Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Markéta Zikmundová

Modul spojitosti a jeho vlastnosti

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc.RNDr. Oldřich John, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

2006

Děkuji Doc.RnDr. Oldřichu Johnovi ,Csc. za vedení práce a cenné rady a připomínky k této práci.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 23. června 2006

Markéta Zikmundová

Obsah

Název práce: Modul spojitosti a jeho vlastnosti
Autor: Markéta Zikmundová
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc.RNDr. Oldřich John, CSc.
e-mail vedoucího: Oldrich.John@mff.cuni.cz

Abstrakt: Pro každou reálnou funkci f na reálném intervalu I můžeme definovat modul spojitosti této funkce. Tato nezáporná neklesající funkce, zhruba řečeno, vyjadřuje, jak moc se mohou lišit funkční hodnoty funkce f na intervalu I v závislosti na tom, o kolik nejvýše se liší hodnoty argumentů. První kapitola práce je věnována vlastnostem modulu spojitosti a vztahy k jiným pojmům souvisejícím s funkcemi (stejnoměrná spojitost, hölderovskost). V druhé kapitole jsou zpracovány některé úlohy a cvičení týkající se modulu spojitosti. V jejím závěru je formulována a dokázána užitečná věta o odhadu modulu spojitosti konkávní funkcí.

Klíčová slova: spojité funkce, modul spojitosti, hölderovské funkce, konkávní modul spojitosti

Title: Modulus of Continuity
Author: Markéta Zikmundová
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Doc.RNDr. Oldřich John, CSc.
Supervisor's e-mail address: Oldrich.John@mff.cuni.cz

Abstract: The modulus of continuity can be defined for every real function f on a real interval I. Roughly speaking, this non-negative, non-decreasing function maps the difference of f's arguments to the maximum difference of it's function values. The first chapter investigates the properties of the modulus of continuity and it's relations to other notions (equicontinuity, Hölder continuity). In the second chapter we treat problems and excercises involving the modulus of continuity. In the conclusion we state and prove a helpful theorem about the estimation of the modulus of continuity with a concave function.

Keywords: continuous functions, modulus of continuity, hölder continuous functions, concave modulus of continuity

Kapitola 1

Modul spojitosti

1.1 Definice a základní vlastnosti

Definice : Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá v bodě* x_0, jestliže platí :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definice : Funkci f nazveme *spojitou zleva* v bodě x_0, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad x_0 - \delta < x \le x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Analogicky definujeme *spojitost zprava.*

Definice : Funkci f nazveme *spojitou na intervalu* I, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in I$, který není krajním bodem I a zprava spojitá v počátečním bodě intervalu a zleva spojitá v koncovém bodě intervalu, pokud tyto body náleží do I.

Definice : Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ a nechť $\delta > 0$. Položme

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\; x, y \in I,\; |x - y| \le \delta\}.$$

Funkci

$$\omega_f : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$$

nazveme *modulem spojitosti* funkce f na intervalu I.

Tvrzení 1: *Funkce ω_f je nezáporná a neklesající na svém definičním oboru .*

Důkaz : Nezápornost funkce ω_f vyplývá přímo z její definice.
Ověříme její monotonii. Nechť $0 < \delta_1 < \delta_2$.
Potom platí

$$\{x, y \in I,\ |x-y| \le \delta_1\} \subseteq \{x, y \in I,\ |x-y| \le \delta_2\},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in I,\ |x-y| \le \delta_1\} &\subseteq \\ \subseteq \{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in I,\ |x-y| \le \delta_2\}.&\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta_1) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ |x-y| \le \delta_1\} &\le \\ \le \sup\{|f(x) - f(y)|;\ |x-y| \le \delta_2\} = \omega_f(\delta_2).&\end{aligned}$$ □

Poznámka : Z definice funkce ω_f plyne, že pro každou dvojici $x, y \in I$ platí :

