Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vlasta Chmelíková

Zlatý řez

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.

Studijní program: Matematika, matematika zaměřená na vzdělávání, kombinace matematika s deskriptivní geometrií

2006

Ráda bych poděkovala všem, kteří mi zapůjčili potřebnou literaturu nebo mě jakkoli podpořili při psaní této bakalářské práce. Zejména děkuji mé vedoucí PhDr. Aleně Šarounové, která mi vybrala téma zlatého řezu ke zpracování a s níž jsem měla možnost podrobně prokonzultovat náplň práce, a kolegyni Mgr. Michaele Otterové, která mi velkou měrou pomohla s překladem zahraniční literatury.

Prohlašuji, že jsem svou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 17.5.2006 Vlasta Chmelíková

Název práce: Zlatý řez

Autor: Vlasta Chmelíková

Katedra: Didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc., Katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Sokolovská 83, Praha 8

e-mail vedoucího: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tento text je určen všem zájemcům z řad široké veřejnosti, především však jako vzdělávací materiál pro učitele matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách. Práce zahrnuje postupy konstrukcí zlatého řezu, výpočet zlatého čísla a jeho vlastnosti. Dále ukazuje souvislost zlatého čísla s Fibonacciho posloupností a příklady výskytu zlatého řezu v rovinné geometrii a v platónských tělesech. Text je doplněn názornými obrázky, většina z nich byla vytvořena v aplikaci DesignCAD. Vlastnosti zlatého čísla a rovinné konstrukce jsou uvedeny včetně podrobných důkazů.

Klíčová slova: Zlatý řez, zlaté číslo, platónská tělesa, Fibonacciho posloupnost

Title: The Golden Section

Author: Vlasta Chmelíková

Department: Didactics of mathematics

Supervisor: PhDr. Alena Šarounová, CSc., Katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Sokolovská 83, Praha 8

Supervisor's e-mail adress: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This text is especially intended as an educational material for secondary-school teachers of mathematics and descriptive geometry, however it can be interesting also for general public. The thesis includes construction methods of the Golden Section and calculation of the Golden Number and its properties. In addition, it shows the connection between the Golden Number and the Fibonacci Sequence and examples of the Golden Section occurance in a plane geometry and in the Platon's Solids. The text is completed with illuminating figures drawn in most cases in DesignCAD software. The Golden Number properties and the plane constructions are mentioned including particular proofs.

Keywords: Golden Section, Golden Number, Platon's Solids, Fibonacci Sequence

Obsah

1 Úvod

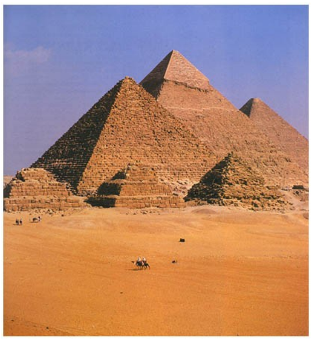
Tématem této bakalářské práce je zlatý řez. Dle mého názoru je toto sousloví širší veřejnosti spíše neznámé, není totiž obsaženo ani ve středoškolských učebnicích matematiky. Někteří se se zlatým řezem seznámí na vysoké škole, někteří nikdy, přesto jej máme všichni denně před očima.

Co tedy vlastně zlatý řez je? Zlatým řezem se myslí rozdělení úsečky (rozříznutí) na dvě části, jejichž délky jsou v konkrétním poměru. Přesněji řečeno, poměr délky větší části takto rozdělené úsečky ku délce menší části je stejný, jako poměr délky celé úsečky ku délce větší části. Tento poměr je konstantní pro všechny úsečky (nezáleží na jejich původní délce) a nazývá se zlaté číslo. Je pro nás tak všední a přirozený, že jeho výskyt nevnímáme. Přitom již ve starověku byl dobře znám a vědomě používán – například ve stavitelství.

V následujícím textu se pokusím srozumitelnou formou vysvětlit odvození hodnoty zlatého čísla, jeho vlastnosti, konstrukci zlatého řezu a výskyt tohoto jevu v rovinné i prostorové geometrii. Všechna odvození a důkazy jsou prováděny podrobně, aby práce byla srozumitelná všem absolventům (a popřípadě i studentům) středních škol. Konstrukce jsou pro názornost doplněny obrázky, většina z nich byla vytvořena s využitím aplikace DesignCAD [9].

Tato práce by měla sloužit všem zájemcům, kteří se chtějí o zlatém řezu dozvědět něco bližšího. Studium tohoto tématu v českém jazyce je poněkud obtížné, není mi známo žádné dílo vydané u nás, které by se výhradně touto problematikou zabývalo, ačkoli v zahraničí (zejména v Německu, Francii a Velké Británii) bylo téma zlatý řez opakovaně mnoha autory zpracováno.

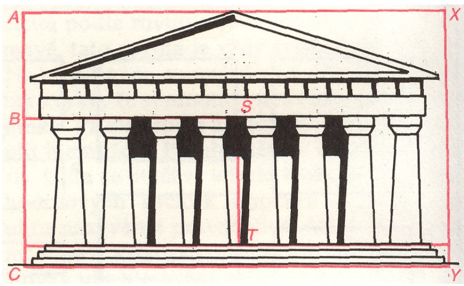
2 Historie



Obr. 1: Pyramidy v Gíze

Zlatý řez má velmi dlouhou historii. Údajně tento poměr použili již staří Egypťané před téměř pěti tisíci lety při stavbě pyramid. Rhindův papyrus (asi 1788 – 1580 př. n. l.) říká: „V pyramidách je utajen tajemný kvocient nazvaný seqt“. Někteří historikové se domnívají, že tento kvocient je právě zlaté číslo, měření tuto domněnku doposud nepotvrdila, ani však nevyvrátila. Dokonce na Cheopsově pyramidě v Gíze byl objeven poměr blízký zlatému číslu (Obr. 1).

První písemné zmínky o zlatém řezu pocházejí z antiky, z helénistického Řecka. Eukleides (kol. 340 – 287 př. n. l.) sepsal na tehdejší dobu velkolepé dílo „Základy“, ve kterém uvedl úlohu: „Rozdělte danou úsečku na dvě nestejné části tak, aby čtverec sestrojený nad větší částí měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menší části a druhá má délku celé úsečky.“ Jak si později ukážeme, řešením této úlohy je právě rozdělení dané úsečky v poměru zlatého řezu. Dále se zabýval konstrukcí pravidelného pětiúhelníku, který je opět štědrým zdrojem tohoto poměru (a Eukleides tohoto faktu zřejmě vědomě využil), a vkreslováním pravidelných platónských těles (v nichž se zlatý řez opět vyskytuje) do koule.



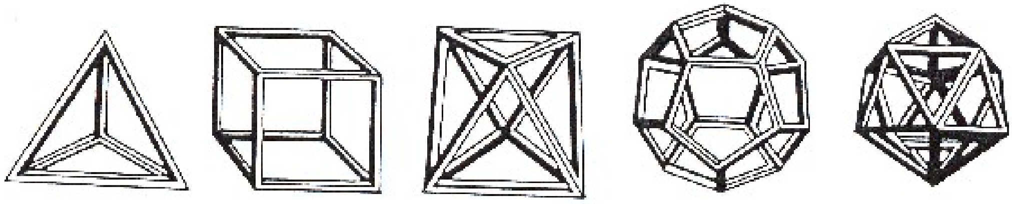
Obr. 2: Panthenón na Akropoli

Kromě Eukleida se v antice zlatým řezem zabýval i umělec Phidias (sochař, malíř, zlatník a architekt) a to již v 5. století př. n. l. Postavil známý athénský Panthenón na Akropoli (Obr. 2), jehož základem je zlatý obdélník (viz dále) a zlatý poměr nalezneme i na průčelí této stavby [5]. Po Phidiovi bylo podle některých pramenů ve 20. století zavedeno označení pro zlaté číslo – φ (fí). Jiné zdroje uvádějí, že toto označení je na počest nikoli Phidia, ale Leonarda Pisánského (asi 1170 – 1240) zvaného Fibonacci. Jméno tohoto významného matematika souvisí se zlatým číslem spíše po matematické stránce (viz dále).

Za zmínku stojí i římský architekt a stavitel Marcus Vitruvius Pollio, který žil na konci 1. století př. n. l. za vlády Caesara a Augusta. Sepsal 10 knih o svém oboru pod názvem „Deset knih o architektuře“ (v originále: „De architectura libri decem“). Základem jeho teorií byla (kromě jiného) nauka o významu číselných zákonitostí a proporčních vztahů, jež lze odhalit ve stavbě vesmíru i člověka a bez nichž nelze postavit krásnou budovu. Podle Vitruvia je estetika budovy založena na číselných vztazích odvozených z proporcí lidského těla. My dnes víme, že poměry velikostí částí lidského těla se často blíží opět zlatému číslu.

Po antickém období nastává dlouhá pomlka a se zlatým poměrem se setkáváme až v období renesance (15. století) a to zejména v Itálii. Na Eukleidovy „Základy“ navazuje italský mnich Luca Pacioli (známý spíše díky podvojnému účetnictví). Roku 1509 vydal pojednání „O božském poměru“ s ilustracemi svého přítele

Leonarda da Vinci (Obr. 3). Toto dílo obsahuje soubor příkladů výskytu poměru zlatého řezu v rovinných obrazcích a tělesech. Znovu bylo vydáno poměrně nedávno, v roce 1956. Leonardo da Vinci považoval zlatý řez za ideál krásy a harmonie a hojně jej využíval ve svých malbách.



Obr. 3: Ilustrace Leonarda da Vinci

Označení „zlatý řez“, „zlatý poměr“ se užívají až od 19. století. V současné době ustoupila, snad trochu neprávem, teorie zlatého čísla do pozadí. Jednou z mála osobností zabývající se touto problematikou ve 20. století byl francouz Matila Ghyka, který roku 1931 vydal v Paříži knihu „Le Nombre d'Or“ (v překladu „Zlaté číslo“), o něco později, roku 1946, pak vyšla ve Velké Británii jeho kniha „The geometry of Art and Life“ (v překladu „Geometrie umění a života). V obou dílech se zabývá výskytem zlatého čísla v přírodě i v architektuře, jeho vlastnostmi a využitím od starověkého Egypta přes antiku až po současnost.

V dnešní době o přítomnosti zlatého čísla svědčí například „pyramida v Louvre“ (prosklená budova z 80. let 20. století sloužící jako vstupní brána do galerie) nebo budova La Géode v Paříži (největší panoramatické kino na světě) [7] (Obr. 4-7). Tohoto poměru se využívá také ve fotografii, plastické chirurgii a v dalších odvětvích, kde je kladen důraz mimo jiné na estetiku.

Obr. 4: La Géode

Obr. 5: La Géode

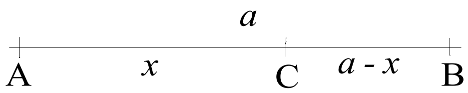
Obr. 6: Pyramide v Louvre

Obr 7: Pyramide v Louvre

3 Zlaté číslo a jeho vlastnosti

Jak již bylo v úvodu řečeno, rozdělíme-li libovolnou úsečku na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky ku délce větší části je stejný jako poměr délky větší části úsečky ku délce části menší, je tato úsečka rozdělena právě tzv. „zlatým řezem“.

To znamená, že máme-li danou úsečku *AB* a určíme na ní bod *C* tak, že při označení $|AB|=a$, $|AC|=x$, tedy $|CB|=a-x$, kde $x>a-x$, platí: $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$, rozdělili jsme úsečku *AB* bodem *C* v poměru zlatého řezu (Obr.8).



Obr. 8: Zlatý řez úsečky

Tento poměr označíme řeckým písmenem φ (fí). Číslo φ se nazývá zlaté číslo.

Nyní určíme konkrétní hodnotu zlatého čísla:

Za jednotku zvolíme délku úsečky *AB*, tj. $a=1$, dosadíme do vztahu $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ a dostáváme rovnici: $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$, což je rovnice pro jednu neznámou *x*, kterou jednoduchými ekvivalentními úpravami převedeme na kvadratickou rovnici $x^2+x-1=0$. Proměnnou *x* ve jmenovateli se nemusíme zabývat, protože *x* značí délku úsečky *AC*, která určitě není nula ani jedna, oba zlomky jsou tedy definované. Pomocí známého vzorce vypočítáme kořeny kvadratické rovnice:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Druhý kořen je záporný, nemůže tedy představovat délku úsečky. Našim potřebám vyhovuje výsledek $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, což je přibližně 0,61803. Zdůrazňuji přibližně, $\sqrt{5}$ je totiž iracionální číslo a díky tomu je i zlomek $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ iracionálním číslem.

Dopočítejme konečně φ. Víme, že $\varphi=\frac{a}{x}$, $a=1$, a $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, odtud

$$\varphi=\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(1+\sqrt{5})}{-1+5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$, což je přibližně 1,61803 (opět iracionální číslo).

Jenom pro úplnost, označíme-li převrácenou hodnotu čísla x_2 symbolem $\tilde{\varphi}$, pak

$$\tilde{\varphi}=\frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{-1-\sqrt{5}}=\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{-(1-5)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

což je přibližně $-0{,}61803$.

Nyní již známe konkrétní hodnotu zlatého čísla, pojďme se ještě podívat na některé jeho zajímavé vlastnosti. Při označení zavedeném výše platí:

a) $\underline{\varphi\cdot\tilde{\varphi}=-1}$

Důkaz: $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\tilde{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\varphi\cdot\tilde{\varphi}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-5}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

☒

b) $\underline{\varphi^{-1}=\varphi-1}$

Důkaz: $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\varphi^{-1}=\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{1-5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$\varphi-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, tedy rovnost platí.

☒

c) $\underline{\varphi^{2}=\varphi+1}$

Důkaz: $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\varphi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2\cdot(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$\varphi+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, tedy rovnost platí.

$\boxtimes$

Poznámka:

Vlastnosti a), b), c) vyplývají také přímo z výpočtu zlatého čísla. Stačí vzít v úvahu kvadratickou rovnici $x^2+x-1=0$ zmíněnou výše a uvědomit si, že čísla φ a $\tilde{\varphi}$ nejsou ničím jiným než převrácenými hodnotami kořenů této rovnice. Ze stejných důvodů je také číslo φ jediné kladné číslo, pro které platí vztahy b) a c).

d) $\underline{\varphi^3=\frac{\varphi+1}{\varphi-1}}$

Důkaz: $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\varphi^3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{5}+3\cdot5+5\sqrt{5}}{8}=\frac{16+8\sqrt{5}}{8}=\frac{8\cdot(2+\sqrt{5})}{8}=2+\sqrt{5}$$

$$\frac{\varphi+1}{\varphi-1}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{2}}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=$$

$=\frac{3+3\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{-1+5}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5}$, tedy rovnost platí.

$\boxtimes$

e) $\underline{\varphi=\frac{\varphi^3+1}{\varphi^3-1}}$

Důkaz: $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{\varphi^3+1}{\varphi^3-1}=\frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}+\frac{8}{8}}{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}-\frac{8}{8}}=\frac{24+8\sqrt{5}}{8+8\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$, tedy rovnost platí.

$\boxtimes$

<u>Poznámka:</u>

Vlastnosti d) a e) jsou opět v podstatě dvojím zapsáním téhož. Vyjdeme-li od rovnice $\varphi^3=\frac{\varphi+1}{\varphi-1}$, uvedené jako vlastnost d), dostaneme se pomocí vhodných ekvivalentních úprav k vlastnosti e):

Původní rovnici $\varphi^3=\frac{\varphi+1}{\varphi-1}$ vynásobíme dvojčlenem $(\varphi-1)$, dostáváme $\varphi^3\cdot(\varphi-1)=\varphi+1$, levou stranu roznásobíme a členy ze strany pravé převedeme doleva, máme tedy $\varphi^4-\varphi^3-\varphi-1=0$, teď z prvních dvou členů vytkneme φ a z dalších dvou (-1). Dostáváme $\varphi\cdot(\varphi^3-1)-(\varphi^3+1)=0$. Nyní převedeme člen $-(\varphi^3+1)$ na pravou stranu a celou rovnici vydělíme (φ^3-1). Tedy $\varphi=\frac{\varphi^3+1}{\varphi^3-1}$. Jelikož $\varphi\neq 1$, byly všechny úpravy ekvivalentní (nikde jsme nedělili ani nenásobili nulou).

Podobných zajímavých vlastností bychom nejspíše objevili daleko víc, ale to není náplní této práce. Navíc určitě i jiná, na první pohled naprosto „obyčejná“ čísla splňují zajímavé rovnosti. Myslím, že jako ukázka a motivace toto stačí. Některé výše zmíněné vztahy využijeme dále u konstrukcí zlatého řezu a u jejich důkazů.

4 Konstrukce zlatého řezu

Na následujících řádcích si vysvětlíme, jak jednoduše zlatý řez úsečky sestrojit. První konstrukce vychází z toho, že je dána úsečka *AB*, kterou chceme rozdělit bodem *C* ve zlatém řezu. Další dvě konstrukce ukazují, jak postupovat, známe-li jen jeden z dílů takové úsečky (kratší, nebo delší) a chceme k němu doplnit druhý. Konečně poslední konstrukce nabízí možnost najít zlatý řez úsečky bez rýsování (nejde tedy o konstrukci v pravém slova smyslu), pouze pomocí skládání papíru. Ve všech případech je proveden početní důkaz, aby bylo zřejmé, že jsme těmito postupy skutečně získali zlatý řez.

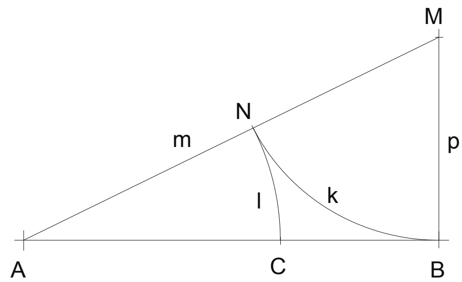
Konstrukce 1

Dáno: Úsečka *AB* libovolné délky.

Úkol: Najít na úsečce *AB* bod *C* tak, aby bod *C* dělil tuto úsečku zlatým řezem.

Postup konstrukce:

1. $\leftrightarrow\ p\,;\ p \perp AB\,,\ B \in p$
2. $M\,;\ M \in p\,,\ |MB| = \frac{1}{2}|AB|$
3. $\leftrightarrow m\,;\ A \in m\,,\ M \in m$
4. $k\,;\ k(M\,, r = |MB|)$
5. $N\,;\ N \in k \cap m$
6. $l\,;\ l(A\,, r = |AN|)$
7. $C\,;\ C \in l \cap AB$



Obr. 9: Konstrukce 1

Důkaz:

chceme dokázat: $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} = \varphi$

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky *AB*:

$a := |AB|$

$|BM| = \frac{1}{2}a$

$$|AM| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$|MN| = |BM| = \frac{1}{2}a$$

$$|AC| = |AN| = |AM| - |MN| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$$

$$|BC| = |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$$

Nyní zjistíme hodnoty příslušných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$, což se rovná φ .

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}\cdot(3-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-3+5-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$,

což se rovná φ .

☒

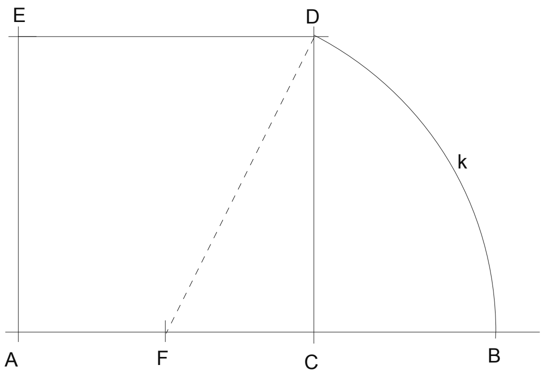
Konstrukce 2

Dáno: Úsečka *AC* libovolné délky.

Úkol: Najít na polopřímce *AC* bod *B* tak, aby bod *C* dělil úsečku *AB* zlatým řezem a přitom úsečka *AC* byla větší než *BC*.

Postup konstrukce:

1. F ; $F \in \frac{1}{2}|AC|$
2. D ; $CD \perp AC$, $|CD| = |AC|$
3. k ; $k(F, r = |FD|)$
4. B ; $B \in k \cap \rightarrow AC$



Obr. 10: Konstrukce 2

Důkaz:

chceme: $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} = \varphi$

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Pro lepší názornost si představíme nad úsečkou AC čtverec $ACDE$.

$$a := |AC| = |CD|$$

$$|FC| = |AF| = \frac{1}{2} a$$

$$|FD| = |FB| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$|AB| = |AF| + |FB| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$|BC| = |FB| - |FC| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

Nyní zjistíme hodnoty příslušných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$, což se rovná φ .

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$, což se rovná φ .

$\boxtimes$

<u>Konstrukce 3</u>

Dáno: Úsečka BC libovolné délky.

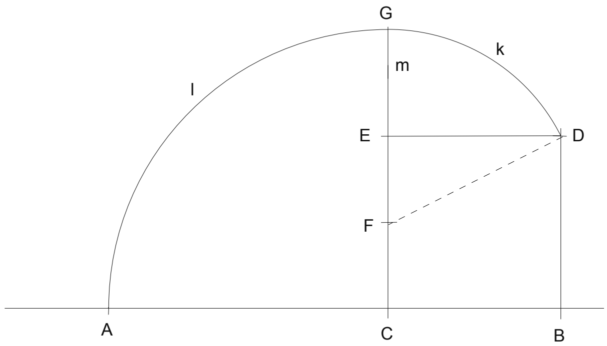
Úkol: Najít na polopřímce BC bod A tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým řezem a přitom úsečka AC byla větší než BC.

Postup konstrukce:

1. $\leftrightarrow m$; $m \perp BC$, $C \in m$

2. F ; $F \in m$, $|FC| = \frac{1}{2}|BC|$

3. k ; $k(F, r=|FB|)$



Obr. 11: Konstrukce 3

4. G ; $G \in k \cap \rightarrow CF$

5. l ; $l(C, r = |CG|)$

6. A ; $A \in l \cap \rightarrow BC$

Důkaz:

chceme: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \varphi$

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky *BC*. Pro lepší názornost si představíme nad úsečkou *CB* čtverec *CBDE*.

$$a := |BC| = |ED|$$

$$|FC| = |FE| = \frac{a}{2}$$

$$|FB| = |FD| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$|AC| = |CG| = |FC| + |FD| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$|AB| = |AC| + |BC| = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) + a = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}+2) = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5})$$

Nyní zjistíme hodnoty příslušných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}(3+\sqrt{5})}{\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

což se rovná φ.

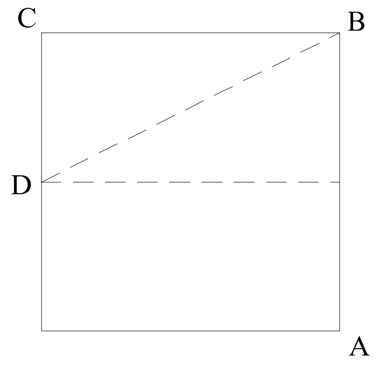
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$, což se rovná φ.

☒

<u>Konstrukce 4 – konstrukce „přehýbáním papíru“</u>

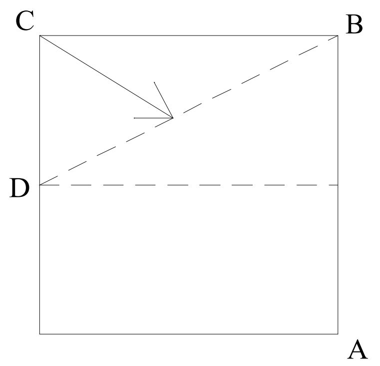
Poslední postup, jak rozdělit úsečku zlatým řezem je zajímavý tím, že k němu nepotřebujeme nic víc, než kus papíru, ze kterého si na začátku vystřihneme čtverec. Za délku strany čtverce volíme velikost úsečky, kterou chceme zlatým řezem rozdělit.

Mějme tedy čtverec se stranou *AB*. Přeložíme jej napůl (vznikne obdélník) a opět rozevřeme. Střed strany protější ke straně *AB* si označíme *D*, druhý krajní bod úhlopříčky z bodu *A* si označíme *C*. Dále přehneme papír podle vyznačené přerušované čáry *BD* a opět rozložíme (Obr. 12).

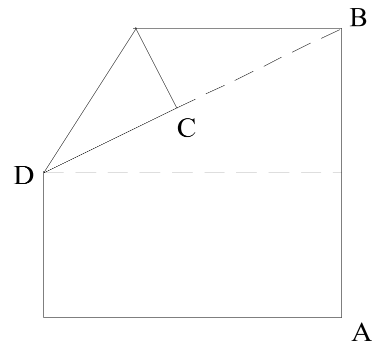


Obr. 12: Konstrukce 4

Teď vezmeme vrchol *C* a přiložíme jej na přehyb *BD*. Úsečka *CD* nám tedy splývá s částí úsečky *BD*, poloha bodu *D* se nezměnila (Obr. 13, 14).

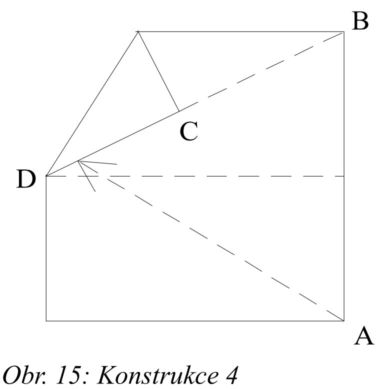


Obr. 13: Konstrukce 4

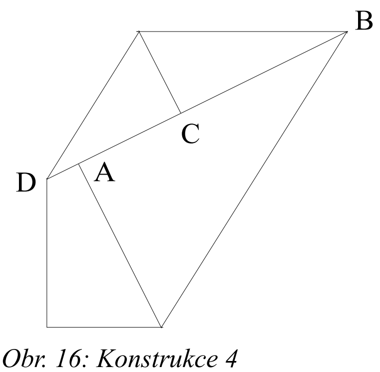


Obr. 14: Konstrukce 4

Nyní přiložíme vrchol *A* opět na přehyb *BD*. Úsečka *AB* splývá s částí úsečky *BD*, poloha bodu *B* se nezměnila (Obr. 15, 16).

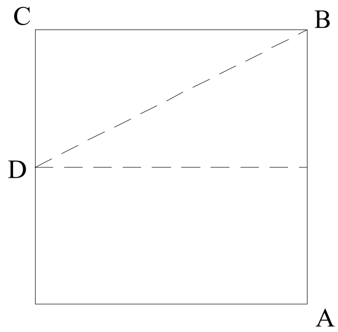


Obr. 15: Konstrukce 4



Obr. 16: Konstrukce 4

Skládanka je hotová – bod C dělí úsečku AB ve zlatém řezu tak, že úsečka BC je větším dílem úsečky AB.



Obr. 17: Konstrukce 4

Důkaz:

chceme: $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|BC|}{|AC|}=\varphi$

Nechť má původní čtverec rozměry ($a\times a$).

Potom $|AB|=a$, $|BC|=a$, $|CD|=\frac{a}{2}$.

Pomocí Pythagorovy věty určíme délku přehybu BD:

$$|BD|=\sqrt{|BC|^2+|CD|^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{|a|}{2}\sqrt{5}\ ,$$

ale $a>0$, proto $|BD|=\frac{a}{2}\sqrt{5}$ (Obr. 17).

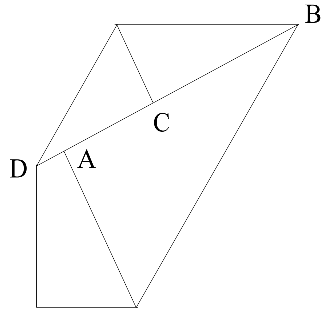
Nyní zjistíme délky jednotlivých úseček AC a BC po zpřehýbání papíru a ověříme, zda splňují podmínky zlatého řezu (Obr. 18).

$$|BC|=|BD|-|CD|=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$|AC|=|AB|-|BC|=a-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$$

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi$$

$$\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}+2}{9-5}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi$$



Obr. 18: Konstrukce 4

$\boxtimes$

Poznámka:

Přehýbáním papíru rozdělíme úsečku zlatým řezem jen přibližně. Teoreticky je sice řešení správné, ale maximální přesnosti nelze samozřejmě dosáhnout ani rýsováním, natož skládáním papíru, kde záleží nejen na preciznosti naší práce, ale navíc například i na tloušťce papíru.

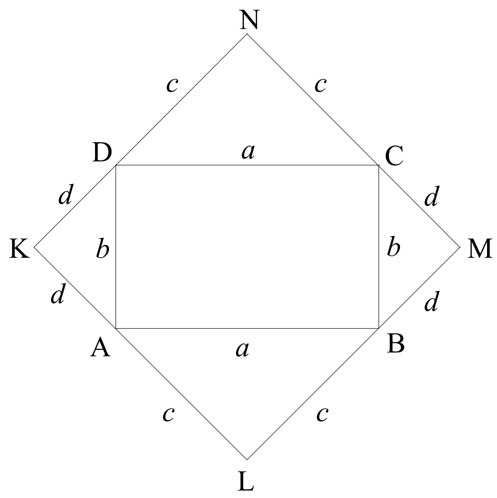
5 Zlaté číslo a rovinné útvary

Poměr φ můžeme nezřídka nalézt v rovinné geometrii. Už víme, jak zlatý řez sestrojit. Nyní si ukážeme, že se vyskytuje například v některých pravidelných mnohoúhelnících, aniž bychom jej sestrojovali úmyslně. Dále se seznámíme s pojmy zlatý obdélník, zlatý trojúhelník a zlatá spirála. Právě tyto útvary se často vyskytují v přírodě.

5.1 Zlatý obdélník

Představme si obdélník, jehož delší strana má velikost a a kratší strana má velikost b. Zvolíme-li strany a, b tak, aby $\frac{a}{b}=\varphi$, nazveme tento obdélník zlatým. Pro takový obdélník pak platí následující zajímavé vlastnosti:

1. *Vepíšeme-li zlatý obdélník do čtverce, vrcholy obdélníku pak dělí strany čtverce zlatým řezem (Obr. 19).*



Obr. 19: Zlatý obdélník vepsaný do čtverce

Důkaz:

Nechť $\frac{a}{b}=\varphi$. Chceme dokázat: $\frac{c}{d}=\varphi$.

Pro trojúhelník *ABL* (stejně jako pro trojúhelník *CDN*) musí platit: $c^2+c^2=a^2$, odtud $c=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Analogicky pro trojúhelník *BCM* platí (stejně jako pro trojúhelník *ADK*):

$d^2+d^2=b^2$, odtud $d=\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

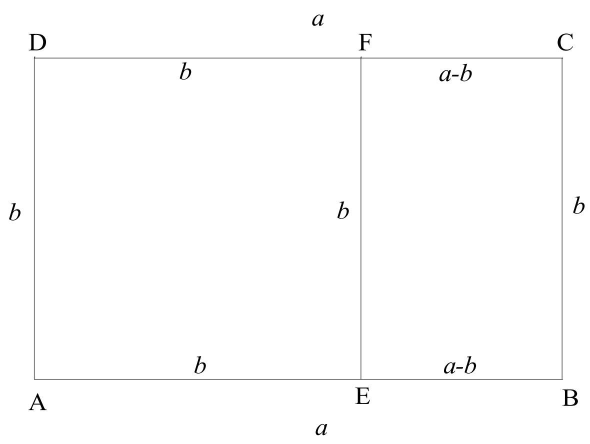
Tedy: $\frac{c}{d}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{b\sqrt{2}}{2}}=\frac{a}{b}=\varphi$

$\boxtimes$

Poznámka:

Z důkazu je zřejmé, že tato vlastnost není výsadou pouze zlatého obdélníku. Ta další už ovšem ano.

2. *Oddělíme-li od zlatého obdélníku ABCD ($a\times b$) čtverec AEFD ($a\times a$), je zbylý obdélník BCFE ($b\times a-b$) opět zlatý (Obr. 20).*



Obr. 20: Oddělení čtverce od zlatého obdélníku

Důkaz:

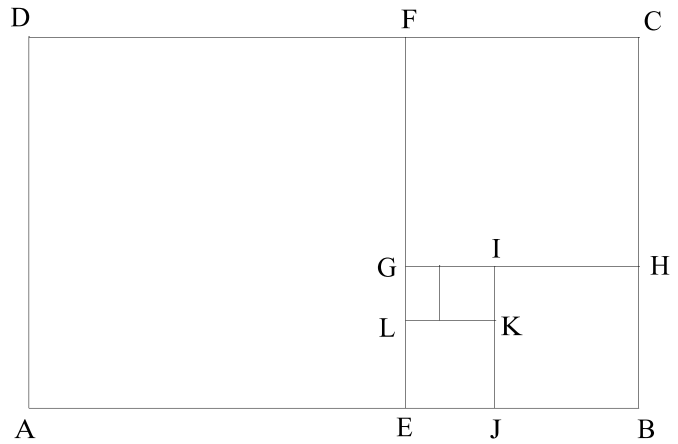
Nechť $\frac{a}{b}=\varphi$. Chceme dokázat: $\frac{b}{a-b}=\varphi$.

Oddělíme-li od obdélníku *ABCD* čtverec *AEFD* o straně délky b , rozdělili jsme vlastně úsečku *AB* bodem *E* ve zlatém řezu, protože $|AB|=a$, $|AE|=b$ a předpokládáme, že $\frac{a}{b}=\varphi$. To ale znamená, že $\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{|AB|}{|AE|}=\varphi$, tedy $\frac{b}{a-b}=\varphi$.

$\boxtimes$

Poznámka:

V oddělování čtverců můžeme stejným způsobem pokračovat – získáme nové zlaté obdélníky: *EBHG*, *EGIJ*, *GIKL*, atd.(Obr. 21)

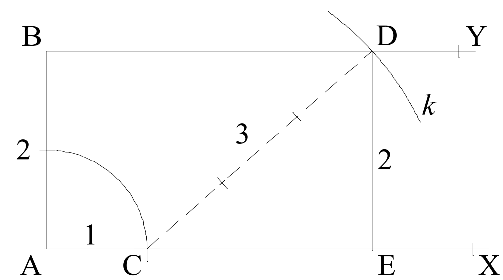


Obr. 21: Nové zlaté obdélníky získané oddělováním čtverců

Ještě si ukážeme, jak jednoduše a hlavně rychle lze sestrojit zlatý obdélník (Obr. 22):

Postup:

1. A , B ; $|AB|=2$ (2 jednotky délky)
2. $\rightarrow AX$, $\rightarrow BY$; $AX \perp AB$, $BY \perp AB$
3. C ; $C \in \rightarrow AX$, $|AC|=1$
4. k ; $k(C, r=3)$
5. D ; $D \in k \cap \rightarrow BY$
6. E ; $E \in \rightarrow AX$, $|AE|=|BD|$
7. obdélník $AEDB$

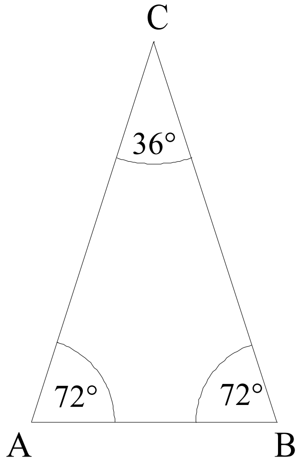


Obr. 22: Konstrukce zlatého obdélníku

Trojúhelník *CDE* je pravoúhlý s přeponou *CD*, $|CD|=3$, $|DE|=2$. Pomocí Pythagorovy věty vypočítáme $|CE|$: $|CE|=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. Strana *AE* obdélníku *AEDB* měří $1+\sqrt{5}$, strana *AB* měří 2, platí tedy, že $\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$, obdélník je zlatý. Chceme-li zlatý obdélník s jinými rozměry, stačí tento obdélník zmenšit nebo zvětšit, například pomocí libovolné stejnolehlosti.

5.2 Zlatý trojúhelník

Zlatým trojúhelníkem nazýváme libovolný rovnoramenný trojúhelník *ABC* pro který platí: $\frac{|AC|}{|AB|}=\varphi$, kde $|AB|$ je velikost základny a $|AC|$ je velikost ramene. Tento trojúhelník má při základně úhly o velikosti 72° a u vrcholu úhel 36° (Obr. 23). O tom se můžeme přesvědčit jednoduše například takto:



Obr. 23: Zlatý trojúhelník

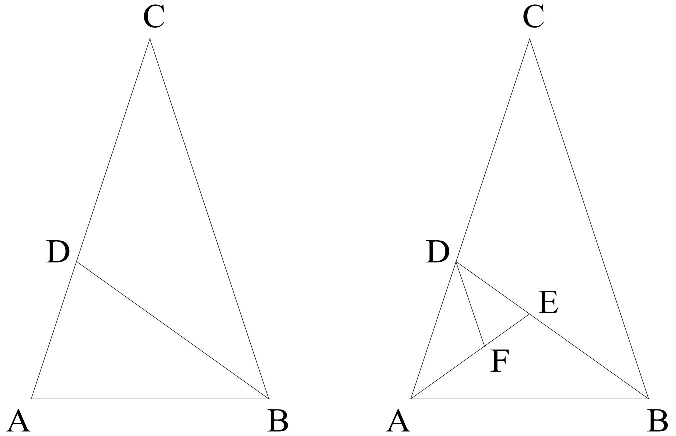
Zvolíme-li základnu trojúhelníku za jednotku délky, potom aby byl trojúhelník zlatý, musí být ramena dlouhá $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Rozdělíme-li trojúhelník výškou k základně na dva pravoúhlé a úhel při základně označíme α , bude platit, že

$$\cos(\alpha)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}$$. Odtud $\alpha=72°$.

Jelikož součet úhlů v trojúhelníku musí být 180° a úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné, je již snadné dopočítat zbývající velikosti úhlů.

Tento postup funguje i obráceně, můžeme tedy říci, že každý rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena svírají se základnou úhel 72° je zlatý.

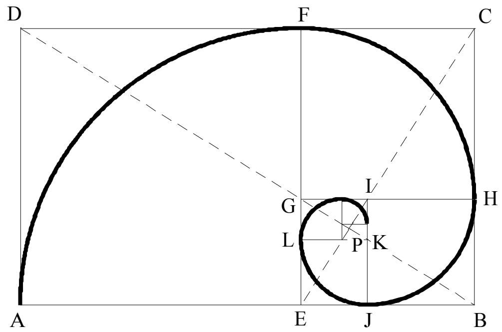
Vepíšeme-li do zlatého trojúhelníku *ABC* (se základnou *AB*) rovnoramenný trojúhelník s ramenem *AB*, bude nový trojúhelník *DAB* opět zlatý. Trojúhelník *DAB* je totiž rovnoramenný se základnou *AD* a jeho ramena svírají se základnou úhly 72° . Tento postup můžeme, stejně jako u zlatého obdélníku, libovolněkrát opakovat (Obr. 24).



Obr. 24: Vepisování zlatých trojúhelníků

5.3 Zlatá spirála

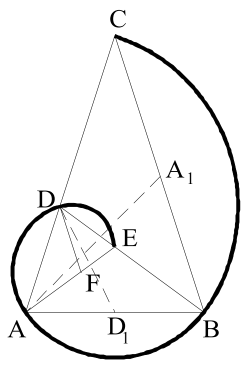
Vrátíme-li se k zlatému obdélníku, konkrétně k oddělování čtverce od tohoto obdélníku tak, že vznikne nový zlatý obdélník, a provedeme-li toto oddělení několikrát, je vidět, že body vyznačující postupně zlaté řezy (*A*, *F*, *H*, *J*, *L*, …) leží na spirále. (Bod *A* můžeme do výčtu zahrnout také, stačí si představit, že obdélník *ABCD* vznikl oddělením čtverce o straně *AB* od většího obdélníku). Této spirále se říká zlatá, ale v podstatě jde o logaritmickou spirálu (Obr. 25).



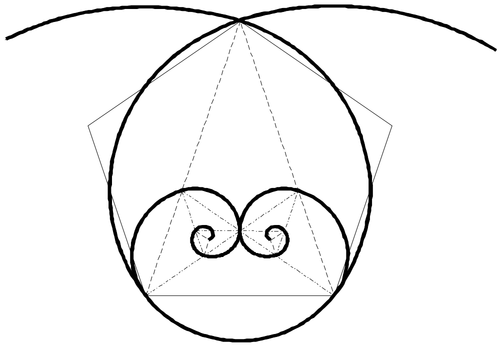
Obr. 25: Zlatá spirála v obdélníku

Logaritmická spirála je křivka, která protíná průvodiče svých bodů pod konstantním úhlem. Její rovnice v polárních souřadnicích je: $\varrho = a\, e^{b\alpha}$, kde *a*, *b* jsou kladné konstanty a α je úhel průvodiče v radiánech. Tečna v bodě logaritmické spirály svírá s jeho průvodičem úhel ψ, pro který platí: $\tan(\psi) = \frac{1}{b}$. Pólem *P* této spirály je průsečík přímek *DB* a *CE*. Zlatá spirála se velmi často vyskytuje v přírodě. (Podívejte se například na ulitu hlemýždě) [2, 4, 6].

Zlatou spirálu lze vkreslit i do zlatého trojúhelníku (pro získání bodů spirály opět využijeme postupné vpisování menších zlatých trojúhelníků). Pólem spirály bude v tomto případě průsečík přímek AA_1, DD_1, kde A_1 je střed strany *BC* a D_1 je střed strany *AB* (Obr. 26). Zajímavě vypadá obrázek, kde vyjdeme od zlatého trojúhelníku tvořeného stranou a úhlopříčkami pravidelného pětiúhelníku (že je tento trojúhelník zlatý si ukážeme později) a vykreslíme dvě spirály osově souměrné podle výšky k základně zlatého trojúhelníku (Obr. 27).



Obr. 26: Zlatá spirála v trojúhelníku

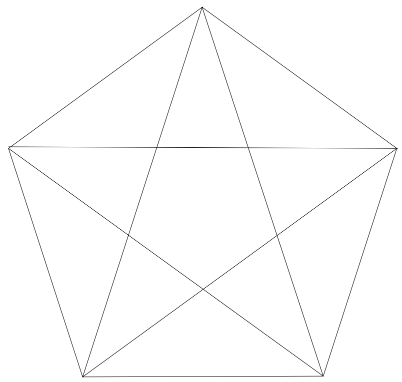


Obr. 27: Zlaté spirály v pětiúhelníku

5.4 <u>Pravidelný pětiúhelník</u>

Všem absolventům střední školy by tento pojem měl být dobře znám. Pro úplnost si ale připomeneme, jak pravidelný pětiúhelník vypadá a jak jej můžeme zkonstruovat.

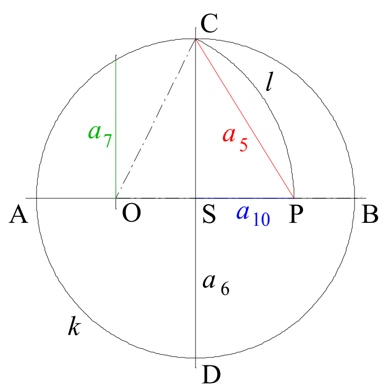
Pravidelný pětiúhelník je jedním z pravidelných mnohoúhelníků, tj. všechny jeho strany (je jich pět) a všechny vnitřní úhly jsou shodné. Stejně jako ostatní pravidelné mnohoúhelníky jej lze vepsat do kružnice a rovněž mu lze kružnici vepsat. Navíc je to jediný pravidelný mnohoúhelník se stejným počtem úhlopříček a stran a také jde o mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů, který lze včetně úhlopříček nakreslit jedním tahem (Obr. 28).



Obr. 28: Pravidelný pětiúhelník včetně úhlopříček

Nejznámější a jistě i nejpoužívanější konstrukce je pomocí kružnice opsané. Na začátku je tedy dán poloměr kružnice opsané. Z něj určíme velikost strany nejen pravidelného pětiúhelníku následujícím způsobem:

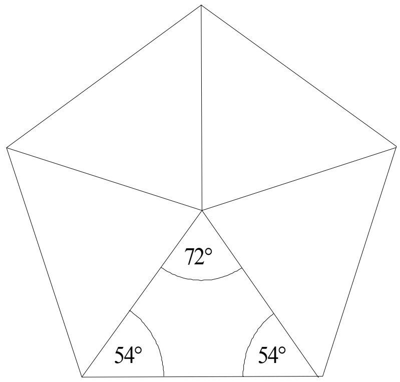
Narýsujeme kružnici k se středem S a poloměrem r (Obr. 29). Zvolíme dva navzájem kolmé průměry a jejich krajní body označíme A, B, C, D. Dále označíme střed úsečky AS jako bod O. Sestrojíme kružnici l se středem O a poloměrem $|OC|$. Kružnice l protne úsečku SB v bodě P. Velikost úsečky PC je potom stejná, jako délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice k.



Obr. 29: Konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Dále je poloměr kružnice k stejný jako délka strany pravidelného šestiúhelníku, velikost úsečky *SP* odpovídá velikosti strany pravidelného desetiúhelníku a velikost úsečky *OR*, kde *R* je průsečík kolmice vedené z bodu *O* na průměr *AB* a kružnice k, je přibližně velikost strany pravidelného sedmiúhelníku.

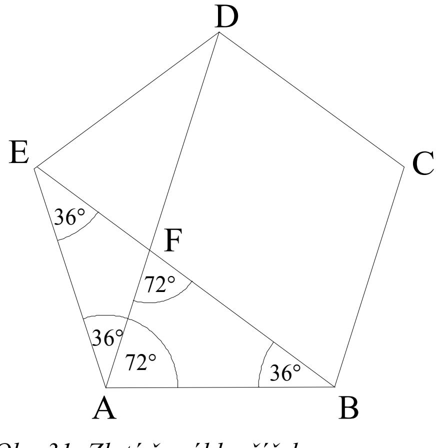
Velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku (dále jen pětiúhelníku) je 108°. Pětiúhelník můžeme rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu kružnice opsané, kde základny jsou strany pětiúhelníku a ramena mají délku rovnou poloměru kružnice opsané (Obr. 30). Tyto trojúhelníky pak mají při vrcholu úhel o velikosti 72°, při základnách úhly 54°.



Obr. 30: Rovnoramenné trojúhelníky v pětiúhelníku

Co nás ale zajímá nejvíc je výskyt zlatého poměru v tomto geometrickém obrazci. A ten je skutečně častý. V následujících odstavcích si uvedeme vlastnosti pětiúhelníku související právě se zlatým řezem.

1. *Průsečík dvou úhlopříček dělí každou z nich v poměru zlatého řezu (Obr. 31).*



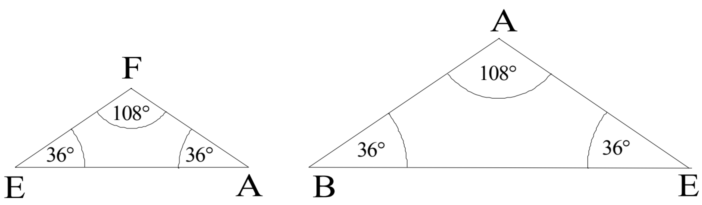
Obr. 31: Zlatý řez úhlopříček

Důkaz:

Každá úhlopříčka v pětiúhelníku nám tento pětiúhelník rozdělí na rovnoramenný lichoběžník a rovnoramenný trojúhelník s úhly 36° při základně a 108° u vrcholu. Sestrojíme-li tedy v pětiúhelníku *ABCDE* úhlopříčky *AD* a *BE* a jejich průsečík označíme *F*, jsou si trojúhelníky *BEA* a *EAF* podobné (podle věty o podobnosti trojúhelníků *uu* – obr. 32).

Proto platí: $\frac{|BE|}{|AE|}=\frac{|AB|}{|EF|}$

Navíc jsou oba trojúhelníky rovnoramenné, proto: $|AB|=|AE|=|BF|$



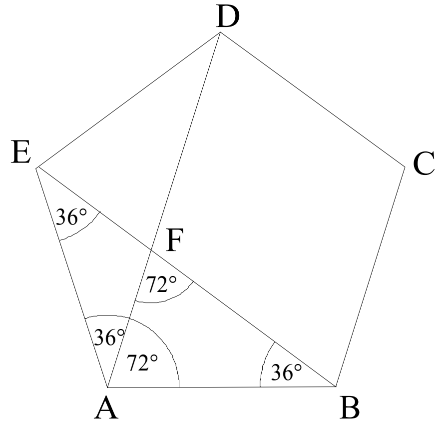
Obr. 32: Podobné trojúhelníky

Odtud dostáváme: $\frac{|BE|}{|BF|}=\frac{|BF|}{|EF|}$, což znamená, že bod *F* dělí úhlopříčku *BE* zlatým řezem. Úsečka *BF* je větší částí rozdělené úhlopříčky.

Analogicky bychom mohli dokázat totéž pro ostatní úhlopříčky.

$\boxtimes$

2. *Poměr délek úhlopříčky a strany pětiúhelníku je zlatý (Obr. 33).*



Obr. 33: Poměr úhlopříčky a strany

Důkaz:

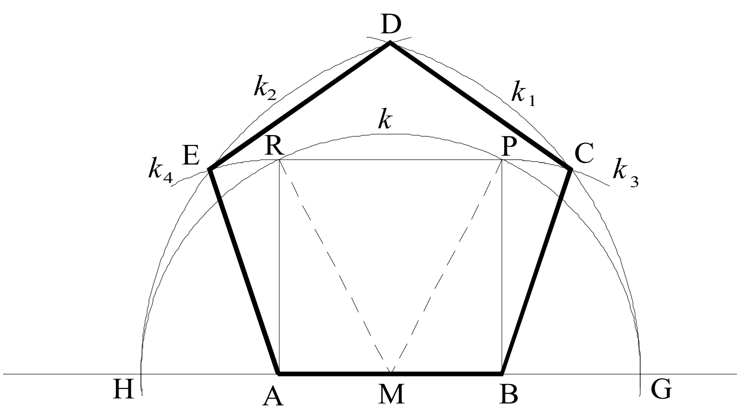
Chceme dokázat, že $\frac{|BE|}{|AE|}=\varphi$.

Trojúhelník *FAB* je zlatý (podle velikostí vnitřních úhlů), platí tedy, že $\frac{|AB|}{|AF|}=\varphi$. Dále platí: $|AB|=|AE|$, proto $\frac{|AB|}{|AF|}=\varphi=\frac{|AE|}{|AF|}$. Z podobnosti trojúhelníků *BEA* a *EAF* (viz předchozí vlastnost) vyplývá, že $\frac{|AE|}{|AF|}=\frac{|BE|}{|AE|}$, tedy $\frac{|BE|}{|AE|}=\varphi$, což jsme chtěli dokázat.

$\boxtimes$

Tuto vlastnost lze využít pro konstrukci pětiúhelníku, máme-li zadanou velikost jeho strany *a*. Máme-li tedy narýsovat pětiúhelník *ABCDE* se stranou délky *a*, je postup následující (Obr. 34):

1. *ABPR*; *ABPR* je čtverec se stranou délky *a*
2. *M*; $M \in \frac{1}{2}|AB|$
3. *k*; $k(M,|MP|)$
4. *G*, *H*; $G \in \rightarrow AB \cap k$, $H \in \rightarrow BA \cap k$
5. k_1 , k_2 ; $k_1(A,|AG|)$, $k_2(B,|BH|)$
6. *D*; $D \in k_1 \cap k_2$
7. k_3 , k_4 ; $k_3(B,|AB|)$, $k_4(A,|AB|)$
8. *C*, *E*; $C \in k_1 \cap k_3$, $E \in k_2 \cap k_4$
9. *ABCDE*



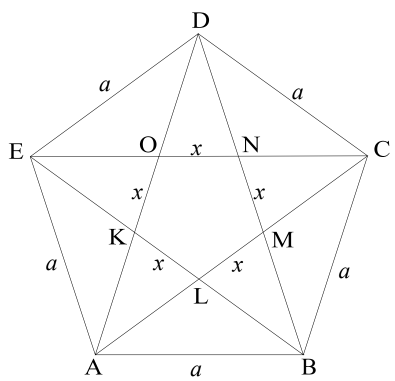
Obr. 34: Konstrukce pětiúhelníku

Body G, H jsme zkonstruovali stejně, jako kdybychom hledali úsečku AG (BH) rozdělenou zlatým řezem tak, že AB je její delší část. Poměr $\frac{|AG|}{|AB|}$ je tedy roven φ, $|AG|=|AD|=|BD|$, proto $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|BD|}{|AB|}=\varphi$, přitom BD a AD jsou úhlopříčky pětiúhelníku a AB je strana pětiúhelníku.

Poznámka:

Druhou vlastnost pětiúhelníku jsme mohli jednodušeji dokázat také tak, že trojúhelník ABD z předchozí úlohy je zlatý (podle velikostí vnitřních úhlů) a tudíž poměr délek úhlopříčky a strany pětiúhelníku je roven zlatému číslu. Naopak víme, že trojúhelník ABD je zlatý, protože poměr délek úhlopříčky a strany pětiúhelníku je zlaté číslo. Z toho je názorně vidět, že vnitřní úhly zlatého trojúhelníku skutečně mají velikosti 72°, 72° a 36°.

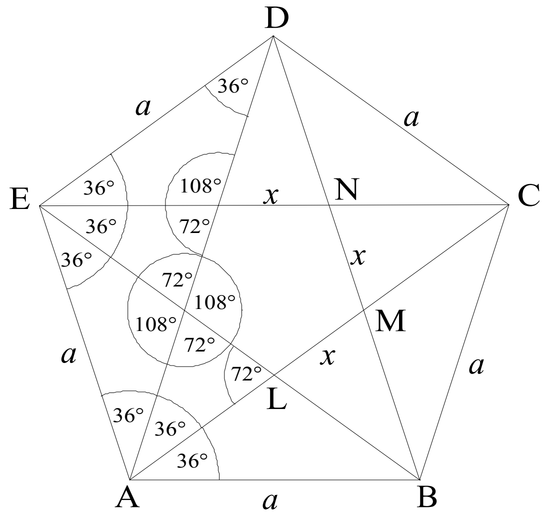
3. *Sestrojíme-li všechny úhlopříčky pětiúhelníku, dostaneme pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník. Potom poměr stran původního a nového pětiúhelníku je druhá mocnina zlatého čísla (Obr. 35).*



Obr. 35: Pěticípá hvězda v pětiúhelníku

Důkaz:

Označme původní pětiúhelník $ABCDE$ a nový pětiúhelník $KLMNO$ (Obr. 36). Úhel u vrcholu A je úhlopříčkami dělen na tři shodné úhly o velikosti 36° (podle věty o obvodovém úhlu). Trojúhelník AKL je rovnoramenný, jeho vnitřní úhly u vrcholů K a L jsou tedy shodné a měří 72°. Proto i vnitřní úhly pětiúhelníku $KLMNO$ u vrcholů K a L jsou shodné a měří 108° (180° - 72°). Stejně můžeme postupovat, vyjdeme-li od jiného vrcholu pětiúhelníku $ABCDE$. Tím jsme ověřili, že pětiúhelník $KLMNO$ je skutečně rovněž pravidelný.



Obr. 36: Pěticípá hvězda v pětiúhelníku

Délku strany pětiúhelníku *ABCDE* označíme a, délku strany pětiúhelníku *KLMNO* označíme x.

Chceme dokázat: $\frac{a}{x}=\varphi^2$

Doplníme-li velikosti úhlů v obrázku, vidíme, že platí: $|AE|=|AO|=a$ (trojúhelník *EOA* je rovnoramenný se základnou *EO*). Dále je vidět, že $|AK|=|DO|=a-x$

Z vlastnosti *2.* víme, že $\varphi=\frac{|AO|}{|DO|}$

Platí tedy: $\varphi=\frac{|AO|}{|AK|}=\frac{|AO|}{|AO|-|KO|}=\frac{a}{a-x}$, odtud $\frac{1}{\varphi}=\frac{a-x}{a}=1-\frac{x}{a}$

Rovnici $\frac{1}{\varphi}=1-\frac{x}{a}$ upravíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\frac{x}{a}=1-\frac{1}{\varphi}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=\frac{\varphi-1}{\varphi}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{\varphi}{\varphi-1}$$

Dále víme, že pro zlaté číslo φ platí: $\varphi-1=\frac{1}{\varphi}$.

Dostáváme: $\frac{a}{x}=\frac{\varphi}{\frac{1}{\varphi}}=\varphi^2$, což jsme chtěli dokázat.

$\boxtimes$

Poznámka:

Délky úseček *KO*, *AK*, *AO*, *AD* (Obr. 35) jsou členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q=\varphi$. Tato skutečnost je pěkně vidět, zvolíme-li délku strany pětiúhelníku *ABCDE* za jednotku délky. Potom zmíněné úsečky mají velikosti:

$$|KO|=\frac{1}{\varphi^2}\,,\ |AK|=\frac{1}{\varphi}\,,\ |AO|=1\,,\ |AD|=\varphi$$

Navíc platí, že součet dvou po sobě jdoucích členů této posloupnosti se rovná členu následujícímu:

$$|KO|+|AK|=\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}=\frac{1+\varphi}{\varphi^2}$$

Položíme-li tento součet roven následujícímu členu, tj. $\frac{1+\varphi}{\varphi^2}=1$, dostáváme rovnost $1+\varphi=\varphi^2$, o které víme, že platí.

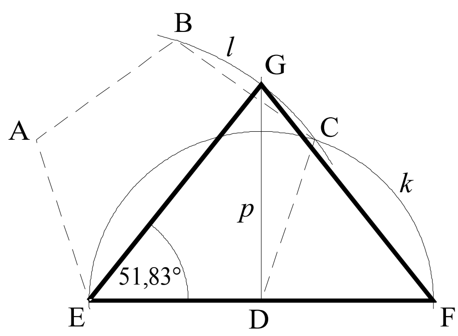
Totéž platí pro součet členů $|AK|$ a $|AO|$: $|AK|+|AO|=\frac{1}{\varphi}+1=\frac{1+\varphi}{\varphi}$

Tento součet položíme roven následujícímu členu, tj. $\frac{1+\varphi}{\varphi}=\varphi$ a dostáváme tutéž rovnost $1+\varphi=\varphi^2$.

A ještě jedna zajímavost:

Je dán pravidelný pětiúhelník *ABCDE*, délku jeho strany budeme považovat za jednotku. Podle následujících pokynů sestrojíme trojúhelník *EFG* (Obr. 37):

1. *k*; $k(D,|DE|)$
2. *F*; $F\in k\cap\to ED$
3. $\leftrightarrow p$; $D\in p$, $p\perp EF$
4. *l*; $l(E,|EB|=\varphi)$
5. *G*; $G\in l\cap p$
6. *EFG*

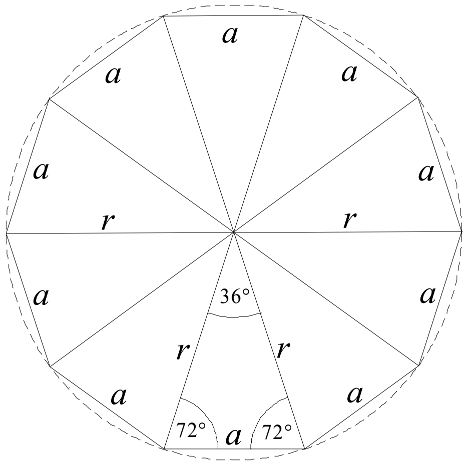


Obr. 37: Zajímavost

Trojúhelník *EFG* má délky stran: $|EF|=2$, $|EG|=|FG|=\varphi$, výška na stranu *EF* měří $\sqrt{\varphi}$. Úhly při základnách měří přibližně 51,83°. Tato velikost téměř odpovídá velikosti úhlu 51,85°, což je odchylka stěn Cheopsovy pyramidy od základny.

5.5 Pravidelný desetiúhelník

Jak se pravidelný desetiúhelník (dále jen desetiúhelník) zkonstruuje, známe-li poloměr kružnice opsané, už víme (Obr. 29). Rozdělíme-li desetiúhelník na deset rovnoramenných trojúhelníků se základnami splývajícími se stranami desetiúhelníku a se společným vrcholem ve středu kružnice opsané, získáme deset shodných rovnoramenných trojúhelníků (Obr. 38). Podíváme-li se na velikosti vnitřních úhlů těchto trojúhelníků, zjistíme, že trojúhelníky jsou zlaté. Plný úhel (360°) u středu kružnice opsané je rozdělen rovnoměrně na deset dílů, úhel u vrcholu proti základně každého rovnoramenného trojúhelníka je tedy 36°, na úhly při základně zbývá po 72°. Platí tedy, že poloměr r kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku ku straně a tohoto desetiúhelníku je zlaté číslo φ.



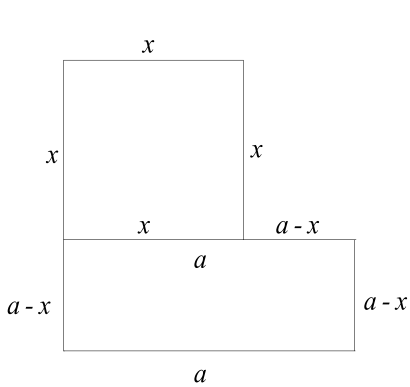
$$\frac{r}{a}=\varphi$$

Obr. 38: Pravidelný desetiúhelník

Na závěr této kapitoly si ještě ukážeme příklady, jejichž řešení nějak souvisí se zlatým řezem:

5.6 Úloha z Eukleidových „Základů“

Rozdělte danou úsečku na dvě nestejné části tak, aby čtverec sestrojený nad větší z nich měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menší části dané úsečky a druhá má délku celé úsečky (Obr. 39).



Obr. 39: Úloha z Eukleidových základů

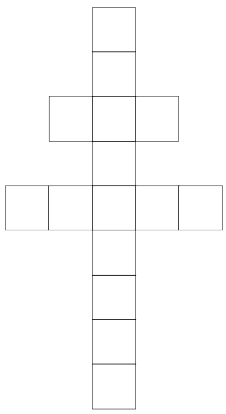
Řešení:

Délku dané úsečky označíme a. Nechť po rozdělení má větší část úsečky délku x a menší délku $a-x$, přičemž $a>x>a-x>0$. Čtverec sestrojený nad větší částí dané úsečky má tedy obsah x^2, pravoúhelník (tj. obdélník) má obsah $a(a-x)$.

Aby byly splněny požadavky zadání, musí platit: $x^2=a(a-x)$, neboli $\frac{x}{a-x}=\frac{a}{x}$, což ale není nic jiného, než rovnice pro nalezení zlatého řezu úsečky. Rozdělíme-li tedy danou úsečku zlatým řezem, dostaneme řešení této starověké úlohy.

5.7 Lotrinský kříž (Lorraine Cross)

Jde o znak Jany z Arku (pocházela z lotrinské obce), který se stal za 2. světové války symbolem bojovníků francouzského hnutí odporu, mimo to byl v téže době i znakem francouzského národního letectva. Tento kříž se skládá z patnácti jednotkových čtverců uspořádaných tak, jak je vidět na obrázku číslo 40.



Obr. 40: Lotrinský kříž

Obr 41: Lotrinský kříž v uměleckém podání

S tímto symbolem se pojí následující úloha [4]:

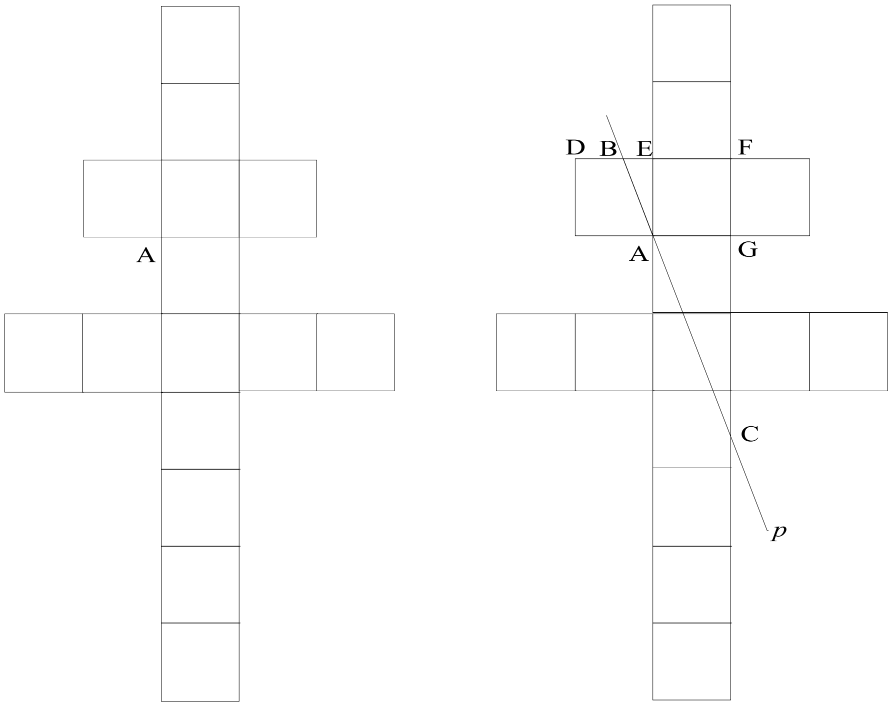
Zadání:

Veďte bodem *A* (Obr. 42) přímku *BC* tak, aby rozdělila plochu kříže na dvě části o stejném obsahu. V jakém poměru dělí bod *B* úsečku *DE*?

Řešení:

Obsah celé plochy kříže je 15 jednotek čtverečných. Z toho tedy jedna polovina činí 7,5 j^2.

Všimněme si tří pravoúhlých trojúhelníků: *BFC*, *BEA* a *AGC*.



Obr. 42: Zadání a řešení úlohy o Lotrinském kříži

Označíme-li velikost úsečky *BE* proměnnou x a velikost úsečky *CG* proměnnou y, platí následující rovnosti:

1. $\frac{(x+1)(y+1)}{2}=7{,}5-5 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=5 \Leftrightarrow xy+x+y+1=5$

2. $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=7{,}5-6 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x+y=3$

Obě rovnosti určují vztahy mezi plochami pravoúhlých trojúhelníků a jednotkových čtverců v horní polovině kříže.

Máme tedy soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé x a y, kterou nyní vyřešíme.

Ze druhé rovnice si vyjádříme například proměnnou x a dosadíme do rovnice první:

$$x=3-y\,,\ \ xy+x+y+1=5$$

$$(3-y)y+(3-y)+y+1=5$$

$$3y-y^2+4=5$$

$$y^2-3\mathrm{y}+1=0$$

$$y_{12}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\,,\ \ y_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,\ \ y_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1=3-y_1=3-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,\ \ x_2=3-y_2=3-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Z obrázku je zřejmé, že přímka BC musí mít takový sklon, aby $y > x$, jinak nerozdělí plochu kříže na dvě stejné části. Proto vyhovují kořeny x_1, y_1.

Bod B tedy dělí úsečku DE tak, že $|BE| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, přitom $|DE| = 1$. Z toho vyplývá, že $|DB| = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

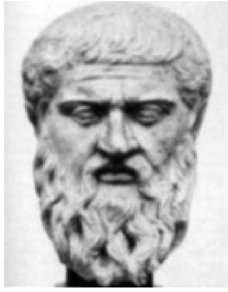
Potom:

$$\frac{|DE|}{|DB|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \;;$$

$$\frac{|DB|}{|BE|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-3+5-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \;.$$

To znamená, že bod B dělí úsečku DE zlatým řezem.

6 Platónská tělesa



Obr. 43: Platón

Platón (vlastním jménem Aristokles) byl řecký filosof, který žil asi v letech 428 – 347 př. n. l. (Obr. 43). Veřejnosti je znám především díky „podobenství o jeskyni“. V Athénách založil filosofickou školu, která dostala název „Akadémie“ a jejíž program zahrnoval v neposlední řadě i matematiku.

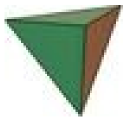
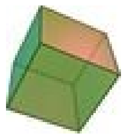
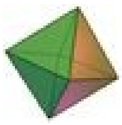
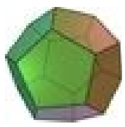
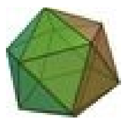
Platónské těleso je pravidelný konvexní mnohostěn (tj. z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří stejný pravidelný mnohoúhelník). V trojrozměrném prostoru jich existuje právě pět a to: pravidelný čtyřstěn, pravidelný šestistěn (krychle), pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Platón jako jeden z prvních matematiků tato tělesa podrobně popsal. Krychli, osmistěn, čtyřstěn a dvacetistěn považoval za představitele čtyř základních živlů: země, vzduch, oheň a voda. Dvanáctistěn podle Platónova učení představoval jsoucno, neboli vše, co existuje.

Na následující stránce je v tabulce uveden přehled všech pěti Platónových těles i s jejich vlastnostmi [1].

Značení použité v tabulce:

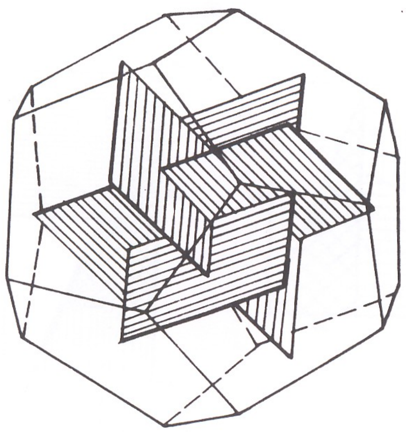
s...počet stěn tělesa
h...počet hran tělesa
v...počet vrcholů tělesa
h_v...počet hran vycházejících z jednoho vrcholu

Platónská tělesa jsou pro nás z hlediska zkoumání zlatého řezu poměrně zajímavá. Na některých z nich najdeme zlatý poměr ve velmi hojném počtu. (Proporcemi zlatého řezu na platónských tělesech se zabýval v minulosti především italský mnich Luca Pacioli).

název	obrázek	s	h	v	tvar stěny	h_v	povrch (hrana délky a)	objem (hrana délky a)
pravidelný čtyřstěn (tetraedr)		4	6	4	rovnostranný trojúhelník	3	$a^2\sqrt{3}$	$a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$
pravidelný šestistěn, krychle (hexaedr)		6	12	8	čtverec	3	$6a^2$	a^3
pravidelný osmistěn (oktaedr)		8	12	6	rovnostranný trojúhelník	4	$2a^2\sqrt{3}$	$a^3\frac{\sqrt{2}}{3}$
pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)		12	30	20	pravidelný pětiúhelník	3	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$
pravidelný dvacetistěn (ikosaedr)		20	30	12	rovnostranný trojúhelník	5	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$

6.1 Pravidelný dvanáctistěn

Stěny dvanáctistěnu tvoří pravidelné pětiúhelníky. Už to nám zaručuje přítomnost zlatého čísla na tomto tělese. Dvanáctistěn má ale další zajímavou vlastnost, lze do něj vepsat tři navzájem kolmé zlaté obdélníky a to tak, že jejich vrcholy leží ve středech stěn dvanáctistěnu (Obr. 44).

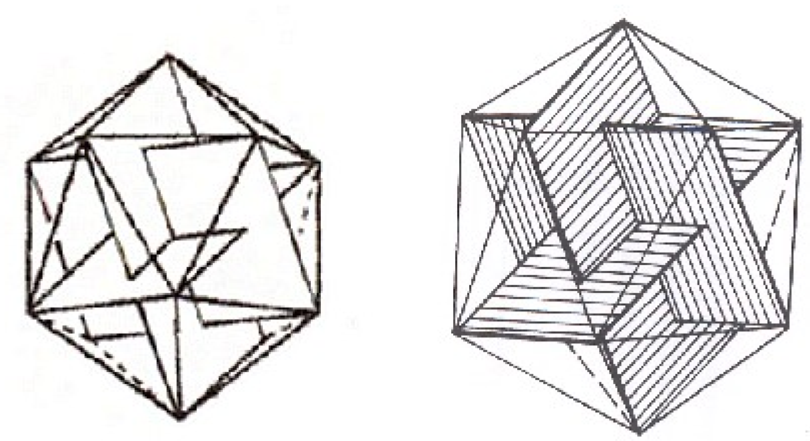


Obr. 44: Pravidelný dvanáctistěn a vepsané zlaté obdélníky

6.2 Pravidelný dvacetistěn

Stěny dvacetistěnu tvoří rovnostranné trojúhelníky. Ty nám samy o sobě žádný zlatý řez nenabízí. Vezmeme-li ale v úvahu všechny trojúhelníky stýkající se v jednom vrcholu dvacetistěnu, jejich protilehlé strany k tomuto vrcholu leží v jedné rovině a tvoří pravidelný pětiúhelník. Zlaté číslo je na světě.

Pro dvacetistěn dále platí: Spojíme-li dvě protilehlé hrany získáme obdélník, jehož delší strana je k menší ve stejném poměru jako součet stran ku delší straně, to znamená, že jsme dostali zlatý obdélník. Odtud plyne, že dvanáct vrcholů dvacetistěnu tvoří současně dvanáct vrcholů tří zlatých obdélníků, které leží ve třech navzájem kolmých rovinách. Společný průsečík těchto obdélníků je středem dvacetistěnu (Obr. 45).

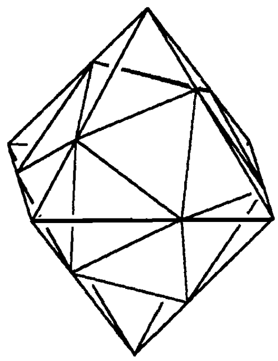


Obr. 45: Pravidelný dvacetistěn a vepsané zlaté obdélníky

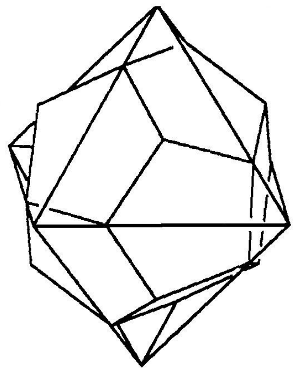
6.3 Pravidelný osmistěn

Do pravidelného osmistěnu lze vepsat pravidelný dvacetistěn tak, že každý vrchol dvacetistěnu rozdělí hrany osmistěnu v poměru zlatého řezu (Obr. 46) [8].

Dále lze do pravidelného osmistěnu „vepsat“ pravidelný dvanáctistěn způsobem, jakým je znázorněno na obrázku 47 (nejde o vepsání v pravém slova smyslu – dvanáctistěn není celý uvnitř osmistěnu) [8]. Potom ty vrcholy dvanáctistěnu, které leží na hranách osmistěnu, dělí hrany osmistěnu v poměru $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 : 1$.



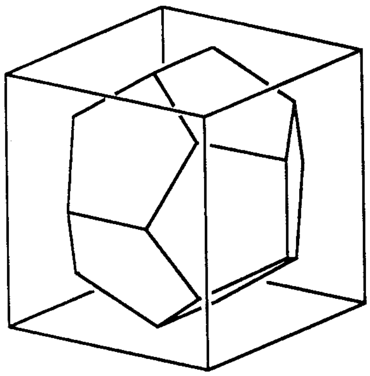
Obr. 46: Dvacetistěn vepsaný do osmistěnu



Obr. 47: Dvanáctistěn vepsaný do osmistěnu

6.4 <u>Krychle</u>

Vepíšeme-li do krychle pravidelný dvanáctistěn (Obr. 48) [8], je poměr délky hrany dvanáctistěnu a délky hrany krychle roven číslu $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2$.



Obr. 48: Dvanáctistěn vepsaný do krychle

Ukázali jsme si, že zlatý řez v platónských tělesech skutečně není vzácností. Tvary pravidelných mnohostěnů se vyskytují v přírodě, například jako krystalické struktury některých nerostů. Zlatý řez tedy není jen vyumělkovaným poměrem matematiků, ale dílo přírody.

7 Fibonacciova posloupnost

V poslední kapitole si ukážeme, že ke zlatému číslu lze také dospět, aniž bychom zmínili zlatý řez úsečky, tudíž bez geometrie. Se zlatým číslem úzce souvisí posloupnost přirozených čísel (tzv. Fibonacciova posloupnost), kterou sestavil Ital Leonardo Pisánský zvaný též Fibonacci (žil na přelomu 12. a 13. století v Pise). V roce 1202 vydal latinsky psané dílo „Kniha o abaku“ („Incipit Liber Abbaci Compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano“). V této knize shrnul všechny tehdejší znalosti o aritmetice a algebře. Šlo o jednu z prvních knih v Evropě, která učila používat desítkovou soustavu.

Vraťme se ale k Fibonacciově posloupnosti. Ta je nejčastěji zadávána pomocí tzv. rekurentního vzorce, to znamená, že není dán vzorec pro přímý výpočet libovolného členu posloupnosti, ale vztah pro výpočet některého členu posloupnosti pomocí několika členů předcházejících. Obecný rekurentní vzorec vypadá následovně:

$$p_{n+k} = c_1 \cdot p_{n+k-1} + c_2 \cdot p_{n+k-2} + \ldots + c_k \cdot p_n ,$$

kde p_i jsou členy posloupnosti, $c_1, \ldots, c_k$ jsou konstanty a *n*, *k* jsou přirozená čísla.

Tímto předpisem jsme vyjádřili (*n*+*k*)-tý člen posloupnosti pomocí *k* předchozích členů. Číslo *k* se nazývá řád rekurentního vzorce.

Fibonacciova posloupnost se zadává pomocí rekurentního vzorce druhého řádu:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} , \; n \geq 3$$

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

Každý člen Fibonacciovy posloupnosti se tedy určí jako součet dvou předchozích členů. V následující tabulce je vypsáno prvních 10 členů Fibonacciovy posloupnosti.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Poznámka:

Občas je uváděn ještě „nultý člen“ Fibonacciovy posloupnosti: $F_0 = 0$.

Pokud bychom chtěli určit třeba stý člen této posloupnosti, postup podle rekurentního vzorce by byl velmi zdlouhavý. Existuje však vzorec (tzv. Binetův vzorec) pro přímý výpočet n-tého členu Fibonacciovy posloupnosti:

$$F_n=\frac{a_1^{\,n}-a_2^{\,n}}{\sqrt{5}} \text{, kde } a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{, } a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Poznámka:

Zajisté jste si všimli, že $a_1=\varphi, a_2=\tilde{\varphi}$. Vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti tedy obsahuje zlaté číslo a hodnoty s ním související .

Platnost Binetova vzorce lze ověřit následujícím způsobem:

Dosadíme-li do Binetova vzorce postupně $n=1$ a $n=2$, vyjde nám $F_1=1$ a $F_2=1$. Potom ověříme, že pro tento vzorec platí rekurentní vztah $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ a důkaz je hotov.

$n=1$:

$$F_1=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1$$

$n=2$:

$$F_1=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}=\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=1$$

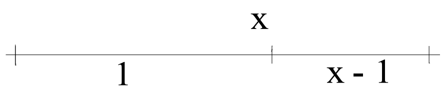
$$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}=\frac{a_1^{\,n-2}-a_2^{\,n-2}}{\sqrt{5}}+\frac{a_1^{\,n-1}-a_2^{\,n-1}}{\sqrt{5}}=\frac{a_1^{\,n-2}(a_1+1)-a_2^{\,n-2}(a_2+1)}{\sqrt{5}}$$

protože platí vztahy: $a_1+1=a_1^{\,2}$, $a_2+1=a_2^{\,2}$ (první vztah jsme již ověřili na straně 9, druhý si zkuste analogicky ověřit sami), je

$$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}=\frac{a_1^{\,n-2}\cdot a_1^{\,2}-a_2^{\,n-2}\cdot a_2^{\,2}}{\sqrt{5}}=\frac{a_1^{\,n}-a_2^{\,n}}{\sqrt{5}}$$

Binetův vzorec tedy platí.

Binetův vzorec lze ale odvodit i jinak [8]. Při výpočtu zlatého čísla jsme rozdělili jednotkovou úsečku zlatým řezem a delší část této úsečky jsme označili x. Dostali jsme pak rovnici $x^2+x-1=0$, která měla kořeny $x_1=\frac{1}{\varphi}$ a $x_2=\frac{1}{\tilde{\varphi}}$. Mohli bychom ale stejným způsoben vyjít od úsečky délky x $(1<x<2)$, kterou rozdělíme zlatým řezem na dvě části o délkách 1 a $x-1$ (Obr. 49).



Obr. 49: Zlatý řez úsečky

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$$

Dostaneme jinou rovnici pro zlatý řez: $x^2-x-1=0$. Kořeny této rovnice jsou:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi\ ,\ \ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\tilde{\varphi}$$

Již jsme si dokázali (a navíc z výše zmíněné kvadratické rovnice je přímo vidět), že pro zlaté číslo platí vztah: $\varphi^2=\varphi+1$.

Nyní se pokusíme vyjádřit i vyšší přirozené mocniny čísla φ pomocí lineárního výrazu.

Výraz φ^3 můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

1. $\varphi^3=\varphi^2\cdot\varphi=(\varphi+1)\cdot\varphi=\varphi^2+\varphi=(\varphi+1)+\varphi=2\varphi+1$

2. $\varphi^2=\varphi+1\ \ /\ \cdot\varphi$

   $\varphi^3=\varphi^2+\varphi=(\varphi+1)+\varphi=2\varphi+1$

Druhý postup můžeme zobecnit:

$\varphi^2=\varphi+1\ \ /\ \cdot\varphi^n$

$\varphi^{n+2}=\varphi^{n+1}+\varphi^n$, což je příklad rekurentního vyjádření. Známe-li lineární výraz pro φ^{n+1} a pro φ^n, získáme jejich součtem lineární výraz pro φ^{n+2}. Můžeme tedy sestavit schéma, v němž lineární výraz na každém řádku je součtem lineárních výrazů ve dvou předcházejících řádcích:

$$\varphi^0 = \quad 1 = \quad 1$$

$$\varphi^1 = \varphi \quad = \varphi$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \quad = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = 5\varphi + 3$$

$$\varphi^6 = \varphi^5 + \varphi^4 = 8\varphi + 5\ , \dots$$

Ze schématu je vidět, že platí rovnost: $\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1}$ (1)

Naprosto analogicky můžeme postupovat s číslem $\tilde{\varphi}$, protože je to druhý kořen stejné rovnice, jako číslo φ. Získáme rovnost: $\tilde{\varphi}^n = F_n \cdot \tilde{\varphi} + F_{n-1}$ (2)

Odečteme-li rovnost (2) od rovnosti (1), dostaneme následující vztah:

$$\varphi^n - \tilde{\varphi}^n = (F_n \cdot \varphi + F_{n-1}) - (F_n \cdot \tilde{\varphi} + F_{n-1})$$

$$\varphi^n - \tilde{\varphi}^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1} - F_n \cdot \tilde{\varphi} - F_{n-1}$$

$$\varphi^n - \tilde{\varphi}^n = F_n \cdot \varphi - F_n \cdot \tilde{\varphi}$$

$$\varphi^n - \tilde{\varphi}^n = F_n (\varphi - \tilde{\varphi}) \quad / : (\varphi - \tilde{\varphi})$$

$F_n = \dfrac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\varphi - \tilde{\varphi}}$, přičemž $\varphi - \tilde{\varphi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, tedy

$F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, což je hledaný Binetův vzorec.

Fibonacciova posloupnost má mnoho zajímavých vlastností. Pro informaci uvádím (bez důkazu) některé z nich [3]:

1. *Pro součet prvních n členů posloupnosti platí:*

   $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$, neboli $\sum F_i = F_{n+2} - 1\ ;\ i = 1, \dots, n$

2. *Pro součet druhých mocnin prvních n členů posloupnosti platí:*

   $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$, neboli $\sum F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}\ ;\ i = 1, \dots, n$

3. *Nelze sestrojit trojúhelník, jehož strany (jejich délky) by bylo možno vyjádřit (různými) čísly Fibonacciovy posloupnosti (vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti).*

Významnou souvislost se zlatým číslem má posloupnost $c_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, tedy posloupnost, jejímiž členy jsou podíly sousedních členů Fibonacciovy posloupnosti. Podívejme se na několik členů této posloupnosti (od $n=7$ jsou členy c_n zaokrouhlovány podle matematických pravidel na tři desetinná místa):

n	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21
F_{n+1}	1	2	3	5	8	13	21	34
c_n	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{5}{3}=1{,}\overline{6}$	$\frac{8}{5}=1{,}6$	$\frac{13}{8}=1{,}625$	$\frac{21}{13}=1{,}615$	$\frac{34}{21}=1{,}619$

Spočítáme-li limitu posloupnosti c_n (pro *n* jdoucí k nekonečnu), dostaneme hodnotu zlatého čísla.

$$\lim c_n = \lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \tilde{\varphi}^n)} = \frac{\lim \varphi^{n+1} - \lim \tilde{\varphi}^{n+1}}{\lim \varphi^n - \lim \tilde{\varphi}^n} = \frac{\lim \varphi^{n+1}}{\lim \varphi^n} = \lim \varphi = \varphi$$

Při výpočtu jsme využili pravidel pro počítání s limitami (limita součtu je součet limit atd.) a toho, že $\lim a^n = 0$, pro $0 \le |a| < 1$, $n \to \infty$. Jelikož $|\tilde{\varphi}| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, je

$\lim \tilde{\varphi}^n = 0$.

Zlaté číslo lze tedy skutečně zavést nejen jako poměr délek dvou částí úsečky (jak bylo uvedeno v kapitole 3), ale i jako limitu výše zmíněné posloupnosti c_n.

8 Závěr

Přesvědčili jsme se, že i když zlaté číslo není v povědomí lidí zastoupeno tak často, jako třeba Ludolfovo číslo π, je jeho výskyt skutečně velký. Připouštím, že znalost jeho hodnoty není k běžnému životu nezbytná. Nicméně je zajímavé, jak se poměrem zlatého řezu řídí příroda. Hledání zlatého řezu na rostlinách, schránkách měkkýšů, v krystalických strukturách látek, ba dokonce i na lidském těle by vydalo na nemalou knihu. To vysvětluje, proč se tento poměr lidem od pradávna tak líbil (a doposud líbí). Přestože o něm většina z nás neví, naše oko je na něj zvyklé. Poměr zlatého řezu vnímáme jako přirozenou věc. Proto jej i v současnosti využívají například architekti, designéři, malíři nebo fotografové (občas i neúmyslně) při své práci.

9 Použité značení

$|AB|$ ….. velikost úsečky AB

φ ….. zlaté číslo

$\leftrightarrow p$ ….. přímka p

$\rightarrow AC$ ….. polopřímka AC

$p \perp AB$ …..přímka p je kolmá na úsečku AB

$A \in p$ ….. bod A leží na p

$a \Leftrightarrow b$ ….. a je ekvivalentní s b

$F \in \frac{1}{2}|AC|$ ….. bod F je střed úsečky AC

$\cap$ …... průnik, průsečík

$k(S, r)$ ….. kružnice k se středem S a poloměrem r

$\tan(\psi)$ ….. tangens úhlu ψ

$\lim c_n$ ….. limita posloupnosti c_n

$n \rightarrow \infty$ ….. n jde k nekonečnu

$\boxtimes$ ….. konec důkazu

10 Literatura

[1] Bartsch H.J. (2002): Matematické vzorce. Mladá fronta, Praha.
[2] Charvát F., Šmelhaus J. (1971): Populární encyklopedie matematiky (Překlad z německého originálu Meyers Großer Rechenduden). SNTL, Praha.
[3] Korděmskij B.A. (1966): Matematické prostocviky. Mladá fronta, Praha.
[4] Kowal S. (1985): Matematika pro volné chvíle. SNTL, Praha.
[5] Opava Z. (1989): Matematika kolem nás. Albatros, Praha.
[6] Rektorys K. (1981): Přehled užité matematiky. SNTL, Praha.
[7] Vincent R. (2001): Géométrie du nombre d'or. Chalagam Édition, Marseille.
[8] Walser H. (1996): Der Goldene Schnitt. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig a vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich
[9] Referenční manuál DesignCAD Pro 2000 (1998). ViaGrafix Corporation, Pryor (USA). Česká verze: Arcadea, Praha.

Použité internetové stránky:

http://cs.wikipedia.org/wiki/Platónská_tělesa
http://rim.me.cz/osobnosti/literatura/vitruvius.html
http://www.mathes.cz/zajimavosti/zlaty-rez.aspx
http://www.volny.cz/zlaty.rez/

Další internetové stránky zabývající se zlatým řezem a problematikou s tím související:

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.htm
http://trucsmaths.free.fr/nombre_d_or.htm
http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/rectangle_dor.htm