Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Václav Mácha

Obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním

Katedra matematické analýzy

Vedoucí práce: RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2006

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 23.5.2006 Václav Mácha

Václav Mácha

Obsah

Název práce: Obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním
Autor: Václav Mácha
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
e-mail vedoucího: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme systémy obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním. Zkoumáme vlastnosti řešení, jeho existenci, jednoznačnost a spojitou závislost na počátečních podmínkách v systémech s neomezeným a omezeným zpožděním. Systémy s omezeným zpožděním jsou chápány jako funkcionální diferenciální rovnice. Motivace zkoumání diferenciálních rovnic se zpožděním je vysvětlena v úvodu.
Klíčová slova: zpoždění, zpožděné diferenciální rovnice, funkcionální rovnice.

Title: Delay differential equations
Author: Václav Mácha
Department: Název katedry či ústavu v angličtině
Supervisor: RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study systems of differential equations with delay. We research properties of solution, its uniqueness, existence and continuous dependence on initial conditions in systems with unbounded and bounded delay. Systems with bounded delay are understood as functional differential equation. Motivation of research of differential equation with delay is explained at the beginning.
Keywords: delay, delay differential equation, functional equation.

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním slouží modelování reálných situací, ve kterých přírůstek, nebo úbytek veličiny závisí na stavu, který byl v minulosti. Příkladem může být rovnice pro **růst populace savců**:

$$x'(t) = cx(t),$$

kterou upravím tím, že započítám dobu březosti r:

$$x'(t) = cx(t-r).$$

Zde r zastupuje roli zpoždění. První otázka je, jaký druh počáteční podmínky musíme použít, abychom dostali jednoznačné řešení. Přirozená odpověď je použít počáteční funkci definovanou na intervalu délky r. Nechť má tedy počáteční podmínka tvar:

$$x(t) = \theta(t)$$

pro $t \in [t_0 - r, t_0]$
V našem případě růstu populace předpokládejme, že počáteční podmínka má konstantní tvar:$\theta(t) \equiv \theta_0$ (což odpovídá tomu, že na počátku máme populaci, která je po dobu březosti konstantní, a až pak začne růst). Rovnici lze potom vyřešit tzv. *metodou kroků*:
Na intervalu $[t_0, t_0 + r]$ má rovnice tvar:

$$x'(t) = c\theta(t),$$

tedy

$$x'(t) = c\theta_0$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = \theta_0$. Řešení na intervalu $[t_0, t_0 + r]$ má tvar

$$x(t) = \theta_0 + c\theta_0(t - t_0).$$

Ze znalosti řešení na intervalu $[t_0, t_0 + r]$ můžeme sestavit rovnici na intervalu $[t_0 + r, t_0 + 2r]$:

$$x'(t) = c\theta_0 + c^2\theta_0(t - r - t_0)$$

s počáteční podmínkou $x(t_0 + r) = \theta_0 - cr\theta_0$.
Takto můžu postupovat po intervalech délky r dále. Metoda kroků je sice pěkná,

ale výpočty se brzo stanou složitými a z metody kroků se velice těžko odvozují i ty nejzákladnější vlastnosti řešení.

Populace kořisti a dravce: Mějme prostředí, ve kterém žijí dva druhy zvířat. Jedno ze zvířat (kořist) bude požírána druhým (dravcem). Populaci kořisti v čase t označme $x(t)$, populaci dravce $y(t)$. Pak zjednodušený model populace těchto dvou druhů bude popsán soustavou diferenciálních rovnic:

$$x'(t) = a_1x(t) - b_1x(t)y(t)$$

$$y'(t) = -a_2y(t) + b_2x(t)y(t),$$

kde a_1 je konstanta určující vývoj populace kořisti v prostředí bez dravce, a_2 určuje úmrtnost dravce při absenci kořisti a konstanty b_1, b_2 vyjadřují vzájemný vztah kořisti a dravce. V reálném světě dravci nereagují na změnu populace kořisti hned, ale s jistým časovým zpožděním. Naše úvahy také zpřesníme tím, že vložíme do rovnic konstantu P, která bude udávat kapacitu prostředí pro kořist:

$$x'(t) = a_1[1 - x(t)/P]x(t) - b_1y(t)x(t)$$

$$y'(t) = -a_2y(t) + b_2x(t-r)y(t-r).$$

V tomto případě je jednodušší vyřešit zpožděný systém. Použijeme-li metodu kroků, druhá rovnice přejde v lineární rovnici prvního řádu, ze které dostaneme $y(t)$. Po dosazení do první rovnice dostaneme Bernouliho rovnici řešitelnou známou substitucí. Toto je jeden z příkladů zpožděné rovnice, kterou lze řešit jednodušeji než její nezpožděnou verzi.

1.2 Seznámení

1.2.1 Definice. *Zpožděnou diferenciální rovnicí budeme rozumět rovnici*

$$x'(t) = f(t, x(g_1(t)), \dots, x(g_m(t))), \tag{1.2.1}$$

kde $f : [t_0, \beta) \times D^m \to \mathbb{R}^n$ *pro* $t_0, \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq t_0$ *a pro otevřenou oblast* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *a kde* $g_j : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \gamma \leq g_j(t) \leq t$ *pro* $t \geq t_0, j = 1, \dots, m$ *a* $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Počáteční podmínka má tvar*

$$x(t) = \theta(t) \text{ pro } t \in [\gamma, t_0]. \tag{1.2.2}$$

Funkci θ *se říká inicializační funkce.*

1.2.2 Úmluva. *(i) v následujícím textu bude vždy* D *podmnožina* $\mathbb{R}^n$

(ii) norma bez označení bude vždy součtová, tedy $\|\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

1.2.3 Poznámky. *(i) Funkce* g_j *se nazývá "zpožděný argument". Občas se zapisuje ve tvaru* $g_j(t) = t - r_j(t)$, *kde nezáporná funkce* $r_j(t)$ *je "zpoždění".*

(ii) (důležitá) Pokud $t - r \leq g_j(t) \leq t$ *pro* $\forall t \geq t_0$, *pak jde o případ* zpožděné diferenciální rovnice s omezeným zpožděním. *Pokud* $r = 0$, *dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici bez jakéhokoliv zpoždění.*

(iii) (důležitá) Celou diferenciální rovnici můžeme zkrátit do tvaru

$$x'(t) = F(t, x_t), \tag{1.2.3}$$

kde

$$x_t = (x(g_1(t), \ldots, x(g_m(t)))).$$

1.2.4 Definice. *Řešení rovnice 1.2.3 a 1.2.2 je diferencovatelná funkce* $x : [\gamma, \beta_1) \to D$ *pro* $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ *taková, že:*

(i) $\forall t \in [\gamma, t_0] : x(t) = \theta(t)$

(ii) $\forall t \in [t_0, \beta_1) : x'(t) = F(t, x_t)$

Rovnice má jednoznačné řešení na $[\gamma, \beta_1)$, *pokud pro každá dvě řešení* x_1, x_2, *splňující* $x_1(t) = x_2(t)$ *pro* $t \in [\gamma, t_0]$, *platí* $x_1(t) = x_2(t)$ *pro* $t \in [t_0, \beta)$ *shodují.*

1.2.5 Poznámka. *Předpokládáme, že* $f, g_1, \ldots, g_m$ *jsou spojité. Pak pokud* $x : [\gamma, \beta_1) \to D, \beta_1 \in (t_0, \beta)$ *je spojitá funkce, pak i* $F(t, x_t)$ *spojitě závisí na* t. *(Zde předpokládáme, že* x *je řešení, tedy spojité a* $x_t : \mathbb{R} \to D^m$ *je spojité vzhledem k* t*) Odtud plyne, že* x *je řešení rovnice 1.2.1 a 1.2.2 právě když*

$$x(t) = \begin{cases} \theta(t) \text{ pro } t \in [\gamma, t_0] \\ \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s) ds \text{ pro } t \in [t_0, \beta_1). \end{cases}$$

Kapitola 2

Existence a jednoznačnost

2.1 Systémy s neomezeným zpožděním

2.1.1 Definice. *Řekneme, že f je přípustná (s konstantou K) na množině $G \subset J \times D^m$, pokud*

$$\|f(t, \xi_1, \ldots, \xi_m) - f(t, \tilde{\xi_1}, \ldots, \tilde{\xi_m})\| \leq K \max_{j=1,\ldots,m} \|\tilde{\xi_j} - \xi_j\|$$

pro všchna $(t, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ a $(t, \tilde{\xi_1}, \ldots, \tilde{\xi_m})$ z G. Tzn. f je Lipschitzovská v každé kromě první proměnné.

