

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Dana Staníková

### **Asymptotické řízení portfolia**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.  
Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2006

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Petru Hazuzovi. Bez jeho pomoci by můj boj s výpočetní technikou byl předem prohraný. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za řadu podnětných rad a připomínek.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. května 2006

Dana Staníková

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Markovovy řetězce s diskrétním časem</b>	<b>6</b>
1.1 Markovovy řetězce s oceněním přechodů . . . . .	6
1.2 Řízené Markovovy řetězce . . . . .	10
1.2.1 Howardův iterační postup . . . . .	12
<b>2 Brownův pohyb a martingaly</b>	<b>16</b>
2.1 Itôvo lemma . . . . .	16
2.2 Brownův pohyb . . . . .	18
2.3 Martingaly . . . . .	20
<b>3 Optimální obchodní strategie</b>	<b>21</b>
3.1 Spojitý model . . . . .	21
3.2 Aproximace spojitého modelu diskrétním . . . . .	23
3.3 Nalezení optimálního řízení . . . . .	24
3.3.1 Spojitý model . . . . .	24
3.3.2 Diskrétní model . . . . .	25
3.3.3 Porovnání očekávaných výsledků v daných modelech . . .	27
3.3.4 Porovnání numerických hodnot . . . . .	28
<b>A Programová realizace diskrétního modelu</b>	<b>31</b>
<b>B Programová realizace spojitého modelu</b>	<b>35</b>
<b>Literatura</b>	<b>36</b>

Název práce: Asymptotické řízení portfolia

Autor: Dana Staníková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

e-mail vedoucího: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Mějme investora, který investuje na akciovém a peněžním trhu. Jeho cílem je maximalizovat asymptotickou hodnotu tržní ceny portfolia v nekonečném časovém horizontu. V případě diskrétní aproximace Markovova procesu představujícího naši pozici na trhu použijeme Howardův algoritmus a ukážeme, že výsledky tohoto a spojitého modelu si navzájem odpovídají.

Klíčová slova: Markovovy procesy, Howardův algoritmus, Brownův pohyb

Title: Asymptotic Control of Portfolio

Author: Dana Staníková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: We consider an investor who invests in a stock and a money market. Her aim is to maximize the asymptotic behaviour of the portfolio market price as the time horizon goes to infinity. We apply Howard's algorithm to the discrete approximation of the Markov process representing our position in the market and show that the results in this and the continuous case correspond to each other.

Keywords: Markov process, Howard's algorithm, Brownian motion

# Úvod

Tato práce se zabývá nalezením optimální obchodní strategie při existenci transakčních nákladů v diskrétním modelu a jejich porovnáním s výsledky modelu spojitého.

První kapitola je věnovaná shrnutí poznatků o řízených i neřízených Markovových řetězcích s diskrétním časem. Klíčovou částí této kapitoly je popis a důkaz Howardova iteračního algoritmu v sekci 1.2.1, který je v diskrétním případě použitý k nalezení optimální obchodní strategie. Jako výchozí zdroje mi v této kapitole sloužily [6] v části věnované neřízeným Markovovým řetězcům a [3] pro řízené řetězce.

Druhá kapitola se zabývá co nejjednodušším přiblížením Brownova pohybu a pojmu martingalů, které jsou používány při odvození spojitého modelu. Vzhledem k tomu, že tato práce je zaměřena hlavně na diskrétní případ, jsou pojmy v této kapitole pouze zjednodušeně přiblíženy. Čerpala jsem přitom z publikací [1] a [4].

Závěrečná kapitola se v části 3.1 věnuje popisu problému hledání obchodní strategie ve spojitém modelu. Ani tady nebyl kladen hlavní důraz na detailní popis, ale spíše na shrnutí hlavních charakteristik spojitého modelu, které jsou využity v závěrečné numerické studii. Problematice spojitého modelu se detailně věnuje [2] nebo [5], z nichž jsem také čerpala.

V části 3.2 je pak ukázán způsob, jak lze situaci ve spojitém modelu diskrétně aproximovat.

Závěrečná sekce 3.3.4 se zabývá porovnáním numerických hodnot získaných realizací algoritmu v programu Mathematica verze 5.2. Programové řešení obou modelů je uvedeno v příloze.

# Kapitola 1

## Markovovy řetězce s diskrétním časem

Mějme homogenní Markovův řetězec  $X_n$  s konečnou množinou stavů  $S$ . Ke každému stavu  $s \in S$  uvažujme konečnou množinu možných rozhodnutí  $Z_s$ . Pak celková množina řízení je  $Z := \prod_{s \in S} Z_s$  a následující systém rozhodnutí  $(z_s \in Z_s, s \in S) \in Z$  nazveme homogenním řízením řetězce.

Předpokládejme, že přechod řetězce  $X_n$  ze stavu  $i \in S$  do stavu  $j \in S$  je spojen se ziskem  ${}_{\rho}r_{ij}$  pokud jsme volili rozhodnutí  $\rho \in Z_i$ . Dále předpokládejme, že přechod řetězce  $X_n$  ze stavu  $i \in S$  do stavu  $j \in S$  nastane při rozhodnutí  $\rho \in Z_i$  s pravděpodobností  ${}_{\rho}p_{ij}$ .

Pro konkrétní řízení  $z \in Z$  jsme schopni sestavit matici ocenění  ${}_z\mathbf{R} = (r_{ij})$ , kde  $r_{ij}$  je zisk související s přechodem řetězce ze stavu  $i$  do stavu  $j$  při rozhodnutí  $z_i \in Z_i$  a matici  ${}_z\mathbf{P} = (p_{ij})$ , kde  $p_{ij}$  je pravděpodobnost přechodu řetězce ze stavu  $i \in S$  do stavu  $j \in S$  při rozhodnutí  $z_i \in Z_i$ . Pak řízený řetězec je homogenní Markovův proces s maticí přechodu  ${}_z\mathbf{P}$ .

### 1.1 Markovovy řetězce s oceněním přechodů

V této části budeme předpokládat, že je pevně zvoleno nějaké řízení  $z \in Z$  a budeme se zajímat o asymptotiku středního výnosu při tomto řízení. Přední index  $z$  tak budeme vynechávat. Všechny uvažované Markovovy řetězce budou homogenní.

**Věta 1.1.1.** *Mějme nerozložitelný Markovův řetězec s konečnou množinou stavů  $S$ , maticí pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}$  a maticí ocenění přechodu  $\mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{S \times S}$  a  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{S \times S}$ . Pro výpočet středního výnosu  $\mathbf{v}(n) \in \mathbb{R}^S$  za  $n$  období platí následující rekurentní vztah*

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(n-1), \quad (1.1)$$

kde  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^S$  a  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^S$  značí výnos realizovaný za jedno období

$$\mathbf{q} = di(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}^T), \quad (1.2)$$

kde  $di(\mathbf{K}) = (K_{ii})_{i \in S}$ .

**Důkaz:** Viz důkaz věty 2.29 v [6]. □

**Věta 1.1.2.** *V nerozložitelném řetězci s konečnou množinou stavů jsou všechny stavy trvalé nenulové.*

**Důkaz:** Viz důkaz věty 2.18. v [6]. □

**Věta 1.1.3.** *Mějme nerozložitelný Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}$ , ve kterém jsou všechny stavy trvalé nenulové. Pak stacionární rozdělení existuje a je určené jednoznačně. Jsou-li všechny stavy neperiodické, pak navíc platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{\Pi}, \quad (1.3)$$

kde  $\mathbf{\Pi} := (\boldsymbol{\pi}, \dots, \boldsymbol{\pi})^T \in \mathbb{R}^{S \times S}$  je matice, jejíž řádky jsou tvořeny vektory stacionárního rozdělení  $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^S$ .

**Důkaz:** Viz důkaz věty 2.25. v [6]. □

**Poznámka 1.1.1:** Připomeneme několik zřejmých vztahů

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T,$$

kde  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^S$ . Z předpokladu, že matice  $\mathbf{P}$  je stochastická plyne, že

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Dále

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{\Pi}$$

a z vlastnosti  $\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{1} = 1$  dostáváme, že

$$\mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{\Pi}.$$

Z definice stacionárního rozdělení  $\boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^T$  tak získáme, že

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{\Pi}.$$

S jejich použitím odvodíme

$$(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^2 = \mathbf{P}^2 - \mathbf{\Pi P} - \mathbf{P \Pi} + \mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{P}^2 - \mathbf{\Pi}$$

a indukcí pro  $k \geq 1$  získáme

$$(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k = \mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}. \quad (1.4)$$

**Věta 1.1.4.** *Nechť  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{S \times S}$  je matice taková, že  $\mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{0}$  při  $n \rightarrow \infty$ , kde  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{S \times S}$  je nulová matice. Potom matice  $\mathbf{I} - \mathbf{M}$  je regulární a platí*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}^k.$$

**Důkaz:** Viz důkaz věty B.2 ve [6]. □

**Poznámka 1.1.2:** Podle věty 1.1.3 a poznámky 1.1.1

$$(\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k = \mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi} \rightarrow \mathbf{0} \quad (1.5)$$

pro  $k \rightarrow \infty$ . Podle věty 1.1.4 je matice  $\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})$  regulární, přičemž platí

$$(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}),$$

z čehož vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}) = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{I}. \quad (1.6)$$

Posunutím sčítacího indexu do nuly a dosazením (1.6) do posledního vztahu získáme konvergentní maticovou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}) = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}) = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{I},$$

neboli

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}) = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{\Pi}. \quad (1.7)$$

Nyní se vraťme k větě 1.1.1. Postupným dosazováním do vztahu (1.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) &= \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-2)) = \dots \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^k \mathbf{q} = n\mathbf{\Pi}\mathbf{q} + \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi})\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Podle vztahu (1.7) je řada  $\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi})$  konvergentní a lze tedy psát

$$\mathbf{v}(n) = n\mathbf{\Pi}\mathbf{q} + \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi})\mathbf{q} - \sum_{k=n}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi})\mathbf{q}.$$



Aplikací (1.7) získáme následující rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) &= [(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{\Pi}] \mathbf{q} - \sum_{k=n}^{\infty} (\mathbf{P}^k - \mathbf{\Pi}) \mathbf{q} + n \mathbf{\Pi} \mathbf{q} \\ &= [(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{\Pi}] \mathbf{q} + n \mathbf{\Pi} \mathbf{q} - \sum_{k=n}^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Zanedbáním zbytku