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x-y|).$$

Tvrzení 2 : *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Potom platí :*

$$\omega_f(n\delta) \le n\,\omega_f(\delta).$$

Důkaz : Vezměme libovolné dva body $x, y \in I, x < y$, pro něž platí

$$y - x < n\delta.$$

Nyní rozdělíme interval $[x, y]$ do n stejných částí.
Definujme

$$z_i := x + \frac{i}{n}(y - x), \qquad i = 0, 1, ...n.$$

Body z_i leží mezi body x a y tedy patří do intervalu I. Pro každé $i = 1, 2, ..n$ platí

$$0 < z_{i+1} - z_i = \frac{1}{n}(y - x) < \frac{1}{n}n\delta = \delta.$$

Dále pak $z_0 = x$ a $z_n = y$.
Máme tedy

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}(f(z_{i+1}) - f(z_i))\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|(f(z_{i+1}) - f(z_i))| \leq n\,\omega_f(\delta).$$

Číslo $n\,\omega_f(\delta)$ je tedy horní závorou číselné množiny

$$\{|f(y) - f(x)|;\ x, y \in I,\ |x - y| < n\delta\},$$

a proto

$$\omega_f(n\delta) = \sup\{|f(y) - f(x)|;\ x, y \in I,\ |x - y| < n\delta\} \leq n\omega_f(\delta). \qquad \square$$

Tvrzení 3 : *Pro každé $\lambda > 0$, $\delta > 0$ platí*

$$\omega_f(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_f(\delta).$$

Důkaz : Nechť n je celá část čísla λ, tj. takové celé číslo, pro něž platí $n \leq \lambda < n + 1$. Protože $n + 1 \in \mathbb{N}$, dostáváme z monotonie funkce ω_f a z tvrzení 2 postupně

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega[(n+1)\delta] \leq (n+1)\omega(\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta). \qquad \square$$

Definice : Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou* na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže platí :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in I :\ |y - x| < \delta\ \Rightarrow\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Srovnáním definic spojitosti a stejnoměrné spojitosti je snadno vidět, že funkce stejnoměrně spojitá na intervalu I je na I spojitá. Obrácená implikace ale neplatí.

Příklad : Vezměme funkci $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ na $(0, 1)$. Tato funkce je na $(0, 1)$ spojitá, ale ne stejnoměrně. Volme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pro libovolné $\delta > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n\pi} < \delta$. Nechť nyní

$$x = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \qquad y = \frac{1}{2n\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi}$$

patří do $(0, 1)$.

$$0 < y - x < \frac{1}{n\pi} < \delta$$

a

$$|f(y) - f(x)| = |\sin n\pi - \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Na omezeném uzavřeném intervalu nám vztah mezi spojitostí a stejnoměrnou spojitostí dává následující věta :

Věta 1: *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, pak je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Důkaz : viz [4], str. 250, Věta 10.1.19.

Věta 2: *Nechť f je spojitá na omezeném intervalu (a, b). Pak existuje spojité rozšíření f na $[a, b]$, právě když je f na (a, b) stejnoměrně spojitá.*

Důkaz: Nechť $\tilde{f}$ je spojité rozšíření funkce f na $[a, b]$. Pak $\tilde{f}$ je podle předchozí věty stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Odtud plyne, že $\tilde{f}$ je stejnoměrně spojitá na (a, b), a protože na (a, b) je $f = \tilde{f}$, je f stejnoměrně spojitá na (a, b).