2.1.2 Defince. *Řekneme, že $f : J \times D^m \to \mathbb{R}^n$ je lokálně přípustná, pokud pro každý bod $\eta \in J \times D^m$ existuje okolí U_η tak, že funkce f je přípustná na $U_\eta \cap (J \times D^m)$*

2.1.3 Lemma (Gronwallovo). *Nechť $C \geq 0$ je konstanta, h je nezáporná spojitá funkce definovaná na intervalu J a $t_0 \in J$. Nechť existuje spojitá nezáporná funkce k definovaná na intervalu J tak, že:*

$$k(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} h(s)k(s)ds \right| \quad \text{pro všechna } t \in J.$$

Potom

$$k(t) \leq C \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} h(s)ds \right| \right) \quad \text{pro všechna } t \in J.$$

Důkaz. Pro $t = t_0$ je nerovnost triviální.
Pokud je $h = 0$, je důkaz jednoduchý.
Pro $t > t_0$ a $h > 0$ je výchozí nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$h(t)k(t) - h(t)\left(C + \int_{t_0}^{t} d(s)v(s)ds\right) \leq 0$$

($h(t)$ je nezáporná a integrál je kladný pro předpokládaná t). Zavedu substituci $Q(t) \equiv C + \int_{t_0}^{t} h(s)k(s)ds$:

$$Q'(t) - k(t)Q(t) \leq 0$$

Po přenásobení obou stran rovnice výrazem $\exp(-\int_{t_0}^t h(s)ds)$, který je větší než 0, dostaneme:

$$
\begin{aligned}
Q'(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right) - h(t)Q(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right) &\leq 0 \\
\frac{d}{dt}\left[Q(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right)\right] &\leq 0.
\end{aligned}
$$

Po zintegrování přes t jdoucí od t_0 k t získá nerovnost tvar:

$$
\begin{aligned}
Q(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right) - C &\leq 0 \\
Q(t) &\leq C\exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right).
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, jak byla volena substituce, platí:

$$
k(t) \leq Q(t) \leq C\exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right),
$$

což je námi hledaná nerovnost.
Pro $t < t_0$ se důkaz provede podobně. □

2.1.4 Věta - globální jednoznačnost. *Nechť f je spojitá a lokálně přípustná na $[t_0, \beta) \times D^m$, nechť každá g_j je spojitá a $\gamma \leq g_j(t) \leq t$ na $[t_0, \beta)$ a nechť θ je spojitá na $[\gamma, t_0] \to D$. Pak rovnice 1.2.1 a 1.2.2 má nejvýše jedno řešení na každém intervalu $[\gamma, \beta_1)$, kde $\beta_1 \in (t_0, \beta]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že existují dvě řešení x_1 a x_2 definována na intervalu $[\gamma, \beta_1)$ taková, že $x_1 \neq x_2$. Protože $x_1(t) = x_2(t)$ na intevalu $[\gamma, t_0]$, musí existovat $t \in (t_0, \beta_1)$ tak, že $x_1(t) \neq x_2(t)$.
Označme $t_1 = \inf\{t \in (t_0, \beta_1) : x_1(t) \neq x_2(t)\}$. Ze spojitosti funkcí x_1 a x_2 plyne, že $x_1(t) = x_2(t)$ pro $t \in [\gamma, t_1]$. Existuje tedy okolí U bodu t_1 a okolí V bodu $x_1(g_1(t_1)), \ldots, x_1(g_m(t_m))$ tak, že funkce f je přípustná na $U \times V$. Zvolme libovolný bod $\beta_2, \beta_2 \in U, \beta_2 > t_1$ tak, že $x_{1s}, x_{2s} \in V$ pro $s \in [t_1, \beta_2)$. Nyní pro všechna $t \in [t_1, \beta_2)$ platí rovnost:

$$
\|x_1(t) - x_2(t)\| = \int_{t_1}^t \|(F(s, x_{1s}) - F(s, x_{2s}))\| ds \leq
$$

$$
\leq K \int_{t_1}^t \sup_{t_1 \leq \sigma \leq s} \|x_1(\sigma) - x_2(\sigma)\| ds.
$$

