Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Salač

Hausdorffova dimenze a podmnožiny eukleidovského prostoru

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof.RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program: obecná matematika, matematické struktury

2006

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Jméno Příjmení

Obsah

Název práce: Hausdorffova dimenze a podmnožiny eukleidovského prostoru
Autor: Tomáš Salač
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Prof.RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
e-mail vedoucího: miroslav.husek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Felix Hausdorff svou prací datovanou do roku 1919 o míře a dimenzi navazoval na práce svých současníků jako byli Borel, Lebesque, Carathéodory a další. Jeho definice pojmu dimenze umožnovala množinám přiřadit i neceločíselnou hodnotu. To ilustroval na Cantorově diskontinuu, jehož dimenzi vyčíslil na $\log 2 / \log 3$.

Nicméně pojem Hausdorffovy dimenze zapadl. Uplatnění našel znovu se studiem fraktálů, jehož rozmach můžeme zařadit do doby poměrně nedávné, dejme tomu 70. léta 20. století. Za fraktál se považuje množina s jemnou a nepravidelnou strukturou. To samozrejmě není žádná korektní definice, podle které bychom mohli rozhodnout, zda taková studovaná množina je nebo není. Benoit Mandelbrot charakterizoval fraktál jako množinu, jejíž topologická dimenze je ostře menší než Hausdorffova dimenze. Tato definice na druhou stranu nepokrývá celou řadu objektů, které bychom jinak jako fraktál označili. I přesto toto drobné úskalí se s tímto pojmem setkáváme v mnoha technických nebo přirodovědeckých oborech.

V této práci bych chtěl především ukázat na některé vlastnosti fraktálů, které mohou člověka, který se s nimi dříve nesetkal, překvapit. To bych chtěl ilustrovat na dvou příkladech. Oba souvisí s reprezentací komplexních čísel a v obou hraje důležitou roli pojem stejnopodobnosti.

V první kapitole jsou uvedeny definice a věty, které budu později v textu používat. Jedná se vesměs o základní pojmy, které jsou k nalezení v každé učebnici o míře a integrálu. Já jsem čerpal z knihy The Geometry of Fractal Sets od K.J. Falconera. Všechny věty, které jsou zde bez důkazu uvedeny, byly převzaty právě z této knihy. Ve druhé a třetí kapitole jsou pak uvedeny oba příklady fraktálních množin, které jsem našel v knize Measure, Topology, and Fractal Geometry od Edgara. Mnohé užitečné postřehy a poznámky jsem našel v knihách Fractals everywhere, The Fractals for the Classroom.
Klíčová slova: Stejnopodobnost

Kapitola 1

Tvrzení a definice

Definice a tvrzení

<u>Definice</u>

Nechť $\mathbf{X}$ je jakákoliv množina a $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{X})$. $\mathfrak{M}$ se nazývá *σ-algebra*, splňuje-li následující:

1. $\mathbf{X} \in \mathfrak{M}$.
2. Je-li $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$, pak i $\mathbf{A^c} \in \mathfrak{M}$, kde $\mathbf{A^c}$ značí komplement $\mathbf{A}$ v $\mathbf{X}$.
3. Je-li $\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{A_i}$, kde $\mathbf{A_i} \in \mathfrak{M}$ pro $i = 1, 2, \ldots$, pak i $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}$.

<u>Definice</u>

Nechť $\mathfrak{M}$ je σ-algebra na množině $\mathbf{X}$. *Míra* μ je funkce definovaná na $\mathfrak{M}$ s oborem hodnot v $\langle 0; \infty \rangle$, která splňuje následující:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathbf{A_i})$, kde $\mathbf{A_i}$ je libovolný spočetný soubor disjunktních množin ze σ-algebry $\mathfrak{M}$.

<u>Definice</u>

Vnější míra je funkce definovaná na všech podmnožinách množiny $\mathbf{X}$, která nabývá hodnot z intervalu $\langle 0; \infty \rangle$ a která splňuje následující:

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. $\nu(\mathbf{A}) \leq \nu(\mathbf{A}'); \mathbf{A} \subseteqq \mathbf{A}'$
3. $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{A_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathbf{A_i})$, pro každé $\mathbf{A_i} \in \mathbf{X}$, $i = 1, 2, \ldots$

Definice

Podmnožina $\mathbf{A}$ se nazývá *ν-měřitelná*, jestliže pro každou $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ platí $\nu(\mathbf{E}) = \nu(\mathbf{A} \cap \mathbf{E}) + \nu(\mathbf{E} \setminus \mathbf{A})$.

Věta 1

Buď ν vnější míra na $\mathbf{X}$. Soubor $\mathfrak{N}$ ν-měřitelných množin tvoří σ-algebru a restrikce ν na $\mathfrak{N}$ je míra.

Definice

Řekneme, že vnější míra ν je *regulární* , pokud pro každou podmnožinu $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ existuje ν-měřitelná možina $\mathbf{A}$ tak, že $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{E}$ a $\nu(\mathbf{A}) = \nu(\mathbf{E})$.