Nechť naopak je f stejnoměrně spojitá na intervalu (a, b). Chceme dokázat, že existují vlastní limity $\lim_{x \to b^-} f(x)$ a $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Nechť tedy

$\{x_n\} \subset (a,b)$ je libovolná posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Ze stejnoměrné spojitosti f plyne, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská. Protože prostor $(\mathbb{R}, \rho)$, kde $\rho(x,y) = |x-y|$, je úplný, existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Odtud a z Heineho věty plyne, že existuje vlastní $\lim_{x\to b^-} f(x)$. Důkaz existence vlastní $\lim_{x\to a^+} f(x)$ se provede analogicky. Tedy spojité rozšíření $\tilde{f}$ funkce f na interval $[a,b]$ je tvaru

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) & x = a \\ f(x) & x \in (a,b) \\ \lim_{x\to b^-} f(x) & x = b \end{cases}$$

□

Tvrzení 4: *Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, právě když platí*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$$

Důkaz : Nechť platí $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje tedy $\delta > 0$, pro něž $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Pro každé dva body $x, y \in I$, pro něž $|x-y| < \delta$ dostáváme

$$|f(y) - f(x)| \le \sup\{|f(y) - f(x)|;\ x, y \in I,\ |x-y| \le \delta\} = \omega_f(\delta) < \varepsilon,$$

čímž je stejnoměrná spojitost f na I dokázána.

Nechť naopak je funkce f stejnoměrně spojitá na I. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou dvojici $x, y \in I$, $|x-y| < \delta$ je $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Pak zřejmě je i

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(y) - f(x)|d;\ x, y \in I,\ |y-x| < \delta\} \le \varepsilon.$$

Tedy pro $0 < \tilde{\delta} < \delta$ je (z monotonie funkce ω_f)

$$\omega_f(\tilde{\delta}) = \sup\{|f(y) - f(x)|;\ x, y \in I,\ |y-x| \le \tilde{\delta}\} \le \varepsilon.$$

a odtud již

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$$

□

1.2 Modul spojitosti hölderovských funkcí

Definice : Nechť funkce f je definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť $\alpha > 0$. Nechť existuje takové $M > 0$, že f splňuje následující podmínku :

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^{\alpha}$$

pro všechna $x, y \in I$. Pak řekneme, že f je α - *hölderovská* na I. Značíme $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$.
Speciálně pro $\alpha = 1$ říkáme, že f je *lipschitzovská* na I (splňuje Lipschitzovu podmínku).
Číslu M říkáme *koeficient*.

Zřejmě hölderovská funkce na I je stejnoměrně spojitá na I (k $\varepsilon > 0$ stačí zvolit za δ jakékoliv číslo menší než $\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{M}}$).

Tvrzení 5 : *Nechť f je α - hölderovská na intervalu I a $\alpha > 1$. Potom f je konstantní funkce.*

Důkaz : Budiž $x \in I$, x není koncový bod I. Dokážeme, že $f'_+(x) = 0$. Pro každý bod $y \in I, y > x$ platí odhad

$$0 \leq \frac{|f(y) - f(x)|}{|x - y|} \leq M.|x - y|^{\alpha - 1}.$$

Protože $\alpha > 1$, je $\lim_{y \to x^+} |x - y|^{\alpha-1} = 0$, a tedy i $\lim_{y \to x^+} \frac{|f(y)-f(x)|}{y-x} = 0$ a

$$\lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0.$$

Analogicky dokážeme, že $f'_-(x) = 0$ pro každý bod $x \in I$, který není počátečním bodem intervalu I. Odtud plyne tvrzení. □

Tvrzení 6 : *Nechť má funkce f omezenou první derivaci na intervalu (a, b). Potom f je na (a, b) lipschitzovská.*

Důkaz : Protože f má ve všech bodech intervalu (a, b) vlastní derivaci, je f na (a, b) spojitá. Nechť $x, y \in (a, b), x < y$. Na intervalu $[x, y]$ splňuje f

předpoklady Lagrangeovy věty, a tedy existuje $z \in (x, y)$ tak, že

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x).$$

Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall w \in (a, b)$ je $|f'(w)| \leq M$ a odtud plyne :

$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)||y - x| \leq M|y - x|. \qquad \square$$

Důsledek :Označme symbolem $\mathcal{C}^1([a, b])$ množinu všech funkcí,které mají na $[a, b]$ spojitou derivaci. Pak je $\mathcal{C}^1([a, b]) \subset \mathcal{C}^{0,1}([a, b])$. Rovnost ovšem neplatí, neboť funkce $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ nemá v bodě $x = 0$ derivaci, ale je lipschitzovská na $[-1, 1]$.

