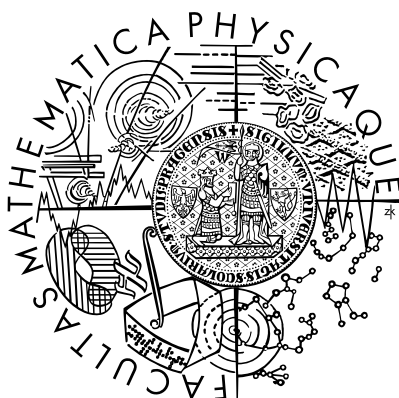


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



*Radka Picková*

### **Transformace náhodných veličin**

*Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*

Vedoucí bakalářské práce: *Mgr. Zdeněk Hlávka, Ph.D.*

Studijní program: *Matematika*

2006

*Poděkování:*

Děkuji Mgr. Hlávkovi, Ph. D. za jeho rady a cenné připomínky k obsahu práce. Své rodině a přátelům děkuji za podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 21. května 2006

Radka Pícková

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
1.1	Motivace . . . . .	5
1.2	Postup řešení . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Normálně rozdělené náhodné veličiny a vektory</b>	<b>8</b>
2.1	Transformace náhodných veličin a vektorů . . . . .	8
2.2	Příklady . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Asymptoticky normální rozdělení</b>	<b>17</b>
3.1	Definice a značení . . . . .	17
3.2	Funkce asymptoticky normálních veličin a vektorů . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Porovnání</b>	<b>21</b>
4.1	Jednorozměrný případ . . . . .	23
4.2	Dvourozměrný případ . . . . .	25
4.3	Třírozměrný případ . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>32</b>
<b>A</b>	<b>Další grafy</b>	<b>33</b>
A.1	Jednorozměrný a dvourozměrný případ . . . . .	33
	<b>Literatura</b>	<b>42</b>

Název práce: *Transformace náhodných veličin*  
Autor: *Radka Picková*  
Katedra: *Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*  
Vedoucí bakalářské práce: *Mgr. Zdeněk Hlávka, Ph.D.*  
e-mail vedoucího: *hlavka@karlin.mff.cuni.cz*

Abstrakt:

V předložené práci studujeme transformace náhodných veličin a vektorů. Věty, které budeme potřebovat k výpočtům, uvedeme pouze bez důkazů, neboť je lze nalézt v dostupné literatuře. Zaměříme se především na aplikaci těchto vět. Předvedeme použití na konkrétní transformaci obecně  $p$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ . Danou transformaci nejprve aplikujeme na náhodné veličiny a vektory, které mají normální rozdělení. Poté zavedeme pojem asymptoticky normální rozdělení a stejnou transformaci použijeme na náhodné veličiny a vektory, které jsou asymptoticky normální. Na závěr výsledky porovnáme.

Klíčová slova: transformace, náhodné veličiny, náhodné vektory, normální rozdělení, asymptotická normalita

Title: *Transformations of random variables*  
Author: *Radka Picková*  
Department: *Department of Probability and Mathematical Statistics*  
Supervisor: *Mgr. Zdeněk Hlávka, Ph.D.*  
Supervisor's e-mail address: *hlavka@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract:

In the presented work, we study transformations of random variables and vectors. The theorems needed for calculations are stated without proofs because these can be easily found in accessible literature. This work aims primarily on the application of these theorems in practice. Their use is shown on a transformation of  $p$ -dimensional random vectors  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ . First, this transformation is applied to normally distributed random variables and vectors. Next, we introduce the definition of asymptotic normality and the same transformation is used on *asymptotically* normal random variables and vectors. In the conclusion, we compare the results.

Keywords: transformation, random variables, random vectors, normal distribution, asymptotic normality

# Kapitola 1

## Úvod

V následujícím textu se budeme zabývat transformacemi náhodných veličin a vektorů. Použití si předvedeme na konkrétním příkladě, a to na transformaci obecně  $p$ -rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , která je zadána následovně:

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{p-1} \\ X_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\exp(X_1)}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)} \\ \frac{\exp(X_2)}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)} \\ \vdots \\ \frac{\exp(X_{p-1})}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)} \\ \exp(X_p) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

### 1.1 Motivace

Proč jsme zvolili právě tuto transformaci? V matematické statistice se často setkáváme s úlohou určit odhady parametrů. Představme si, že odhadujeme třírozměrný vektor parametrů  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$  v lineárním modelu:

$$\mathbf{Z} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ , matice  $\mathcal{A}_{n \times 3}$  je známá matice experimentu a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je  $n$ -rozměrný vektor chyb, přičemž víme, že  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$  a  $\beta_1 + \beta_2 < 1$ . Můžeme psát

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\exp(\theta_1)}{\exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3)}, \\ \beta_2 &= \frac{\exp(\theta_2)}{\exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3)}, \\ \beta_3 &= \exp(\theta_3), \end{aligned}$$

kde  $\theta_1, \theta_2$  a  $\theta_3$  jsou nové neznámé parametry. Označme jejich odhady spočítané metodou maximální věrohodnosti na základě  $n$  pozorování  $\hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}$  a  $\hat{\theta}_{n3}$ . Jsou-li splněny podmínky regularity, je posloupnost náhodných vektorů  $(\hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}, \hat{\theta}_{n3})^T$  asymptoticky normální,

$$\text{tj. } (\hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}, \hat{\theta}_{n3})^T \text{ je AN } \left( (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T, \frac{1}{n} \Sigma \right),$$

kde  $\Sigma$  je pozitivně definitní matice a  $n$  je počet pozorování. Numerické řešení metodou maximální věrohodnosti vede nejen k odhadům  $\hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}, \hat{\theta}_{n3}$ , ale také k odhadu  $\hat{\Sigma}_n$  matice  $\Sigma$ , viz Serfling [2], str. 143–148.

V dané úloze je  $\beta_3$  normovací konstantou a její hodnota není předmětem našeho zájmu. Nás zajímají především hodnoty parametrů  $\beta_1$  a  $\beta_2$ .