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^k \mathbf{q} = (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^n \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} \cdot \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^S,$$

pro  $n \rightarrow \infty$  získáme přibližnou hodnotu očekávaného výnosu

$$\mathbf{v}(n) \sim n \mathbf{\Pi} \mathbf{q} + [(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{\Pi}] \mathbf{q}. \quad (1.8)$$

**Označení:** Matici  $[(\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}))^{-1} - \mathbf{\Pi}]$  odvozenou v (1.7) budeme v dalším označovat

$$\mathbf{A} =: \mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})^{-1} - \mathbf{\Pi} \quad (1.9)$$

a pro součiny  $\mathbf{A} \mathbf{q}$  a  $\mathbf{\Pi} \mathbf{q}$  zavedeme označení

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{q} \quad \mathbf{c} = \mathbf{\Pi} \mathbf{q}.$$

Při použití tohoto označení v (1.8) dostaneme vyjádření očekávaného výnosu  $\mathbf{v}(n)$  pro  $n \rightarrow \infty$  ve tvaru

$$\mathbf{v}(n) = n \mathbf{\Pi} \mathbf{q} + \mathbf{A} \mathbf{q} + o(1) = n \mathbf{c} + \mathbf{b} + o(1). \quad (1.10)$$

**Shrnutí:** Ze vztahu  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T$  plyne, že

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{q} = c \cdot \mathbf{1},$$

kde  $c = \boldsymbol{\pi}^T \cdot \mathbf{q}$  reprezentuje dlouhodobý přírůstek středního výnosu za jedno období. Vektor  $\mathbf{b}$  pak představuje korekce zohledňující to, ze kterého stavu řetězec vychází.

**Poznámka 1.1.3:** Je ještě nutné uvést způsob, jakým lze vektor  $\mathbf{b}$  a vektor  $\mathbf{c}$ , resp. konstantu  $c$  vypočítat. Ze vztahu (1.10) a (1.1) plyne pro  $n \rightarrow \infty$

$$n \mathbf{c} + \mathbf{b} + o(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P} [(n-1) \mathbf{c} + \mathbf{b}] + o(1).$$

Zanedbáním  $o(1)$  na obou stranách a s využitím vztahu  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{1} \cdot c = \mathbf{1} \cdot c$  dojdeme k rovnosti

$$c \mathbf{1} + \mathbf{b} = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{b}. \quad (1.11)$$

Soustava (1.11) je tvořena  $m$  rovnicemi, které nestačí k určení  $(m+1)$  neznámých, tedy k určení  $m$ -rozměrného vektoru  $\mathbf{b}$  a konstanty  $c$ . Proto je nutné jednu proměnnou eliminovat. To lze udělat například tímto způsobem: definujeme novou soustavu rovnic, v níž místo vektoru  $\mathbf{b}$  použijeme vektor  $\mathbf{b}'$ . Jeho  $i$ -tá složka je definovaná následovně

$$b'_i = b_i - b_m.$$

Tedy od každé složky původního vektoru odečteme složku poslední. Tím dosáhneme toho, že ve vektoru  $\mathbf{b}'$  bude poslední složka vždy nulová a počet stupňů volnosti vektoru  $\mathbf{b}'$  je  $(m-1)$ . Soustava (1.11) je po odečtení vektoru  $b_m \mathbf{1}$  od obou stran ve tvaru

$$c\mathbf{1} + \mathbf{b}' = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{b}' \quad (1.12)$$

$$b'_m = 0. \quad (1.13)$$

Tato soustava již má řešení, jímž je konstanta  $c$  a rozdíly  $b_i - b_m$ , neboť zřejmě platí  $b_i - b_m = b'_i - b'_m$ , pro každé  $i \in S$ . Vynásobením (1.7) zleva maticí  $\mathbf{\Pi}$  dostaneme z definice matice  $\mathbf{A}$  v (1.9) rovnost  $\mathbf{\Pi}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Dosazením  $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + b_m \mathbf{1}$  dostaneme  $b_m = -\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b}'$ . Platí tedy

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{1}b_m = \mathbf{b}' - \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b}' = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})\mathbf{b}'.$$

## 1.2 Řízené Markovovy řetězce

Mějme nerozložitelný Markovův řetězec s konečnou množinou stavů  $S$  a řízení tohoto řetězce  $z \in Z := \prod_{i=1}^m Z_i$ . Nechť  ${}_z \mathbf{P}$  je matice pravděpodobností přechodu při řízení  $z$  a  ${}_z \mathbf{R}$  je matice ocenění přechodu příslušná řízení  $z$ .

Nehomogenním řízením řetězce  $X_n$  na intervalu  $(0, N)$  budeme rozumět posloupnost řízení  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^N) \in Z^N$ . Označíme-li symbolem  $\mathbf{v}(n, N)$  střední výnos za časové období  $(n, N)$ , dostaneme podobně jako ve větě 1.1.1 rekurentní vztah

$$\mathbf{v}(n, N) = {}_z \mathbf{q} + {}_z \mathbf{P}\mathbf{v}(n+1, N), \quad (1.14)$$

kde  $\mathbf{v}(N, N) = \mathbf{0}$  a  ${}_z \mathbf{q}$  značí výnos realizovaný za jedno období

$${}_z \mathbf{q} = di({}_z \mathbf{P} \cdot {}_z \mathbf{R}^T). \quad (1.15)$$

přičemž ve vzorcích (1.14) a (1.15) pokládáme  $z := z^{n+1}$ . Definujeme-li

$$\hat{\mathbf{v}}_i(m-1, N) = \max_{z \in Z} \mathbf{e}_i^T ({}_z \mathbf{q} + {}_z \mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}(m, N)) \quad (1.16)$$

a  $\hat{\mathbf{v}}(N, N) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^S$ , dostaneme

$$\mathbf{v}(m, N) \leq \hat{\mathbf{v}}(m, N)$$

pro každé  $m \in \{0, \dots, N\}$ , viz. [3] strana 124. To znamená, že příslušné nehomogenní řízení je na intervalu  $(0, N)$  optimální. Na příkladech v [3] se na stranách 125-128 ukazuje, že pro velká  $N \in \mathbb{N}$  vychází optimální řízení v následujícím tvaru  $\mathbf{z} = (z, \dots, z, z^k, \dots, z^N)$ , kde  $z$  odpovídá optimálnímu homogennímu řízení.

Vztah (1.10) má pro Markovův řetězec s homogenním řízením  $z$  tvar

$$\mathbf{v}(n, N) \sim (N - n)_z \mathbf{c} + {}_z \mathbf{b}, \quad (1.17)$$

kde vektory  ${}_z \mathbf{b}$  a  ${}_z \mathbf{c}$  mají stejný význam jako  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$  ve vztahu (1.10) při volbě  $\mathbf{P} := {}_z \mathbf{P}$  a jsou definovány jako

$${}_z \mathbf{c} = {}_z \mathbf{\Pi} {}_z \mathbf{q}, \quad (1.18)$$

kde  ${}_z \mathbf{\Pi}$  je matice stacionárního rozdělení vztahující se k matici  ${}_z \mathbf{P}$  a

$${}_z \mathbf{b} = {}_z \mathbf{A} {}_z \mathbf{q}, \quad (1.19)$$

pro  ${}_z \mathbf{A} = [\mathbf{I} - ({}_z \mathbf{P} - {}_z \mathbf{\Pi})]^{-1} - {}_z \mathbf{\Pi}$ .

**Poznámka 1.2.1:** Konstantu  ${}_z c$  a rozdíly  ${}_z b'_i = {}_z b_i - {}_z b_m$  lze vypočítat ze soustavy rovnic

$${}_z c \mathbf{1} + {}_z \mathbf{b}' = {}_z \mathbf{q} + {}_z \mathbf{P} {}_z \mathbf{b}' \quad (1.20)$$

$${}_z b'_m = 0, \quad (1.21)$$

kde  ${}_z \mathbf{b}'$  je vektor, jehož  $i$ -tá složka je  ${}_z b'_i$ .

**Poznámka 1.2.2:** Najít optimální homogenní řízení  $z$  znamená najít řízení, které maximalizuje výnos  $\mathbf{v}(n, N)$  pro velká  $N$ . Pokud do vztahu (1.14) dosadíme za  $\mathbf{v}(n + 1, N)$  jeho přibližnou hodnotu odvozenou v (1.17) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n, N) &\sim {}_z \mathbf{q} + {}_z \mathbf{P} [(N - n - 1)_z \mathbf{c} + {}_z \mathbf{b}] \\ &\sim {}_z \mathbf{q} + {}_z \mathbf{P} {}_z \mathbf{b}' + {}_z \mathbf{P} {}_z b_m \mathbf{1} + (N - n - 1) {}_z \mathbf{P} {}_z c \mathbf{1} \end{aligned}$$

za předpokladu, že na intervalu  $(n, n + 1)$  použijeme řízení  $\tilde{z} \in Z$ . S využitím vztahu  $\mathbf{P} \mathbf{1} = \mathbf{1}$  pro stochastické matice dostaneme

$$\mathbf{v}(n, N) \sim \tilde{z} \mathbf{q} + \tilde{z} \mathbf{P} {}_z \mathbf{b}' + [{}_z b_m \mathbf{1} + (N - n - 1) {}_z c \mathbf{1}]. \quad (1.22)$$

Poslední výraz ve vyjádření výnosu nezávisí na  $\tilde{z}$  a tedy nemá vliv při maximalizaci výrazu  $\mathbf{v}(n, N)$ . Ekvivalentně lze problém hledání optimálního homogenního řízení přepsat ve tvaru

$$\max_{\tilde{z} \in Z} (\tilde{z} \mathbf{q} + \tilde{z} \mathbf{P} {}_z \mathbf{b}'), \quad (1.23)$$

přičemž maximalizaci v (1.23) je třeba uvažovat po složkách

### 1.2.1 Howardův iterační postup

V této části zavedeme zkrácené označení: přední index odpovídající řízení  $z^k$  v  $k$ -tém kroku algoritmu budeme zkráceně zapisovat jako  $k$ . Tedy místo  $z^k \mathbf{P}$  budeme užívat jen  ${}_k \mathbf{P}$ .