Tvrzení 7: *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je omezený interval. Nechť α, β jsou reálná kladná čísla, $\alpha < \beta$. Potom $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I) \supset \mathcal{C}^{0,\beta}(I)$.*

Důkaz : Vezměme $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(I)$. Nechť $x, y \in I$.
Pak pro $|x - y| < 1$ existuje $B > 0$ tak, že

$$|f(x) - f(y)| \leq B|x - y|^\beta \leq B|x - y|^\alpha,$$

tedy $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$.
Je-li $|x - y| \geq 1$, potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(y)| + |f(x)| \leq (|f(y)| + |f(x)|)|x - y|^\alpha \leq 2K|x - y|^\alpha,$$

kde $K = \sup\{|f(x)|\}$.

Přitom toto číslo je konečné, neboť f je stejnoměrně spojitá na omezeném intervalu (a, b). Podle Věty 2 ji tedy lze spojitě rozšířit na $[a, b]$. A každá spojitá funkce je na omezeném uzavřeném intervalu omezená. Pro všechny dvojice x, y tedy platí

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha,$$

kde $A = \max\{2K, B\}$ a tedy $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$. $\square$

Příklad : Vezměme funkci $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 1]$. Snadno nahlédneme, že f je $\frac{1}{2}$-hölderovská : hledáme takové $M > 0$, aby

$$|f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq M\sqrt{|y - x|}.$$

Zřejmě pro $x, y \in [0, 1]$ platí nerovnost

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$$

a můžeme vzít $M = 1$. Funkce f tedy je $\frac{1}{2}$-hölderovská, ale není lipschitzovská, neboť pro $\beta = 1$ a $x = 0$ pevné dostáváme :

$$\frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \leq M$$

pro $\forall y \in (0, 1)$.
Ale tento podíl není omezený , neboť je

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = \infty.$$

Poznámka : Na neomezeném intervalu tvrzení 7 obecně neplatí. Například funkce $f(x) = x$ je lipschitzovská na celé reálné ose, ale není $\frac{1}{2}$ -hölderovská, neboť jinak by podle definice muselo existovat $M > 0$ tak, že

$$\frac{| y - x |}{| y - x |^{\frac{1}{2}}} =| y - x |^{\frac{1}{2}} \leq M$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Ale $| y - x |^{\frac{1}{2}}$ je na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ neomezená.

Souvislost mezi hölderovskými funkcemi a modulem spojitosti dává následující tvrzení :

Tvrzení 8: *Nechť f je reálná funkce na intervalu I. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní :*

(1) f je α-hölderovská s koeficientem M
(2) $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$

Důkaz : Nechť $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$. Potom pro všechna $x, y \in I$ platí :

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega_f(|y - x|) \leq M|y - x|^\alpha,$$

tedy f je α-hölderovská s koeficientem M.

Nechť naopak je f α-hölderovská s koeficientem M. Tedy pro všechna x, y, pro která je $|y - x| \leq \delta$ je

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha \leq M\delta^\alpha.$$

A tedy i $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(y) - f(x)|;\ |y - x| \leq \delta\} \leq M\delta^\alpha$. □

Poznámka : Nechť existuje $\delta_0 > 0$ takové, že podmínka $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$ je splněna pro všechna $0 < \delta < \delta_0$ a f je omezená. Pak může být funkce f α-hölderovská s jiným koeficientem.

