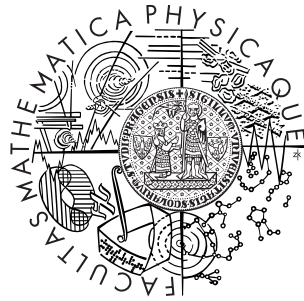


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Barbora Kocúrová

Coxův bodový proces

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.
Studijní program: Matematika, obor Obecná matematika

2006

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce panu Prof. RNDr. Viktoru Benešovi, DrSc. za odborné vedení bakalářské práce, cenné připomínky a vstřícný přístup. Dále děkuji svým rodičům, kteří mi studium umožnili, a přátelům za jejich podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 25.5.2006

Barbora Kocúrová

Obsah

Úvod	5
1 Základní pojmy	6
1.1 Bodový proces	6
1.2 Poissonův bodový proces	7
1.3 Coxův bodový proces	8
1.4 Filtrování Coxova bodového procesu	9
1.5 Markov Chain Monte Carlo (MCMC) metody a Metropolis-Hastingsův algoritmus	10
2 Výpočty pro Coxův bodový proces řízený GOU procesem	12
2.1 Výpočet podmíněné hustoty	12
2.2 Algoritmus	13
2.3 Výpočet Metropolis-Hastingsových poměrů	15
3 Numerické výpočty	16
3.1 Popis programů	16
3.2 Numerické výsledky a grafy	17
3.3 Závěr	29
Literatura	30

Název práce: Coxův bodový proces

Autor: Barbora Kocúrová

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

e-mail vedoucího: Viktor.Benes@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme bodové procesy. Zabýváme se simulací a filtrováním Coxova bodového procesu řízeného Gamma Ornstein-Uhlenbeckovým procesem. K odhadu náhodné intenzity Coxova procesu jsme zvolili bayesovský přístup s využitím metody Markov Chain Monte Carlo a Metropolis-Hastingsova algoritmu rození a zániku pro bodové procesy.

Klíčová slova: Coxův bodový proces, simulace Coxova procesu, filtrování Coxova bodového procesu

Title: Cox point process

Author: Barbora Kocúrová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Supervisor's e-mail address: Viktor.Benes@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work the spatial point processes, particularly Cox point process driven by Gamma-Ornstein Uhlenbeck process is studied. We also discuss how to simulate this Cox process and the filtering problem. To obtain the efficient filtered value we consider a Bayesian inference with using Markov Chain Monte Carlo methods and Birth-death Metropolis-Hastings algorithm.

Keywords: Cox point process, simulation, filtering

Úvod

Coxův bodový proces X na d -dimenzionálním eukleidovském prostoru \mathbb{R}^d je výsledkem dvojně stochastického procesu, který je určen náhodnou nezápornou funkcí Λ . Podmíněně při dané realizaci funkce Λ je proces X Poissonův bodový proces s funkcí intenzity Λ [3].

V této práci se podrobněji zabýváme Coxovým bodovým procesem řízeným Gamma-Ornstein Uhlenbeckovým (GOU) procesem, jeho simulací a filtrováním. Filtrování bodových procesů je klasický problém, který vyplynul z aplikací medicínské diagnostiky a optické komunikace [4].

Úloha filtrování Coxova bodového procesu X s náhodnou intenzitou Y představuje stanovení podmíněné střední hodnoty

$$\mathbf{E}(Y(T) \mid X(t), t \in [0, T]).$$

K řešení tohoto problému jsme zvolili bayesovský přístup [2] a užili jsme metodu Markov Chain Monte Carlo (MCMC) a Metropolis-Hastingsův algoritmus rození a zániku.

V *první kapitole* začínáme úvodem do teorie bodových procesů, blíže se seznámíme s Poissonovým a Coxovým bodovým procesem a představíme úlohu filtrování Coxova procesu a metodu MCMC.

Ve *druhé kapitole* uvádíme konkrétní výpočty a algoritmus pro simulaci z rozdělení Coxova bodového procesu řízeného GOU procesem.

Třetí kapitola obsahuje popisy použitých programů, numerické výsledky a grafy.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Bodový proces

Označení:

(Ω, \mathcal{A}, P)	...	pravděpodobnostní prostor
(\mathcal{X}, d)	...	úplný separabilní metrický prostor (s nosnou množinou \mathcal{X} a metrikou d)
$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}$...	σ -algebra borelovských podmnožin \mathcal{X}
\mathcal{B}_0	...	system všech omezených borelovských podmnožin \mathcal{X} ($\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$)
N	...	system všech lokálně konečných podmnožin \mathcal{X} (tzn. $x \in N \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_0$ je $x \cap B$ konečná množina)
$x(\cdot)$...	čítací míra na \mathcal{X}
$x(B)$...	počet bodů množiny $x \cap B$
\mathcal{N}	...	$\sigma\{x \in N; x(B) = m\} \forall B \in \mathcal{B}_0, \forall m \in \mathbb{N}_0$

Definice 1.1. *Bodovým procesem* rozumíme měřitelné zobrazení

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (N, \mathcal{N}).$$

Jednoduchý bodový proces má všechny realizace s navzájem různými body. Říkáme, že bodový proces X je *konečný*, jestliže

$$X(\mathcal{X}) < \infty \text{ s.j.}$$

Rozdělení pravděpodobnosti bodového procesu X je pravděpodobnostní míra PX^{-1} ,

$$P_X(B) = P[X \in B] = P\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{N}.$$

Poznámka 1.1. Pro jednoduchost často definujeme bodový proces jako lokálně konečnou náhodnou množinu $\Phi \subset \mathcal{X}$, tzn. $\forall B \in \mathcal{B}_0$ je počet bodů množiny $\Phi \cap B$ konečná náhodná veličina.

Definice 1.2. *Prázdná pravděpodobnost* bodového procesu X je definována jako

$$P(X(B) = 0), \quad B \in \mathcal{B}_0.$$

Věta 1.1. *Rozdělení bodového procesu je určeno prázdnými pravděpodobnostmi.*

Definice 1.3. Nechť $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$. Řekneme, že bodový proces X je *stacionární*, respektive *izotropní*, jestliže jeho rozdělení je invariantní vůči posunutí, respektive rotaci.

Definice 1.4. Míra μ na měřitelném prostoru $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ se nazývá *difuzní*, jestliže $\forall y \in \mathcal{X}$ platí

$$\mu(\{y\}) = 0.$$

Věta 1.2. *Zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (N, \mathcal{N})$ je bodový proces, právě když $\forall B \in \mathcal{B}_0$ je $X(B)$ náhodná veličina.*

Definice 1.5. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme *n-tou momentovou míru* bodového procesu X vztahem

$$M^{(n)}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mathbf{E}[X(A_1)X(A_2) \dots X(A_n)],$$

kde $A_i \in \mathcal{B}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Speciálně, první momentová míra

$$M^{(1)}(A) = M(A) = \mathbf{E}[X(A)], \quad A \in \mathcal{B},$$

se nazývá *míra intenzity* bodového procesu X .

Dále píšeme

$$\text{var}[X(A)] = M^{(2)}(A \times A) - [M(A)]^2, \quad A \in \mathcal{B}$$

a definujeme *disperzi* procesu X vztahem

$$D(X(A)) = \frac{\text{var}X(A)}{\mathbf{E}[X(A)]}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

1.2 Poissonův bodový proces

Základním modelem bodového procesu je Poissonův proces.

Definice 1.6. Nechť μ je lokálně konečná difuzní míra na \mathcal{X} . Říkáme, že X je *Poissonův bodový proces s mírou intenzity μ* , jestliže splňuje:

1. $\forall A \in \mathcal{B}_0$ má náhodná veličina $X(A)$ Poissonovo rozdělení s parametrem $\mu(A)$,
2. jestliže A_1, \dots, A_n jsou po dvou disjunktní množiny z \mathcal{B}_0 pro nějaké n , potom $X(A_1), \dots, X(A_n)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Definice 1.7. Je-li $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a μ difuzní míra s hustotou $\lambda(\cdot)$ vzhledem k Lebesgueově míře, pak o $\lambda(\cdot)$ hovoříme jako o *funkci intenzity*.

Poissonův proces se nazývá *homogenní*, je-li jeho funkce intenzity konstantní.

Poznámka 1.2. Homogenní Poissonův proces na \mathbb{R}^d je stacionární a izotropní.

Poznámka 1.3. Každý stacionární Poissonův proces na $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ je homogenní.

Poznámka 1.4. Je-li X Poissonův bodový proces, pak $D(X(A)) = 1 \forall A \in \mathcal{B}_0$.
Disperze umožňuje srovnání bodového procesu s Poissonovým bodovým procesem.

Definice 1.8. Bodový proces X nazýváme

- a) naddisperzní, je-li $D(X(A)) > 1$,
- b) poddisperzní, je-li $D(X(A)) < 1$.

Definice 1.9. Uvažujme Poissonův bodový proces X s mírou intenzity μ , $0 < \mu(\mathcal{X}) < \infty$, a označme jeho rozdělení symbolem Π . Říkáme, že bodový proces Y má hustotu vzhledem k Poissonovu bodovému procesu X , jestliže platí

$$P(Y \in F) = \int_F f(x) d\Pi(x), \quad F \in \mathcal{N}.$$

Poznámka 1.5. Zřejmě pro $F \in \mathcal{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \Pi(F) = P(Y \in F) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y \in F \mid Y(\mathcal{X}) = n) P(Y(\mathcal{X}) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n(\mathcal{X})}{n!} e^{-\mu(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} \dots \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}[(x_1, \dots, x_n) \in F] \frac{d\mu(x_1)}{\mu(\mathcal{X})} \dots \frac{d\mu(x_n)}{\mu(\mathcal{X})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathcal{X})}}{n!} \int_{\mathcal{X}} \dots \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}[(x_1, \dots, x_n) \in F] d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n). \end{aligned}$$

Příklad 1.1. Nechť $\alpha > 0$ a $B \subset \mathbb{R}^d$ je borelovská množina taková, že $0 < \mu(B) < \infty$. Homogenní Poissonův bodový proces na množině B s konstantní intenzitou α má hustotu

$$f(x) = e^{(1-\alpha)\mu(B)} \alpha^{x(B)}. \quad (1.1)$$

Příklad 1.2. Nyní uvažujme nehomogenní Poissonův proces na množině B s intenzitou $Y(t)$. Příslušná hustota tohoto procesu vzhledem k míře Π je pak rovna [3]

$$f(x) = e^{\mu(B)} \exp\left(-\int_B Y(t) dt\right) \Pi_{x_i \in x} Y(x_i). \quad (1.2)$$

1.3 Coxův bodový proces

Definice 1.10. Nechť Λ je σ -konečná difuzní náhodná míra na \mathbb{R}^d . *Coxův bodový proces s řídicí mírou* Λ je definován jako bodový proces, který je podmíněně při $\Lambda = \mu$ Poissonův proces s mírou intenzity μ .

Jedná se o tzv. *dvojně stochastický proces*.

Existuje-li hustota Y náhodné míry Λ vzhledem k Lebesgueově míře, pak o Y mluvíme jako o *funkci intenzity*.

Věta 1.3. *Pro Coxův bodový proces platí:*

$$P(X(B) = 0) = \mathbf{E}e^{-\Lambda(B)}, \quad B \in \mathcal{B}_0,$$

$$M(B) = \mathbf{E}\Lambda(B).$$

Coxův proces je naddisperzní.

1.4 Filtrování Coxova bodového procesu

Dále se zabýváme bodovými procesy v \mathbb{R}_+ , které budeme značit jako $X(t) = X([0, t])$.

Nechť $X(t)$, $t \geq 0$ je Coxův bodový proces s náhodnou intenzitou Y .

Úloha *filtrování Coxova bodového procesu* X představuje stanovení podmíněné střední hodnoty

$$\mathbf{E}(Y(T) \mid X(t), t \in [0, T]). \quad (1.3)$$

Definice 1.11. Náhodný proces Z na \mathbb{R}_+ se nazývá *složený Poissonův proces*, je-li $Z = (t_j, z_j)_{j=1,2,\dots}$, kde $0 < t_1 < t_2 < \dots$ jsou body homogenního Poissonova procesu s intenzitou α a z_j jsou kladné skoky v bodech t_j odpovídající realizacím nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin nezávislých na t_j .

Definice 1.12. Je-li $Z = (t_j, z_j)_{j=1,2,\dots}$ složený Poissonův proces, potom

$$Y(t) = Y(0)e^{-\gamma t} + \sum_{0 < t_j \leq \gamma t} z_j e^{t_j - \gamma t}, \quad \gamma > 0, \quad (1.4)$$

se nazývá *Ornstein-Uhlenbeckův proces* (OU proces).

Dále uvažujeme Coxův bodový proces $X(t)$, $t \geq 0$, jehož náhodná intenzita Y je OU proces, tj. podmíněně při daném $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ je X Poissonův nehomogenní bodový proces s funkcí intenzity $Y(t)$, $t \geq 0$. Coxův proces $X(t)$ pozorujeme na intervalu $[0, T]$, $T > 0$.

Náhodná intenzita $Y(t)$, $t \in [0, T]$, je zde určena počáteční hodnotou $Y(0)$ a náhodnou posloupností $\{t_j, z_j\}$ pro taková j , že $t_j \in [0, T]$.

V původně navržené metodě [1] se pro výpočet (1.3) uvažuje $\Delta > 0$ a ekvidistantní časové okamžiky $s_j = j\Delta$, $j = 0, 1, \dots$.

Označme $Y_j = Y(s_j)$ a $X_j = X_{s_j}$ počet bodů procesu X v intervalu $(s_{j-1}, s_j]$. Cílem je výpočet $P(Y_k \leq y_k \mid X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)$ pro dané k .

Využije se bayesovský přístup s tím, že je třeba zabývat se sdruženým podmíněným rozdělením

$$P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_k \leq y_k \mid X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) \quad (1.5)$$

vzhledem k platnosti následujícího lemmatu [2]:

Lemma 1.4. *Existuje-li hustota pravděpodobnosti (1.5) vzhledem ke k -rozměrné Lebesgueově míře, platí pro ni*

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= f(y_0, y_1, \dots, y_k \mid x_1, \dots, x_k) \propto \\
&\propto f(x_1, \dots, x_k \mid y_0, y_1, \dots, y_k) f(y_0, y_1, \dots, y_k) \approx \\
&\approx \prod_{j=1}^k f_1(x_j \mid y_j) \prod_{j=1}^k f_2(y_j \mid y_{j-1}) f(y_0),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

kde f_1 jsou pravděpodobnosti Poissonova rozdělení podmíněného počtu bodů X na daném intervalu při daném průběhu intenzity a f_2 je přechodová hustota Y za dobu Δ . Tvzení lemmatu plyne z definice Coxova bodového procesu X (první součin ve třetím řádku (1.6)) a z vlastností markovského procesu Y (druhý součin).

Poznámka 1.6. \approx znamená, že rovnost platí asymptoticky pro délku intervalu $\Delta \rightarrow 0$, \propto značí rovnost až na multiplikativní konstantu.

V této práci si však podrobněji ukážeme metodu, ve které se pro výpočet (1.3) budeme zabývat hustotou $f(\{t_j, z_j\} \mid X(t), t \in [0, T])$. Opět zvolíme bayesovský přístup. Platí, že

$$f(\{t_j, z_j\} \mid X(t), t \in [0, T]) \propto f(X(t), t \in [0, T] \mid \{t_j, z_j\}) f(\{t_j, z_j\}), \tag{1.7}$$

kde na pravé straně je součin hustoty nehomogenního Poissonova procesu a nepodmíněné hustoty složeného Poissonova procesu.

K realizaci výběru z rozdělení s podmíněnou hustotou (1.7) použijeme metodu Markov Chain Monte Carlo pro bodové procesy, konkrétně Metropolis-Hastingsův algoritmus rození a zániku.

1.5 Markov Chain Monte Carlo (MCMC) metody a Metropolis-Hastingsův algoritmus

Nechť Π je cílové rozdělení na N s hustotou $f(x)$. MCMC metody nám umožňují generovat posloupnost bodových procesů X_0, X_1, \dots s rozděleními P_i , $i = 0, 1, \dots$, tak, aby v jistém smyslu P_i konvergovala k Π .

Např. $\|P_i - \Pi\| \rightarrow 0$ pro $i \rightarrow \infty$, kde $\|\mu\| = \sup_{A \in \mathcal{N}} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{N}} \mu(A)$.

Uvažujme nyní *Metropolis-Hastingsův algoritmus rození a zániku* pro simulaci z nenormované hustoty f vzhledem k Poissonovu procesu s hustotou 1 na množině B , $B \in \mathcal{B}_0$. Algoritmus se v každé iteraci pokouší přidat nebo odebrat 1 bod z původní konfigurace.

Definujme

$$N_f = \{x \in B : x(B) < \infty\}.$$

Nechť pro každé $x \in N_f$ je dána pravděpodobnost $p(x)$, se kterou se v každé iteraci rozhodneme pro přidání bodu ξ k aktuální konfiguraci x , $x \rightarrow x \cup \xi$, a $q_b(x, \cdot)$ je návrhová hustota pro přidání bodu ke konfiguraci x .

S pravděpodobností $1 - p(x)$ navrhujeme odebrání bodu η z konfigurace x , $x \rightarrow x \setminus \eta$. Je-li množina $x = \emptyset$, neodebíráme nic. Pro $x \neq \emptyset$ je dána návrhová hustota $q_d(x, \cdot)$ pro odebrání bodu z konfigurace.

Pravděpodobnost přijetí návrhu na přidání bodu ξ ke konfiguraci x je

$$\alpha_b(x, \varepsilon) = \min\{1, r_b(x, \xi)\},$$

s Metropolis-Hastingsovým poměrem

$$r_b(x, \xi) = \frac{f(x \cup \xi)(1 - p(x \cup \xi))q_d(x \cup \xi, \xi)}{f(x)p(x)q_b(x, \xi)}. \quad (1.8)$$

Pravděpodobnost přijetí návrhu na odebrání bodu η z konfigurace η je

$$\alpha_d(x, \eta) = \min\{1, r_d(x, \eta)\}$$

s Metropolis-Hastingsovým poměrem

$$r_d(x, \eta) = \frac{f(x \setminus \eta)p(x \setminus \eta)q_b(x \setminus \eta, \eta)}{f(x)(1 - p(x))q_d(x, \eta)}. \quad (1.9)$$

Formálně algoritmus generuje Markovův řetězec V_0, V_1, \dots . Předpokládáme, že V_0 je dáno, např. $V_0 = \emptyset$ nebo V_0 může být realizace Poissonova procesu.

ALGORITMUS 1.1. (*Metropolis-Hastingsův algoritmus rození a zániku*)

Pro $l = 0, 1, \dots$, kde V_l je dáno, generujeme V_{l+1} následujícím způsobem:

1. Vyber $R_l^1 \sim Ro[0, 1]$ a $R_l^2 \sim Ro[0, 1]$ ($Ro[a, b]$ značí rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a, b]$).
2. Jestliže $R_l^1 \leq p(x)$, generuj $\xi_l \sim q_b(x, \cdot)$ a polož

$$V_{l+1} = \begin{cases} x \cup \xi_l & \text{pokud } R_l^2 \leq r_b(x, \xi_l) \\ x & \text{jinak.} \end{cases}$$

3. Jestliže $R_l^1 > p(x)$, potom

- a) pokud $x = \emptyset$, je $V_{l+1} = x$,
- b) jinak generuj $\eta_l \sim q_d(x, \cdot)$ a polož

$$V_{l+1} = \begin{cases} x \setminus \eta_l & \text{pokud } R_l^2 \leq r_d(x, \eta_l) \\ x & \text{jinak.} \end{cases}$$

Kapitola 2

Výpočty pro Coxův bodový proces řízený GOU procesem

Definice 2.1. Náhodný proces Z na \mathbb{R}_+ se nazývá *Poissonův-Gamma proces*, je-li $Z = (t_j, z_j)_{j=1,2,\dots}$, kde $0 < t_1 < t_2 < \dots$ jsou body homogenního Poissonova procesu s intenzitou α a z_j jsou kladné skoky v bodech t_j odpovídající realizacím nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin nezávislých na t_j s exponenciálním rozdělením $Exp(\nu)$, tj. s hustotou $f(x) = \frac{1}{\nu}e^{-\frac{x}{\nu}}$, $x \geq 0$.

Definice 2.2. Je-li $Z = (t_j, z_j)_{j=1,2,\dots}$ Poissonův-Gamma proces, potom

$$Y(t) = Y(0)e^{-\gamma t} + \sum_{0 < t_j \leq \gamma t} z_j e^{t_j - \gamma t}, \quad \gamma > 0, \quad (2.1)$$

se nazývá *Gamma Ornstein-Uhlenbeckův proces* (GOU proces).

Jednorozměrná rozdělení tohoto stacionárního procesu jsou gamma s parametry (ν, α) , tj. rozdělení s hustotou $f(x) = x^{\alpha-1} \frac{\exp(-\frac{x}{\nu})}{\nu^\alpha \Gamma(\alpha)}$, $x \geq 0$.

V této práci se dále budeme zabývat výpočtem (1.7) pro Poissonův-Gamma proces.

2.1 Výpočet podmíněné hustoty

Jestliže $Y(0)$ má Gamma rozdělení s parametry ν, α , potom je proces $Y(t)$ stacionární, tedy i Coxův bodový proces $X(t)$ je stacionární.

Nepodmíněná hustota v (1.7) je

$$f(\{t_j, z_j\}) = e^{(1-\alpha)T} \alpha^n \nu^{-n} \exp\left(-\nu^{-1} \sum_{j=1}^n z_j\right), \quad (2.2)$$

kde n je počet bodů t_j na intervalu $[0, T]$, viz (1.1).

Označme τ_1, \dots, τ_m body realizace Coxova procesu $X(t)$, $t \in [0, T]$, potom z (1.2) dostaneme, že

$$f(X(t), t \in [0, T] \mid \{t_j, z_j\}) = e^T \exp\left(-\int_0^T Y(t)dt\right) \prod_{j=1}^m Y(\tau_j). \quad (2.3)$$

V (1.7) tedy dostaneme

$$f(\{t_j, z_j\} \mid X(t), t \in [0, T]) \propto \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n \exp\left(-\nu^{-1} \sum_{j=1}^n z_j - \int_0^T Y(t)dt\right) \prod_{j=1}^m Y(\tau_j). \quad (2.4)$$

Spočítejme nyní $\int_0^T Y(t)dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^T Y(t)dt &= \int_0^T \left(Y(0)e^{-\gamma t} + \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq t} z_j e^{t_j - \gamma t} \right) dt = \\ &= \int_0^T Y(0)e^{-\gamma t} dt + \int_0^T \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq t} z_j e^{t_j - \gamma t} dt = \\ &= -\frac{Y(0)}{\gamma} (e^{-\gamma T} - 1) + \int_0^T \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq t} z_j e^{t_j - \gamma t} dt = \\ &= -\frac{Y(0)}{\gamma} (e^{-\gamma T} - 1) + \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq T} \frac{z_j (1 - e^{t_j - \gamma T})}{\gamma} \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} f(\{t_j, z_j\} \mid X(t), t \in [0, T]) &\propto \\ &\propto \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n \exp\left(-\nu^{-1} \sum_{j=1}^n z_j\right) \cdot \\ &\cdot \exp\left(\frac{Y(0)}{\gamma} (e^{-\gamma T} - 1) - \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq T} \frac{z_j (1 - e^{t_j - \gamma T})}{\gamma}\right) \prod_{j=1}^m Y(\tau_j). \quad (2.5) \end{aligned}$$

2.2 Algoritmus

Nechť počáteční konfigurace obsahuje n uspořádaných dvojic $\{t_j, z_j\}$, $j = 1, \dots, n$.

Označme $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} = \{t_j, z_j\}_{j=1, \dots, n}$.

Návrhová hustota pro přidání bodu ke konfiguraci je rovnoměrná, $q_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \cdot) = \frac{1}{T\gamma}$.

Návrhové rozdělení pro ubrání bodu z konfigurace bude také rovnoměrné,

$$q_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \cdot) = \frac{1}{n}.$$

Pravděpodobnost, se kterou se rozhodneme pro přidání bodu, zvolíme nezávislou na konfiguraci a rovnu $p = \frac{1}{2}$.

V každé iteraci s pravděpodobností p navrhujeme přidání bodu $\{t_{n+1}, z_{n+1}\}$,
 $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \cup \{t_{n+1}, z_{n+1}\}$.

Návrh přijmeme s pravděpodobností

$$\alpha_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\}) = \min\{1, r_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\})\},$$

kde $r_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\})$ je Metropolis-Hastingsův poměr.

S pravděpodobností $1 - p = \frac{1}{2}$ pak navrhujeme odebrání bodu $\{t_k, z_k\}$ z $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}$,
 $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \setminus \{t_k, z_k\}$.

Je-li $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}$ prázdná množina, neodebíráme nic.

Návrh přijmeme s pravděpodobností

$$\alpha_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_k, z_k\}) = \min\{1, r_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_k, z_k\})\},$$

kde $r_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_k, z_k\})$ je Metropolis-Hastingsův poměr.

ALGORITMUS 2.1. (*Metropolis-Hastingsův algoritmus rození a zániku*)

Algoritmus generuje markovský řetězec V_0, V_1, \dots , kde V_0 je dáno. Předpokládejme, že $V_0 = \{t_j, z_j\}_{j=1, \dots, n}$, kde $t_j \sim Ro[0, \gamma T]$ a $z_j \sim Exp(\nu)$. $Ro[0, \gamma T]$ značí rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \gamma T]$, $Exp(\nu)$ je exponenciální rozdělení s parametrem ν .

Pro $l = 0, 1, \dots, M$, kde $V_l = \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}$ je dáno, generujeme V_{l+1} následujícím způsobem:

1. Vyber $R_l^1 \sim Ro[0, 1]$ a $R_l^2 \sim Ro[0, 1]$.
2. Jestliže $R_l^1 \leq \frac{1}{2}$, generuj $t_l \sim Ro[0, \gamma T]$, $z_l \sim Exp(\nu)$ a polož

$$V_{l+1} = \begin{cases} \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \cup \{t_l, z_l\} & \text{pokud } R_l^2 \leq r_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_l, z_l\}) \\ \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

3. Jestliže $R_l^1 > \frac{1}{2}$, potom
 - a) pokud $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} = \emptyset$, je $V_{l+1} = \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}$,
 - b) jinak generuj rovnoměrně náhodný index k z množiny $\{1, \dots, n\}$, kde n je počet bodů množiny $\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}$ a polož

$$V_{l+1} = \begin{cases} \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \setminus \{t_k, z_k\} & \text{pokud } R_l^2 \leq r_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_k, z_k\}) \\ \{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

4. Pokud $l < M$, jdi na 1.

2.3 Výpočet Metropolis-Hastingsových poměrů

Spočítejme nyní Metropolis-Hastingsovy poměry pro výše popsany algoritmus.

Metropolis-Hastingsův poměr $r_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\})$ pro přidání bodu je:

$$\begin{aligned}
 r_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\}) &= \\
 &= \frac{f(\{t_j, z_j\}_{j=1, \dots, n+1} \mid X(t), t \leq T) q_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\} \cup \{t_{n+1}, z_{n+1}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\})(1-p)}{f(\{t_j, z_j\}_{j=1, \dots, n} \mid X(t), t \leq T) q_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\}) p} \\
 &= \frac{\gamma T \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{n+1} \exp\left(-\nu^{-1} \sum_{j=1}^{n+1} z_j\right) \exp\left[\frac{Y(0)}{\gamma} (e^{-\gamma T} - 1)\right]}{(n+1) \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n \exp\left(-\nu^{-1} \sum_{j=1}^n z_j\right) \exp\left[\frac{Y(0)}{\gamma} (e^{-\gamma T} - 1)\right]} \cdot \\
 &= \frac{\exp\left[-\sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq T} \frac{z_j(1-e^{t_j-\gamma T})}{\gamma} - \frac{z_{n+1}(1-e^{t_{n+1}-\gamma T})}{\gamma}\right] \prod_{j=1}^m Y_{n+1}(\tau_j)}{\exp\left[-\sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq T} \frac{z_j(1-e^{t_j-\gamma T})}{\gamma}\right] \prod_{j=1}^m Y_n(\tau_j)},
 \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^m \frac{Y_{n+1}(\tau_j)}{Y_n(\tau_j)} &= \prod_{j=1}^m \frac{Y(0)e^{-\gamma\tau_j} + \sum_{i: \frac{t_i}{\gamma} \leq \tau_j} z_i e^{t_i-\gamma\tau_j} + z_{n+1} e^{t_{n+1}-\gamma\tau_j} \mathbb{I}\left[\frac{t_{n+1}}{\gamma} \leq \tau_j\right]}{Y(0)e^{-\gamma\tau_j} + \sum_{i: \frac{t_i}{\gamma} \leq \tau_j} z_i e^{t_i-\gamma\tau_j}}, \\
 \frac{Y_{n+1}(\tau_j)}{Y_n(\tau_j)} &= 1 \Leftrightarrow t_{n+1} > \gamma\tau_j, \quad j = 1, \dots, m,
 \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
 r_b(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_{n+1}, z_{n+1}\}) &= \frac{\gamma T}{(n+1)} \frac{\alpha}{\nu} \exp(-\nu^{-1} z_{n+1}) \cdot \\
 &\quad \cdot \exp\left[-\frac{z_{n+1}(1-e^{t_{n+1}-\gamma T})}{\gamma}\right] \prod_{j=1}^m \frac{Y_{n+1}(\tau_j)}{Y_n(\tau_j)}.
 \end{aligned}$$

Metropolis-Hastingsův poměr $r_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_k, z_k\})$ pro ubrání bodu je:

$$r_d(\{\mathbf{t}, \mathbf{z}\}, \{t_k, z_k\}) = \frac{n}{\gamma T} \frac{\nu}{\alpha} \exp(\nu^{-1} z_k) \exp\left[\frac{z_k(1-e^{t_k-\gamma T})}{\gamma}\right] \prod_{j=1}^m \frac{Y_{n-1}(\tau_j)}{Y_n(\tau_j)},$$

kde

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^m \frac{Y_{n-1}(\tau_j)}{Y_n(\tau_j)} &= \prod_{j=1}^m \frac{Y(0)e^{-\gamma\tau_j} + \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq \tau_j} z_j e^{t_j-\gamma\tau_j} - z_k e^{t_k-\gamma\tau_j} \mathbb{I}\left[\frac{t_k}{\gamma} \leq \tau_j\right]}{Y(0)e^{-\gamma\tau_j} + \sum_{j: \frac{t_j}{\gamma} \leq \tau_j} z_j e^{t_j-\gamma\tau_j}}, \\
 \frac{Y_{n-1}(\tau_j)}{Y_n(\tau_j)} &= 1 \Leftrightarrow t_k > \gamma\tau_j, \quad j = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Kapitola 3

Numerické výpočty

V následující kapitole se zabýváme popisem obsluhy programu pro simulaci Coxova bodového procesu $X(t)$ s funkcí intenzity $Y(t)$ a programu, který pomocí Metropolis-Hastingsova algoritmu rození a zániku simuluje Markovův řetězec se stacionárním rozdělením (1.7).

Pro odlišení značíme nepodmíněnou intenzitu jako $Y(t)$ a podmíněnou intenzitu $(Y(t)|X(t), t \leq T)$ získanou z rozdělení (1.7) jako $Y_p(t)$.

Dále jsou pak popsány numerické výsledky ve vztahu k zadané úloze filtrování.

3.1 Popis programů

V *Programu I* (viz příloha soubor Program.I.R) simulujeme Coxův bodový proces $X(t)$ s náhodnou intenzitou $Y(t)$ podle následujícího algoritmu:

ALGORITMUS 3.1. (*Simulace Coxova bodového procesu*)

1. Simulace homogenního Poissonova procesu na intervalu $[0, \gamma T]$ s intenzitou α :
 - a) Vyber $k \sim Po(\gamma T \alpha)$, kde $Po(\gamma T \alpha)$ značí Poissonovo rozdělení s intenzitou $\gamma T \alpha$.
 - b) Generuj k bodů rovnoměrně na intervalu $[0, \gamma T]$.
2. Každému bodu přiřadíme kótu - realizaci exponenciálního rozdělení s parametrem ν ; dvojici (bod, kóta) označíme jako (t_j, z_j) .
3. Realizace řídicí intenzity Coxova procesu:

$$Y(t) = Y(0)e^{-\gamma t} + \sum_{0 < t_j \leq \gamma t} z_j e^{t_j - \gamma t}, \quad \gamma > 0, \quad t \in [0, T].$$

4. Najdeme $B = \max_{0 \leq t \leq T} Y(t)$.

5. Realizace Coxova procesu:

Vyber $m \sim Po(BT)$, dále generuj m rovnoměrně rozdělených bodů na intervalu $[0, T]$. Každý bod τ ponecháme s pravděpodobností $\frac{Y(\tau)}{B}$. Dostáváme body Coxova bodového procesu $X(t)$: τ_1, \dots, τ_n , kde $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < T$.

Programy jsou napsány v jazyce R. R je jazyk a prostředí vhodné pro statistické výpočty a grafiku. Je dostupný jako volně šiřitelný software na webové stránce

<http://cran.r-project.org>. Tato stránka obsahuje i informace, jak R nainstalovat.

V menu programu R zvolíme tlačítko **File** a přejdeme na příkaz **Open script**. Zadáme cestu k umístění programu a potom klepneme na tlačítko **Otevřít**.

V zobrazeném souboru můžeme na začátku postupně zvolit parametry $T, \alpha, \nu, \gamma, Y(0)$, které jsou v programu pojmenovány jako $T, alpha, ny, gamma, y0$.

Označíme celý text programu a na horní liště klepneme na ikonu **Run line or selection**, čímž spustíme program.

Výstupem *Programu I* je graf funkce intenzity $Y(t)$ Coxova bodového procesu $X(t)$ a body Coxova procesu τ_1, \dots, τ_n .

V *Programu II* (viz příloha soubor Program.II.R) zadáváme jako vstupní parametr počet iterací (*niter*). Další vstupní parametry jsou stejné jako v Programu I. Není třeba je znovu zadávat.

Výstupem programu je řetězec bodových realizací $(t_j, z_j)_l, l = 0, 1, \dots, M$, podmíněný realizací Coxova procesu z Programu I, z jehož iterací konstruujeme podmíněnou intenzitu $Y_p(t), t \in [0, T]$, a sledujeme průběh posloupnosti $Y_p^{(l)}(T), l = 0, 1, \dots, M$. Dalšími výstupy jsou histogram hodnot $Y_p^{(l)}(T)$ a autokorelační funkce posloupnosti $Y_p^{(l)}(T)$. Každý graf se zobrazí v samostatném grafickém okně. Jednotlivá okna můžeme zobrazovat prostřednictvím tlačítka **Windows** v menu.

Pro lepší přehlednost vykreslujeme průběh $Y_p^{(l)}(T)$ jen pro hodnoty každé desáté iterace a počítáme $\overline{Y_p(T)} = \frac{10}{M} \sum_r Y_p^{(10r)}(T)$, kde M je celkový počet iterací. Na vodorovné ose je však vyznačen skutečný počet iterací. Oba další grafy jsou také znázorněny pro hodnoty v každé desáté iteraci.

3.2 Numerické výsledky a grafy

Jako vstupní parametry pro simulaci Coxova bodového procesu v Programu I jsme volili $T = 10, Y(0) = 1$. Jinou možnou volbou je např. $Y(0) = \alpha\nu$, což je střední hodnota příslušného gamma rozdělení. Pro ostatní parametry α, ν, γ jsme zvolili vždy dvě různé hodnoty a provedli jsme simulaci pro všechny možné kombinace těchto hodnot.

Počet iterací v Programu II jsme nastavili na 10000. Vstupními parametry jsou parametry z Programu I. Hodnotu $Y(0)$ navrhuje v každé iteraci z rozdělení

$\Gamma(\nu, \alpha)$, tj. z rozdělení s hustotou $f(x) = x^{\alpha-1} \frac{\exp(-\frac{x}{\nu})}{\nu^\alpha \Gamma(\alpha)}, x \geq 0$.

Pro každou kombinaci parametrů jsme jako výstup získali čtyři grafy.

V grafu a) je vždy zobrazena vstupní realizace náhodné funkce intenzity $Y(t)$ a Coxův bodový proces $X(t)$ (body nad osou x). Zelenou přerušovanou čarou je pak do grafu zakreslena funkce $Y_p^{(M)}(t)$, tedy odhad na základě výsledků z poslední iterace.

V grafu b) je zobrazen průběh posloupnosti hodnot $Y_p^{(l)}(T)$ v jednotlivých iteracích. Pro odstranění vlivu výchozích hodnot je v některých případech nutné na základě průběhu simulace určit tzv. čas zapálení řetězce i_0 („burn-in“). Pro další výpočty pak uvažujeme jen hodnoty realizací získané ze simulace po tomto okamžiku i_0 .

V grafu c) je znázorněn histogram hodnot jednotlivých realizací $Y_p^{(l)}(T)$.

Graf d) je graf autokorelační funkce $r(k)$ posloupnosti $Y_p^{(l)}(T)$.

V tabulce 3.1 jsou zaznamenány 95% intervaly spolehlivosti realizací $Y_p^{(l)}(T)$ pro jednotlivé obrázky a průměrná hodnota $\overline{Y_p(T)}$. Krajní body intervalu spolehlivosti jsme získali jako $(0.025 \frac{M}{10})$ -tou a $(0.975 \frac{M}{10})$ -tou hodnotu z uspořádané posloupnosti $\{Y_p^{(10r)}(T)\}_{r=1,2,\dots,\frac{M}{10}}$.

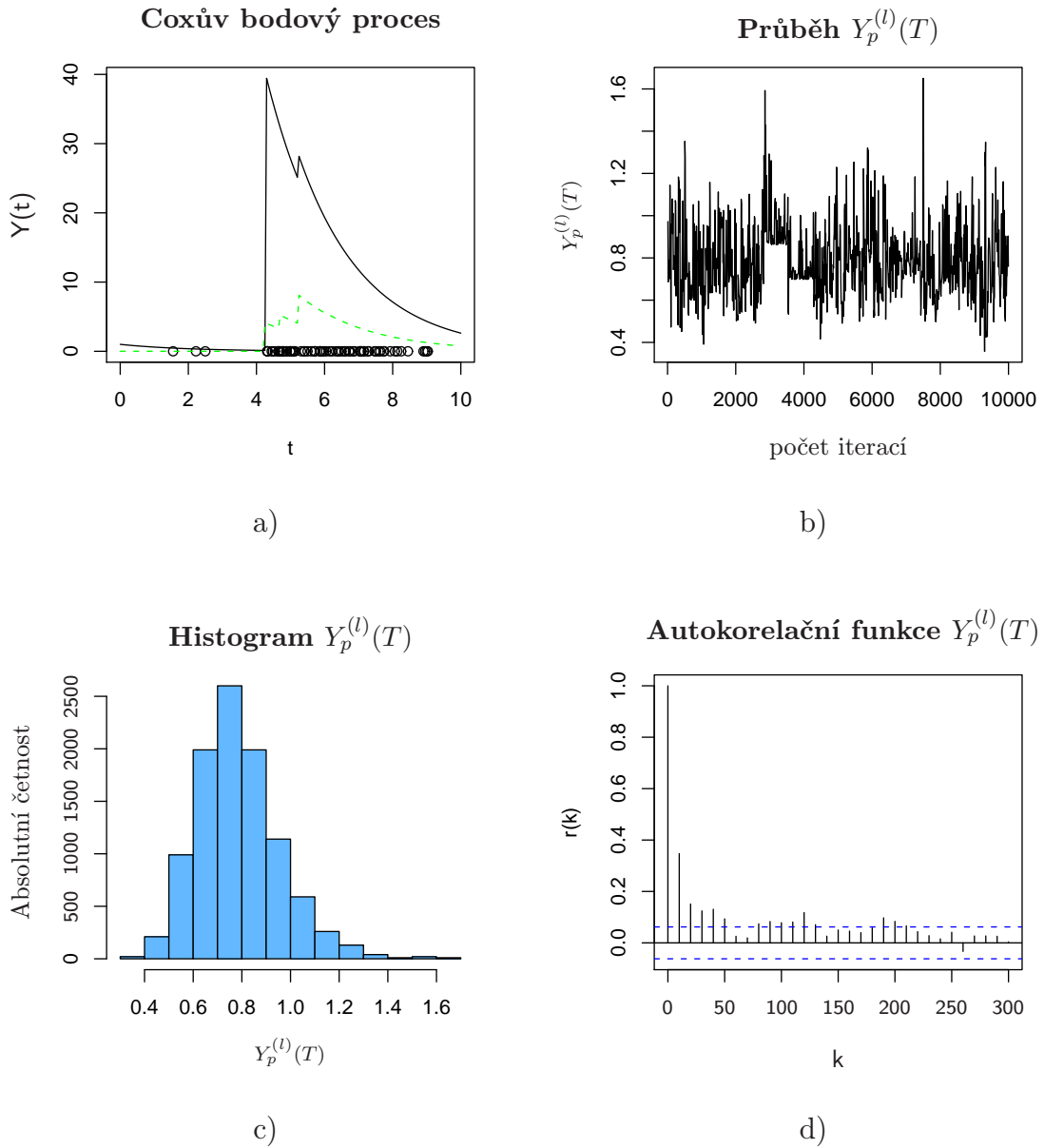
obrázek č.	95% interval spolehlivosti	$\overline{Y_p(T)}$
3.1	(0.501;1.184)	0.786
3.2	(0.002;0.166)	0.035
3.3	(0.011;0.541)	0.162
3.4	$(8 \cdot 10^{-5}; 0.595)$	0.067
3.5	(1.540;2.960)	2.122
3.6	(0.399;1.624)	0.881
3.7	(0.919;4.526)	2.452
3.8	(0.317;2.636)	1.020

Tabulka 3.1: 95% intervaly spolehlivosti

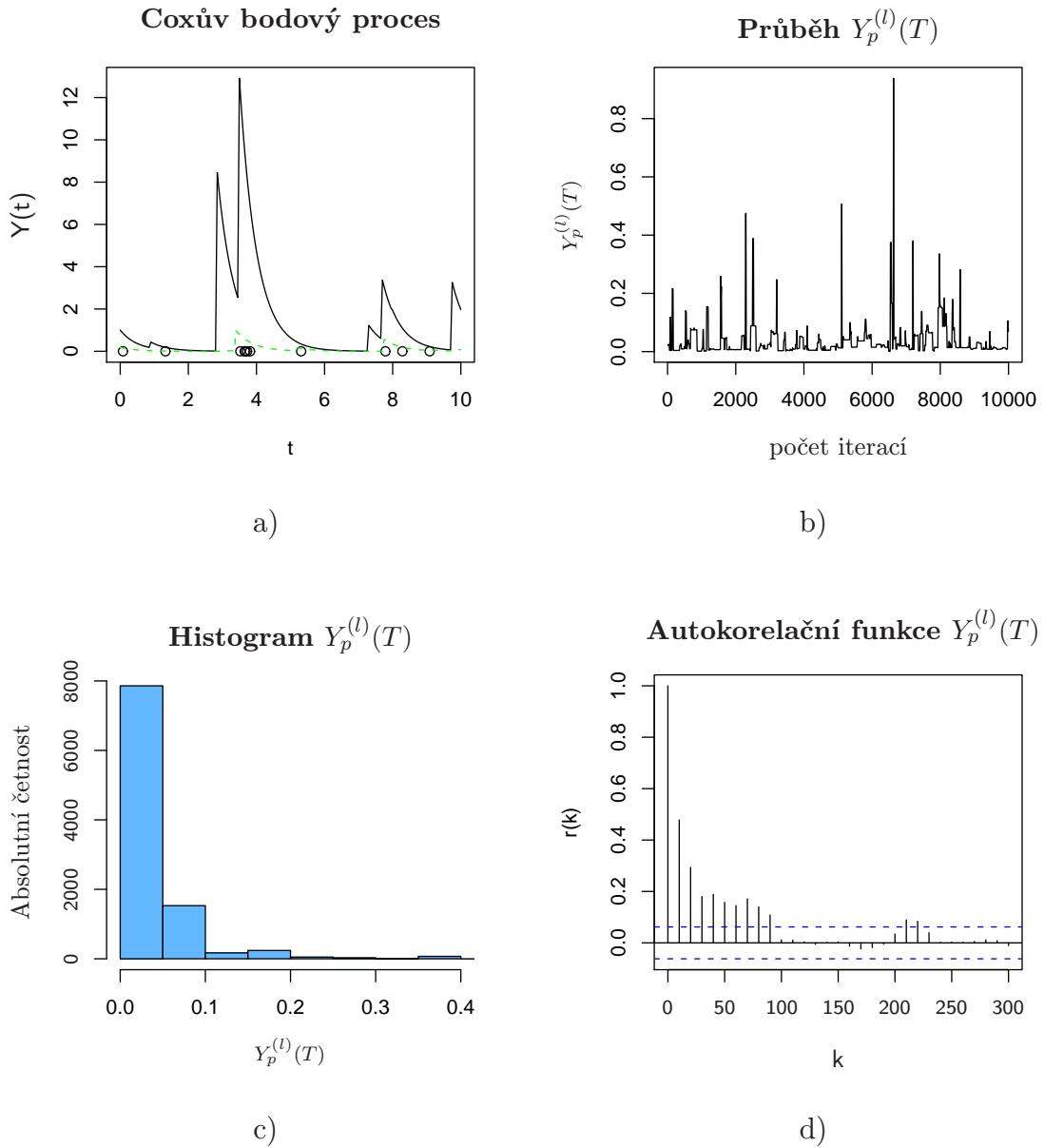
Obrázky 3.9 a 3.10 jsou výstupem programů pro počet iterací $M = 100000$. Příslušné 95% intervaly spolehlivosti realizací $Y_p^{(l)}(T)$ a průměrné hodnoty $\overline{Y_p(T)}$ jsou uvedeny v tabulce 3.2.

obrázek č.	95% interval spolehlivosti	$\overline{Y_p(T)}$
3.9	(0.367;1.123)	0.708
3.10	(0.036;0.331)	0.136

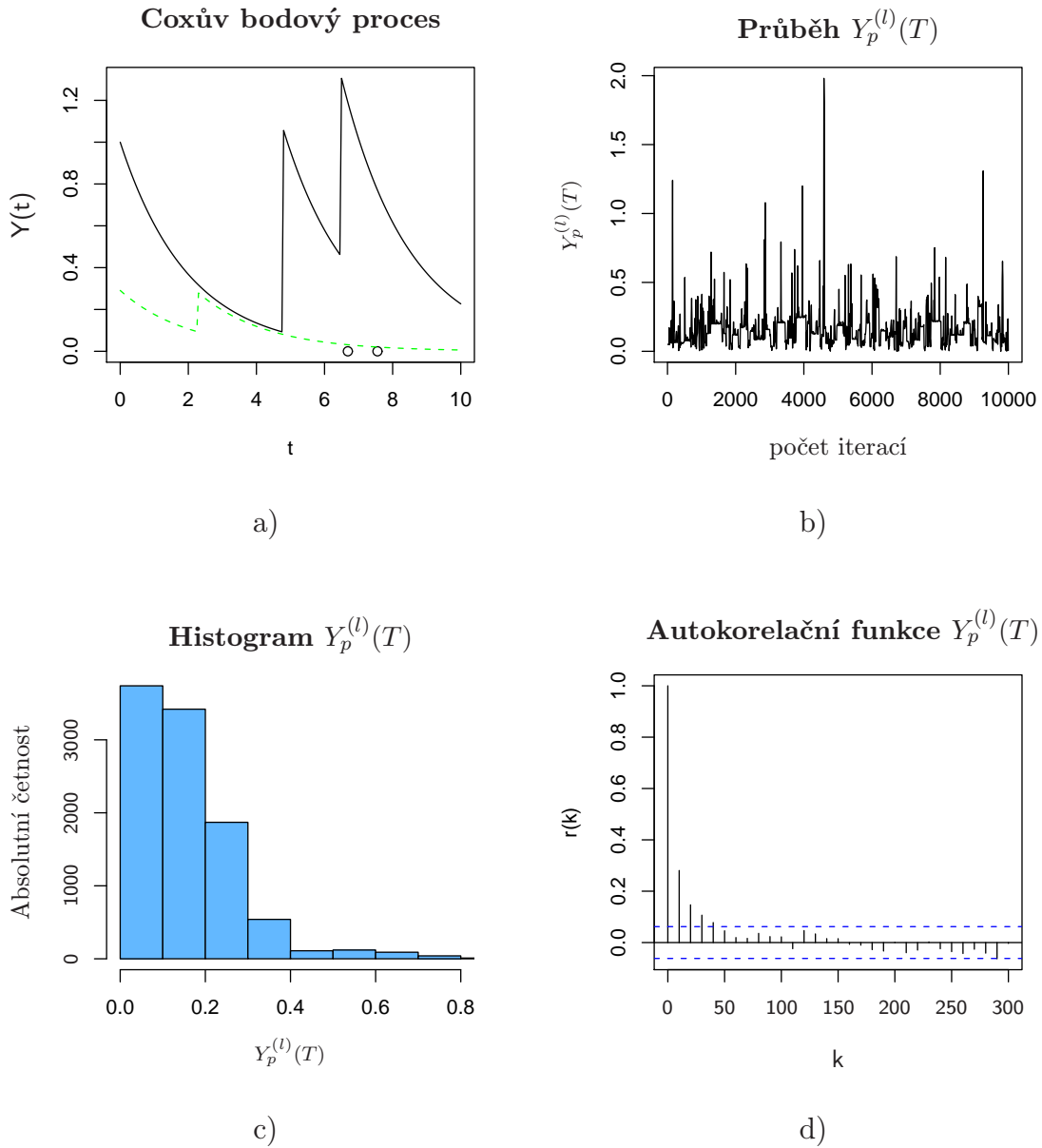
Tabulka 3.2: 95% intervaly spolehlivosti



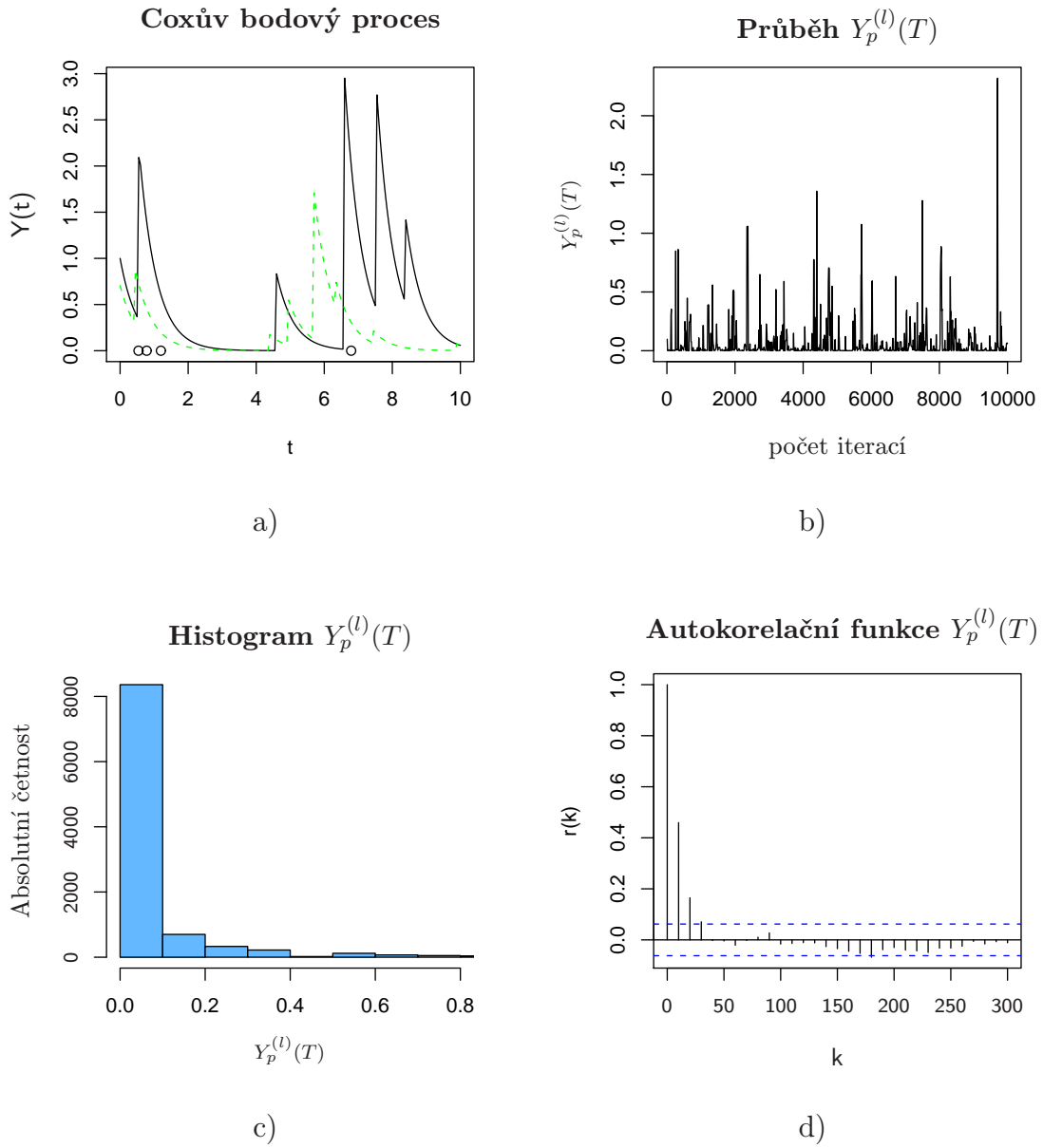
Obrázek 3.1: Realizace pro parametry $\alpha = 0.4$, $\nu = 5$, $\gamma = 0.5$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.24, $\overline{Y_p^{(l)}(T)} = 0.786$.



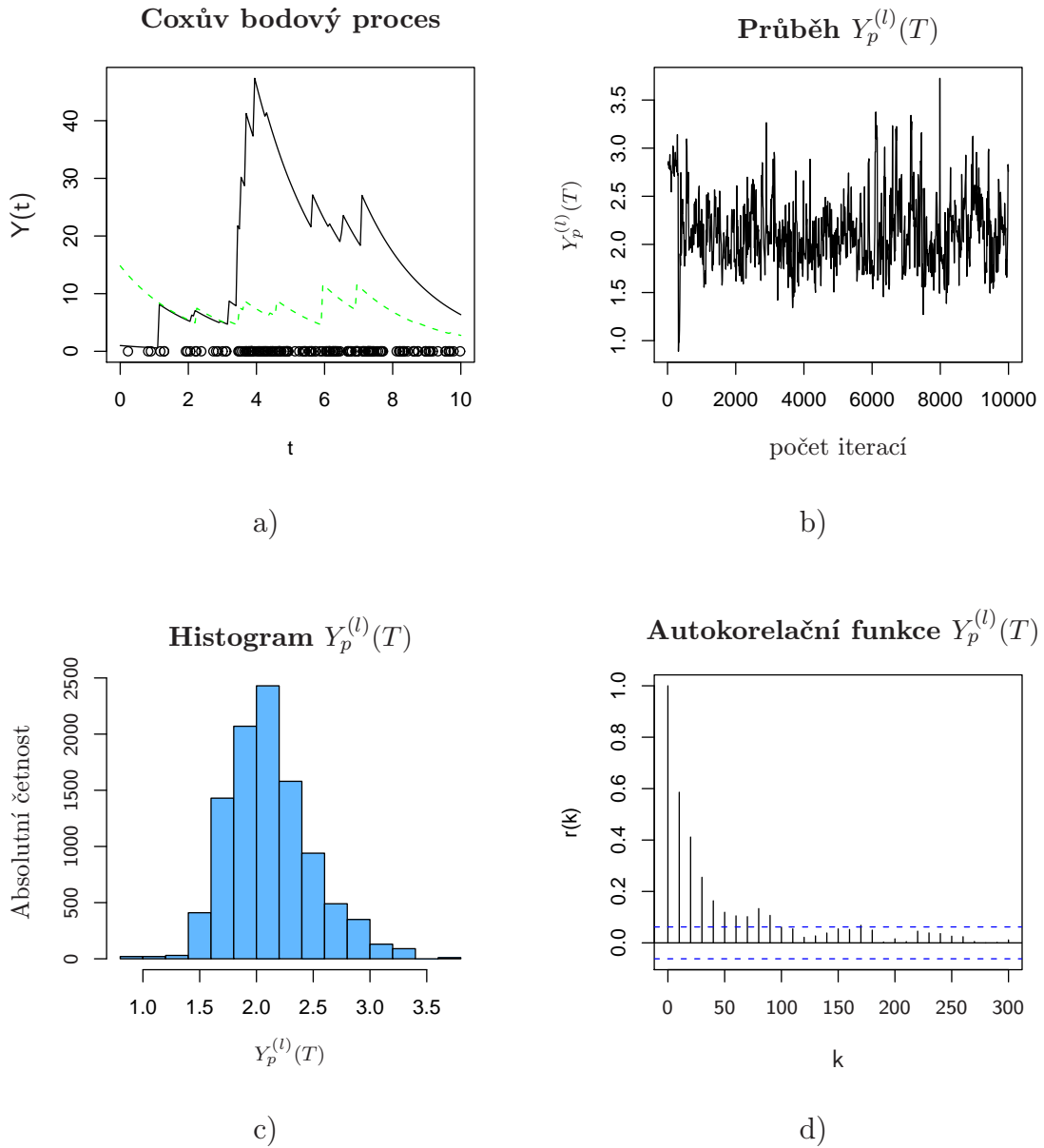
Obrázek 3.2: Realizace pro parametry $\alpha = 0.4$, $\nu = 5$, $\gamma = 2$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.14, $\overline{Y_p(T)} = 0.035$.



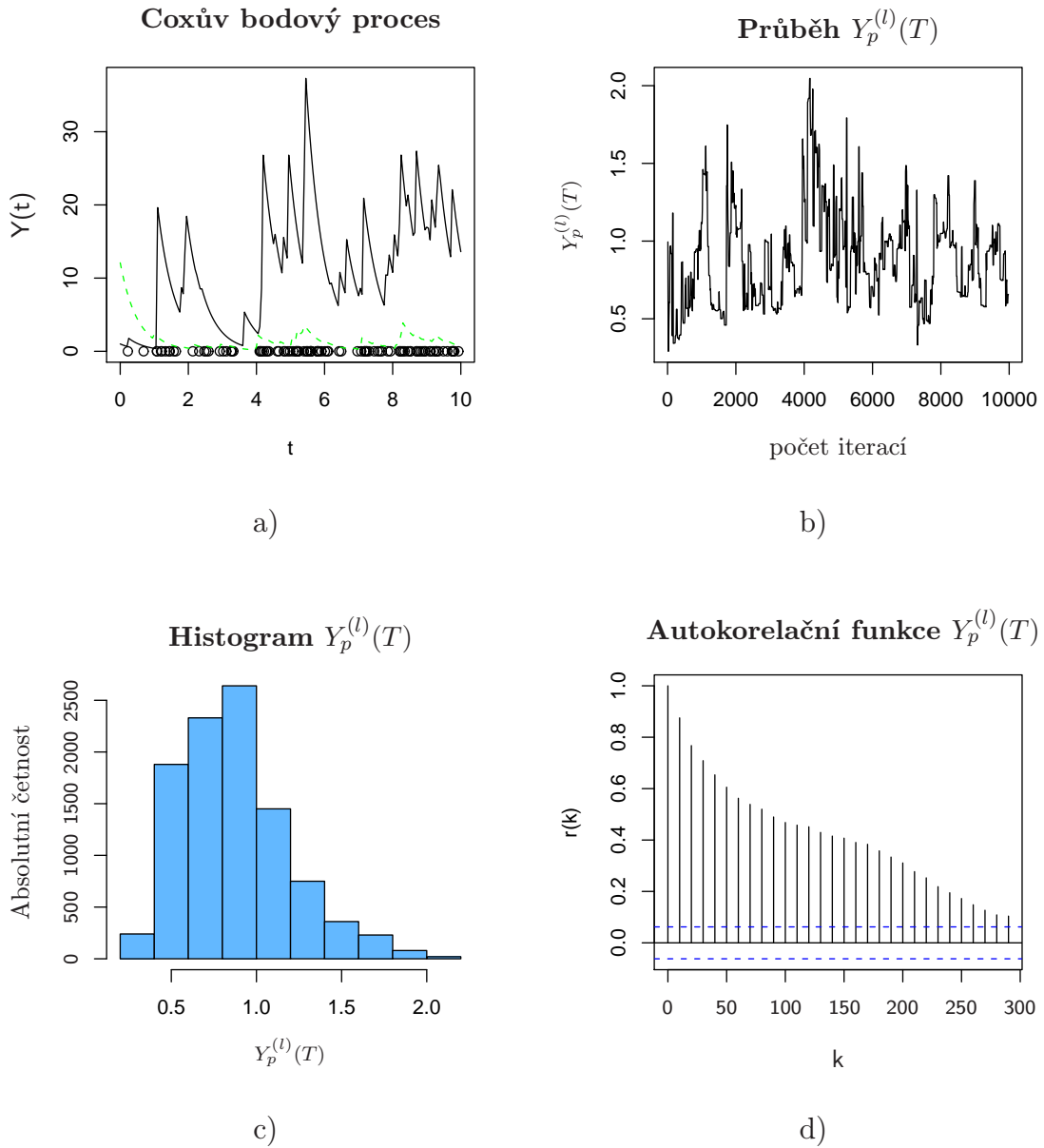
Obrázek 3.3: Realizace pro parametry $\alpha = 0.4$, $\nu = 1$, $\gamma = 0.5$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.28, $\overline{Y_p(T)} = 0.162$.



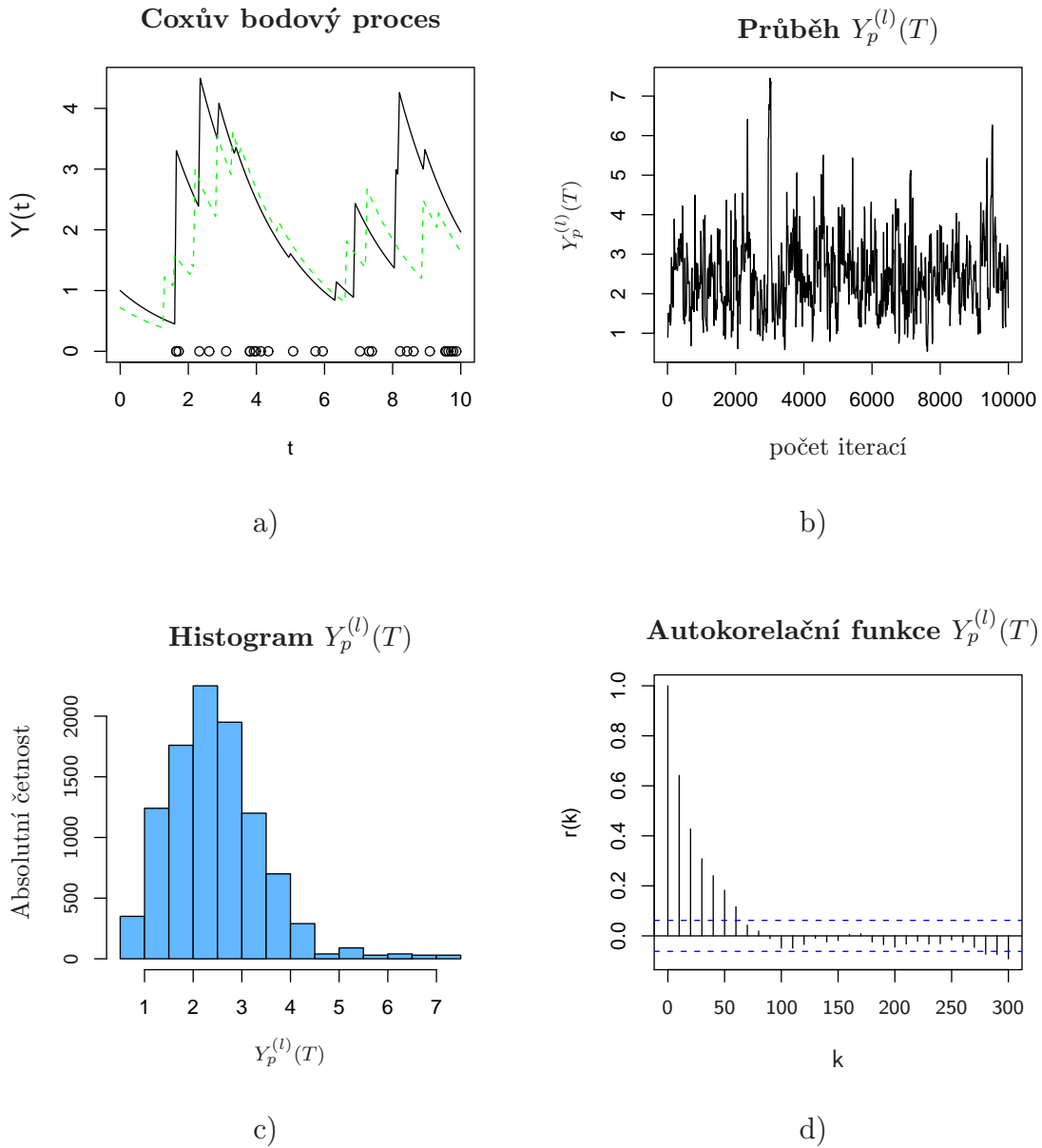
Obrázek 3.4: Realizace pro parametry $\alpha = 0.4$, $\nu = 1$, $\gamma = 2$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.54, $\overline{Y_p(T)} = 0.067$.



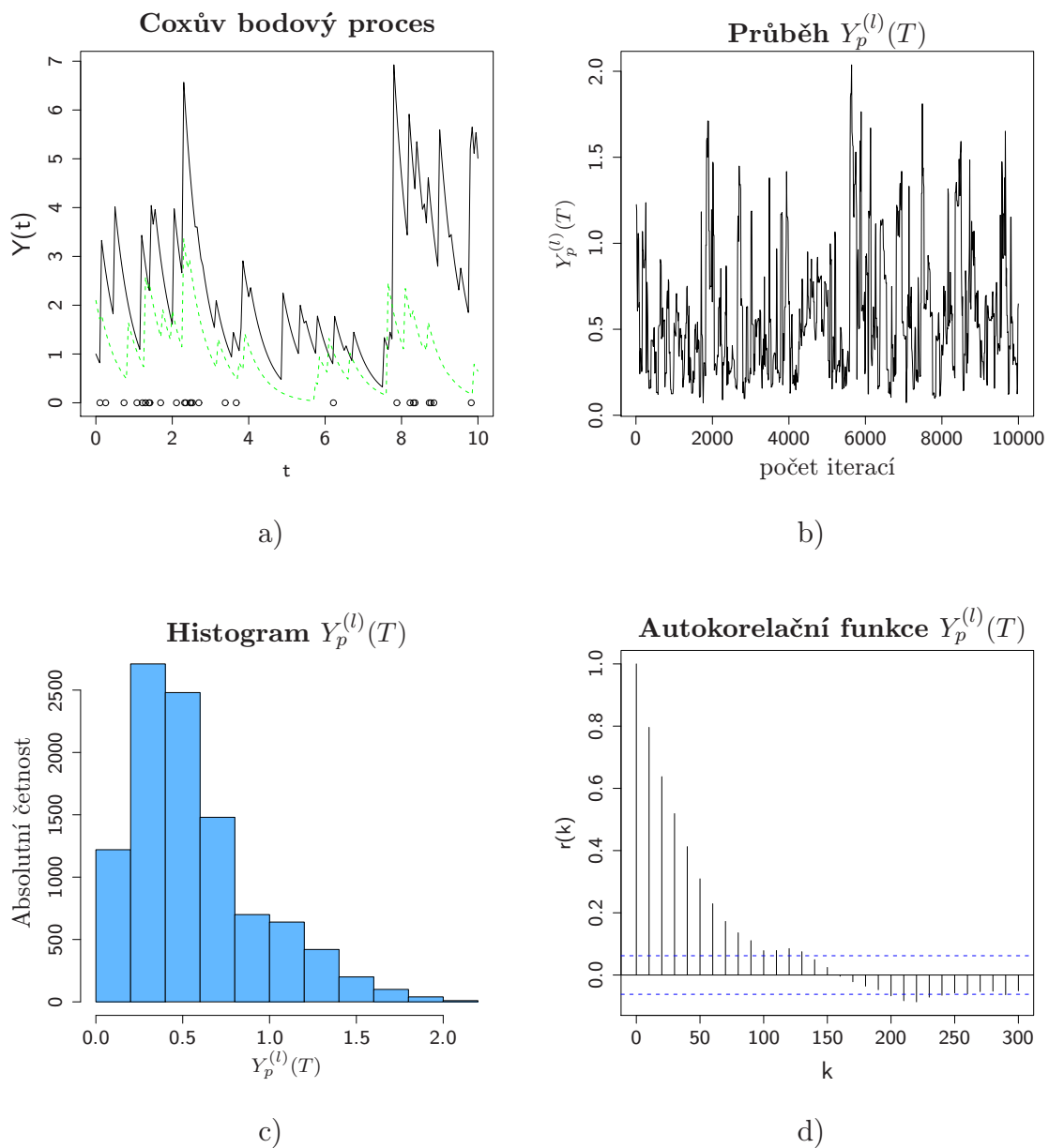
Obrázek 3.5: Realizace pro parametry $\alpha = 2$, $\nu = 5$, $\gamma = 0.5$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.32, $\overline{Y_p(T)} = 2.122$.



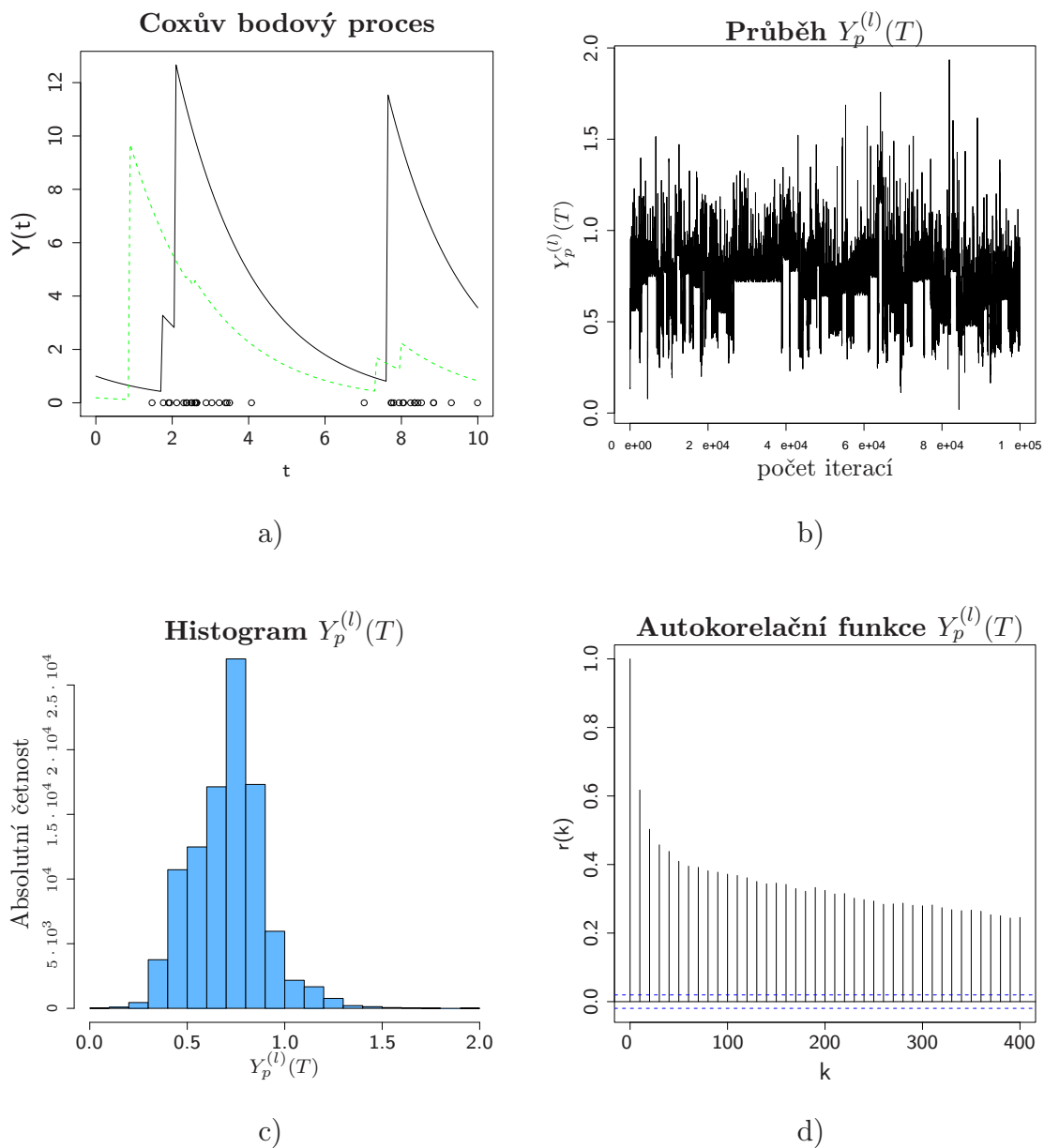
Obrázek 3.6: Realizace pro parametry $\alpha = 2$, $\nu = 5$, $\gamma = 2$, „burn-in“ $i_0 = 2$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.24, $\overline{Y_p(T)} = 0.881$.



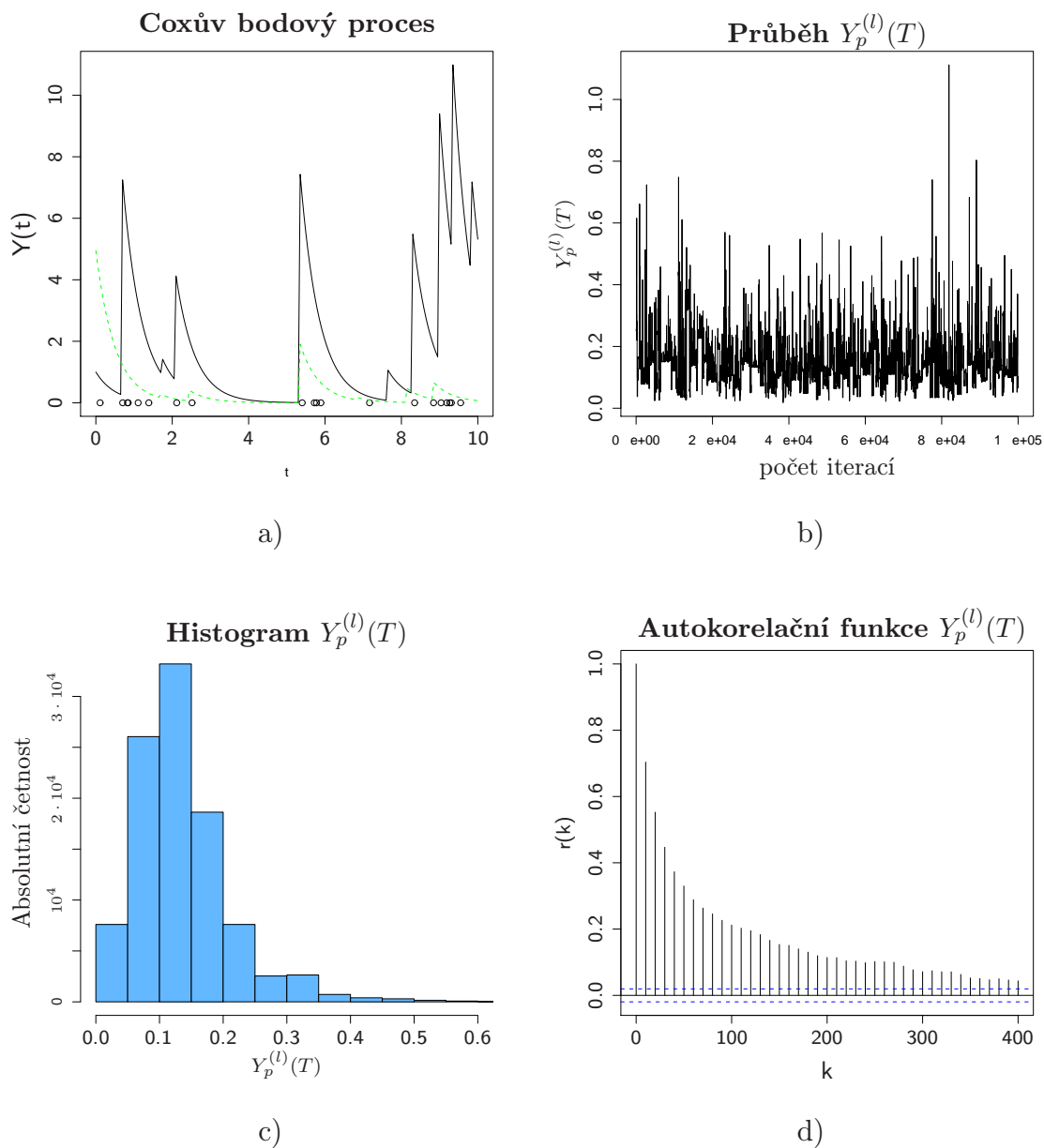
Obrázek 3.7: Realizace pro parametry $\alpha = 2, \nu = 1, \gamma = 0.5$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.66, $\overline{Y_p(T)} = 2.452$.



Obrázek 3.8: Realizace pro parametry $\alpha = 2$, $\nu = 1$, $\gamma = 2$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.64, $\overline{Y_p(T)} = 1.020$.



Obrázek 3.9: Realizace pro parametry $\alpha = 0.4$, $\nu = 5$, $\gamma = 0.5$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.22, $\overline{Y_p(T)} = 0.708$.



Obrázek 3.10: Realizace pro parametry $\alpha = 0.4$, $\nu = 5$, $\gamma = 2$. Pravděpodobnost přijetí návrhu je 0.16, $\overline{Y_p(T)} = 0.136$.

3.3 Závěr

Odhad $\mathbf{E}(Y(T) | X(t), t \leq T)$ jsme získali jako průměr $\overline{Y_p(T)}$. Příslušné hodnoty jsou uvedené v tabulkách 3.1 a 3.2. Pokud se rozdělení hodnot $Y_p^{(l)}(T)$ blíží normálnímu rozdělení, lze 95% interval spolehlivosti interpretovat tradičním způsobem (průměr $\pm 2 \times$ směrodatná odchylka). Např. interval spolehlivosti k obr. 3.9 je téměř symetrický kolem průměru $\overline{Y_p(T)}$, zatímco interval spolehlivosti k obr. 3.4 je výrazně asymetrický.

Autokorelační funkce $r(k)$ nám říká, po kolika iteracích lze simulované realizace považovat přibližně za nezávislé (hodnota blížící se nule). Např. na obr. 3.4 je hodnota autokorelační funkce již po více než třiceti iteracích blízka nule, ale na obr. 3.9 klesá funkce velmi pomalu, realizace tedy nemůžeme ani po čtyřech stech iteracích považovat za nezávislé.

Průběh $Y_p^{(l)}(T)$ ovlivňují kombinace všech tří parametrů α, ν a γ , od nich odvozená vstupní intenzita $Y(t)$ a realizace Coxova procesu $X(t)$.

Rozložení hodnot $Y_p^{(l)}(T)$ můžeme pozorovat v histogramech (grafy c)). Výrazně asymetrické histogramy vznikají zejména tam, kde $Y_p^{(l)}(T)$ nabývá v jednotlivých iteracích převážně hodnoty blízke nule, viz obr. 3.2, 3.4. Může to být způsobeno např. velkou hodnotou parametru γ , v důsledku čehož intenzita po skoku prudce klesá, v kombinaci s malou hodnotou parametru α , která znamená méně skoků.

Literatura

- [1] Beneš V., Lechnerová R., Klebanov L.: Nelineární filtrování Coxových bodových procesů, sborník Robust, 2006 vyjde.
- [2] Brix A., Diggle P. J.: Spatiotemporal prediction for log-Gaussian Cox processes, *J. R. Stat. Soc. Ser. B*: 63: 823 - 841, 2001.
- [3] Møller J., Waagenpeterson R.: Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes, Chapman&Hall/CRC, 2004.
- [4] Snyder D.L.: Filtering and detection for doubly stochastic Poisson proceses, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 18: 91-102, 1972