Po substituci $v(s) = \sup_{t_1 \leq \sigma \leq s} \|x_1(\sigma) - x_2(\sigma)\|$:

$$
\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq K \int_{t_1}^t v(s)ds \text{ pro } t \in [t_1, \beta).
$$

Tatáž nerovnost musí platit i pro supremum levé strany, takže:

$$
v(t) \leq K \int_{t_1}^t v(s)ds \text{ pro } t \in [t_1, \beta_2)
$$

Z předchozího lemmatu plyne, že $v(t) = 0$ na intervalu $[t_1, \beta_2)$. V tomto intervalu se tedy rovnají obě řešení a dostáváme spor s volbou t_1. □

2.1.5 Věta - lokální jednoznačnost a existence . *Nechť* $f : [t_0, \beta) \times D^m$ *je spojitá a přípustná. Nechť každá* g_j *je spojitá a* $\gamma \le g_j(t) \le t$ *a nechť funkce* $\theta : [\gamma, t_0] \to D$ *je spojitá. Pak existuje* $0 < \Delta < \beta$ *tak, že rovnice 1.2.1 a 1.2.2 má alespoň jedno řešení na intervalu* $[\gamma, t_0 + \Delta)$.

Důkaz. Definujme $D_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n; \|\xi_i - \theta(g_i(t_0))\| \le \delta; i = 1, \dots, n\}$. Všimněme si, že $D_0 \in D$ pro dostatečně malé δ. Dále zavedeme pomocnou množinu A, $A = \{x(t) \in C([\gamma, t_0 + \Delta]); x(t) = \theta(t) \forall t \in [\gamma, t_0]; x_t \in D_0 \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\}$. Tato množina je pro dost malé $\Delta > 0$ neprázdná, protože tam patří například funkce:

$$y(t) = \begin{cases} \theta(t) \text{ pro } t \in [\gamma, t_0] \\ \theta(t_0) \text{ pro } t \in [t_0, t_0 + \Delta). \end{cases}$$

Na této množině zavedeme operátor T předpisem:

$$Tx(t) = \begin{cases} \theta(t) \text{ pro } t \in [\gamma . t_0] \\ \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s) ds \text{ pro } t \in (t_0, t_0 + \Delta] \end{cases}$$

Nejprve si všimněme, že funkce $F(s, x_s)$ je na intervalu $[t_0, t_0 + \Delta]$ omezená, protože se jedná o spojitou funkci na kompaktním intervalu. Funkce $T(x)$ je tedy stejnoměrně spojitá pro $x \in A$. Protože f je přípustná, je $F(s, x_s)$ stejně omezená pro všechna $x \in A$. Díky tomu je Tx stejně stejnoměrně spojité pro všechna x v A. Ze stejné stejnoměrné spojitosti vyplývá existence $\Delta > 0$ tak malého, že $TA \subset A$. Pevný bod operátoru T je naše hledané řešení. Množina D_0 je uzavřená podmnožina Banachova prostoru (uvažujme normu buď suprémovou ($\|.\|_\infty$), popřípadě suprémum součtové normy, pokud jde o prostor vektorových funkcí ($\|.\|_{\infty,s}$)). Pokud dokážeme, že operátor T je kontrakce, Banachova věta o kontrakci nám dá existenci a jednoznačnost řešení.

$$\|T(x) - T(y)\|_{\infty,s} = \| \int_{t_0}^{t} [F(s, x_s) - F(s, y_s)] ds \|_{\infty,s} \le$$

$$\le \| \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_s) - F(s, y_s)\| ds \|_\infty \le \| \int_{t_0}^{t} K_n \|x_s - y_s\| ds \|_\infty \le$$

$$\le K_n \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x_s - y_s\| ds \le K_n \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x - y\|_{\infty,s} ds \le$$

$$\le K_n \Delta \|x - y\|_{\infty,s}$$

Pro dostatečně malé Δ bude $K_n \Delta < 1$ a věta je dokázána.

□

2.1.6 Věta - spojitá závislost na počátečních podmínkách. *Nechť funkce* $f : [t_0, \beta) \times D^m \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá a globálně přípustná s konstantou* K, *nechť každá funkce* g_j *je spojitá a* $\gamma \le g_j(t) \le t$ *na* $[t_0, \beta)$, *nechť existují dvě spojité funkce* $\theta_1, \theta_2 : [\gamma, t_0] \to D$ *a nechť* x_1 *a* x_2 *jsou řešení rovnice 1.2.1 a 1.2.2 s inicializačními funkcemi* θ_1 *respektive* θ_2. *Pak:*

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \le sup_{\gamma \le s \le t_0} \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\| e^{K(t - t_0)}$$

Důkaz. Z platnosti integrální rovnice plyne:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| = \|\theta_1(t_0) - \theta_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} [F(s, x_{1s}) - F(s, x_{2s})]ds\| \leq$$

$$\leq \|\theta_1(t_0) - \theta_2(t_0)\| + K \int_{t_0}^{t} \sup_{\gamma \leq \sigma \leq s} \|x_1(\sigma) - x_2(\sigma)\| ds$$

Nyní zavedeme pomocnou funkci $v(t)$, $v(t) = \sup_{\gamma \leq \sigma \leq t} \|x_1(s) - x_2(s)\|$. Tedy:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t} Kv(s)ds$$

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds.$$

Zde aplikujeme Gronwallovo lemma a dostaneme námi požadovanou nerovnost:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq v(t_0)e^{K(t-t_0)}$$

□

2.2 Systémy s omezeným zpožděním

V této kapitole se budeme zabývat systémy s omezeným zpožděním. Pro připomenutí, jsou to systémy, kde existuje r tak, že pro zpožděné argumenty $g_j(t)$ platí $t - r \leq g_j(t) \leq t$. Nejdříve precizujme definici $F(t, x_t)$.

2.2.1 Definice. *Nechť ξ je funkce definována přinejmenším na intervalu $[t - r, t]$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$, pak definujeme novou funkci $\xi_t : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ předpisem*

$$\xi_t(s) = \xi(t + s) \text{ pro } s \in [-r, 0].$$

Pokud je ξ spojitá, pak i ξ_t je spojitá na intervalu $[-r, 0]$

2.2.2 Značení. *Zápisem $\mathcal{S}_A$ budeme rozumět množinu všech spojitých funkcí $f : [-r, 0] \to A$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ve speciálním případě $A = \mathbb{R}^n$ bude zápis jen $\mathcal{S}$. Na prostoru $\mathcal{S}_A$ definujem normu $\|x\|_r = sup_{-r \leq \sigma \leq 0} \|x(\sigma)\|$*

2.2.3 Definice. *Řekneme, že $F(t, x)$ splňuje podmínku spojitosti, jestliže $F(t, x_t)$ je spojitá vzhledem k t na intervalu $[t_0 - r, \beta)$ pro každou $x : [t_0 - r, \beta) \to D$ spojitou.*

Zpožděná diferenciální rovnice má nyní tvar:

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{2.2.1}$$

s počáteční podmínkou:

$$x_{t_0} = \Phi, \text{ kde předpokládáme } \Phi \in \mathcal{S}_A. \tag{2.2.2}$$

Pokud $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{S}_D \to \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti, pak spojitá funkce $x : [t_0 - r, \beta_1) \to D$, $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ je řešení rovnice 2.2.1 a 2.2.2, právě když:

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t - t_0) \text{ pro } t \in [t_0 - r, t_0] \\ \Phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)ds \text{ pro } t \in [t_0, \beta_1) \end{cases}$$