Důkaz : Protože f je omezená, existuje $K > 0$ takové, že $|f(y) - f(x)| \leq K$. Nechť je tedy podmínka $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$ splněna pro $0 < \delta < \delta_0$. Pak pro $\delta \geq \delta_0$ platí:

$$\omega_f(\delta) \leq K \leq \frac{K}{\delta_0^\alpha}\delta^\alpha.$$

Odtud a z předchozího tvrzení plyne, že f je α-hölderovská s koeficientem $A = \max\{M, \frac{K}{\delta_0^\alpha}\}$. □

Definice : Nyní zadefinujeme třídu funkcí (budeme ji značit W), pro které platí :

$$\omega_f(\delta) \leq A\delta(1 + |\ln\delta|), \tag{1}$$

kde A je nezávislá na δ.

Nechť existuje $\delta_0 > 0$ takové, že nerovnost (1) je splněna pro všechna $\delta \leq \delta_0$ a nechť funkce f je omezená. Pak pro $\delta > \delta_0$ je

$$\omega_f(\delta) \leq K \leq \frac{K}{\delta_0^\alpha}\delta(1 + |\ln \delta|),$$

kde K je stejné jako v předchozí poznámce. Tedy $f \in W$.

Tvrzení 9: *Nechť I je omezený interval a α je reálné číslo takové, že $0 < \alpha < 1$. Potom platí :*

$$\mathcal{C}^{0,\alpha} \supset W \supset \mathcal{C}^{0,1}.$$

Důkaz : Nechť f je lipschitzovská. Potom $\omega_f(\delta) \leq M\delta \leq M\delta(1+ \mid \ln \delta \mid)$. Tedy $f \in W$.

Nechť nyní $\omega_f(\delta) \leq A\delta(1+ \mid \ln \delta \mid)$.

Potom

$$\frac{\omega_f(\delta)}{\delta^\alpha} \leq \frac{A\delta(1+ \mid \ln \delta \mid)}{\delta^\alpha} = \frac{A(1+ \mid \ln \delta \mid)}{\delta^{\alpha-1}}$$

a neboť $0 < \alpha < 1$ je

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{A(1+ \mid \ln \delta \mid)}{\delta^{\alpha-1}} = 0.$$

Odtud i $\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta^\alpha} = 0$. Tedy existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $0 < \delta < \delta_0$ je $\omega_f(\delta) < \delta^\alpha$. A to je podle předchozí poznámky a tvrzení 8 ekvivalentní tomu, že f je α-hölderovská. □

Kapitola 2

Některá další tvrzení týkající se modulu spojitosti

V této kapitole se budeme nejprve zabývat některými problémy ze skript [2] týkajícími se modulu spojitosti. Z tohoto důvodu budeme jednotlivé úlohy číslovat v souladu s těmito skripty.

25.3 (b) Rozhodněte, zda existuje ke každé nezáporné neklesající funkci $g : (0, \infty) \to [0, \infty]$ funkce f definovaná na intervalu I tak, že $g = \omega_f$ v jistém pravém okolí bodu 0.

Řešení : Vezměme rostoucí konvexní funkci g definovanou na intervalu $[0, a)$, $a > 0$ takovou, že $g(0) = 0$. Podle tvrzení 2 splňuje modul spojitosti pro každé $x > 0$ vztah $\omega(2x) \leq 2\omega(x)$. Je-li funkce g ryze konvexní na $[0, a)$, $a > 0$ a $g(0) = 0$, pak pro každé $x > 0$ platí

$$g(x) = g\left(\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}0\right) < \frac{1}{2}g(2x) + \frac{1}{2}g(0) = \frac{1}{2}g(2x).$$

Tedy $2g(x) < g(2x)$.
Ryze konvexní rostoucí funkce g na $[0, a)$ pro kterou je $g(0) = 0$ tedy nemůže být modulem spojitosti žádné funkce.

V souvislosti s touto úlohou si uveďme ještě jedno užitečné tvrzení :

Nechť f je funkce na $[0, 1]$ taková, že :
1) f je konkávní

2) f je rostoucí
3) $f(0) = 0$.