Analogicky postupujeme i v obecném případě, kdy můžeme mít zadánu úlohu určit odhady  $p$  parametrů  $\beta_1, \dots, \beta_p, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ , splňujících podmínky:  $\beta_1, \dots, \beta_p > 0$  a  $\beta_1 + \dots + \beta_{p-1} < 1$ . Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\exp(\theta_1)}{\exp(\theta_1) + \dots + \exp(\theta_{p-1}) + \exp(\theta_p)}, \\ &\vdots \\ \beta_{p-1} &= \frac{\exp(\theta_{p-1})}{\exp(\theta_1) + \dots + \exp(\theta_{p-1}) + \exp(\theta_p)}, \\ \beta_p &= \exp(\theta_p), \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde  $\theta_1, \dots, \theta_p$  jsou nové neznámé parametry. Označme jejich odhady spočítané metodou maximální věrohodnosti na základě  $n$  pozorování  $\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{np}$ . Jsou-li splněny podmínky regularity, je posloupnost náhodných vektorů  $(\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{np})^T$  asymptoticky normální,

$$\text{tj. } (\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{np})^T \text{ je AN } \left( (\theta_1, \dots, \theta_p)^T, \frac{1}{n} \Sigma \right), \tag{1.3}$$

kde  $\Sigma$  je pozitivně definitní matice a  $n$  je počet pozorování. Numerické řešení metodou maximální věrohodnosti vede nejen k odhadům  $\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{np}$ , ale také k odhadu  $\hat{\Sigma}_n$  matice  $\Sigma$ , viz Serfling [2], str. 143–148.

Transformaci (1.1) jsme zvolili proto, že nás zajímá, co lze říci o parametrech  $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ , pokud máme nějaké informace o parametrech  $\theta_1, \dots, \theta_p$  (např. máme odhady parametrů  $\theta_1, \dots, \theta_p$ ) a víme, že platí (1.2).

## 1.2 Postup řešení

Ve druhé kapitole se budeme zabývat transformací normálně rozděleného náhodného vektoru. Budeme tedy předpokládat, že máme náhodný vektor

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}),$$

a zjistíme, jaké rozdělení má náhodný vektor  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$ , jestliže

$$Y_1 = \frac{\exp(X_1)}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)}, \dots, Y_{p-1} = \frac{\exp(X_{p-1})}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)}, Y_p = \exp(X_p).$$

Ve třetí kapitole nejprve zavedeme pojem asymptoticky normální rozdělení. Poté budeme předpokládat, že posloupnost náhodných vektorů

$$\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \dots, X_{np})^T \text{ je AN}(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}),$$

a zjistíme, jaké asymptotické rozdělení má posloupnost náhodných vektorů  $\mathbf{Y}_n = (Y_{n1}, \dots, Y_{np})^T$ , jestliže pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$Y_{n1} = \frac{\exp(X_{n1})}{\sum_{i=1}^p \exp(X_{ni})}, \dots, Y_{n(p-1)} = \frac{\exp(X_{n(p-1)})}{\sum_{i=1}^p \exp(X_{ni})}, Y_{np} = \exp(X_{np}).$$

Ve čtvrté kapitole porovnáme výsledky z předchozích dvou kapitol (konkrétně v jednorozměrném, dvourozměrném a třírozměrném případě).

V páté kapitole vše stručně shrneme.

# Kapitola 2

## Normálně rozdělené náhodné veličiny a vektory

V této kapitole transformaci (1.1) aplikujeme na náhodné veličiny a vektory, které mají normální rozdělení. Nejprve uvedeme znění vět, které v příkladech 2.3 až 2.7 využijeme k vypočítání hustot transformovaných náhodných veličin a vektorů. Důkazy uvádět nebudeme, neboť je lze nalézt v dostupné literatuře.

### 2.1 Transformace náhodných veličin a vektorů

#### Věta 2.1 (Transformace náhodných veličin)

Nechť náhodná veličina  $X$  má spojitou distribuční funkci  $F$ . Nechť  $F'(x) = f(x)$  existuje všude až nanejvýš s výjimkou konečně mnoha bodů. Budiž  $t$  ryze monotónní funkce, která má všude nenulovou derivaci. Položme  $Y = t(X)$ . Označme  $\tau$  inverzní funkci k  $t$ . Pak náhodná veličina  $Y$  má hustotu

$$g(y) = f[\tau(y)]|\tau'(y)|. \quad (2.1)$$

*Důkaz.* Viz Anděl [1], věta 3.5 na str. 48. □

Než uvedeme větu o transformaci náhodného vektoru, připomeneme některé základní pojmy. Mějme funkce  $f_1, \dots, f_r$  proměnných  $x_1, \dots, x_r$ . Pak *Jacobiovým determinantem* čili *jakobiánem* těchto funkcí se nazývá determinant

$$D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}.$$

Zobrazení  $\mathbf{f}$  množiny  $A$  do množiny  $B$  nazýváme *prostým*, platí-li implikace

$$[\mathbf{x}_1 \in A, \mathbf{x}_2 \in A, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2] \Rightarrow [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)].$$

Budiž dáno zobrazení  $\mathbf{f}$  z  $\mathbb{R}_r$  do  $\mathbb{R}_r$ . Je-li  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)^T$  a  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)^T$ , položme  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_r)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Říkáme, že zobrazení  $\mathbf{f}$  je *regulární* v množině  $M \subset \mathbb{R}_r$ , jestliže platí:

1. Množina  $M$  je otevřená.



2. Funkce  $f_1, \dots, f_r$  mají parciální derivace prvního řádu spojité v  $M$ .
3. Pro každé  $\mathbf{x} \in M$  platí  $D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ .

Nyní uvedeme větu o transformaci náhodných vektorů.

**Věta 2.2 (Transformace náhodných vektorů)**

Nechť náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  má hustotu  $p$  vzhledem k Lebesgueově míře v  $\mathbb{R}_n$ . Nechť  $\mathbf{t}$  je zobrazení z  $\mathbb{R}_n$  do  $\mathbb{R}_n$ , které je regulární a prosté na takové otevřené množině  $G$ , pro niž platí  $\int_G p(x)dx = 1$ . Označme  $\boldsymbol{\tau}$  inverzní zobrazení k  $\mathbf{t} : G \rightarrow \mathbf{t}(G)$ . Pak náhodný vektor  $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$  má hustotu vzhledem k Lebesgueově míře a tato hustota je rovna

$$q(\mathbf{y}) = \begin{cases} p[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})]|D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})| & \text{pro } \mathbf{y} \in \mathbf{t}(G), \\ 0 & \text{pro } \mathbf{y} \notin \mathbf{t}(G). \end{cases} \quad (2.2)$$