Pokud chceme například vyjádřit rovnicí 2.2.1 zpožděný systém popisující populaci kořisti a dravce (viz úvod), pak:
$D = \mathbb{R}^2$,$F : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$

$$F(t,\xi) = \begin{pmatrix} a_1[1 - \xi_1(0)/P]\xi_1(0) - b_1\xi_2(0)\xi_1(0) \\ -a_2\xi_2(0) + b_2\xi_1(-r)\xi_2(-r) \end{pmatrix}$$

Zbývá odpovědět na otázku, proč jsme vůbec definovali nový typ rovnice pro speciálnější funkce f (respektive g_i). Rovnice 2.2.1 je v jistém smyslu obecnější. Zobrazení F je totiž zobrazení z prostoru funkcí do prostoru funkcí, jde tedy o funkcionál a rovnice 2.2.1 je *funkcionální diferenciální rovnice.* Můžeme uvažovat například rovnici, kde $F(t,\xi) \equiv \int_{-r}^{0} \xi(s)ds$. Pak bude mít rovnice tvar:

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} x_t(s)ds = \int_{t-r}^{t} x(s)ds$$

2.2.4 Věta - lokální existence a jednoznačnost. *Nechť* $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{S}_D \to \mathbb{R}^n$ *splňuje podmínku spojitosti a nechť je lokálně Lipschitzovská ve druhé proměnné. Pak pro každou inicializační funkci* $\Phi \in \mathcal{S}_D$ *má rovnice 2.2.1 a 2.2.2 jednoznačně určené řešení na intervalu* $[t_0 - r, t_0 + \Delta)$ *pro* $\Delta > 0$

Důkaz. Důkaz věty bude velice podobný důkazu věty 2.1.5. Nejdříve definujme funkci

$$y(t) = \begin{cases} \Phi(t - t_0) \text{ pro } t \in [t_0 - r, t_0] \\ \Phi(0) \text{ pro } t \in [t_0, t_0 + \Delta]. \end{cases}$$

Povšimněme si, že $y_t \in S_D$. Dále definujme množinu

$$S_0 = \{x(t) \in C[t_0 - r, t_0 + \Delta]; \|x_t - y_t\|_r \leq \delta \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\}.$$

Zde zase vhodnou volbou $\delta > 0$ docílíme toho, aby obor hodnot funkcí z S_0 byl v D. Nyní zavedeme na S_0 funkcionál T:

$$Tx(t) = \begin{cases} \Phi(t - t_0) \text{ pro } t \in [t_0 - r, t_0] \\ \Phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)ds \text{ pro } t \in [t_0, t_0 + \Delta] \end{cases}$$

Díky Lipschitzovskosti funkcionálu F je tento funkcionál omezen stejnou konstantou pro všechny funkce z S_0. Odtud dostaneme stejnou stejnoměrnou spojitost funkcí Tx pro všechna $x \in S_0$. Vhodně zvoleným $\Delta > 0$ zajistíme, že $TS_0 \subset S_0$. Pevný bod funkcionálu T je naše hledané řešení. Použijeme opět Banachovu větu o kontrakci. (Označení norem je stejné jako v důkazu věty 2.1.5.)

Platí následující odhady:

$$\|T(x) - T(y)\|_{\infty,s} \leq \| \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_s) - F(s, y_s)\| ds\|_\infty \leq$$

$$\leq \| \int_{t_0}^{t} K\|x_s - y_s\|_r ds\|_\infty \leq K \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x_t - y_t\|_r ds \leq$$

$$\leq K\Delta\|x_t - y_t\|_r = K\Delta\|x - y\|_{\infty,s}$$

Pokud tedy bude Δ dostatečně malé, bude platit, že $K\Delta < 1$ a tímto je dokázána existence i jednoznačnost. $\square$

2.2.5 Věta - globální jednoznačnost. *Nechť $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{S}_D \to \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti a nechť je lokálně Lipschitzovská ve druhé proměnné. Nechť je dána počáteční funkce $\phi \in \mathcal{S}_D$. Pak rovnice 2.2.1 a 2.2.2 mají nanejvýš jedno řešení na intervalu $[t_0 - r, \beta_1)$ pro jakékoliv $\beta_1 \in (t_0, \beta]$*

Důkaz. Předpokládejme, že existují dvě řešení x_1 a x_2 taková, že $x_1 \neq x_2$. Označme $t_1 = \inf\{t \in (t_0, \beta_1) : x_1(t) \neq x_2(t)\}$. Pak $t_0 \leq t_1 < \beta_1$ a $x_1(t) = x_2(t)$ pro $t \in [t_0 - r, t_1]$. Tedy $(t_1, x_{1t_1}) \in [t_0, \beta_1) \times \mathcal{S}_D$, existuje $a > 0$ a okolí U bodu x_{1t_1} takové, že množina $V = [t_1, t_1 + a] \times U$ je podmnožinou $[t_0, \beta) \times \mathcal{S}_D$ a F je Lipschitzovská ve druhé proměnné na V s Lipschitzovskou konstantou K. Ze spojitosti x_1 a x_2 plyne existence $\delta \in (0, a]$ tak, že $(t, x_{1t}) \in V$ a $(t, x_{2t}) \in V$ pro $t \in [t, t_1 + \delta)$. Pro tato t platí:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} F(s, x_{1s}) - F(s, x_{2s}) ds\| \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t} K\|x_{1s} - x_{2s}\|_r ds$$

Ted přejdeme na levé straně k suprému:

$$\|x_{1t} - x_{2t}\|_r \leq \int_{t_1}^{t} K\|x_{1s} - x_{2s}\|_r \text{ pro } t \in [t_1, t_1 + \delta) ds$$

Odtud použitím Gronwallova lemmatu plyne, že $x_1(t) = x_2(t)$ pro $t \in [t_1, t_1 + \delta)$ a dostáváme spor s volbou t_1. □

2.2.6 Věta - spojitá závislost na počátečních podmínkách. *Nechť $F : [t_0, \beta) \times \mathcal{S}_D \to \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti a nechť je globálně Lipschitzovská ve druhé složce s Lipschitzovskou konstantou K. Nechť Φ_1 a $\Phi_2 \in \mathcal{S}_D$ jsou dvě zadané inicializační funkce a nechť x_1 a x_2 jsou jednoznačné řešení rovnice 2.2.1 a 2.2.2, kde $x_{1t_0} = \Phi_1$ a $x_{2t_0} = \Phi_2$. Pokud jsou x_1 a x_2 obě definována na intervalu $[t_0 - r, \beta_1)$, pak:*

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|\Phi_1 - \Phi_2\|_r e^{K(t-t_0)} \text{ pro } t \in [t_0, \beta_1)$$

Důkaz. Vyjdeme z integrální rovnice a budeme odhadovat rozdíl dvou řešení v čase $t, t \in [t_0, \beta_1)$:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| = \|\Phi_1(0) - \Phi_2(0) + \int_{t_0}^{t} [F(s, x_{1s}) - F(s, x_{2s})]\| \leq$$

$$\leq \|\Phi_1 - \Phi_2\|_r + \int_{t_0}^{t} K\|x_{1s} - x_{2s}\| ds$$

Odtud díky nezápornosti integrantu plyne:

$$\|x_{1t} - x_{2t}\|_r \leq \|\Phi_1 - \Phi_2\|_r + \int_{t_0}^{t} K\|x_{1s} - x_{2s}\|_r ds$$

Nyní zvolíme substituci $v(t) = \|x_{1t} - x_{2t}\|_r$. Pak:

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t} Kv(s) ds \\ v(t) &\leq v(t_0) e^{K(t-t_0)}. \end{aligned}$$

. Nyní přejdeme zpátky a dostaneme:

$$\|x_{1t} - x_{2t}\|_r \leq \|\Phi_1 - \Phi_2\|_r e^{K(t-t_0)}.$$

A z definice výrazu na pravé straně získáme požadovanou nerovnost. $\square$

Literatura

[1] R.D.Driver: *Ordinary and Delay Differential Equations*, Springer-Verlag New York, 1977.

[2] L.E.El'sgol'ts, S.B.Norkin: *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press New York, 1973.