Pak $\omega_f(\delta) = f(\delta)$, $\delta \geq 0$.

Důkaz : Chceme dokázat, že

$$\sup\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \delta\} = f(\delta).$$

Nerovnost $\sup\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \delta\} \geq f(\delta)$ je zřejmá, neboť

$$f(\delta) = |f(\delta) - f(0)| \leq \sup\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \delta\}.$$

Nyní se budeme zabývat opačnou nerovností.
Protože funkce f je rostoucí je

$$\begin{aligned} &\sup\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \delta\} \leq \\ &\qquad \leq \sup\{|f(x+\delta) - f(x)|;\ x \in [0, 1-\delta]\}. \end{aligned}$$

Tedy stačí ukázat, že pro všechna $x \in [0, 1-\delta]$ je $f(x+\delta) - f(x) \leq f(\delta)$.
Nechť nyní je $0 < \delta < x < x + \delta$, pak z konkávnosti f plyne :

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{x + \delta - x} \leq \frac{f(x) - f(\delta)}{x - \delta} \leq \frac{f(\delta) - f(0)}{\delta} = \frac{f(\delta)}{\delta},$$

a odtud

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(\delta).$$

Je-li naopak $0 < x < \delta < x + \delta$, pak konkávnost f dává :

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{x + \delta - x} \leq \frac{f(\delta) - f(x)}{\delta - x} \leq \frac{f(\delta) - f(0)}{\delta} = \frac{f(\delta)}{\delta},$$

a opět

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(\delta).$$

A konečně pro $x = \delta$, dostáváme analogicky

$$f(2\delta) - f(\delta) \leq 2f(\delta). \qquad \square$$

25.5 (d) Charakterizujte všechny funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pro něž

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} = 0. \tag{2}$$

Řešení : Pro všechna $x \in I$, $\delta > 0$ platí :

$$-\frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \leq \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \leq \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}.$$

$$-\frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \leq \frac{f(x-\delta) - f(x)}{\delta} \leq \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}.$$

Pokud x není koncový bod intervalu I, plyne z první nerovnosti, že $f'_+(x) = 0$ a podobně pokud x není koncový bod intervalu I, je z druhé nerovnosti $f'_-(x) = 0$, kde $f'_+(x), f'_-(x)$ jsou jednostranné derivace funkce f v bodě x. Tedy $f'(x) = 0$, $x \in I$ a tedy každá funkce f splňující (2) je konstantní. Naopak pro každou konstantní funkci f zřejmě platí (2).

25.5 (e) Nechť funkce f má spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Důkaz : Označme $M = \max\{|f'(x)|;\ x \in [a, b]\}$. Tedy pro všechna $x \in [a, b]$ je $|f'(x)| \leq M$. Z tvrzení 7 je funkce f lipschitzovská, tj.

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x| \leq M\delta.$$

Z toho plyne, že i $\omega_f(\delta) \leq M\delta$, a tudíž i

$$\limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \leq \frac{M\delta}{\delta} = M.$$

Nechť $x \in (a, b)$. Pro všechna $y \in (a, b)$ platí nerovnost

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega_f(|y - x|),$$

tedy pro $\delta > 0$, $x + \delta \in (a, b)$ je $|f(x+\delta) - f(x)| \leq \omega_f(\delta)$.
Odtud i

$$|f'(x)| = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{|f(x+\delta) - f(x)|}{\delta} \leq \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}.$$

Analogický odhad se dokáže pro jednostranné derivace v krajních bodech intervalu $[a, b]$.
Celkem tedy dostáváme, že

$$\limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \leq M \leq \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}.$$

Protože $\liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \leq \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}$, je

$$\liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} = \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta} = M = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta}.$$

25.7 Sestrojte funkci f na $[0, 1]$ tak, aby pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ byla

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\omega_f(\delta)}{\delta^\alpha} = \infty.$$