Definice

Nechť $(\mathbf{X}, d)$ je metrický prostor. Množiny náležející do nejmenší σ-algebry, která obsahuje všechny uzavřené množiny v $\mathbf{X}$, nazýváme *Borelovy množiny.*

Definice

Nechť $(\mathbf{X}, d)$ je metrický prostor. Vnější míra ν na $\mathbf{X}$ se nazývá *metrická vnější míra*, jestliže $\nu(\mathbf{E} \cup \mathbf{F}) = \nu(\mathbf{E}) + \nu(\mathbf{F})$ pro každé dvě podmnožiny $\mathbf{X}$ takové, že $d(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \inf\{d(x,y); x \in \mathbf{E}, y \in \mathbf{F}\} > 0$.

Definice

Nechť $\mathbf{U}$ je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou d. *Diametr* $\mathbf{U}$ definujeme jako $sup\{d(x,y); x, y \in \mathbf{U}\}$ a značíme $|\mathbf{U}|$. Jestliže $\mathbf{E} \subseteq \bigcup_i \mathbf{U}_i$, $\delta > 0$ a pro každé i platí $0 < |\mathbf{U}_i| \leq \delta$, pak říkáme, že $\{\mathbf{U}_i\}$ je *δ-pokrytí* $\mathbf{E}$.

Nechť $\mathbf{E}$ je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $s > 0$. Pro $\delta > 0$ definujeme

$$\mathcal{H}^s_\delta((E)) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

kde $\{\mathbf{U}_i\}$ je libovolné spočetné δ-pokrytí $\mathbf{E}$.

Nechť dále

$$\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E})$$

Snadno se ověří, že $\mathcal{H}^s$ je vnější metrická míra, a nazývá se *s-dimenzionální Hausdorffova vnější míra*. Restrikce s-dimenzionální Hausdorffovy vnější míry na σ-algebru měřitelných množin je pak Hausdorffova míra a tato σ-algebra obsahuje Borelovy množiny.

$\mathcal{H}^s$ je nerostoucí jako funkce proměnné s. Dále platí, že $\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}) \geq \delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(\mathbf{E})$. Je-li $s < t$ a $0 < \mathcal{H}^t(\mathbf{E})$, pak $\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) = \infty$. Naopak je-li $\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) < \infty$ pak $\mathcal{H}^t(\mathbf{E}) = 0$. To vede k následující definici.

Definice

Nechť $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak *Hausdorffova dimenze* množiny $\mathbf{E}$ $(:= \dim_{\mathcal{H}}(\mathbf{E}))$ je číslo, pro které platí, že $\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) = \infty$ pro $0 \leq s < \dim_{\mathcal{H}}(\mathbf{E})$, $\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) = 0$ pro $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbf{E}) < s < \infty$.

Definice

Je-li $\mathbf{C}$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ tvaru $\mathbf{C} = \langle a_1, b_1) \times \langle a_2, b_2) \times \ldots \times \langle a_n, b_n)$, $a_i < b_i$, pak mluvíme o *n-dimenzionálním bloku* a definujeme jeho objem jako $\mathbf{V}(\mathbf{C}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$.

Pro $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$ pak definujeme její *n-dimenzionální Lebesqueovu vnější míru* jako

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) = \inf \sum_i \mathbf{V}(\mathbf{C_i})$$

kde $\{\mathbf{C}_i\}$ je spočetné pokrytí bloky. Restrikce vnější míry na $\mathcal{L}^n$-měřitelné množiny je *n-dimenzionální Lebesqueova míra*.

Definice

Zobrazení $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá *kontrakce*, pokud splňuje

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x - y|$$

pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$, kde $c < 1$.

Kontrakce, která navíc splňuje, že obraz každé úsečky je úsečka a

$$|\psi(x) - \psi(y)| = c|x - y|$$

budeme nazývat *podobnost (s koeficentem c)*.

Buďte $\psi_1, \ldots, \psi_n$ kontrakce. Množina $\mathbf{E}$ se nazývá *invariatní* pro $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, jestliže $\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^n \psi_i(\mathbf{E})$.

Jsou-li kontrakce navíc podobnosti, $\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) > 0$ pro nějaké s a

$$\mathcal{H}^s(\psi_i(\mathbf{E}) \cap \psi_j(\mathbf{E})) = 0$$

pro $i \neq j$, pak pro $\mathbf{E}$ používáme termín *stejnopodobná* množina.

Definice

Pro $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$ definujeme množinu $[\mathbf{E}]_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{y \in \mathbf{E}} |x - y| \leq \delta\}$. *Hausdorffovu metriku* ϱ definujeme jako $\varrho(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \inf\{\delta : \mathbf{E} \subset [\mathbf{F}]_\delta \quad \& \quad \mathbf{F} \subset [\mathbf{E}]_\delta\}$.

Věta 2

Pro konečnou množinu kontrakcí $\{\psi_i\}_1^m$ na $\mathbb{R}^n$ s koeficienty $r_i < 1$ existuje jediná neprázdná kompaktní množina $\mathbf{E}$, která je pro ně invariatní. Navíc, je-li $\mathbf{F}$ libovolná neprázdná kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$, pak obrazy $\psi^k(\mathbf{F})$ konvergují v Hausdorffově metrice k $\mathbf{E}$ pro $k \to \infty$.

Definice

Nosič $\mathbf{S}$ Borelovské míry μ na $\mathbb{R}^n$ je nejmenší uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$, která splňuje, že pro každou spojitou funkci f na $\mathbb{R}^n$, která je nulová na $\mathbf{S}$, platí, že $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0$.