Algoritmus popíšeme v několika následujících krocích:

1. Zvolíme nulté přiblížení  $z^k$ ,  $k = 0$  k hledanému homogennímu řízení.
2. Toto  $z^k$  jednoznačně určuje matice  ${}_k \mathbf{P}$  a  ${}_k \mathbf{R}$ . Jejich dosazením do vztahu (1.15) vypočítáme výnos za období délky jedna pro řízení  $z^k$

$${}_k \mathbf{q} = di({}_k \mathbf{R} \cdot {}_k \mathbf{P}^T).$$

3. Ze soustavy rovnic (1.20) a (1.21)

$$\begin{aligned} {}_k c \mathbf{1} + {}_k \mathbf{b}' &= {}_k \mathbf{q} + {}_k \mathbf{P} \cdot {}_k \mathbf{b}' \\ {}_k b_m &= 0 \end{aligned}$$

vypočítáme složky vektoru  ${}_k \mathbf{b}'$  a konstantu  ${}_k c$ .

4. S vypočtenými hodnotami  ${}_k \mathbf{b}'$  maximalizujeme (1.23)

$$z_i^{k+1} = \mathbf{e}_i^T \arg \max_{z \in Z} \mathbf{e}_i^T (z \mathbf{q} + {}_z \mathbf{P} {}_k \mathbf{b}'), \quad (1.24)$$

kde  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^S$  je vektor sestavený ze samých nul, jen v  $i$ -tém řádku je hodnota jedna. Pokud není rozhodnutí  $z_i \in Z_i$  určeno jednoznačně, pak se volí pokud možno to, které odpovídá řízení v minulém kroku. Tím se zaručí, že změna řízení vede k vyššímu výnosu.

Hodnota  $z$ , která maximalizuje výraz (1.24) je novým přiblížením  $z^{k+1}$  optimálního řízení. S ní opakujeme iterační postup od bodu 2. Po konečně mnoha krocích algoritmus končí nalezením optimálního homogenního řízení, což nastává v okamžiku, kdy další iterační krok nevede k vyššímu očekávanému výnosu.

**Důkaz:** Je nutné ukázat, že po konečně mnoha krocích dospěje algoritmus k optimálnímu řízení. Tento důkaz rozdělíme do tří částí. Nejprve ukážeme, že každý krok vede k vyššímu očekávanému výnosu, pokud se řízení v jednotlivých krocích liší, ve druhé části ověříme, že výsledné řízení je skutečně optimální a na závěr vyloučíme možnost, že by iterační postup nikdy neskončil.

1. Z podstaty iteračního algoritmu plyne, že hodnota v kroku  $k + 1$  nesmí být "horší" než hodnota v kroku  $k$ . Pro nás to znamená, že (1.24) v kroku  $k + 1$  musí být vyšší nebo stejná jako v kroku  $k$

$${}_{k+1} \mathbf{q} + {}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{b}' \geq {}_k \mathbf{q} + {}_k \mathbf{P}_k \mathbf{b}'.$$

Převeďme pravou stranu na levou a označme rozdíl levé a pravé strany  $\Delta\tilde{\mathbf{q}}$

$$\Delta\tilde{\mathbf{q}} := {}_{k+1}\mathbf{q} - {}_k\mathbf{q} + {}_{k+1}\mathbf{P}_k\mathbf{b}' - {}_k\mathbf{P}_k\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Do soustavy (1.20) pro výpočet  ${}_z\mathbf{c}$  a  ${}_z\mathbf{b}'$  dosadíme nejdřív hodnoty odpovídající řízení  $z^k$  a potom  $z^{k+1}$ . Tím dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\mathbf{c} + {}_{k+1}\mathbf{b}' &= {}_{k+1}\mathbf{q} + {}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{b}' \\ {}_k\mathbf{c} + {}_k\mathbf{b}' &= {}_k\mathbf{q} + {}_k\mathbf{P}_k\mathbf{b}'. \end{aligned}$$

Jejich odečtením a zavedením označení  $\Delta\mathbf{c}$  a  $\Delta\mathbf{b}'$  pro rozdíly  ${}_{k+1}\mathbf{c} - {}_k\mathbf{c}$  a  ${}_{k+1}\mathbf{b}' - {}_k\mathbf{b}'$  dostáváme

$$\Delta\mathbf{c} + \Delta\mathbf{b}' = {}_{k+1}\mathbf{q} - {}_k\mathbf{q} + {}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{b}' - {}_k\mathbf{P}_k\mathbf{b}'$$

Po přičtení a odečtení hodnoty  ${}_{k+1}\mathbf{P}_k\mathbf{b}'$  od pravé strany dostáváme s využitím definice  $\Delta\tilde{\mathbf{q}}$  v (1.25) rovnost

$$\Delta\mathbf{c} + \Delta\mathbf{b}' = \Delta\tilde{\mathbf{q}} + {}_{k+1}\mathbf{P}\Delta\mathbf{b}'.$$

To je opět soustava (1.20) při volbě  $\mathbf{c} := \Delta\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}' := \Delta\mathbf{b}'$  a  $\mathbf{q} := \Delta\tilde{\mathbf{q}}$ . A tedy je  $\Delta\mathbf{c}$  a  $\Delta\mathbf{b}'$  touto soustavou určeno jednoznačně (důkaz jednoznačnosti viz věta 1.2.1). Vynásobením  $\Delta\tilde{\mathbf{q}}$  v (1.25) maticí  ${}_{k+1}\mathbf{\Pi}$  dostaneme z definice  ${}_{k+1}\mathbf{c} = {}_{k+1}\mathbf{\Pi}{}_{k+1}\mathbf{q}$

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\mathbf{\Pi}\Delta\tilde{\mathbf{q}} &= {}_{k+1}\mathbf{c} + {}_{k+1}\mathbf{\Pi}{}_{k+1}\mathbf{P}_k\mathbf{b}' - {}_{k+1}\mathbf{\Pi}({}_k\mathbf{q} + {}_k\mathbf{P}_k\mathbf{b}') \\ &= {}_{k+1}\mathbf{c} + {}_{k+1}\mathbf{\Pi}_k\mathbf{b}' - {}_{k+1}\mathbf{\Pi}({}_k\mathbf{q} + {}_k\mathbf{P}_k\mathbf{b}') \\ &= {}_{k+1}\mathbf{c} - {}_{k+1}\mathbf{\Pi}[{}_k\mathbf{q} - (\mathbf{I} - {}_k\mathbf{P})_k\mathbf{b}'] \\ &= {}_{k+1}\mathbf{c} - {}_k\mathbf{c}, \end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\mathbf{\Pi}{}_{k+1}\mathbf{P} &= {}_{k+1}\mathbf{\Pi} \\ {}_{k+1}\mathbf{\Pi}_k\mathbf{c} &= {}_k\mathbf{c}{}_{k+1}\mathbf{\Pi}\mathbf{1} = {}_k\mathbf{c}\mathbf{1} = {}_k\mathbf{c} \end{aligned}$$

a neboť z (1.20) plyne, že

$${}_k\mathbf{c} = {}_k\mathbf{q} - (\mathbf{I} - {}_k\mathbf{P})_k\mathbf{b}'.$$

Shrneme-li výsledek pravé a levé strany máme

$$\Delta\mathbf{c} = {}_{k+1}\mathbf{\Pi}\Delta\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{1} \cdot {}_{k+1}\boldsymbol{\pi}^T \Delta\tilde{\mathbf{q}}.$$

Vektor  ${}_{k+1}\boldsymbol{\pi}$  je vektorem stacionárního rozdělení v nerozložitelném řetězci s maticí přechodu  ${}_{k+1}\mathbf{P}$ . Podle věty 2.25. v [6] jsou všechny jeho složky kladné. Symbolicky to lze zapsat  ${}_{k+1}\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$ . Dále  $\Delta\tilde{\mathbf{q}} \geq \mathbf{0}$  a pro  $z^{k+1} \neq z^k$  platí  $\Delta\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ . Tím jsme odvodili, že  $\mathbf{1} \cdot {}_{k+1}\boldsymbol{\pi}^T \Delta\tilde{\mathbf{q}} > \mathbf{0}$ , neboli  ${}_{k+1}\mathbf{c} > {}_k\mathbf{c}$  pro  $z^{k+1} \neq z^k$ . Podle (1.17) vede každý iterační krok i k vyššímu očekávanému výnosu  $\mathbf{v}(n, N)$ .

2. Přístupme k důkazu optimality výsledného řízení. Předpokládejme, že algoritmus po  $k$  krocích končí. Tedy dospějeme k rovnosti  $z^{k+1} = z^k$ . V případě, že takto získané řízení je optimální  $z^k = \hat{z}$ , muselo by podle právě dokázané části platit, že  ${}_k\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}$ , což je ekvivalentní tomu, že očekávaný výnos je maximální. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme pro spor, že algoritmus končí, tedy  $z^{k+1} = z^k$ , ale nedospěli jsme k optimálnímu řízení  $\hat{z}$  a proto  $\hat{\mathbf{c}} > {}_k\mathbf{c}$ . Nejdříve využijeme faktu, že algoritmus končí a že Howardův algoritmus je iterační. Dostaneme

$$\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{b}' \leq {}_k\mathbf{q} + {}_k\mathbf{P}_k \mathbf{b}'.$$

Pokud by totiž platilo, že levá strana je ostře větší než pravá, z podstaty iteračního postupu by Howardův algoritmus pokračoval a tedy  $z^{k+1} \neq z^k$ , ale to je spor s předpokladem, že algoritmus po  $k$  krocích skončil. Vektor  $\hat{\mathbf{q}}$  odpovídá výnosu za období délky jedna při řízení  $\hat{z}$  a  $\hat{\mathbf{P}}$  je matice přechodu odpovídající tomuto řízení. Odečtením obou stran nerovností získáme

$$\hat{\Delta}\tilde{\mathbf{q}} := \hat{\mathbf{q}} - {}_k\mathbf{q} + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{b}' - {}_k\mathbf{P}_k \mathbf{b}' \leq \mathbf{0}.$$

Podobně jako v předchozí části vyjdeme ze soustavy (1.20), do které postupně dosadíme optimální řízení  $\hat{z}$  a řízení z posledního kroku algoritmu  $z^k$ . Tím obdržíme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{b}}' &= \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{b}}' \\ {}_k\mathbf{c} + {}_k\mathbf{b}' &= {}_k\mathbf{q} + {}_k\mathbf{P}_k \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

Podobně jako v části 1 dostaneme odečtením obou rovnic po příslušných úpravách

$$\hat{\Delta}\mathbf{c} + \hat{\Delta}\mathbf{b}' = \hat{\Delta}\tilde{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{b}',$$

kde  $\hat{\Delta}\mathbf{c} := \hat{\mathbf{c}} - {}_k\mathbf{c}$  a  $\hat{\Delta}\mathbf{b}' := \hat{\mathbf{b}}' - {}_k\mathbf{b}'$ . I v tomto případě se jedná o modifikaci soustavy (1.20), která jednoznačně určuje  $\hat{\Delta}\mathbf{c}$  i  $\hat{\Delta}\mathbf{b}'$ . Použitím vztahu (1.18) dostaneme  $\hat{\Delta}\mathbf{c} = \hat{\Pi}\hat{\Delta}\tilde{\mathbf{q}}$ . Protože složky stochastické matice  $\hat{\Pi}$  jsou nezáporné a  $\hat{\Delta}\tilde{\mathbf{q}} \leq \mathbf{0}$  z definice, je i  $\hat{\Delta}\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ . Tím jsme dospěli k nerovnosti  $\hat{\mathbf{c}} > {}_k\mathbf{c}$ , což je spor s předpokladem, že  $\hat{\mathbf{c}} < {}_k\mathbf{c}$  a tedy platí  $\hat{\mathbf{c}} = {}_k\mathbf{c}$  a získané řízení je optimální.