Řešení : Vezměme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{\ln x} & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Funkce f je v bodě $x = 0$ spojitá zprava, neboť $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\ln x} = 0$.
Derivováním dostaneme, že pro $x \in (0, \frac{1}{2})$ je

$$f'(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2(\ln x)^3}(\ln x + 2).$$

Pro $x \in (0, \frac{1}{e^2})$ je $f'(x) > 0$ a $f''(x) < 0$, tedy f je na tomto intervalu rostoucí a konkávní. Proto podle tvrzení dokázaného v úloze 25.3 (c) je pro $\delta < \frac{1}{e^2}$ $\omega_f(\delta) = f(\delta)$.
Nechť tedy $\alpha > 0, \delta < \frac{1}{e^2}$. Potom

$$\lim_{\delta\to 0^+} -\frac{\frac{1}{\ln\delta}}{\delta^\alpha} = \lim_{\delta\to 0^+} -\frac{\delta^{-\alpha}}{\ln\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{\alpha\delta^{-\alpha-1}}{\frac{1}{\delta}} = \lim_{\delta\to 0^+} \alpha\delta^{-\alpha} = \infty.$$

(K výpočtu limity jsme užili l'Hospitalova pravidla, jehož předpoklady jsou spněny.)

25.8. (b) Vyšetřete vztah funkcí ω_{f+g} a $\omega_f + \omega_g$.

Řešení : Dokážeme následující tvrzení :

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f, g : I \to \mathbb{R}$, pak pro moduly spojitosti těchto funkcí platí následující nerovnost :

$$\omega_f + \omega_g \geq \omega_{f+g}.$$

Důkaz : Nechť $x, y \in I$, $|x - y| \leq \delta$. Pro funkce f, g platí z trojúhelníkové nerovnosti následující :

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| = \\ = \; & |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \\ \leq \; & \sup\{|f(x) - f(y)|;\ |x - y| \leq \delta\} + \sup\{|g(x) - g(y)|;\ |x - y| \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} &\sup\{\mid f(x) + g(x) - (f(y) + g(y)) \mid;\ \mid x - y \mid\leq \delta\} \leq \\ &\quad \leq \sup\{\mid f(x) - f(y) \mid;\ \mid x - y \mid\leq \delta\} + \sup\{\mid g(x) - g(y) \mid;\ \mid x - y \mid\leq \delta\}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\omega_{f+g}(\delta) \leq \omega_f(\delta) + \omega_g(\delta). \qquad \square$$

Rovnost v uvedeném tvrzení obecně neplatí,jak ukáže následující příklad:

Nechť $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Funkce je rostoucí, konkávní a $f(0) = 0$, tedy $\omega_f(\delta) = f(\delta)$. Definujme funkci $g(x) = -f(x), x \geq 0$. Pro její modul spojitosti platí :

$$\begin{aligned}\omega_g(\delta) = \sup\{\mid g(x) - g(y) \mid;\ \mid x - y \mid \leq \delta\} = \\ = \sup\{\mid -f(x) + f(y) \mid;\ \mid x - y \mid \leq \delta\} = \omega_f(\delta).\end{aligned}$$

Tedy $\omega_f(\delta) + \omega_g(\delta) = 2\,\omega_f(\delta)$ a $\omega_f(\delta) > 0$ pro $\delta > 0$.
Přitom $f + g \equiv 0$, tedy $\omega_{f+g}(\delta) = 0$ pro $\delta > 0$. Tedy $\omega_{f+g} \neq \omega_f + \omega_g$.

Jednoduchým důsledkem tvrzení z úlohy 25.3 (c) následující tvrzení :

Jsou-li f, g rostoucí konkávní funkce a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, pak $\omega_{f+g} = \omega_f + \omega_g$.