Věta 3

Ponechme označení z předchozí věty. Pak existuje Borelovská míra μ s nosičem v $\mathbf{E}$ taková, že $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ a že pro každou μ-měřitelnou možinu $\mathbf{F}$ platí

$$\mu(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{m} r_i^s \mu(\psi_i^{-1}(\mathbf{F}))$$

Definice

Říkáme, že kontrakce $\{\psi_i\}_1^m$ splňují *open set condition* pokud existuje omezená otevřená množina $\mathbf{V}$ taková, že $\bigcup_{i=1}^m \psi_i(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{V}$, kde sjednocení je disjunktní.

Věta 4

Nechť $\{\mathbf{V}_i\}$ je soubor disjunktních otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$ takových, že každá $\mathbf{V}_i$ obsahuje kouli o poloměru $c_1\rho$ a je obsažena v kouli o poloměru $c_2\rho$. Pak každá koule o poloměru ρ má neprázdný průnik nejvýše s $(1 + 2c_2)^n c_1^{-n}$ množin $\overline{\mathbf{V}}_i$.

Věta 5

Nechť podobnosti $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ s koeficienty r_i splňují open set condition. Potom Hausdorffova dimenze s příslušné invariatní kompaktní množiny $\mathbf{E}$ splňuje rovnici

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$$

A platí, že $0 < \mathcal{H}^s(\mathbf{E}) < \infty$.

Kapitola 2

Twindragon

V této kapitole se seznámíme s prvním fraktálem. Dříve než ho popíšeme, dokážeme následující tvrzení. V célé této kapitole budeme pracovat se soustavou o základu $b = -1 + i$ a nebude-li řečeno jinak, pak si písmeno b rezervujeme pro toto číslo.

Platí, že každé komplexní číslo má vyjádření ve tvaru

$$\sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^i$$

kde $a_i \in \{0, 1\}, b = -1 + i, N \in \mathbb{N}$.

Nejprve popíšeme čísla tvaru $\sum_{i=0}^{N} a_i b^i$, kde N je libovolné přirozené. Ukážeme, že to jsou právě Gaussova čísla, tedy čísla tvaru $c + di$, kde $c, d \in \mathbb{Z}$.

Čísla b^j pro j=0,1,... ztotožníme s vektory v rovině. Vektor b^{j+1} vznikne z vektoru b^j otočením o $225\,^\circ$ proti směru hodinových ručiček a prodloužení skalárem $\sqrt{2}$. Čísla tvaru $cb^j + dib^j; c, d \in \mathbb{Z}$, tvoří čtvercovou mříž s hranou b^j. Mříž příslušná b^{j+1} vznikne z b^j natočením o $45\,^\circ$ a prodloužením o $\sqrt{2}$. Některé z vrcholů v mříži b^j jsou i vrcholy v mříži b^{j+1}, některé naopak leží ve středu čtverce v mříži b^{j+1}. Je-li číslo násobkem b^j a není násobkem b^{j+1}, pak po přičtení čísla $-b^j$ bude dělitelné b^{j+1}, čemuž odpovídá posun ze středu čtverce do vrcholu v mříži pro b^{j+1}.

Abychom našli vyjádření ve tvaru $\sum_{i=0}^{N} a_i b^i$, budeme postupovat následujícím způsobem. Vezměme libovolné číslo $x_0 = c + di, c, d \in \mathbb{Z}$. Není-li x_0 celočíselným komplexním násobkem $b^1 = -1 + i$ (tedy tvaru $cb + dib$, kde $c, d \in \mathbb{Z}$), pak jím po přičtení $-b^0 = -1$ bude, jak plyne z předchozí úvahy. Je-li dělitelné $-1 + i$, pak ho ponecháme nezměněné. Vzniklé číslo označíme x_1. Stejnou úvahu provedeme pro následující dvojici, tedy pro čísla $-1+i$ a $(-1+i)^2$. Takto v každém kroku zaručíme, že číslo x_k je dělitelné $(-1+i)^k$.

Nyní si již stačí všimnout, že nutně po konečně mnoha krocích se dostaneme do počátku a tím i najdeme hledané vyjádření. Podívejme se na libovonou posloupnost $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+8}$ pro $k \geq 0$. Každá taková posloupnost vznikla složením některých z vektorů b^j pro $j = k, \ldots, k+7$.

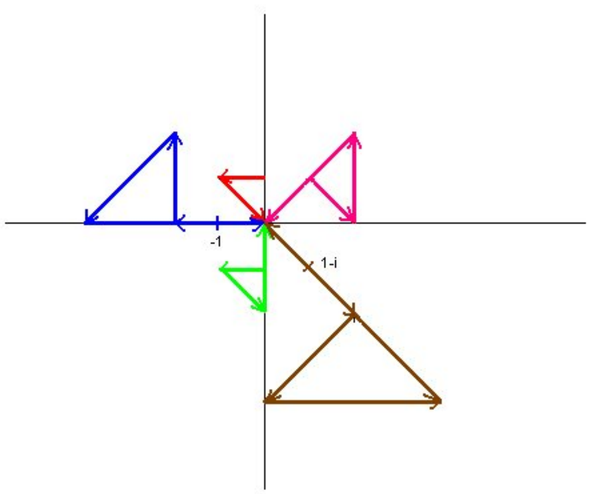
$$\rho_k = |x_{k+8} - x_k| \leq |b^{k+2} + b^{k+4} + b^{k+5} + b^{k+7}| = |b^{k+7}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + ib^{k+7}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8})| =$$

$$= |\frac{11}{8}b^{k+7} + \frac{3}{8}ib^{k+7}| < 2.1|b|^{k+7} < 1.5|b|^{k+8}$$

$$|x_{8l} - x_0| \leq \sum_{i=0}^{l-1} \rho_{8i} < 1,5 \sum_{i=1}^{l} |b|^{8i} < 1,5 \sum_{i=0}^{l} |b|^{8i} = 1,5 \frac{|b|^{8(l+1)} - 1}{|b|^8 - 1} <$$

$$< 1.5 \frac{|b|^{8(l+1)}}{15} < 1.6|b|^{8l}$$

Existuje tedy l_0 dostatečně veliké, že $|x_0| + |x_{l_0} - x_0| < 2|b|^{l_0}$. Číslo x_{l_0} je dělitelné b^{l_0} a podle předpokladu různé od nuly. Modulo b^{l_0}, jsme v situaci $x_{l_0} \in \{-1, \pm i, 1 \pm i, -1 \pm i\}$. A nyní již není problém ověřit, že maximálně po osmi krocích se nutně dostaneme do nuly. Řešení pro tato čísla je zachyceno na obrázku číslo 1.



Obr. č.1

Zároveň jsme dokázali, že každé Gaussovo číslo má právě jeden zápis v soustavě. Neboť pokud v k-tém kroku nepřičteme b^k, ačkoliv bychom měli, pak žádné další číslo v posloupnosti $\{x_l\}, l \geq k$ nemůže být dělitelné číslem b^{k+1} a tedy nemůže být ani nula.

Každé komplexní číslo má vyjádření ve tvaru $\sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^i$.

Označíme $\mathcal{C}_0$ Gaussova čísla. Definujme dále indukcí. Známe-li $\mathcal{C}_k$, pak množina $\mathcal{C}_{k+1} = \mathcal{C}_k \cup (\mathcal{C}_k + b^{-k-1})$, kde $\mathcal{C}_k + b^{-k-1} = \{b^{-k-1} + c; c \in \mathcal{C}_k\}$. Prvky množiny $\mathcal{C}_k$ jsou právě čísla tvaru $ab^{-k} + cib^{-k}; a, c \in \mathbb{Z}$. Taková množina má strukturu čtvercové mříže, kde vzdálenost dvou sousedních bodů má vzdálenost $(\sqrt{2})^{-k} = |b|^{-k}$.Nechť $\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}_i$, pak $\mathcal{C}$ je hustá v $\mathbb{C}$. Je-li $z \in \mathbb{C}$, pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje $c_i \in \mathcal{C}_i$ takové, že $|z - c_i| < \frac{1}{(\sqrt{2})^i}$, tedy $z = \lim_{i \to \infty} c_i$.

Vyjádření čísla nemusí být jednoznačné. Jsou-li $\tilde{c}, c'$ dva různé body z $\mathcal{C}_k$ pro nějaké k přirozené, a číslo z leží v uzávěru množiny čísel $\{\tilde{c} + \sum_{i=-\infty}^{-k} a_i b^i\}$ a současně v uzávěru množiny $\{c' + \sum_{i=-\infty}^{-k} a_i b^i\}$, pak číslo z má alespoň dvě různá vyjádření.

Označme $\mathfrak{D}$ *uzávěr množiny těch komplexníxh čísel pro než* $a_i = 0$ *pro* $i \geq 0$. *Ukážeme, že tato množina je stejnopodobná.*

Označme $\mathfrak{D}_\mathfrak{o}$ (resp.$\mathfrak{D}_\mathfrak{1}$) uzávěr množiny těch čísel z $\mathfrak{D}$, pro která $a_{-1} = 0$ (resp. $a_{-1} = 1$). Pak $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\mathfrak{o} \cup \mathfrak{D}_\mathfrak{1}$. Buďte $\psi_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zobrazení definovaná:

$$\psi_0(\sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^i) = \sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^{i-1}; \quad \psi_1(\sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^i) = \sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^{i-1} + b^{-1}$$

kde a_i, b jako v předchozím textu.

Pak $\psi_0(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_\mathfrak{o}$ a $\psi_1(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_\mathfrak{1}$.

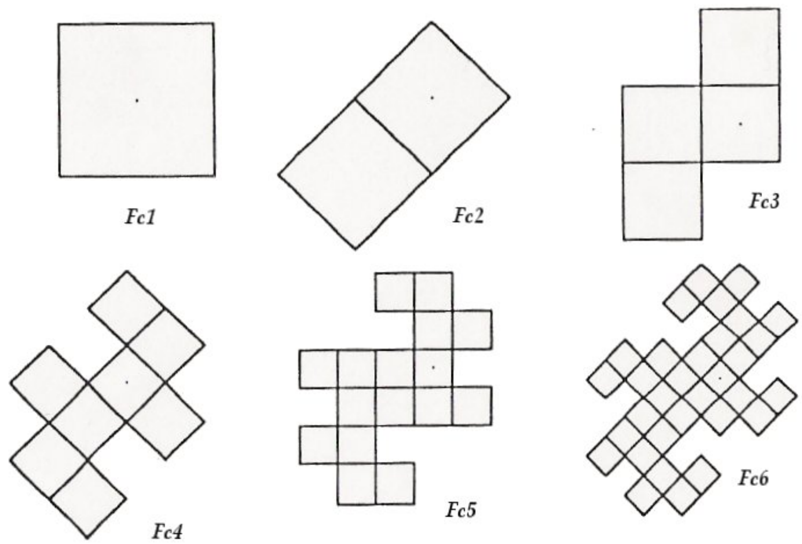
$\psi_0 = k \circ r, \quad \varphi_1 = l \circ k \circ r$, kde r je rotace okolo počátku o úhel $225\,^\circ$ stupňů po směru hodinových ručiček, k je středová souměrnost se středem v počátku a koeficientem $\frac{1}{\sqrt{2}}$, l je posunutí o vektor b^{-1}. Tedy $\mathfrak{D} = \psi_0(\mathfrak{D}) \cup \psi_1(\mathfrak{D})$ a $\mathfrak{D}$ je stejnopodobná množina pro dvojici podobností ψ_0, ψ_1.

$\mathcal{L}^2$*-Lebesgueova míra* $\mathfrak{D}$ *je rovna* 1.

Nechť $\tilde{c} \in \mathcal{C}_k$. Buňkou v $\mathcal{C}_k$ se středem v bodě $\tilde{c}$ budeme dále rozumět čtverec s vrcholy

$$f_{\tilde{c}} := \{\tilde{c} \pm (\frac{1}{2})b^{-k} \pm i(\frac{1}{2})b^{-k}\}.$$

Objem buňky z $\mathcal{C}_k$ je roven $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2k} = (\frac{1}{2})^k$. Dále definujme $\mathcal{F}_{C_k} := \bigcup_{c_k \in \mathcal{C}_k \cap \mathfrak{D}} f_{c_k}$ Na obrázku č.2 jsou zakreslena pokrytí $\mathcal{F}_{C_k}$ pro $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Protože $|\mathfrak{D} \cap \mathcal{C}_k| = 2^k$ máme, že objem $\mathcal{F}_{C_k} = 1$ pro každé k. $\mathcal{F}_{C_k}$ je kompaktní a konverguje v Hausdorffově metrice k $\mathfrak{D}$.



Obr. č.2

Následující věta je k nalezení v [3].

<u>Věta 6</u>
Nechť $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$, pak $\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) = c_n \mathcal{H}^n(E)$, kde $c_n = \pi^{\frac{1}{2}n} / 2^n (\frac{1}{2}n)$.

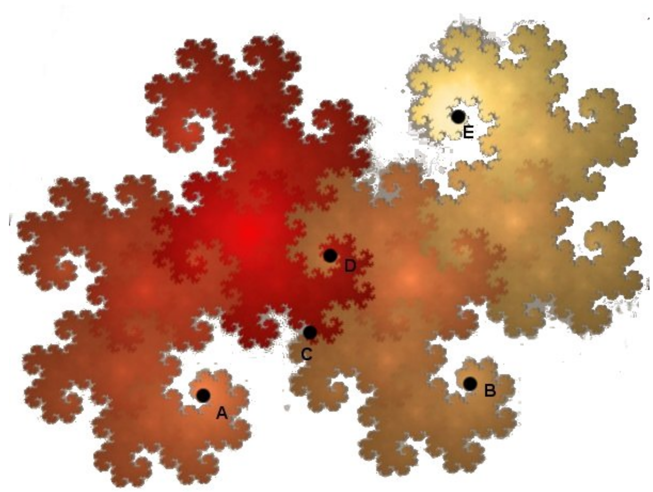
Konkrétně $c_1 = 1, c_2 = \frac{\pi}{4}$. Tedy podle předchozí věty $\mathcal{H}^2(\mathfrak{D}) = \frac{4}{\pi}$. To souhlasí i s větou 5 pro dimenzi stejnopodobných množin, neboť Hausdorffova dimenze s musí vyhovovat rovnici $2(\frac{1}{\sqrt{2}})^s = 1$. Množina, kterou jsme označili jako $\mathfrak{D}$ má svoje jméno, a to sice *twindragon*. Z předchozího je jasné, proč je v názvu twin, tedy dvojčata. Z obrázku č.3 je patrné, proč dragon, tedy drak.

Dimenze hranice twindragonu je ostře menší než 2 a vetší než 1

Na hranici twindragonu vyznačme body $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ jako na obrázku tři Nechť dále $\overline{--}$ značí hranici mezi body. Nechť dále

$$\overline{\mathbf{AE}} = \Omega, \overline{\mathbf{BE}} = \Omega_1, \overline{\mathbf{BD}} = \Omega_2, \overline{\mathbf{CB}} = \tau, \overline{\mathbf{AB}} = \varepsilon$$

přičemž hranice $\overline{\mathbf{BD}}$ je hranice zmenšené kopie twindragonu, která obsahuje bod $\mathbf{C}$.



Obr.č.3

Nechť dále r je rotace o $+225°$ se středem v bodě $\mathbf{C}$ a je l středová souměrnost se středem v $\mathbf{C}$ s koeficentem $\sqrt{2}$. Pak

$$r \circ l(\mathbf{D}) = \mathbf{A}, r \circ l(\mathbf{C}) = \mathbf{C}, r \circ l(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$$

Toto pozorování je pro důkaz klíčové, nyní již stačí sepsat příslušné vztahy.

Symbolem $\varphi(\tau)$ budeme nyní rozumět obraz τ při nějaké podobnosti s koeficentem $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Z takových kousků nyní poskládáme hranici twindragonu nebo alespoň jeho část. Máme tedy, že

$$\Omega_2 = \tau + \varphi(\varphi(\tau)), \varepsilon = \tau + \varphi(\tau), \Omega_1 = \Omega_2 + \varphi(\varepsilon)$$

$$\Omega_2 = \varphi(\Omega_1) = \varphi(\varphi(\Omega))$$

$$\Omega_1 = \tau + 2\varphi(\varphi(\tau)) + \varphi(\tau)$$

Tyto vztahy pak dávají

$$\varphi(\tau + 2\varphi(\varphi(\tau)) + \varphi(\tau)) = \varphi(\varphi(\tau)) + \tau$$

$$\varphi(\tau) + 2\varphi(\varphi(\varphi(\tau))) = \tau$$

Koeficient φ je $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tedy podle věty pro stejnopodobné množiny platí, že

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^s + 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{3s} = 1$$

kde s je dimenze hranice twindragona.

Označíme-li $f(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^s + 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^{3s}$, pak f je klesající funkce proměnné s a $f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$ a $f(2) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^6 = \frac{3}{4} < 1$. f hodnoty jedna nabývá v intervalu $(1, 2)$.

Hranice twindragonu má nekonečnou délku

Ponechme označení z předchozího důkazu. Ke sporu předpokládejme, že délka hranice je konečná. Pak i délka fragmentu τ je konečná.

$$\Omega_2 = \tau + \varphi(\varphi(\tau)), \varepsilon = \tau + \varphi(\tau), \Omega_1 = \Omega_2 + \varphi(\varepsilon), \Omega_1 = \tau + 2\varphi(\varphi(\tau)) + \varphi(\tau)$$

To společně s $\Omega_2 = \varphi(\Omega_1)$ dává, že délka hranice $|\tau|$ splňuje rovnici, kterou jsme odvodili už v předchozím důkazu:

$$|\varphi(\tau)| + 2|\varphi(\varphi(\varphi(\tau)))| = |\tau|$$

Protože podobosti φ mění délku v poměru $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pak máme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\tau| + 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3|\tau| = |\tau|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3 = \sqrt{2} \neq 1$$

Předpoklad, že délka je konečná, nás tedy dovedl ke sporu.

Twindragon je příklad omezené množiny, která má Lebesqueovu míru rovnou jedné a přesto má nekonečně dlouhou hranici. To může být na první pohled nečekaný výsledek, nicméně ve světě fraktálů něco docela běžného. Ukázali jsme, že Hausdorffova míra twindragonu je celočíselná, konkrétně rovná dvěma. To již neplatí pro hranici. Ta na první pohled vypadá jako klikatící se křivka, tedy 1-dimenzionální objekt. Jak jsme ale ukázali, Hausdorffova dimenze nám umožňuje hranici twindragonu od běžných křivek odlišit.

Kapitola 3

Einsteinova vločka

Druhý příklad stejnopodobné množiny má obdobnou konstrukci jako twindragon. Budeme pracovat se soustavou $\sum_{i=-\infty}^{N} a_i(-2)^i$, kde $a_i \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}, \varepsilon = e^{i(\frac{3}{2})\pi}, N \in \mathbb{N}$. ε budeme nadále používat pro toto číslo. Vektory $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ mají délku jedna a svírají mezi sebou úhel $120°$. Jejich koncové body tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka s délkou hrany $\sqrt{3}$.

Nejprve popíšeme čísla tvaru $\sum_{i=0}^{N} a_i(-2)^i, N \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že to jsou právě čísla tvaru $c + d\varepsilon$, kde $c, d \in \mathbb{Z}$ (pozn. tato čísla se někdy označují jako Einsteinova čísla. Proto jsem také zvolil jako název této kapitoly a fraktálu Einsteinova vločka, ačkoliv se nejedná o žadný termín, pod kterým bychom mohli příslušný fraktál, který budeme konstruovat, najít v odborné literatuře).

Každé číslo tvaru $c + d\varepsilon$; $c, d \in \mathbb{Z}$ má vyjádření ve tvaru $\sum_{i=0}^{N} a_i(-2)^i, N \in \mathbb{N}$.

Označme jako $\mathcal{B}_k = \{c2^k + d\varepsilon 2^k; c, d \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Je-li číslo prvkem množiny $\mathcal{B}_k$ a není prvkem $\mathcal{B}_{k+1}$, pak po přičtení $-a(-2)^k, a \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ bude prvkem $\mathcal{B}_{k+1}$.

Nechť $z \in \mathcal{B}_0$ libovolné. Označme ho jako z_0. Nyní přičteme číslo $-a_0(-2)^0$, tak aby $z_1 = z_0 - a_0(-2)^0 \in \mathcal{B}_1$. Takto postupujme pro každé k přirozené.

K dokončení důkazu ukážeme, že pro k dostatečně veliké je počátek jediný bod z $\mathcal{B}_k$, do kterého jsme se mohli dostat.

Největší vzdálenost mezi body z_0 a z_k je na cestě, pro kterou platí, že $0 \neq a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = a_k$, $0 \neq a_1 = a_3 = \ldots = a_{k-1}$ a současně $a_0 \neq -a_1$. Předpokláme, že k je sudé. Případ, že k je liché bychom museli rozebírat zvlášť, ale důkaz by se v ničem podstatném od tohoto nelišil.

Máme tedy

$$\rho_k = |z_{k+1} - z_0| \leq$$

$$\leq \sqrt{((1+4+\ldots+2^k)+\frac{\sqrt{3}}{2}(2+8+\ldots+2_{k-1}))^2+(\frac{1}{2}(2+8+\ldots+2^{k-1}))^2} =$$

$$= \sqrt{(\frac{1}{3}(2^{k+2}-1)+(\frac{\sqrt{3}}{3})(2^k-1))^2+(\frac{1}{3}(2^k-1))^2} <$$

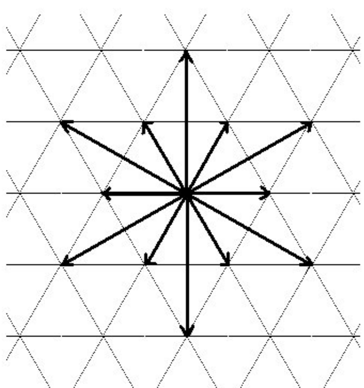
$$< \sqrt{(\frac{1}{3}2^{k+2}+\frac{\sqrt{3}}{3}2^k)^2+(\frac{1}{3}2^k)^2} =$$

$$= \sqrt{(\frac{1}{3}2^k)^2((2^2+\sqrt{3})^2+1)} = \frac{1}{3}2^k\sqrt{(4+\sqrt{3})^2+1} < 1,96.2^k$$

Tedy exituje k dostatečně velké, že $|z_0| + \rho_k < 2^{k+1}$ a tedy jediný bod z $\mathcal{B}_{k+1}$, který leží v množině $\{z : |z - z_0| \leq \rho_k\}$ je $(0,0)$.

Žádné číslo nemá dvě různá vyjádření v soustavě $\sum_{i=0}^{N} a_i(-2)^i$, *kde* $a_i \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$; $\varepsilon = e^{i\frac{2}{3}\pi}$; N *přirozené*

Předpokládejme opak, tedy nechť existuje komplexní číslo, které má dvě vyjádření. $z = \sum_{i=0}^{N} a_i(-2)^i = \sum_{j=0}^{M} b_j(-2)^j$. Pak máme $\sum_{i=0}^{\max(M,N)}(a_i - b_i)(-2)^i = 0$. Vyjádření jsou různá, existuje index j_0 nejmenší takový, že $(a_{j_0} - b_{j_0}) \neq 0$. Vektor $(a_{j_0} - b_{j_0})$ je buď $\{\pm 1; \pm\varepsilon; \pm\varepsilon^2\}$ anebo jejich nenulový součet. Viz obrázek č.4.



Obr. č.4

Sumu lze upravit

$$(-2)^{j_0}[a_{j_0} - b_{j_0} + (a_{j_1} - b_{j_1})(-2)^{j_1-j_0} + \ldots + (a_{j_k} - b_{j_k})(-2)^{j_k-j_0}] = 0$$

Sumu si promítneme do vektoru $a_{j_0} - b_{j_0}$. Rovnice přejde na tvar

$$(-2)^{j_0}[1 + c_{j_1}(-2)^{j_1-j_0} + \ldots + c_{j_k}(-2)^{j_k-j_0}] = 0$$

kde $c_{j_i} \in \{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; 0\}$; $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

Lichý může být jen člen j_1, tedy $c_{j_1} \neq 0$. Pokud si nyní sumu promítneme do vektoru $a_{j_1} - b_{j_1}$ bude tvaru

$$(-2)^{j_1}[c'_{j_0}(-2)^{-1} + 1 + c'_{j_2}(-2)^{j_2-j_1} + \ldots + c'_{j_k}(-2)^{j_k-j_1}] = 0$$

$$c'_{j_i} \in \{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; 0\}; i \geq 2; c'_{j_0} \in \{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$$

výrazy $c'_{j_i}(-2)^{j_i-j_1}$ jsou celočíselné pro $i \geq 2$, výraz c_{j_0} nenulový, rovnost tedy nemůže nastat.

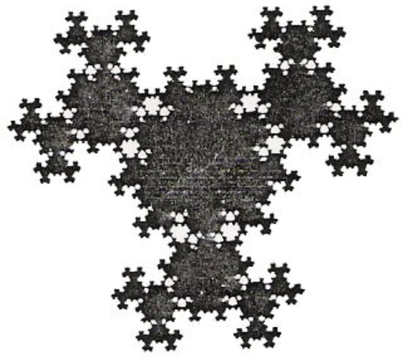
Každé komplexní číslo má vyjádření v soustavě $\sum_{i=-\infty}^{N} a_i(-2)^i$*, kde* $a_i \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$

Nechť $\mathcal{E}_0 = \{c + d\varepsilon; c, d \in \mathbb{Z}\}$, nechť dále

$$\mathcal{E}_{k+1} = \{e + \alpha(-2)^{-k-1}; e \in \mathcal{E}_k, \alpha \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}\}.$$

Pak $\mathcal{E}_k = \{c2^{-k} + d\varepsilon 2^{-k}; c, d \in \mathbb{Z}\}$. $\mathcal{E}_k$ tvoří trojúhelníkovou mříž, kde buňka je rovnostranný trojúhelník s hranou délky $(\frac{1}{2})^k$. Tedy $\mathcal{E} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}_k$ je hustá v $\mathbb{C}$ a můžeme užít stejných argumentů jako v důkaze pro soustavu $\sum_{i=-\infty}^{N} a_i b^i; a_i \in \{0, 1\}, b = -1 + i$.

Označme dále $\mathfrak{H}_{(0,0)}$ uzávěr mnnožiny čísel, které mají v rozvoji $a_i = 0$ pro $i \geq 0$. Pak $\mathfrak{H}$ se skládá, ze čtyř kopií vynásobeným faktorem $\frac{1}{2}$. A to sice z podmnožin $\{\mathfrak{H}_{(0,0)}^{a_{-1}}; a_{-1} \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}\}$, kde index a_{-1} značí (-1)-člen v rozvoji čisel z $\mathfrak{H}_{(0,0)}$. Věta pro dimenzi stejnopodobných množin, pak říká, že Hausdorffova dimenze $\mathfrak{H}$ je rovna 2, neboť s musí splňovat rovnici: $4(\frac{1}{2})^s = 1$. Einsteinova vločka je zakreslena na následujícím obrázku. Celá komplexní rovina je pokryta takovými množinami.



Obr. č.5

Hausdorfova dimenze hranice $\mathfrak{H}$ je rovna $\frac{\log(3)}{\log(2)}$

Komplexní rovina je pokryta množinami $\{\psi_{c,d}(\mathfrak{H}_{(0,0)}); c, d \in \mathbb{Z}\}$, kde $\psi_{a,b}$ je posunutí o vektor $a + b\varepsilon$. $\mathfrak{H}_{(0,0)}$ má společnou hranici s množinami

$$\{\mathfrak{H}_{(a,b)} := \psi_{a,b}(\mathfrak{H}_{(0,0)}); (a,b) \in \{(1,0),(0,-1),(-1,-1),(-1,0),(0,1),(1,1)\}\}.$$

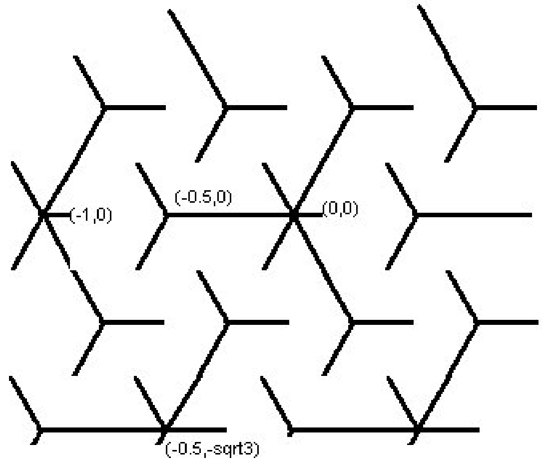
$\mathfrak{H}_{(0,0)}$ je navíc invariatní pro otočení o $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Tedy hranici mezi $\mathfrak{H}_{(0,0)}$ a $\mathfrak{H}_{(a,b)}$ lze pomocí rotace a posunutí zobrazit na hranici mezi $\mathfrak{H}_{(0,0)}$ a $\mathfrak{H}_{(a',b')}$, kde indexy $(a,b),(a',b')$ jsou libovolné z $\{(1,0),(0,-1),(-1,-1),(-1,0),(0,-1),(1,1)\}\}$. Hranice $\mathfrak{H}_{0,0}$ se tedy rozpadá na šest podobných fragmentů.

Stejné pozorovaní nyní provedeme pro $\mathfrak{H}^{a_{-1}}_{(0,0)}$, kde $a_{-1} \in \{0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. Hranice mezi $\mathfrak{H}^0_{0,0}$ a $\mathfrak{H}^{a_{-1}}_{(0,0)}; a_{-1} \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ leží uvnitř $\mathfrak{H}_{(0,0)}$, ostatní části leží na hranici $\mathfrak{H}_{(0,0)}$. Tedy původních šest fragmentů hranice $\mathfrak{H}_{(0,0)}$ se zkládá z 18 kopií vynásobených faktorem $\frac{1}{2}$.

Tedy rovnice pro s má tvar:

$$3(\frac{1}{2})^s = 1$$

$$s = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$



Obr.č.6

Na závěr bych chtěl ještě dodat několik poznámek a shrnout některé poznatky. Chtěl bych zdůraznit rekurzivní vytváření obou fraktálů. To je docela dobře vidět na obrázku nahoře, kde jsou zakresleny první dva kroky konstrukce několika vloček. Dále jsme ukázali, že komplexní rovinu lze pokrýt jak twindragonem, tak Einsteinovými vločkami. Přitom množiny se jen "dotýkají". V průniku každých dvou množin z pokrytí mohou ležet jen body z hranice, ale nikoliv vnitřní body. Jak twindragon, tak Einstenova vločka, mají neprázdný vnitřek a tedy jejich 2-dimenzinální Lebesqueova a Hausdorffova míra je nenulová a konečná. Ale přesto jejich hranice mají neceločíselnou hodnotu, která je ostře menší než dva a ostře větší než jedna. Není těžké ukázat, že i hranice Einstenovy vločky má nekonečnou délku, takže i tomto kritériu můžeme konstatovat podobnost s twindragonem.

Literatura

[1] Barnsley M. F.: *Fractals everywhere*, Academic Press, 1993.

[2] G.A.Edgar: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, 1990.

[3] K.J.Falconer.: *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[4] H.O.Peitgen,H.Jürgens,D.Saupe.: *The Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag New York, 1992