3. Možnost, že by iterační postup neskončil po konečně mnoha krocích není. V první části důkazu jsme ukázali, že každý iterační krok vede pro různá řízení k vyššímu očekávanému výnosu. S přihlédnutím k předpokladu, že řízení je jen konečně mnoho, je zřejmé, že algoritmus musí po konečně mnoha krocích skončit.

□

**Věta 1.2.1.** *Soustava*

$$\Delta\mathbf{c}\mathbf{1} = (\mathbf{P} - \mathbf{I})\Delta\mathbf{b}' \quad (1.26)$$

$$\mathbf{e}_m^T \Delta\mathbf{b}' = 0 \quad (1.27)$$

*má pouze triviální řešení.*

**Důkaz:**

1. Vynásobením (1.26) vektorem  $\boldsymbol{\pi}^T$  zleva dostaneme

$$\Delta c = \Delta c \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{1} = \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{P} - \mathbf{I}) \Delta \mathbf{b}' = 0.$$

2. Součet na řádcích matice  $\mathbf{Q} := \mathbf{P} - \mathbf{I}$  je vždy roven nule. Je tedy např. poslední její sloupec lineární kombinací ostatních.
3. Z poznámky 1.1.2 víme, že matice  $\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}) = \boldsymbol{\Pi} - \mathbf{Q}$  je regulární. Má tedy hodnost  $m$ .
4. Z vlastnosti, že hodnost součtu matic není větší než součet jejich hodností, dostaneme, že

$$m = h(\boldsymbol{\Pi} - \mathbf{Q}) \leq h(\boldsymbol{\Pi}) + h(-\mathbf{Q}) = 1 + h(\mathbf{Q}).$$

Platí tedy, že  $h(\mathbf{Q}) \geq m - 1$ .

5. Protože poslední sloupec matice  $\mathbf{Q}$  je lineární kombinací ostatních, dostaneme s přihlédnutím k bodu 4, že neexistuje netriviální lineární kombinace ostatních sloupců matice  $\mathbf{Q}$  dávající ve výsledku nulový sloupcový vektor. Symbolicky to lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{Q} \cdot \Delta \mathbf{b}' = \mathbf{0}, \mathbf{e}_m^T \Delta \mathbf{b}' = 0 \rightarrow \Delta \mathbf{b}' = \mathbf{0}$$

a to spolu s bodem 1 dává triviální řešení soustavy (1.26) a (1.27).

□

# Kapitola 2

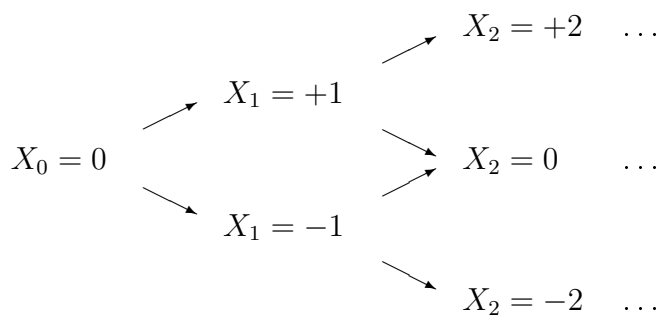
## Brownův pohyb a martingaly

Důsledná analýza pojmů jako Brownův pohyb nebo martingal je poměrně rozsáhlou partií stochastické analýzy. Proto je tato kapitola zaměřena spíš než na exaktní definice na jejich srozumitelné vysvětlení.

### 2.1 Itôvo lemma

**Příklad 2.1.1:** Náhodná procházka na přímce:

Nejdříve si připomeneme nejjednodušší případ, kterým je symetrická náhodná procházka. Máme částici, jejíž počáteční stav je  $X_0 = 0$ . Pro každý čas  $t$  platí, že  $X_t = X_{t-1} + 1$  nebo  $X_t = X_{t-1} - 1$  se stejnou pravděpodobností a nechť změny pozice  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$  jsou nezávislé náhodné veličiny pro  $t = 1, 2, \dots$ .



Střední hodnota je  $EX_t = 0$  a rozptyl  $varX_t = t$  pro všechna  $t \in \mathbb{N}$ .

Tento příklad dále zobecníme. Budeme předpokládat, že částice se pohybuje o krok nahoru s pravděpodobností  $p$  a o jeden krok dolů s pravděpodobností  $q = (1 - p)$ . Krok bude mít v tomto případě obecnou délku, kterou označíme jako  $\sigma$ . Pro střední hodnotu a rozptyl získáme tyto výrazy

$$\begin{aligned} EX_1 &= p\sigma + q(-\sigma) = \mu \\ EX_1^2 &= p\sigma^2 + q\sigma^2 = \sigma^2 \\ varX_1 &= EX_1^2 - (EX_1)^2 = 4\sigma^2pq. \end{aligned}$$



Vzhledem k předpokladu nezávislosti také platí

$$\begin{aligned} EX_n &= n\mu \\ \text{var}X_n &= 4n\sigma^2pq. \end{aligned}$$

Nyní se pokusme o další zobecnění symetrické náhodné procházky. Předpokládejme, že v čase 0 jsme v pozici  $X_0$  a že v každém kroku hodnota náhodné veličiny  $X$  vzroste o hodnotu  $\mu$  s pravděpodobností 1 a s pravděpodobností 1/2 vzroste či klesne o velikost kroku  $\sigma$ .

$$\begin{array}{l} \nearrow X_1 = X_0 + \mu + \sigma \\ X_0 \\ \searrow X_1 = X_0 + \mu - \sigma \end{array}$$

Další modifikace bude spočívat ve volbě časového intervalu. Doposud jsme uvažovali ekvidistantní časové úseky délky jedna. Nyní provedeme analogické úvahy pro obecný časový okamžik  $\Delta t$ .

$$\begin{array}{l} \nearrow X_{\Delta t} = X_0 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \\ X_0 \\ \searrow X_{\Delta t} = X_0 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \end{array}$$

Pro přírůstek náhodné veličiny  $X$  v intervalu  $\Delta t$  platí

$$\Delta X = X_{\Delta t} - X_0 = \mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t}, \quad (2.1)$$

kde  $\varepsilon$  je náhodná veličina, která nabývá hodnoty  $+1$  nebo  $-1$  s pravděpodobností  $1/2$ .

Často je nutné určit přírůstek nikoli náhodné veličiny  $X$ , ale její funkce  $f(X)$ . Pro vyjádření hodnoty funkce náhodné veličiny  $X$  v čase  $\Delta t$  je možné použít rozpis pomocí Taylorova polynomu druhého stupně v bodě  $X_0$ .

$$f(X_{\Delta t}) \sim f(X_0) + \frac{f'(X_0)}{1!}(X_{\Delta t} - X_0) + \frac{f''(X_0)}{2!}(X_{\Delta t} - X_0)^2 \quad (2.2)$$

$$\sim f(X_0) + f'(X_0)(\mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t}) + \frac{f''(X_0)}{2}(\mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t})^2. \quad (2.3)$$

V poslední části jsme využili vztah (2.1). Protože časové intervaly  $\Delta t$  volíme malé, je možné časové přírůstky, které jsou řádově menší než  $\Delta t$ , zanedbat. Vyjádření (2.3) zjednodušíme do tvaru

$$f(X_{\Delta t}) \sim f(X_0) + f'(X_0)(\mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t}) + \frac{f''(X_0)}{2}\varepsilon^2\sigma^2\Delta t,$$

kde  $\varepsilon^2 = (\pm 1)^2 = 1$ . Pro přírůstek funkce  $f(X)$  získáme vyjádření

$$\Delta f(X) \sim f(X_{\Delta t}) - f(X_0) \quad (2.4)$$

$$\sim f'(X_0)(\mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t}) + \frac{f''(X_0)}{2}\sigma^2\Delta t \quad (2.5)$$

$$\sim \left[ f'(X_0)\mu + \frac{f''(X_0)}{2}\sigma^2 \right] \Delta t + f'(X_0)\varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Vztah (2.6) bývá označován za nejjednodušší vyjádření ITÔOVA LEMMATU.

## 2.2 Brownův pohyb

V odvození Itôova lemmatu jsme předpokládali, že časový interval  $\Delta t$  je malý. Čím menší tento interval volíme, tím menší chyby se dopouštíme při zanedbání členů řádově menších než  $\Delta t$  ve výsledné formuli a tedy tím přesnější je Itôova formule.

Při přechodu od diskrétních intervalů  $\Delta t$  ke spojitému času, budou kumulativní součty nezávislých veličin  $\varepsilon$  po časové a prostorové standardizaci konvergovat v distribuci k Wienerově procesu (viz definice 2.2.1). Přesná formulace principu invariance je nad rámec tohoto textu.

Přírůstek času  $\Delta t$  je ve spojitém modelu reprezentován jako  $dt$ . Potom, pokud náhodnou veličinu  $X$  chápeme jako funkci času  $t$ , tedy jako  $X(t)$ , získáme pro její přírůstky vyjádření, které bývá označováno jako BROWNŮV POHYB S DRIFTEM ve tvaru

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad (2.7)$$

kde  $X(0) = x_0$  a  $dW(t)$  symbolicky označuje infinitezimální přírůstek WIENEROVA PROCESU, jehož definice je následující:

**Definice 2.2.1:** Nechť náhodný proces  $W(t)$  splňuje následující podmínky:

1.  $W(0) = 0$  a  $(W(t), t \geq 0)$  má spojitě trajektorie.
2. Přírůstky  $\Delta W(t_1), \Delta W(t_2), \dots, \Delta W(t_n)$  jsou nezávislé náhodné veličiny pro libovolné časy  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , kde  $\Delta W(t_i) = W(t_i) - W(t_{i-1})$ .
3. Pro libovolné časové okamžiky mají přírůstky  $W(t) - W(s)$  normální rozdělení  $\mathcal{N}(0, t - s)$  pro  $t \geq s$ ,

pak tento náhodný proces nazýváme Wienerovým procesem.

**Poznámka 2.2.1:** Podstatnou vlastností Wienerova procesu je

$$\sum_{k=1}^n \left[ W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right) \right]^2 \rightarrow \Delta t, \quad (2.8)$$

pro  $n \rightarrow \infty$  v pravděpodobnosti, resp. v distribuci. Slovy bychom řekli, že kvadratická variace Wienerova procesu na intervalu  $[0, t]$  je rovna  $t$  pro každé  $t \geq 0$  a symbolicky to budeme zapisovat v diferenciální podobě ve tvaru

$$(dW(t))^2 = dt. \quad (2.9)$$

Zřejmě

$$\left[ W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right) \right] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\Delta t}{n}\right),$$

což není nic jiného než

$$\sqrt{\frac{n}{\Delta t}} \left[ W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right) \right] \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Součet druhých mocnin  $n$  nezávislých náhodných veličin s normovaným normálním rozdělením má  $\chi_n^2$  rozdělení o  $n$  stupních volnosti. Náhodná veličina s tímto rozdělením pak podle slabého zákona velkých čísel konverguje po znormování hodnotou  $n$  v distribuci ke střední hodnotě náhodné veličiny s rozdělením  $\chi_1^2$ , což je 1. Tedy platí (2.8).

Nechť  $\mu_t$  a  $\sigma_t$  jsou pro jednoduchost spojitě procesy takové, že jejich historie do času  $t$  ( $\mu_s, s \leq t$ ) a ( $\sigma_s, s \leq t$ ) jsou dohromady nezávislé s  $(W(T) - W(t), T \geq t)$  pro každé  $t \geq 0$  a necht' infinitezimální přírůstek procesu  $X_t$  se dá zapsat ve tvaru

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW, \quad (2.10)$$

pak procesu  $X_t$  budeme říkat ITÔŮV PROCES, kde  $\mu_t$  se nazývá DRIFT,  $\sigma_t$  je DISPERZNÍ KOEFICIENT a  $\sigma_t^2$  DIFÚZNÍ KOEFICIENT. Dosazením speciální volby

$$\mu(t, X) = \mu X \quad \text{a} \quad \sigma(t, X) = \sigma X$$

do (2.10) získáme rovnici GEOMETRICKÉHO BROWNOVA POHYBU ve tvaru

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW. \quad (2.11)$$

**Poznámka 2.2.2:** Necht'  $U_t$  je Itôův proces a  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , pak  $f(U_t)$  je také Itôův proces a platí ITÔOVA FORMULE

$$df(U_t) = f'(U_t) dU_t + \frac{1}{2} f''(U_t) (dU_t)^2. \quad (2.12)$$

V dalším textu budeme využívat i následující znění vícerozměrné verze Itôovy formule bez toho, abychom uváděli její přesnou formulaci.

$$df(U_t, V_t) = f'_1(U_t, V_t) dU_t + f'_2(U_t, V_t) dV_t + \frac{1}{2} [f''_{11}(U_t, V_t) (dU_t)^2 + f''_{22}(U_t, V_t) (dV_t)^2 + 2f''_{12}(U_t, V_t) (dU_t)(dV_t)],$$

pokud  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$  a  $(U_t, V_t)$  je "sdruženě" Itôův proces.

Speciálně, volbou  $f(x, y) = xy$ , dostaneme STOCHASTICKOU VERZI PER PARTES ve tvaru

$$dU_t V_t = U_t dV_t + V_t dU_t + (dU_t)(dV_t). \quad (2.13)$$

**Poznámka 2.2.3:** Vztahy v poznámce 2.2.2 zůstanou v platnosti i v případě, že v definici Itôova procesu  $X_t$  nahradíme diferenciál  $\mu_t dt$  diferenciálem ze spojitého procesu  $dZ_t$  s konečnou variací takového, že jeho historie  $(Z_s, s \leq t)$  dohromady s historií procesu  $(\sigma_s, s \leq t)$  do času  $t$  je nezávislá s  $(W(T) - W(t), T \geq t)$  pro každé  $t \geq 0$ .

## 2.3 Martingaly

**Definice 2.3.1:** Náhodný proces  $X(t), t \in \mathbb{N}$ , pro který  $E|X(t)| < \infty$  pro všechna  $t \in \mathbb{N}$ , se nazývá MARTINGAL jestliže

$$E[X(t)|X(r), r \leq s] = X(s) \quad \text{pro každé } s \leq t.$$

Pokud

$$E[X(t)|X(r), r \leq s] \leq X(s) \quad \text{pro každé } s \leq t$$

označujeme jako SUPERMARTINGAL a v případě, že

$$E[X(t)|X(r), r \leq s] \geq X(s) \quad \text{pro každé } s \leq t$$

mluvíme o náhodném procesu  $X(t)$  jako o SUBMARTINGALU.

# Kapitola 3

## Optimální obchodní strategie

### 3.1 Spojitý model

Mějme investora, který investuje na akciovém a peněžním trhu. Předpokládejme, že tržní cenu akcie  $X_t$  je možné modelovat pomocí geometrického Brownova pohybu

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Dále zavedeme následující označení:  $Y_t$  je tržní cena portfolia,  $H_t$  udává počet akcií v portfoliu a investorova pozice v čase  $t$  je  $G_t$ . Pozice  $G_t$  je určena podílem investic na akciovém trhu v investorově portfoliu. Omezíme se pouze na případ, kdy  $G_t \in (0, 1)$ . Při tomto označení je možné vyjádřit cenu akciové části portfolia jako

$$G_t Y_t = H_t X_t.$$

Pokud investor neobchoduje, pak  $H_t$  je konstantní a přírůstek tržní ceny portfolia je způsoben pouze změnou tržní ceny akcie

$$dY_t = H_t dX_t = H_t X_t (\mu dt + \sigma dW_t) = Y_t G_t (\mu dt + \sigma dW_t). \quad (3.1)$$

Podle vztahu (3.1) a Itôovy formule (2.6) s volbou  $f(x) = x^{-1}$  platí

$$Y_t dY_t^{-1} = -\frac{dY_t}{Y_t} + \left(\frac{dY_t}{Y_t}\right)^2 = G_t(-\mu + \sigma^2 G_t) dt - G_t \sigma dW_t.$$

Z (3.1) a Itôova lemmatu volbou  $f(x) = \ln x$  dostáváme

$$d \ln Y_t = (\mu G_t - \frac{1}{2} \sigma^2 G_t^2) dt + \sigma G_t dW_t. \quad (3.2)$$

Podle stochastické verze Per Parties vztahů (2.11), (3.1) a předpokladu, že  $H_t$  je konstantní dostaneme

$$dG_t = H_t Y_t^{-1} dX_t + H_t X_t Y_t^{-1} Y_t dY_t^{-1} + H_t (dX_t)(dY_t^{-1}) \quad (3.3)$$

$$= G_t(1 - G_t)[(\mu - \sigma^2 G_t) dt + \sigma dW_t]. \quad (3.4)$$

Po zavedení vztahů pro drift  $B(x)$  a difuzi  $S^2(x)$

$$B(x) = x(1-x)[\mu - \sigma^2 x] \quad S(x) = \sigma x(1-x),$$

můžeme přírůstek pozice při neobchodování zapsat ve tvaru

$$dG_t = B(G_t) dt + S(G_t) dW_t. \quad (3.5)$$

Nyní budeme předpokládat, že v čase  $t$  nakoupíme  $\Delta H_t \geq 0$  akcií, pak  $H_t X_t = Y_t G_t$  vzroste o hodnotu  $X_t \Delta H_t$ , což představuje objem tohoto obchodu. Předpokládejme dále, že při nákupu platíme  $(1 + \delta)$ -krát tržní cenu akcie. Velikost transakčních nákladů je pak rovna

$$\delta X_t \Delta H_t = \Delta(\delta X_t H_t),$$

neboť nákup proběhne v nekonečně krátkém časovém intervalu  $[t, t + dt]$ , během něhož se cena akcie  $X_t$  nezmění. O tutéž hodnotu musí poklesnout tržní cena portfolia. Následující hodnota tak během nákupu zůstává konstantní

$$Y_t + \delta H_t X_t = Y_t(1 + \delta G_t).$$

V diferenciální podobě lze psát

$$d^+ \ln Y_t = -d^+ \ln(1 + \delta G_t) = \vartheta_+(G_t) d^+ G_t,$$

kde  $d^+$  reprezentuje infinitezimální změnu způsobenou nákupem akcie odpovídající infinitezimální změně pozice  $d^+ G_t$  a kde

$$\vartheta_+(x) = \frac{\delta}{1 + \delta x}. \quad (3.6)$$

Při prodeji předpokládáme, že obdržíme  $(1 - \epsilon)$ -krát tržní cenu akcie. Podobně jako při nákupu bychom mohli ukázat, že při prodeji zůstává konstantní následující hodnota

$$Y_t - \epsilon H_t X_t = Y_t(1 - \epsilon G_t).$$

V diferenciální podobě s využitím  $d^-$ , které reprezentuje změnu způsobenou prodejem akcií odpovídající infinitezimální změně pozice  $-d^- G_t$  dostaneme

$$d^- \ln Y_t = -d^- \ln(1 - \epsilon G_t) = -\vartheta_-(G_t) d^-(G_t),$$

kde

$$\vartheta_-(x) = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon x}. \quad (3.7)$$

Obečně pak celkový přírůstek pozice vyjadřuje rovnice

$$dG_t = B(G_t) dt + S(G_t) dW_t + d^+ G_t - d^- G_t. \quad (3.8)$$

Tuto rovnost lze také chápat jako definiční rovnost pro diferenciály  $d^+ G_t$  a  $d^- G_t$  spolu s omezujícím předpokladem, že jejich neurčité integrály jsou neklesající procesy, což lze v diferenciální symbolice napsat ve tvaru  $d^+ G_t, d^- G_t \geq 0$ . Rovnost (3.8) tak blíže upřesňuje význam diferenciálů  $d^+$  a  $d^-$ . Celkovou dynamiku tržní ceny portfolia je tak možné zapsat rovnicí

$$d \ln Y_t = \left( \mu G_t - \frac{1}{2} \sigma^2 G_t^2 \right) dt + \sigma G_t dW_t - \vartheta_+(G_t) d^+ G_t - \vartheta_-(G_t) d^- G_t. \quad (3.9)$$

## 3.2 Aproximace spojitého modelu diskretním

Model investorovy pozice (3.8) je modelem spojitým. Při aproximaci tohoto modelu diskretním, musí být zachovány charakteristiky jako jsou střední hodnota a rozptyl infinitezimálních přírůstků procesu. Předpokládejme, že počáteční pozice investora v čase nula je

$$G_0 = g.$$

Pro podmíněnou střední hodnotu ve spojitém modelu pak platí vztah

$$E[\underbrace{G_{dt} - G_0}_{dG_t} | G_0 = g] \sim B(g) dt. \quad (3.10)$$

Při výpočtu střední hodnoty jsme vyšli ze vztahu (3.8) a poznatku ze sekce 2.2 o Wienerově procesu, jehož přírůstek  $dW(t) \sim \mathcal{N}(0, dt)$ . Toho využijeme i při výpočtu rozptylu

$$\text{var}[G_{dt} - G_0 | G_0 = g] \sim E[(G_{dt} - G_0)^2 | G_0 = g] \sim S^2(g) dt. \quad (3.11)$$

V (3.11) jsme ve druhém členu zanedbali výraz

$$(E[G_{dt} - G_0 | G_0 = g])^2 \sim B^2(g) (dt)^2,$$

což je možné za předpokladu, že časové přírůstky  $dt$  jsou malé.

V diskretním modelu bude situace vypadat následovně.

$$\begin{array}{ccc} g-h & g & g+h \\ \cdot & \leftarrow & \cdot & \rightarrow & \cdot \\ & P_-(g) & & P_+(g) & \end{array}$$

Počáteční investorova pozice v čase nula je v bodě  $g$ . V čase  $dt$  bude  $G_{dt} = g + h$  s pravděpodobností  $P_+(g)$ , s pravděpodobností  $P_-(g)$  v  $G_{dt} = g - h$  a s pravděpodobností  $P_0(g)$  zůstane v bodě  $G_{dt} = g$ . Přitom musí platit

$$P_0(g) = 1 - P_+(g) - P_-(g). \quad (3.12)$$

Začneme vyjádřením střední hodnoty investorovy pozice  $G_{dt}$ .

$$\begin{aligned} E[G_{dt} | G_0 = g] &= P_-(g)(g-h) + P_0(g)g + P_+(g)(g+h) \\ &= g + P_-(g)(-h) + P_+(g)(h), \end{aligned}$$

kde jsme v posledním vztahu využili (3.12). Po odečtení  $G_0$  získáme vyjádření pro střední hodnotu a rozptyl přírůstku tohoto diskretního modelu

$$E[G_{dt} - G_0 | G_0 = g] = h(P_+(g) - P_-(g)) \quad (3.13)$$

$$\text{var}[G_{dt} - G_0 | G_0 = g] \sim E[(G_{dt} - G_0)^2 | G_0 = g] \quad (3.14)$$

$$\sim h^2(P_-(g) + P_+(g)). \quad (3.15)$$

Ve vztahu (3.14) jsme zanedbali druhý člen rozptylu. To je možné při volbě malých změn investovavy pozice  $h$ . Porovnáním výsledků spojitého a diskrétního přístupu dostaneme odhad  $P_+(g)$  a  $P_-(g)$ .

$$B(g) dt \sim h[P_+(g) - P_-(g)] \quad (3.16)$$

$$S^2(g) dt \sim h^2[P_+(g) + P_-(g)]. \quad (3.17)$$

Řešením soustavy rovnic (3.16) a (3.17) pro  $dt \rightarrow 0$  a  $h \rightarrow 0$  jsme získali odhady

$$P_+(g) \sim \frac{hB(g) dt + S^2(g) dt}{2h^2} \geq 0 \quad (3.18)$$

$$P_-(g) \sim \frac{-hB(g) dt + S^2(g) dt}{2h^2} \geq 0, \quad (3.19)$$

kde nezápornost v (3.18) a (3.19) můžeme pro malá  $h$  dosáhnout v případě, že  $S^2(g) > 0$ . Ze vztahu (3.12) je teď možné dopočítat  $P_0(g)$

$$P_0(g) = 1 - [P_+(g) + P_-(g)] \sim 1 - \frac{S^2(g) dt}{h^2}. \quad (3.20)$$

Přitom  $P_0(g)$  musí splňovat podmínku

$$P_0(g) \geq 0.$$

To platí, pokud  $S^2(g) dt \leq h^2$  a tedy lze volit

$$dt = \frac{h^2}{k},$$

kde  $k \geq S^2(g)$  plat pro všechna uvažovaná  $g$ .

### 3.3 Nalezení optimálního řízení

V případě, že platíme za obchodování transakční náklady, lze očekávat, že optimální strategií bude udržovat pozici v určitém intervalu, označme jej  $[\alpha, \beta]$ , a neobchodovat, pokud se pozice investora nachází uvnitř  $(\alpha, \beta)$ , viz [2] a [5].

#### 3.3.1 Spojitý model

Podrobné odvození je zpracováno v [2]. Na tomto místě pouze shrneme vztahy, které umožňují porovnání numerických výsledků diskrétního a spojitého modelu.

Optimální interval  $(\alpha, \beta)$  nalezneme v případě spojitého modelu jako argument maxima funkce

$$u(\alpha, \beta) = \frac{\left| \frac{\beta}{1-\beta} \right|^{2\rho} \xi_\beta - \left| \frac{\alpha}{1-\alpha} \right|^{2\rho} \xi_\alpha}{\frac{1}{2\rho} \left[ \left| \frac{\beta}{1-\beta} \right|^{2\rho} - \left| \frac{\alpha}{1-\alpha} \right|^{2\rho} \right]} \quad \text{pro } \rho \neq 0 \quad \text{nebo}$$



$$u(\alpha, \beta) = \frac{\xi_\beta - \xi_\alpha}{\ln \frac{\beta}{1-\beta} - \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{pro } \rho = 0$$

na množině  $\{(\alpha, \beta), 0 < \alpha < \beta < 1\}$ , kde

$$\rho := \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \xi_\alpha := \alpha \frac{1 + \delta}{1 + \delta \alpha} \quad \text{a} \quad \xi_\beta := \beta \frac{1 - \epsilon}{1 - \epsilon \beta}.$$

### 3.3.2 Diskrétní model

V tomto modelu využijeme při hledání optimální strategie Howardův iterační postup odvozený v části 1.2.1.

Předpokládejme, že množina možných stavů Markovova řetězce je ve tvaru  $S = \{k, k = 1, \dots, m\}$ , kde  $m = 1/h - 1 \in \mathbb{N}$ . To odpovídá množině pozic investora  $\mathbb{G} := \{g_k, k = 1, \dots, m\} \subseteq (0, 1)$ , kde  $g_k = h \cdot k$ .

Za přípustná řízení budeme v tomto modelu považovat rozhodnutí investora koupit akcie (+), prodat akcie (−) nebo vůbec neobchodovat (0). Množiny možných řízení řetězce v jednotlivých stavech jsou následující:

- $Z_1 = \{+\}$  a  $Z_m = \{-\}$ : krajní polohy považujeme za bezpodmínečné. Tedy musíme zahájit okamžitý nákup, resp. prodej, abychom udrželi pozici  $G_t$  v množině  $\mathbb{G}$  resp. v intervalu  $[h, 1 - h]$ .
- $Z_2 = \{+, 0\}$  a  $Z_{m-1} = \{0, -\}$ : ve stavech bezprostředně sousedících s krajními stavy volíme strategii tak, abychom opět udržovali pozici  $G_t$  v intervalu  $[h, 1 - h]$ .
- $Z_i = \{+, 0, -\}$  pro  $i \in \{3, \dots, m - 2\}$ : v těchto stavech není investorovo rozhodování nijak omezeno.

Množina všech řízení řetězce je pak ve tvaru  $Z = \prod_{i=1}^m Z_i$ .

Abychom zaručili nerozložitelnost řetězce, nebudeme rozhodnutí nakupovat nebo prodávat považovat ve stavech  $\{2, \dots, m - 1\}$  za absolutní. To znamená, že i v případě, že rozhodnutí zní např. nakoupit, připustíme určitou pravděpodobnost  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , se kterou se tento záměr neuskuteční. Počáteční a koncový stav řetězce chápeme jako bezpodmínečný, tedy v těchto případech je  $\varepsilon = 0$ .

Pro každé řízení řetězce je nutné určit matici pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}$ . Její členy závisí na rozhodnutí, které v daném stavu učiníme. Pokud je naším rozhodnutím ve stavu  $i$  neobchodovat, pak řetězec zůstává ve stavu  $i$  a rozdělení pravděpodobností přechodu je následující:

$$(0) \quad \begin{array}{l} \diagup \quad p_{i,i-1} = P_-(g_i) \\ \text{---} \quad p_{i,i} = P_0(g_i) \\ \diagdown \quad p_{i,i+1} = P_+(g_i), \end{array}$$

kde  $P_-(g_i)$ ,  $P_0(g_i)$  a  $P_+(g_i)$  jsou po řadě dány vztahy (3.19), (3.20) a (3.18).

Pokud rozhodnutí nakupovat nepovažujeme za absolutní, připouštíme dvě možnosti:

- S pravděpodobností  $(1 - \varepsilon)$  nákup opravdu uskutečníme a posuneme tím řetězec do stavu  $(i+1)$ . Pak pohybu z tohoto stavu odpovídají pravděpodobnosti přechodu:

$$\begin{array}{l}
 (+) : i \rightarrow i + 1 \quad \begin{array}{l}
 \nearrow (1 - \varepsilon)P_-(g_{i+1}) \quad \text{při přechodu} \quad i + 1 \rightarrow i \\
 \text{---} (1 - \varepsilon)P_0(g_{i+1}) \quad \text{při přechodu} \quad i + 1 \rightarrow i + 1 \\
 \searrow (1 - \varepsilon)P_+(g_{i+1}) \quad \text{při přechodu} \quad i + 1 \rightarrow i + 2,
 \end{array}
 \end{array}$$

- Zamýšlený nákup s malou pravděpodobností  $\varepsilon$  neuskutečníme, tedy řetězec zůstane ve stavu  $i$  a pravděpodobnosti dalšího vývoje jsou

$$\begin{array}{l}
 (+) : i \rightarrow i \quad \begin{array}{l}
 \nearrow \varepsilon P_-(g_i) \quad \text{při přechodu} \quad i \rightarrow i - 1 \\
 \text{---} \varepsilon P_0(g_i) \quad \text{při přechodu} \quad i \rightarrow i \\
 \searrow \varepsilon P_+(g_i) \quad \text{při přechodu} \quad i \rightarrow i + 1,
 \end{array}
 \end{array}$$

Tedy celkové rozdělení pravděpodobností pro rozhodnutí nakupovat je

$$\begin{array}{l}
 (+) \quad \begin{array}{l}
 \nearrow p_{i,i-1} = \varepsilon P_-(g_i) \\
 \nearrow p_{i,i} = \varepsilon P_0(g_i) + (1 - \varepsilon)P_-(g_{i+1}) \\
 \searrow p_{i,i+1} = \varepsilon P_+(g_i) + (1 - \varepsilon)P_0(g_{i+1}) \\
 \searrow p_{i,i+2} = (1 - \varepsilon)P_+(g_{i+1}).
 \end{array}
 \end{array}$$

Analogickým postupem dostáváme pro rozhodnutí prodávat

$$\begin{array}{l}
 (-) \begin{cases}
 p_{i,i-2} = (1 - \varepsilon)P_-(g_{i-1}) \\
 p_{i,i-1} = (1 - \varepsilon)P_0(g_{i-1}) + \varepsilon P_-(g_i) \\
 p_{i,i} = (1 - \varepsilon)P_+(g_{i-1}) + \varepsilon P_0(g_i) \\
 p_{i,i+1} = \varepsilon P_+(g_i).
 \end{cases}
 \end{array}$$

Matice ocenění přechodů  $R$  také reflektuje záměr investora.

- Při rozhodnutí neobchodovat se neplatí žádné transakční náklady a ocenění přechodu odpovídá přírůstku logaritmu tržní hodnoty portfolia spojených se setravním pozice  $G_t$  v blízkosti hodnoty  $g_i$ , resp. s přírůstkem procesu  $\int (\mu G_s - \frac{1}{2}\sigma^2 G_s^2) ds$ .

$$r_{i,j} = {}_0r(g_i) := (\mu g_i - \frac{1}{2}\sigma^2 g_i^2) dt \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, m.$$

- Rozhodnutí nakoupit je zatíženo transakčními náklady  $h\vartheta_+(x)$  definovanými vztahem (3.6). Příslušné ocenění je ve tvaru

$$r_{i,j} = {}_+r(g_i) := {}_0r(g_i) - h\vartheta_+(g_i) \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, m.$$

- Pro případ prodeje a s tím spojenými transakčními náklady  $h\vartheta_-(x)$  určenými (3.7) je ocenění přechodu

$$r_{i,j} = {}_-r(g_i) := {}_0r(g_i) - h\vartheta_-(g_i) \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, m.$$

Nyní už je možné pro nalezení optimálního řízení použít Howardův algoritmus s počátečním přiblížením např.  ${}_0z := (+, 0, \dots, 0, -)$ .

### 3.3.3 Porovnání očekávaných výsledků v daných modelech

- Spojitý případ: Základní úlohou je nalézt funkci  $f \in \mathcal{C}^2(-1/\delta, 1/\varepsilon)$  a hodnotu  $\nu \in \mathbb{R}$  takovou, že

$$\ln Y_t - f(G_t) - \nu t \tag{3.21}$$

je martingal, pokud aplikujeme strategii  $(\alpha, \beta)$ , a že (3.21) je supermartingal, pokud aplikujeme jakoukoli jinou strategii udržující  $G_t$  odraženou od hodnot 0, 1 takovou, že  $EY_t^\eta < \infty$  platí pro každé  $\eta < 0$ ,  $t \geq 0$  viz [2]. Speciálně pak pro strategii  $(\alpha, \beta)$  dostáváme

$$E[\ln Y_t - f(G_t) - \nu t] = \ln y_0 - f(g_0),$$

kde  $y_0$  je počáteční tržní cena portfolia a  $g_0$  je počáteční pozice. Platí tedy

$$E \ln Y_t = \nu t + \ln y_0 - f(g_0) + E f(G_t),$$

což pro velká  $t$  odpovídá hodnotě

$$\nu t - f(g_0) + \ln y_0 + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \boldsymbol{\pi} (dx),$$

kde  $\boldsymbol{\pi}$  je stacionární rozdělení pozice  $G_t$  při strategii  $[\alpha, \beta]$ .

- Diskrétní případ: nechť  $\mathbf{e}_i$  označuje vektor složený ze samých nul, pouze na  $i$  - té pozici je hodnota 1. Předpokládejme, že se řetězec nachází na počátku ve stavu  $i$ , pak očekávaný výnos za  $n$  období je podle přibližně

$$v_i(n) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}(n) \sim \mathbf{e}_i^T (n \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{q} + \mathbf{A} \mathbf{q}) = \mathbf{e}_i^T (n c \mathbf{1} + \mathbf{b}) = n c + b_i,$$

kde  $b_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{b}$ .

- V případě, že časový interval  $[0, t]$  rozdělíme na  $n$  podintervalů délky  $dt$ , kde  $n \cdot dt = t$ , dostáváme analogii mezi diskrétním a spojitým případem

$$\begin{aligned} E(\ln Y_t | G_0 = g_0) &\sim \nu t - \tilde{f}(g_0) \\ v_i(n) &\sim n \cdot c + b_i, \end{aligned}$$

kde  $\tilde{f}(y) = f(y) - \ln y_0 - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \boldsymbol{\pi}(dx)$ . Odpovídající si hodnoty tedy jsou  $\nu \sim c/dt$  a funkce  $-\tilde{f} \sim \mathbf{b}$ . Funkce  $\tilde{f}' = f'$  je rostoucí a přechází ze záporných hodnot do kladných tomu odpovídá průběh vektoru  $\mathbf{b}$ , který odpovídá konkávní funkci, která nejprve roste a posléze klesá. Numericky porovnatelné hodnoty jsou  $c \sim \nu dt$  a přírůstky  $b_i - b_{i-1} \sim f(g_{i-1}) - f(g_i) \sim f'(g_i)(-h)$  tj.  $-f'(g_i) \sim (b_i - b_{i-1})/h$ .

### 3.3.4 Porovnání numerických hodnot

Ekvivalence modelů je ilustrována na dvou příkladech, v obou jsou transakční náklady  $\delta = \epsilon = 2\%$ , volatilita  $\sigma = 1$ . Odlišnost příkladů je v hodnotě  $\mu$ . Nejdříve budeme uvažovat, že  $\mu = 1/2$  a poté  $\mu = 2/5$ .

Výsledky spojitého modelu dávají po řadě interval  $(\alpha, \beta)$  a hodnotu očekávaného výnosu  $\nu$ .

`SpojityModel[0.5, 1, 0.02, 0.02]`

`SpojityModel[0.4, 1, 0.02, 0.02]`

`{{0.374939, 0.625155}, 0.117751}`

`{{0.279021, 0.522021}, 0.073158}`

Diskretizace spojitého modelu byla provedena s krokem  $h = 0.005$  a časovou změnou  $dt = 0.0004$  při volbě  $\epsilon = 0.00001$ .



Nevýhodou diskrétního modelu zůstává fakt, že volba kroku by měla být co nejmenší. Tím se ale zvyšuje časová náročnost výpočtu. Je tedy nutné zvolit kompromis mezi přesností výsledku a dobou na jeho čekání.

# Dodatek A

## Programová realizace diskrétního modelu

```
Howard[hH_, dtH_, μH_, σH_, bH_, cH_, εH_] :=
Module[{h, dt, μ, σ, b, c, ε, vysledneRizeni, z, vysledneC, Ce, vysledneB, vysledekB, velikost, νplus, νminus, qplus, qminus, qnula,
Qnula, Qplus, Qminus, index, rizeni, Rozmezi, x, α, β, Q, diference, posledniB, PopisOsy},
h = Rationalize[hH]; dt = Rationalize[dtH]; μ = Rationalize[μH]; σ = Rationalize[σH]; b = Rationalize[bH]; c = Rationalize[cH];
ε = Rationalize[εH];

(*****)
ReseniSoustavy[q_, h_, dt_, μ_, σ_, ε_, z1_List] :=
Module[{velikostR, cR, BR, bR, f, promenna, rovnice, reseni, S, B, Pplus, Pminus, Pnula, xR, g},
velikostR = Round[1/h] - 1;
BR := Array[bR, velikostR];

B[xR_] := xR * (1 - xR) * (μ - (σ^2) * xR);
S[xR_] := σ * xR * (1 - xR);
Pplus[xR_] := (h * B[xR] * dt + (S[xR])^2 * dt) / (2 * h^2);
Pminus[xR_] := (-h * B[xR] * dt + (S[xR])^2 * dt) / (2 * h^2);
Pnula[xR_] := 1 - Pplus[xR] - Pminus[xR];

P = Table[0, {velikostR}, {velikostR}];
g = h;
P[[1, 1]] = Pminus[g + h]; P[[1, 2]] = Pnula[g + h]; P[[1, 3]] = Pplus[g + h];
g = 2 * h; i = 2;
While[i ≠ velikostR,
If[z1[[i]] == 0, P[[i, i - 1]] = Pminus[g]; P[[i, i]] = Pnula[g]; P[[i, i + 1]] = Pplus[g];
If[z1[[i]] == 1, P[[i, i - 1]] = ε * Pminus[g]; P[[i, i]] = ε * Pnula[g] + (1 - ε) * Pminus[g + h]; P[[i, i + 1]] = ε * Pplus[g] +
(1 - ε) * Pnula[g + h]; P[[i, i + 2]] = (1 - ε) * Pplus[g + h];
If[z1[[i]] == -1, P[[i, i - 2]] = (1 - ε) * Pminus[g - h]; P[[i, i - 1]] = (1 - ε) * Pnula[g - h] + ε * Pminus[g]; P[[i, i]] =
(1 - ε) * Pplus[g - h] + ε * Pnula[g]; P[[i, i + 1]] = ε * Pplus[g];
g = g + h; i++];
g = 1 - h;
```

```
P[[velikostR, velikostR - 2]] = Pminus[g - h]; P[[velikostR, velikostR - 1]] = Pnula[g - h]; P[[velikostR, velikostR]] =
Pplus[g - h];
Rationalize[P];
```

```
f[x_] := cR + BR[[x]] == q[[x]] + P[[x, All]].BR;
rovnice = {Map[f, Range[velikostR]], BR[velikostR] == 0} // Flatten;
reseni = Solve[rovnice, {BR, cR}] // Flatten // Flatten;
{Rationalize[BR/.Take[reseni, velikostR]], Rationalize[cR/.Take[reseni, {velikostR + 1}]]};
(*****)
```

```
Maximum[Qnula_, Qplus_, Qminus_, h_, dt_, μ_, σ_, ε_, vysledekB_] :=
Module[{velikostM, vyberMaximum, rizeni, BM, SM, PplusM, PminusM, PnulaM, xM, iM, gM, PM, pozice},
velikostM = Round[1/h] - 1;
vyberMaximum = Table[0, {3}];
rizeni = Table[0, {velikostM}];
```

```
BM[xM_] := xM * (1 - xM) * (μ - (σ^2) * xM);
SM[xM_] := σ * xM * (1 - xM);
PplusM[xM_] := (h * BM[xM] * dt + (SM[xM])^2 * dt) / (2 * h^2);
PminusM[xM_] := (-h * BM[xM] * dt + (SM[xM])^2 * dt) / (2 * h^2);
PnulaM[xM_] := 1 - PplusM[xM] - PminusM[xM];
```

```
rizeni[[1]] = 1;
iM = 2; gM = Rationalize[2 * h];
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 1]] = PminusM[gM]; PM[[iM]] = PnulaM[gM]; PM[[iM + 1]] = PplusM[gM];
vyberMaximum[[1]] = Qnula[[iM]] + PM.vysledekB;
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 1]] = ε * PminusM[gM]; P[[iM]] = ε * PnulaM[gM] + (1 - ε) * PminusM[gM + h]; PM[[iM + 1]] = ε * PplusM[gM] +
(1 - ε) * PnulaM[gM + h]; PM[[iM + 2]] = (1 - ε) * PplusM[gM + h];
vyberMaximum[[2]] = Qplus[[iM]] + PM.vysledekB;
pozice = Position[vyberMaximum, Max[Take[vyberMaximum, 2]]];
If[pozice == {{1}}, rizeni[[iM]] = 0, rizeni[[iM]] = 1];
```

```
iM = 3; gM = Rationalize[3 * h];
While[iM ≠ velikostM - 1,
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 1]] = PminusM[gM]; PM[[iM]] = PnulaM[gM]; PM[[iM + 1]] = PplusM[gM];
vyberMaximum[[1]] = Qnula[[iM]] + PM.vysledekB;
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 1]] = ε * PminusM[gM]; PM[[iM]] = ε * PnulaM[gM] + (1 - ε) * PminusM[gM + h]; PM[[iM + 1]] = ε * PplusM[gM] +
(1 - ε) * PnulaM[gM + h]; PM[[iM + 2]] = (1 - ε) * PplusM[gM + h];
vyberMaximum[[2]] = Qplus[[iM]] + PM.vysledekB;
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 2]] = (1 - ε) * PminusM[gM - h]; PM[[iM - 1]] = (1 - ε) * PnulaM[gM - h] + ε * PminusM[gM]; PM[[iM]] =
```



```

(1 - ε) * PplusM[gM - h] + ε * PnulaM[gM]; PM[[iM + 1]] = ε * PplusM[gM];
vyberMaximum[[3]] = Qminus[[iM]] + PM.vysledekB;
pozice = Position[vyberMaximum, Max[vyberMaximum]];
If[pozice == {1}, rizeni[[iM]] = 0, If[pozice == {2}, rizeni[[iM]] = 1, rizeni[[iM]] = -1];
gM = Rationalize[gM + h]; iM++;

iM = velikostM - 1; gM = Rationalize[1 - 2 * h];
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 1]] = PminusM[gM]; PM[[iM]] = PnulaM[gM]; PM[[iM + 1]] = PplusM[gM];
vyberMaximum[[1]] = Qnula[[iM]] + PM.vysledekB;
PM = Table[0, {velikostM}];
PM[[iM - 2]] = (1 - ε) * PminusM[gM - h]; PM[[iM - 1]] = (1 - ε)PnulaM[gM - h] + ε * PminusM[gM]; PM[[iM]] =
(1 - ε) * PplusM[gM - h] + ε * PnulaM[gM]; PM[[iM + 1]] = ε * PplusM[gM];
vyberMaximum[[2]] = Qminus[[iM]] + PM.vysledekB;
pozice = Position[vyberMaximum, Max[Take[vyberMaximum, 2]]];
If[pozice == {1}, rizeni[[iM]] = 0, rizeni[[iM]] = -1];

rizeni[[velikostM]] = -1;
rizeni];
(*****
GenerovaniQ[h_, Qnula_, Qplus_, Qminus_, z2_] := Module[{velikostG, QG, iG},
velikostG = Round[1/h] - 1;
QG = Table[0, {velikostG}];
iG = 1;
While[iG ≠ (velikostG + 1), If[z2[[iG]] == 1, QG[[iG]] = Qplus[[iG]], If[z2[[iG]] == 0, QG[[iG]] = Qnula[[iG]], QG[[iG]] =
Qminus[[iG]]]; iG++];
Rationalize[QG];
(*****

vysledneRizeni = Array[z, 1000000];
vysledneC = Array[Ce, 1000000];
vysledneB = Array[vysledekB, 1000000];
velikost = Round[1/h] - 1;
diference = Table[0, {velikost - 1}];

νplus[x_] := b/(1 + b * x);
νminus[x_] := c/(1 - c * x);
qnula[x_] := (μ * x - 1/2 * σ^2 * x^2) * dt;
qplus[x_] := qnula[x] - h * νplus[x];
qminus[x_] := qnula[x] - h * νminus[x];
Qnula = Map[qnula, Range[h, 1 - h, h]];
Qplus = Map[qplus, Range[h, 1 - h, h]];
Qminus = Map[qminus, Range[h, 1 - h, h]];

```

```

index = 1;
rizeni = Table[0, {velikost}]; rizeni[[1]] = 1; rizeni[[velikost]] = -1;
z[index] = rizeni;
Q = GenerovaniQ[h, Qnula, Qplus, Qminus, z[index]];
{vysledekB[index], Ce[index]} = ReseniSoustavy[Q, h, dt,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , z[index]];

index = 2;
z[index] = Maximum[Qnula, Qplus, Qminus, h, dt,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , vysledekB[index - 1]];
Q = GenerovaniQ[h, Qnula, Qplus, Qminus, z[index]];
{vysledekB[index], Ce[index]} = ReseniSoustavy[Q, h, dt,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , z[index]];

While[z[index]  $\neq$  z[index - 1], index++;
z[index] = Maximum[Qnula, Qplus, Qminus, h, dt,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , vysledekB[index - 1]];
Q = GenerovaniQ[h, Qnula, Qplus, Qminus, z[index]];
{vysledekB[index], Ce[index]} = ReseniSoustavy[Q, h, dt,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , z[index]];

posledniB = vysledekB[index];
PopisOsy = Table[{i * 50, ToString[(h * i * 50)//N]}, {i, 1, (velikost)/50}];
i = 1;
While[i  $\neq$  velikost, difference[[i]] = (posledniB[[i]] - posledniB[[i + 1]])/h; i++;
ListPlot[difference, PlotJoined  $\rightarrow$  True, Ticks  $\rightarrow$  {PopisOsy, Automatic}];
Rozmezi[x_List] := {Position[x, 1]//Last, Position[x, -1]//First}//Flatten;
{ $\alpha$ ,  $\beta$ } = Rozmezi[z[index]];

Print[z[index]];
Print[(Take[vysledneC, index]/dt)//N];
Print[(h * { $\alpha$ ,  $\beta$ })//N];

```

## Dodatek B

# Programová realizace spojitého modelu

```
SpojityModel[μ_, σ_, b_, c_] := Module[{ρ, ξα, ξβ, α, β, αopt, βopt, opt, u1, u2},
  ρ := μ/σ^2 - 1/2;
  ξα := α * (1 + b)/(1 + b * α);
  ξβ := β * (1 - c)/(1 - c * β);
  u1[α_, β_] := (ξβ * Abs[β/(1 - β)]^(2 * ρ) - ξα * Abs[α/(1 - α)]^(2 * ρ)) /
  ((1/(2 * ρ)) * (Abs[β/(1 - β)]^(2 * ρ) - Abs[α/(1 - α)]^(2 * ρ)));
  u2[α_, β_] := (ξβ - ξα)/(Log[β/(1 - β)] - Log[α/(1 - α)]);
  If[ρ == 0, opt = NMaximize[{u2[α, β], 0 < α && α - β < 0.0000000001 && β < 1}, {α, β}],
  opt = NMaximize[{u1[α, β], 0 < α && α - β < 0.0000000001 && β < 1}, {α, β}];
  ν = opt[[1]] * σ^2/2;
  {αopt, βopt} = {α, β} /. opt[[2]];
  {{αopt, βopt}, ν}]
```

# Literatura

- [1] Baz J., Chacko G. (2004): Financial Derivatives Pricing, Applications, and Mathematics, Cambridge University Press
- [2] Dostál P.: Investment Strategies in the Long Run with Proportional Transaction Costs and HARA Utility Function odeslaný do Quantitative Finance
- [3] Dupač V., Dupačová J. (1975): Markovovy procesy Díl I, Skripta MFF UK, SNTL, Praha
- [4] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J. (2002): Stochastic Modeling in Economics and Finance, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [5] Janeček K., Shreve S.E. (2004): Asymptotic Analysis for Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs, Finance & Stochastics, 8, 181-206
- [6] Prášková Z., Lachout P. (2005): Základy náhodných procesů, Nakladatelství Karolinum, Praha