Na závěr této práce se ještě budeme zabývat odhadem modulu spojitosti konkávní funkcí. Někdy se v literatuře (např. [1]) za modul spojitosti funkce f považuje každá funkce $\phi : (0, \infty) \to [0, \infty]$ splňující následující podmínku:

$$\forall\, x, y \in I: \quad |x - y| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq \phi(\delta).$$

Námi definovaný modul spojitosti je pak funkce, jejíž funkční hodnota pro každé δ je nejvyšší dolní závorou funkčních hodnot všech takových funkcí $\phi(\delta)$. Nyní tedy vyslovme tvrzení.

Věta : *Nechť ω_f je neklesající, nezáporná, omezená funkce na $(0, +\infty)$ a nechť $\lim_{x\to 0^+} \omega_f(x) = 0$. Potom existuje konkávní neklesající funkce $h : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ taková, že $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ a pro všechna $x \in (0, \infty)$ je $\omega_f(x) \leq h(x)$.*

Důkaz : Uvažujme množinu M všech neklesajících konkávních funkcí g na $(0, +\infty)$ takových, že $g(x) \geq \omega_f(x)$, $x > 0$. Tato množina je neprázdná, neboť funkce ω_f je omezená. Nyní položme

$$h(x) = \inf\{g(x); g \in M\}, \qquad x \in (0, +\infty).$$

Dokážeme, že takto definovaná funkce h má požadované vlastnosti.

Předně je $h(x) \geq \omega_f(x)$, $x > 0$.

Nezápornost funkce h je zřejmá, neboť pro všechna $x \in (0, +\infty)$ a $g \in M$ je $g(x) \geq 0$ tedy i $\inf\{g(x);\ g \in M\} = h(x) \geq 0$.

Nyní dokážeme monotonii. Nechť $x, y \in (0, +\infty)$, $x > y$. Potom pro každou $g \in M$

$$g(x) \geq g(y) \geq h(y)$$

a tedy i $h(x) \geq h(y)$.

Nechť dále $x, y \in (0, +\infty)$ a $\lambda \in [0, 1]$. Potom pro všechny $g \in M$ platí

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$

Odtud a z definice funkce h plyne :

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$

Tedy funkce h je konkávní.

Nyní zbývá dokázat, že $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$. Volme postupně $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. K němu existuje $\delta_n > 0$ takové, že $0 \leq \omega_f(x) \leq \frac{1}{n}$, $x < \delta_n$. Označme $K = \sup\{\omega_f(x);\ x \in (0, +\infty)\}$. Protože funkce ω_f je omezená, je $K < +\infty$. Nyní definujme funkce g_n předpisem

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{K - \frac{1}{n}}{\delta_n} x & x \in [0, \delta_n) \\ K & x \in [\delta_n, +\infty). \end{cases}$$

Takto definovaná funkce g_n je nezáporná, neklesající a konkávní na $[0, +\infty)$ a $g_n(x) \geq \omega_f(x)$, $x \in [0, +\infty)$. Je tedy pro $x \in [0, +\infty)$

$$0 \leq h(x) \leq g_n(x). \tag{3}$$

Z monotonie funkce h existuje $\lim_{x\to 0^+} h(x)$. Dále pak je

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \frac{1}{n}.$$

Z nerovnosti (3) potom plyne

$$0 \leq \lim_{x\to 0^+} h(x) \leq \lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

a tedy $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$. $\square$

Literatura

[1] Graves L.M.: *Theory of Function of Real Variables*, McGraw-Hill, 1956.

[2] Lukeš J. a kolektiv: *Problémy z matematické analýzy*, Univerzita Karlova, Praha, 1982.

[3] Natanson I.P.: *Konstruktivnaja teorija funkcij(anglický a německý překlad)*, Moskva.

[4] Veselý J.: *Matematická analýza pro učitele, druhý díl*, MATFYZPRESS, 2001.

PŘIJATO K OBHAJOBĚ

30 -05- 2006

PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA