence. Přitom jsem narazil na zajímavé chování pro vlnové frekvence mírně větší než plazmová frekvence a pro vlnové vektory skloněné pod malými úhly od směru stacionárního magnetického pole. Podrobnější analýza a interpretace však přesahuje možnosti této práce. Toto chování by si jistě zasluhovalo další pozornost.

Literatura

- André M.: *Dispersion surfaces*, J. Plasma Physics **33** (1985) 1-19.
- Cairns I. H., Robinson P. A., Anderson R. R., Strangeway R. J.: *Foreshock Langmuir waves for unusually constant solar wind conditions: Data and implications for foreshock structure*, Journal of Geophysical Research **102** (1997) 24249-24264.
- Chen F. F.: *Úvod do fyziky plazmatu*, Academia, Praha, 1984.
- Glauert A., Horne R. B.: *Calculation of pitch angle and energy diffusion coefficients with the PADIE code*, Journal of Geophysical Research **10** (2005) 1-15
- Godfrey B. B., Newberger B. S., Taggart K. A.: *A relativistic plasma dispersion function*, IEEE Transactions on Plasma Science **PS-3** (1975) 60-67.
- Gurnett D. D.: *The Polar Plasma Wave Instrument*, Space Science Review **71** (1995) 591-622.
- Horne R. B.: *Path-integrated growth of electrostatic waves - The generation of terrestrial myriametric radiation*, Journal of Geophysical Research **94** (1989) 8895-8909.
- Hospodarsky G. B., Gurnett D. A., Kurth W. S., Kivelson M. G., Strangeway R. J., Bolton S. J.: *Fine structure of Langmuir waves observed upstream of the bow shock at Venus*, Journal of Geophysical Research **99** (1994) 13363-13371.
- Hospodarsky G. B., Kurth W. S., Gurnett D. A., Zarka P., Canu P., Dougherty M., Jones G. H., Coates A., Young D. T.: *High resolution measurements of Langmuir waves upstream of the Saturnian bow shock*, AGU Spring Meeting Abstracts (2005) A3+.

- Kellog, P. J.: *Langmuir waves associated with collisionless shocks; a review*, Planet. Space Sci. **51** (2003) 681-691.
- Kracik J., Tobiás J.: *Fyzika plazmatu*, Academia, Praha, 1966.
- Krauss-Varban D.: *Beam instability of the z mode in the solar wind*, Journal of Geophysical Research **94** (1989) 3527-3534.
- Lakhina G. S., Tsurutani B. T.: *A generation mechanism for the polar cap boundary layer broadband plasma waves*, Journal of Geophysical Research **104** (1999) 279-291.
- Luo Q., Melrose D. B.: *Approximate plasma dispersion function at relativistic temperatures*, J. Plasma Physics **70** (2004) 709-718.
- Rönnmark K.: *Waves in Homogeneous, anisotropic, multi component plasmas*, Rep. 179, Kiruna Geophys. Inst., Kiruna, Sweden, 1982.
- Rönnmark K.: *Computation of the dielectric tensor of a Maxwellian plasma*, Plasma Phys., **25** (1983) 699-701.
- Santolík O.: *Etude de la fonction de distribution des ondes dans un plasma chaud*, PhD thesis, Université d'Orléans, France, 1995.
- Santolík O., Parrot M.: *The wave distribution function in a hot magnetospheric plasma: The direct problem*, Journal of Geophysical Research **101** (1996) 10639-10652.
- Santolík O., Lefeuvre F, Parrot M., Rauch J. L.: *Propagation of Z-mode and whistler-mode emissions observed by Interball2 in the nightside auroral region*, Journal of Geophysical Research **106** (2001) 21137-21146.
- Sazhin S. S.: *An approximate theory of electromagnetic wave propagation in a weakly relativistic plasma*, J. Plasma Physics **37** (1987) 209-230
- Sigsbee K., Kletzing C., Gurnett D., Pickett J., Balogh A., Lucek E.: *Statistical behavior of foreshock Langmuir waves observed by the Cluster wideband data plasma wave receiver*, Annales Geophysicae **22** (2004) 2337-2344.
- Sigsbee K., Kletzing C., Gurnett D., Pickett J., Balogh A., Lucek E.: *The dependence of Langmuir wave amplitudes on position in Earth's foreshock*, Annales Geophysicae **31** (2004) 7805.

- Soucek J., Dudok de Wit T., Krasnoselskikh V., Volokitin A.: *Statistical analysis of nonlinear wave interactions in simulated Langmuir turbulence data*, *Annales Geophysicae* **21** (2003) 681-692.
- Soucek J., Krasnoselskikh V., Dudok de Wit T., Pickett J., Kletzing C.: *Nonlinear decay of foreshock Langmuir waves in the presence of plasma inhomogeneities: Theory and Cluster observations*, *Journal of Geophysical Research* **110** (2005) 8102.
- Stix T. H.: *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, New York, 1992.
- Swanson D.: *Plasma Waves, Second Edition*, Institute of physics Publishing, London, 2003.
- Tsurutani B. T. a kol.: *Polar cap boundary layer waves: An auroral phenomenon*, *Journal of Geophysical Research* **106** (2001) 19035-19056.
- Willes A. J., Cairns I. H.: *Generalized Langmuir waves in magnetized kinetic plasmas*, *Physics of Plasmas* **7** (2000) 3167-3180.
- Xue S., Cairns I. H., Smith C. W., Gurnett, D. A.: *A study of Uranus' bow shock motions using Langmuir waves*, *Journal of Geophysical Research* **101** (1996) 7659-7676.