*Důkaz.* Viz Anděl [1], věta 3.7 na str. 49. □

## 2.2 Příklady

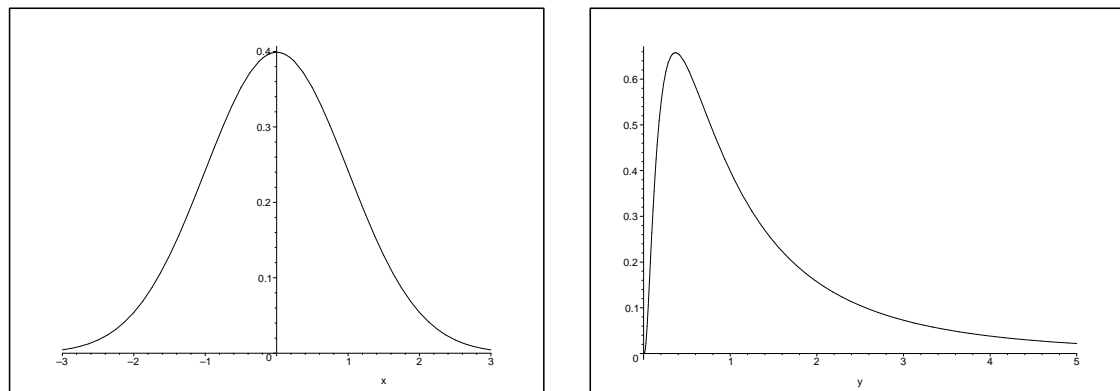
**Příklad 2.3** Mějme náhodnou veličinu  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma > 0$ , pak hustota  $X$  je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \text{ pro } x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Nechť náhodná veličina  $Y = t(X) = \exp(X)$ , kde funkce  $t(z) = \exp(z)$  je ryze monotónní funkce, která má všude nenulovou derivaci. Můžeme tudíž použít větu 2.1 o transformaci náhodných veličin.

Inverzní funkcí k  $t$  je funkce  $\tau(y) = \log y$  pro  $y \in (0, \infty)$ . Zřejmě  $\tau'(y) = \frac{1}{y}$  pro  $y \in (0, \infty)$ . Dosazením do (2.1) dostaneme hustotu náhodné veličiny  $Y$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \text{ pro } y \in (0, \infty). \quad (2.4)$$



Obrázek 2.1: Vlevo graf funkce  $f(x)$ , vpravo graf funkce  $g(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 1$ .

Vidíme, že  $Y$  má logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $a = 0$ ,  $b = \sigma$  a  $m = \mu$ , viz Anděl [1], str. 27.

Na obrázku 2.1 jsou znázorněny hustoty  $f$  a  $g$  pro konkrétně zvolené hodnoty parametrů  $\mu$  a  $\sigma$ .

**Příklad 2.4** Mějme dvourozměrný náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \sim \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ , kde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$  je vektor středních hodnot,  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  je pozitivně definitní varianční matice,  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_1^2$  je rozptyl náhodné veličiny  $X_1$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $\sigma_2^2$  je rozptyl náhodné veličiny  $X_2$  a  $\rho \in (-1, 1)$  je korelační koeficient veličin  $X_1$  a  $X_2$ . Pak hustota náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  je

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

pro  $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}_2$ .

Uvažujme transformaci

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{e^{X_1}}{e^{X_1} + e^{X_2}} \\ e^{X_2} \end{pmatrix}.$$

Zobrazení  $\mathbf{t}$  je regulární a prosté na  $\mathbb{R}_2$ .

Označme

$$y_1 = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2}} \quad \text{a} \quad y_2 = e^{x_2},$$

pak lze snadno vyjádřit

$$x_1 = \log \frac{y_1 y_2}{1 - y_1} \quad \text{a} \quad x_2 = \log y_2,$$

kde  $y_1 \in (0, 1)$  a  $y_2 \in (0, \infty)$ .

Označíme-li  $\boldsymbol{\tau}$  inverzní zobrazení k  $\mathbf{t}$ , pak

$$\boldsymbol{\tau} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \log \frac{y_1 y_2}{1 - y_1} \\ \log y_2 \end{pmatrix}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$  a  $y_2 \in (0, \infty)$ . Můžeme tedy použít větu 2.2 o transformaci náhodného vektoru, přičemž

$$D_{\boldsymbol{\tau}}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1(1-y_1)} & \frac{1}{y_2} \\ 0 & \frac{1}{y_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2 (1 - y_1)}.$$

Dosažením do (2.2) získáme hustotu  $g(y_1, y_2)$  transformovaného náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \mathbf{t}(X_1, X_2)$  :

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}y_1y_2(1-y_1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(\log \frac{y_1y_2}{1-y_1} - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(\log \frac{y_1y_2}{1-y_1} - \mu_1)(\log y_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\log y_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (2.5)$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$  a  $y_2 \in (0, \infty)$ , jinak  $g(y_1, y_2) = 0$ .

**Příklad 2.5** Mějme třírozměrný náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$  takový, že  $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ , kde  $\boldsymbol{\mu}$  je vektor středních hodnot náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{V}$  je pozitivně definitní varianční matice náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ . Pak hustota náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\det \mathbf{V}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3.$$

Uvažujme transformaci

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{e^{X_1}}{e^{X_1} + e^{X_2} + e^{X_3}} \\ \frac{e^{X_2}}{e^{X_1} + e^{X_2} + e^{X_3}} \\ e^{X_3} \end{pmatrix}.$$

Zobrazení  $\mathbf{t}$  je regulární a prosté na  $\mathbb{R}_3$ .

Označme

$$y_1 = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}, \quad y_2 = \frac{e^{x_2}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}} \quad \text{a} \quad y_3 = e^{x_3},$$

pak lze vyjádřit

$$x_1 = \log \frac{y_1y_3}{1-y_1-y_2}, \quad x_2 = \log \frac{y_2y_3}{1-y_1-y_2} \quad \text{a} \quad x_3 = \log y_3,$$

kde  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2) \in (0, 1)$  a  $y_3 \in (0, \infty)$ .

Označíme-li  $\boldsymbol{\tau}$  inverzní zobrazení k  $\mathbf{t}$ , potom

$$\boldsymbol{\tau} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \log \frac{y_1y_3}{1-y_1-y_2} \\ \log \frac{y_2y_3}{1-y_1-y_2} \\ \log y_3 \end{pmatrix}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2) \in (0, 1)$  a  $y_3 \in (0, \infty)$ .

Použijeme větu 2.2 o transformaci náhodného vektoru, přičemž

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\tau}}(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} \frac{1-y_2}{y_1(1-y_1-y_2)} & \frac{1}{1-y_1-y_2} & \frac{1}{y_3} \\ \frac{1}{1-y_1-y_2} & \frac{1-y_1}{y_2(1-y_1-y_2)} & \frac{1}{y_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{y_3} \end{vmatrix} = \frac{(1-y_2)(1-y_1) - y_1y_2}{y_1y_2y_3(1-y_1-y_2)^2} \\ &= \frac{1}{y_1y_2y_3(1-y_1-y_2)}. \end{aligned}$$

Dosazením do (2.2) získáme hustotu  $g(y_1, y_2, y_3)$  transformovaného náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T = \mathbf{t}(X_1, X_2, X_3)$ . Nejprve pro  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$  označme

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu} = \left( \log \frac{y_1y_3}{1-y_1-y_2} - \mu_1, \log \frac{y_2y_3}{1-y_1-y_2} - \mu_2, \log y_3 - \mu_3 \right)^T,$$

pak

$$g(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det \mathbf{V}} y_1y_2y_3(1-y_1-y_2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{a} \right\} \quad (2.6)$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2) \in (0, 1)$  a  $y_3 \in (0, \infty)$ , jinak  $g(y_1, y_2, y_3) = 0$ .

**Příklad 2.6** Mějme čtyřrozměrný náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$  takový, že  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_4(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ , kde  $\boldsymbol{\mu}$  je vektor středních hodnot náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{V}$  je pozitivně definitní varianční matice náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ . Pak hustota náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \mathbf{V}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_4.$$

Uvažujme transformaci

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{e^{X_1}}{e^{X_1+e^{X_2}+e^{X_3}+e^{X_4}}} \\ \frac{e^{X_2}}{e^{X_1+e^{X_2}+e^{X_3}+e^{X_4}}} \\ \frac{e^{X_3}}{e^{X_1+e^{X_2}+e^{X_3}+e^{X_4}}} \\ e^{X_4} \end{pmatrix}.$$

Zobrazení  $\mathbf{t}$  je regulární a prosté na  $\mathbb{R}_4$ .

Označme

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + e^{x_4}}, & y_2 &= \frac{e^{x_2}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + e^{x_4}}, \\ y_3 &= \frac{e^{x_3}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + e^{x_4}}, & y_4 &= e^{x_4}. \end{aligned}$$

Postup vyjádření  $x_1, x_2, x_3, x_4$  tentokrát ukážeme podrobněji. Hned vidíme, že  $x_4 = \log y_4$ . Dále chceme vyjádřit  $x_1, x_2, x_3$  z rovnic:

$$e^{x_1}(1 - y_1) = y_1(e^{x_2} + e^{x_3} + y_4), \quad (2.7)$$

$$e^{x_2}(1 - y_2) = y_2e^{x_1} + y_2(e^{x_3} + y_4), \quad (2.8)$$

$$e^{x_3}(1 - y_3) = y_3e^{x_1} + y_3(e^{x_2} + y_4). \quad (2.9)$$

Rovnice (2.8) a (2.9) vynásobíme  $(1 - y_1) \neq 0$  a poté z rovnice (2.7) dosadíme za  $e^{x_1}(1 - y_1)$ :

$$e^{x_2}(1 - y_2)(1 - y_1) = y_2y_1(e^{x_2} + e^{x_3} + y_4) + y_2(1 - y_1)(e^{x_3} + y_4),$$

$$e^{x_3}(1 - y_3)(1 - y_1) = y_3y_1(e^{x_2} + e^{x_3} + y_4) + y_3(1 - y_1)(e^{x_2} + y_4).$$

Dalšími úpravami dostaneme:

$$e^{x_2}(1 - y_1 - y_2) = y_2y_4 + e^{x_3}y_2, \quad (2.10)$$

$$e^{x_3}(1 - y_1 - y_3) = y_3y_4 + e^{x_2}y_3. \quad (2.11)$$

Rovnici (2.11) vynásobíme  $(1 - y_1 - y_2) \neq 0$ , poté z rovnice (2.10) dosadíme za  $e^{x_2}(1 - y_1 - y_3)$  a vyjádříme  $x_3$ :

$$e^{x_3}(1 - y_1 - y_2)(1 - y_1 - y_3) = y_3y_4(1 - y_1 - y_2) + y_3(y_2y_4 + e^{x_3}y_2),$$

$$e^{x_3} [(y_1 - 1)^2 + y_2(y_1 - 1) + y_3(y_1 - 1)] = y_3y_4(1 - y_1),$$

$$e^{x_3} = \frac{y_3y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3},$$

$$x_3 = \log \frac{y_3y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3}.$$

Obdobným způsobem získáme  $x_1$  a  $x_2$ . Celkem dostáváme:

$$x_1 = \log \frac{y_1y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3}, \quad x_2 = \log \frac{y_2y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3},$$

$$x_3 = \log \frac{y_3y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3}, \quad x_4 = \log y_4,$$

kde  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $y_3 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2 + y_3) \in (0, 1)$  a  $y_4 \in (0, \infty)$ .

Označíme-li  $\tau$  inverzní zobrazení k  $t$ , potom

$$\tau : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \log \frac{y_1y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3} \\ \log \frac{y_2y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3} \\ \log \frac{y_3y_4}{1 - y_1 - y_2 - y_3} \\ \log y_4 \end{pmatrix}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $y_3 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2 + y_3) \in (0, 1)$  a  $y_4 \in (0, \infty)$ .

Použijeme větu 2.2 o transformaci náhodného vektoru, přičemž

$$\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{\tau}}(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \begin{vmatrix} \frac{1-y_2-y_3}{y_1(1-y_1-y_2-y_3)} & \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3} & \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3} & \frac{1}{y_4} \\ \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3} & \frac{1-y_1-y_3}{y_2(1-y_1-y_2-y_3)} & \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3} & \frac{1}{y_4} \\ \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3} & \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3} & \frac{1-y_1-y_2}{y_3(1-y_1-y_2-y_3)} & \frac{1}{y_4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{y_4} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(1-y_2-y_3)(1-y_1-y_3)(1-y_1-y_2) + 2y_1y_2y_3}{y_4y_1y_2y_3(1-y_1-y_2-y_3)^3} \\
&\quad - \frac{y_1y_3(1-y_1-y_3) - y_2y_3(1-y_2-y_3) - y_1y_2(1-y_1-y_2)}{y_4y_1y_2y_3(1-y_1-y_2-y_3)^3} \\
&= \frac{(1-y_1-y_2-y_3)^2}{y_1y_2y_3y_4(1-y_1-y_2-y_3)^3} = \frac{1}{y_1y_2y_3y_4(1-y_1-y_2-y_3)}.
\end{aligned}$$

Dosazením do (2.2) získáme hustotu  $g(y_1, y_2, y_3, y_4)$  transformovaného náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T = \mathbf{t}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Nejprve pro  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$  označme

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \log \frac{y_1y_4}{1-y_1-y_2-y_3} - \mu_1 \\ \log \frac{y_2y_4}{1-y_1-y_2-y_3} - \mu_2 \\ \log \frac{y_3y_4}{1-y_1-y_2-y_3} - \mu_3 \\ \log y_4 - \mu_4 \end{pmatrix},$$

pak

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \mathbf{V}} y_1y_2y_3y_4(1-y_1-y_2-y_3)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{a} \right\}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $y_3 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2 + y_3) \in (0, 1)$  a  $y_4 \in (0, \infty)$ , jinak  $g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ .

### Příklad 2.7 Obecný případ $p$ -rozměrného náhodného vektoru

Nyní již dokážeme odvodit, jak bude vypadat obecná transformace pro  $p$ -rozměrný náhodný vektor. Nechť  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  a nechť

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}),$$

kde  $\boldsymbol{\mu}$  je vektor středních hodnot náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{V}$  je pozitivně definitní varianční matice náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ . Pak hustota náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det \mathbf{V}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p. \quad (2.12)$$

Naším úkolem je spočítat transformaci

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{p-1} \\ X_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\exp(X_1)}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)} \\ \frac{\exp(X_2)}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)} \\ \vdots \\ \frac{\exp(X_{p-1})}{\sum_{i=1}^p \exp(X_i)} \\ \exp(X_p) \end{pmatrix}.$$

Zobrazení  $\mathbf{t}$  je regulární a prosté na  $\mathbb{R}_p$ . Označme  $\boldsymbol{\tau}$  inverzní zobrazení k  $\mathbf{t}$ . Pak analogicky jako v příkladech 2.4, 2.5 a 2.6 dostaneme

$$\boldsymbol{\tau} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \log \frac{y_1 y_p}{1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i} \\ \log \frac{y_2 y_p}{1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i} \\ \vdots \\ \log \frac{y_{p-1} y_p}{1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i} \\ \log y_p \end{pmatrix}$$

pro  $y_1 \in (0, 1), \dots, y_{p-1} \in (0, 1), \sum_{i=1}^{p-1} y_i \in (0, 1)$  a  $y_p \in (0, \infty)$ .

Dále analogicky jako v příkladech 2.4, 2.5 a 2.6 získáme jakobián

$$D_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^p y_j\right) \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j\right)}.$$

Podle věty 2.2 o transformaci náhodného vektoru získáme dosazením do (2.2) hustotu  $g(\mathbf{y})$  transformovaného náhodného vektoru  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T = \mathbf{t}(\mathbf{X})$ . Nejprve pro  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)^T$  označme

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \log \frac{y_1 y_p}{1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i} - \mu_1 \\ \log \frac{y_2 y_p}{1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i} - \mu_2 \\ \vdots \\ \log \frac{y_{p-1} y_p}{1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i} - \mu_{p-1} \\ \log y_p - \mu_p \end{pmatrix},$$

pak

$$g(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det \mathbf{V}} \left( \prod_{j=1}^p y_j \right) \left( 1 - \sum_{j=1}^{p-1} y_j \right)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{a} \right\} \quad (2.13)$$

pro  $y_1 \in (0, 1), \dots, y_{p-1} \in (0, 1), \sum_{i=1}^{p-1} y_i \in (0, 1)$  a  $y_p \in (0, \infty)$ ,  
jinak  $g(y_1, \dots, y_p) = 0$ .



# Kapitola 3

## Asymptoticky normální rozdělení

V této kapitole zvolenou transformaci (1.1) aplikujeme na náhodné veličiny a vektory, které jsou asymptoticky normální. Nejprve však zavedeme pojem asymptoticky normální rozdělení. Poté uvedeme znění vět, které v příkladech 3.4, 3.7 a 3.8 využijeme k vypočítání funkcí asymptoticky normálních veličin a vektorů. Ani tentokrát důkazy vět uvádět nebudeme, neboť je lze nalézt v dostupné literatuře.

### 3.1 Definice a značení

**Definice 3.1** Nechtě  $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$  je posloupnost náhodných veličin,  $\{\mu_n\}$  a  $\{\sigma_n\}$  jsou posloupnosti konstant. Říkáme, že posloupnost náhodných veličin  $\{X_n\}$  je asymptoticky normální se střední hodnotou  $\mu_n$  a rozptylem  $\sigma_n^2$ , pokud  $\sigma_n > 0$  pro všechna dostatečně velká  $n$  a platí

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, 1),$$

tj. posloupnost náhodných veličin  $\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}$  konverguje v distribuci k  $\mathbf{N}(0, 1)$ . Budeme používat značení

$$X_n \text{ je AN } (\mu_n, \sigma_n^2).$$

**Definice 3.2** Nechtě  $\{\mathbf{X}_n\}, n \in \mathbb{N}$  je posloupnost  $k$ -rozměrných náhodných vektorů,  $\boldsymbol{\mu}_n$  je posloupnost vektorů a  $\boldsymbol{\Sigma}_n$  je posloupnost matic. Říkáme, že posloupnost náhodných vektorů  $\{\mathbf{X}_n\}$  je asymptoticky normální s vektorem středních hodnot  $\boldsymbol{\mu}_n$  a varianční maticí  $\boldsymbol{\Sigma}_n$ , pokud  $\boldsymbol{\Sigma}_n$  má nenulové diagonální prvky pro všechna dostatečně velká  $n$  a pro každý vektor  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$  takový, že  $\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_n \boldsymbol{\lambda} > 0$  pro všechna dostatečně velká  $n$ , platí, že posloupnost náhodných veličin

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{X}_n \text{ je AN } (\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\mu}_n, \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}_n \boldsymbol{\lambda}).$$

Budeme používat značení

$$\mathbf{X}_n \text{ je AN } (\boldsymbol{\mu}_n, \boldsymbol{\Sigma}_n).$$

## 3.2 Funkce asymptoticky normálních veličin a vektorů

**Věta 3.3** Předpokládejme, že posloupnost náhodných veličin

$$X_n \text{ je AN } (\mu, \sigma_n^2) \text{ se } \sigma_n \rightarrow 0.$$

Nechť  $g$  je reálná funkce diferencovatelná v bodě  $x = \mu$  a platí  $g'(\mu) \neq 0$ . Pak posloupnost náhodných veličin

$$g(X_n) \text{ je AN } (g(\mu), [g'(\mu)]^2 \sigma_n^2). \quad (3.1)$$

*Důkaz.* Viz Serfling [2], str. 118. □

**Příklad 3.4** Nechť posloupnost náhodných veličin  $X_n$  je AN  $(\mu, \sigma_n^2)$  se  $\sigma_n \rightarrow 0$ . Reálná funkce  $g(x) = e^x$  je diferencovatelná pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a platí  $g'(x) = e^x$ . Zřejmě  $g'(\mu) = e^\mu \neq 0$  pro libovolné  $\mu \in \mathbb{R}$ . Z věty 3.3 po dosazení do (3.1) dostáváme, že posloupnost náhodných veličin

$$Y_n = e^{X_n} \text{ je AN } (e^\mu, e^{2\mu} \sigma_n^2). \quad (3.2)$$

**Věta 3.5** Předpokládejme, že posloupnost náhodných vektorů

$$\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk})^T \text{ je AN } (\boldsymbol{\mu}, b_n^2 \boldsymbol{\Sigma})$$

s varianční maticí  $\boldsymbol{\Sigma}$  a  $b_n \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Nechť  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$ , je zobrazení z  $\mathbb{R}_k$  do  $\mathbb{R}_m$ , kde každá složka  $g_i(\mathbf{x})$  je reálná funkce  $k$  proměnných a má nenulový (totální) diferenciál  $g_i(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{t})$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T$  v bodě  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$ . Položme

$$\mathbf{D} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\ \hline \end{array} \right]_{m \times k}.$$

Pak posloupnost náhodných vektorů

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \text{ je AN } (\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}), b_n^2 \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}^T). \quad (3.3)$$

*Důkaz.* Viz Serfling [2], str. 122. □

**Poznámka 3.6** Při výpočtech použijeme tvrzení z diferenciálního počtu funkcí více proměnných, které je uvedeno a dokázáno například v knize Zajíček [3], věta 2.20 na str. 60. Je-li  $f$  funkce  $n$  proměnných,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_n$  a všechny parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  jsou spojité v bodě  $\mathbf{a}$ , pak  $f$  má v bodě  $\mathbf{a}$  totální diferenciál.

**Příklad 3.7** Nechť pro posloupnost náhodných vektorů  $\mathbf{X}_n = (X_{n1}, X_{n2})^T$  platí, že  $\mathbf{X}_n$  je AN  $(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma})$ , kde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}_2$  a matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  je pozitivně definitní.

Uvažujme zobrazení

$$\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2}} \\ e^{x_2} \end{pmatrix}.$$

Označme  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}_2$ . Pak pro

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2}} \quad \text{je} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \frac{e^{x_1} e^{x_2}}{(e^{x_1} + e^{x_2})^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = -\frac{e^{x_1} e^{x_2}}{(e^{x_1} + e^{x_2})^2},$$

pro

$$g_2(\mathbf{x}) = e^{x_2} \quad \text{je} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = e^{x_2}.$$

Funkce  $g_1$  a  $g_2$  mají spojité obě parciální derivace v  $\mathbb{R}_2$ , tudíž podle poznámky 3.6 mají obě funkce totální diferenciály v  $\mathbb{R}_2$ . Je vidět, že totální diferenciál funkce  $g_1$  i totální diferenciál funkce  $g_2$  je nenulový pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_2$ , tedy i v bodě  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$  pro libovolný vektor středních hodnot  $\boldsymbol{\mu}$ .

Matice  $\mathbf{D}$  má tvar

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\mu_1} e^{\mu_2}}{(e^{\mu_1} + e^{\mu_2})^2} & -\frac{e^{\mu_1} e^{\mu_2}}{(e^{\mu_1} + e^{\mu_2})^2} \\ 0 & e^{\mu_2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Z věty 3.5 po dosazení do (3.3) dostáváme, že posloupnost náhodných vektorů

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \text{ je AN } \left( \left( \frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_1} + e^{\mu_2}}, e^{\mu_2} \right)^T, \frac{1}{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}^T \right). \quad (3.5)$$

### Příklad 3.8 Obecný případ

Nechť  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  a necht' posloupnost náhodných vektorů

$$\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \dots, X_{np})^T \text{ je AN } \left( \boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma} \right),$$

kde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T \in \mathbb{R}_p$  a matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  je pozitivně definitní. Uvažujme následující zobrazení

$$\mathbf{g}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x_1}}{\sum_{k=1}^p e^{x_k}} \\ \vdots \\ \frac{e^{x_{p-1}}}{\sum_{k=1}^p e^{x_k}} \\ e^{x_p} \end{pmatrix}.$$

Pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}_p$  označme

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^p e^{x_k}}, \text{ pro } i = 1, \dots, p-1 \quad \text{a} \quad g_p(\mathbf{x}) = e^{x_p}.$$

Pak pro všechna  $i = 1, \dots, p-1$  platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{x_i} \sum_{k=1}^p e^{x_k} - e^{x_i} e^{x_i}}{(\sum_{k=1}^p e^{x_k})^2} = \frac{e^{x_i} \sum_{k=1, k \neq i}^p e^{x_k}}{(\sum_{k=1}^p e^{x_k})^2}, \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= -\frac{e^{x_i} e^{x_j}}{(\sum_{k=1}^p e^{x_k})^2} \quad \text{pro } j = 1, \dots, p, \quad j \neq i, \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{a} \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_p}(\mathbf{x}) &= e^{x_p}.\end{aligned}$$

Pro všechna  $i = 1, \dots, p$  mají funkce  $g_i$  spojitě všechny parciální derivace v  $\mathbb{R}_p$ , tudíž podle poznámky 3.6 mají totální diferenciál v  $\mathbb{R}_p$ , který je zřejmě nenulový v každém bodě  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_p$ , tedy i v bodě  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$  pro libovolný vektor středních hodnot  $\boldsymbol{\mu}$ .

Matice  $\mathbf{D}$  má následující tvar

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\mu_1} \sum_{k=2}^p e^{\mu_k}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & -\frac{e^{\mu_1} e^{\mu_2}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & \cdots & -\frac{e^{\mu_1} e^{\mu_{p-1}}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & -\frac{e^{\mu_1} e^{\mu_p}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} \\ -\frac{e^{\mu_1} e^{\mu_2}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & \frac{e^{\mu_2} \sum_{k=1, k \neq 2}^p e^{\mu_k}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & \cdots & -\frac{e^{\mu_2} e^{\mu_{p-1}}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & -\frac{e^{\mu_2} e^{\mu_p}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{e^{\mu_1} e^{\mu_{p-1}}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & -\frac{e^{\mu_2} e^{\mu_{p-1}}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & \cdots & \frac{e^{\mu_{p-1}} \sum_{k=1, k \neq p-1}^p e^{\mu_k}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} & -\frac{e^{\mu_{p-1}} e^{\mu_p}}{(\sum_{k=1}^p e^{\mu_k})^2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\mu_p} \end{pmatrix}.$$

Z věty 3.5 po dosazení do (3.3) dostáváme, že posloupnost náhodných vektorů

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \text{ je AN } \left( \left( \frac{e^{\mu_1}}{\sum_{k=1}^p e^{\mu_k}}, \dots, \frac{e^{\mu_{p-1}}}{\sum_{k=1}^p e^{\mu_k}}, e^{\mu_p} \right)^T, \frac{1}{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}^T \right). \quad (3.6)$$

# Kapitola 4

## Porovnání

Vraťme se nyní k tomu, co bylo zmíněno v první kapitole. Představme si, že máme odhadnout  $p$ -rozměrný parametr  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , přitom víme, že platí (1.2), tj.

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\exp(\theta_1)}{\exp(\theta_1) + \dots + \exp(\theta_{p-1}) + \exp(\theta_p)}, \\ &\vdots \\ \beta_{p-1} &= \frac{\exp(\theta_{p-1})}{\exp(\theta_1) + \dots + \exp(\theta_{p-1}) + \exp(\theta_p)}, \\ \beta_p &= \exp(\theta_p),\end{aligned}$$

kde  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$  je také neznámý parametr. Máme spočítaný maximálně věrohodný odhad  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{np})^T$  parametru  $\boldsymbol{\theta}$ . V první kapitole jsme uvedli, že platí (1.3), tj. posloupnost vektorů

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \text{ je AN } \left( \boldsymbol{\theta}, \frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma} \right), \quad (4.1)$$

kde  $\boldsymbol{\Sigma}$  je pozitivně definitní matice a  $n$  je počet pozorování. Numerické řešení metodou maximální věrohodnosti vede nejen k odhadu  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ , ale i k odhadu  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n$  (tj. k odhadu matice  $\boldsymbol{\Sigma}$ ). Pokud předpokládáme, že

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\Sigma}, \quad (4.2)$$

tj. posloupnost  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n$  konverguje v pravděpodobnosti k  $\boldsymbol{\Sigma}$ , a že pro velká  $n$  je matice  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n$  pozitivně definitní, potom platí (viz Serfling [2], tvrzení (ii) na str. 24)

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n^{-1/2} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}. \quad (4.3)$$

Pokud (4.3) vynásobíme konstantní maticí  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$  dostaneme

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \xrightarrow{P} \mathbf{I}, \quad (4.4)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice. Lze ukázat, že (4.1) je ekvivalentní s tím, že

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde  $\mathbf{0}$  je nulový vektor, neboli (4.1) je ekvivalentní s tím, že

$$\sqrt{n} \Sigma^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}). \quad (4.5)$$

Celkem ze vzorců (4.4) a (4.5) dostáváme

$$\sqrt{n} \hat{\Sigma}_n^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) = \sqrt{n} \hat{\Sigma}_n^{-1/2} \Sigma^{1/2} \Sigma^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}).$$

Tudíž

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \text{ je AN} \left( \boldsymbol{\theta}, \frac{1}{n} \hat{\Sigma}_n \right), \quad (4.6)$$

tzn. pokud pro odhad  $\hat{\Sigma}_n$  matice  $\Sigma$  platí (4.2), tak můžeme matici  $\Sigma$  ve (4.1) nahradit tímto odhadem  $\hat{\Sigma}_n$ . Označíme  $\mathbf{V}_n = \frac{1}{n} \hat{\Sigma}_n$ .

Zajímá nás, jak můžeme odhadnout parametr  $\boldsymbol{\beta}$ . Označme  $\mathbf{u}$  parametrickou funkci

$$\mathbf{u}(\theta_1, \dots, \theta_p) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{\sum_{k=1}^p e^{\theta_k}} \\ \vdots \\ \frac{e^{\theta_{p-1}}}{\sum_{k=1}^p e^{\theta_k}} \\ e^{\theta_p} \end{pmatrix}.$$

Potom podle Zehnaovy věty, která je uvedena v knize Anděl [1], věta 7.87 na str. 148, je  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n = \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$  maximálně věrohodný odhad parametrické funkce  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta})$ . Zajímá nás, co můžeme říci o rozdělení  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ . K tomuto problému budeme přistupovat dvěma způsoby.

Vydeme ze (4.6). Víme tedy, že  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  je AN  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}_n)$ . Řekněme, že máme pevně zvolený dostatečně velký počet pozorování  $n$ , a pro toto pevně zvolené  $n$  označme  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n$ . Zjistíme, co by se stalo, když by  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \sim \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$  pro pevné  $n$ , tzn. místo asymptotické normality bychom měli náhodný vektor s normálním rozdělením (s hustotou (2.12), kde vektoru středních hodnot  $\boldsymbol{\mu}$  odpovídá vektor  $\boldsymbol{\theta}$ ). Můžeme využít teorii a příklady z druhé kapitoly. Stejným postupem jako v příkladu 2.7 (transformace  $\mathbf{t}$  je totiž shodná s parametrickou funkcí  $\mathbf{u}$ ) získáme dosazením do (2.13) hustotu  $\mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ . Potom by  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  mělo mít přibližně stejnou hustotu jako  $\mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ .

Ve druhé metodě vydeme z toho, že  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$  je AN  $(\boldsymbol{\theta}, \frac{1}{n} \Sigma)$ , a využijeme teorii a příklady ze třetí kapitoly. Postupem uvedeným v příkladu 3.8 (kde vektoru  $\boldsymbol{\mu}$  odpovídá vektor  $\boldsymbol{\theta}$  a zobrazení  $\mathbf{g}$  je shodné s parametrickou funkcí  $\mathbf{u}$ ) dostaneme (3.6), tj. že  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  je AN  $(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}), \frac{1}{n} \mathbf{D} \Sigma \mathbf{D}^T)$ , kde matice  $\mathbf{D}$  je v příkladu 3.8 podrobněji rozepsána. Obdobně jako jsme odvodili (4.6) dostáváme z platnosti vzorce (4.2) a definice asymptotické normality, že  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  je AN  $(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{D} \mathbf{V}_n \mathbf{D}^T)$ . Pak pro pevně zvolené dostatečně velké  $n$  (stejně jako v první metodě) by hustota  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$  měla být přibližně rovna hustotě  $\mathbf{N}_p(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{D}^T)$ .

Tyto dva přístupy a jejich výsledky porovnáme, konkrétně v jednorozměrném, dvourozměrném a třírozměrném případě.

## 4.1 Jednorozměrný případ

Nechť posloupnost náhodných veličin  $X_n$  je AN  $(\mu, \sigma_n^2)$ , kde  $\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{n}} s \rightarrow 0$  a  $s > 0$  je konstanta. Zajímá nás, co můžeme říci o rozdělení posloupnosti náhodných veličin  $Y_n = e^{X_n}$ . Pro dostatečně velké pevně zvolené  $n$  označme  $\sigma = \sigma_n$ .

První metodou, kdy pro naše pevně zvolené  $n$  předpokládáme, že  $X_n \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ , dostaneme s použitím příkladu 2.3 hustotu  $g$ , viz (2.4):

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp \left\{ -\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \text{ pro } y \in (0, \infty).$$

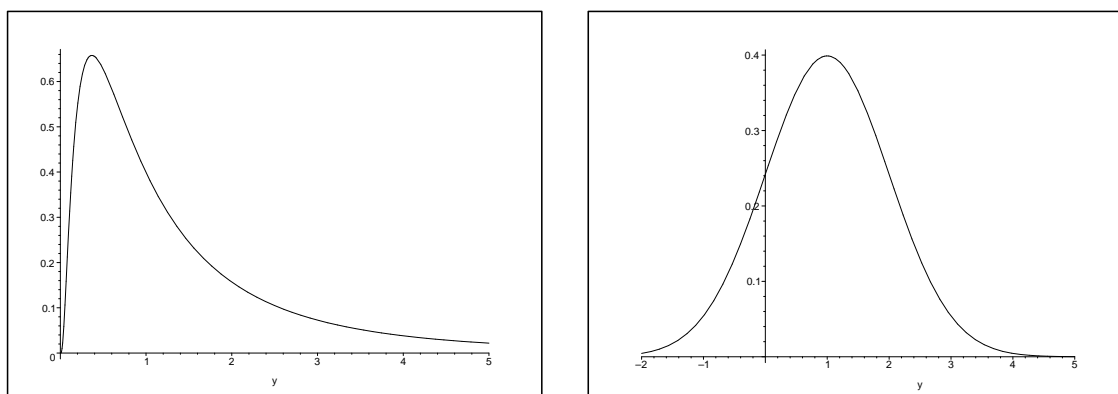
Ve druhé metodě využijeme výsledek (3.2) z příkladu 3.4. Označme  $h$  hustotu normálního rozdělení  $\mathbf{N}(e^\mu, e^{2\mu}\sigma^2)$ , tedy

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^\mu\sigma} \exp \left\{ -\frac{(y - e^\mu)^2}{2e^{2\mu}\sigma^2} \right\} \text{ pro } y \in \mathbb{R}.$$

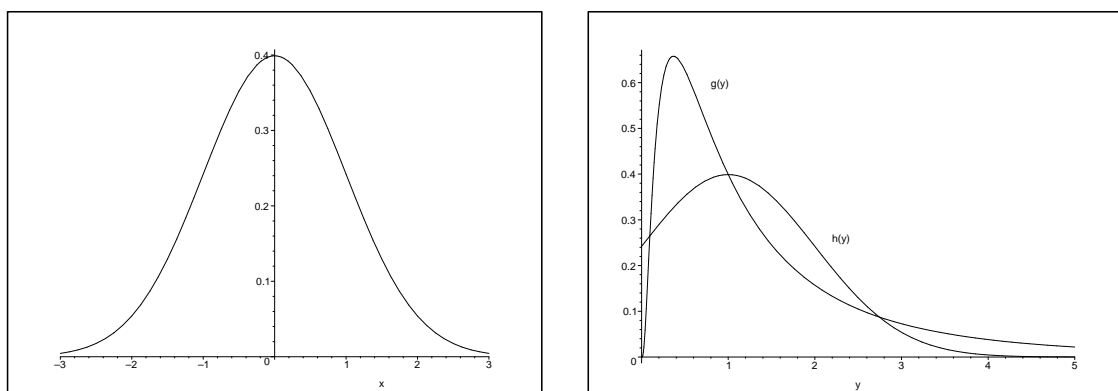
Na obrázcích 4.1 – 4.4 jsou grafy funkcí  $g$  a  $h$  pro konkrétně zvolené hodnoty  $\mu$  a  $\sigma$ . Pro úplnost uvádíme také graf funkce  $f$  z příkladu 2.3, viz (2.3):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

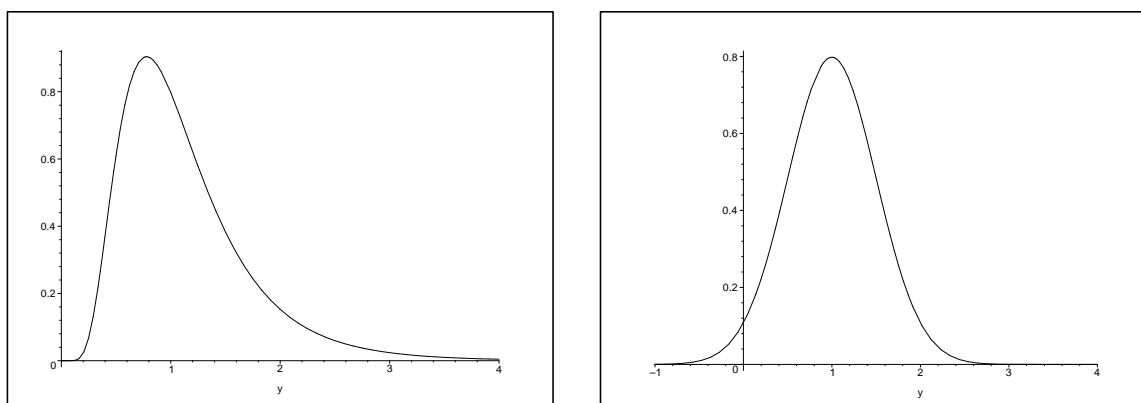
Hlavní rozdíl mezi funkcemi  $g$  a  $h$  je v tom, že zatímco funkce  $g$  je nenulová pouze pro kladné hodnoty  $y$ , funkce  $h$  nabývá nenulových hodnot i pro záporná  $y$ , viz obrázek 4.1. Vzhledem k tomu, že  $\sigma_n \rightarrow 0$ , můžeme volbou většího  $n$  dosáhnout toho, že rozptyl klesá. Na obrázcích 4.3 a 4.4 je vidět, že pokud se rozptyl zmenší, zmenší se také rozdíl mezi funkcemi  $g$  a  $h$ . V dodatku jsou další grafy pro ještě menší rozptyl.



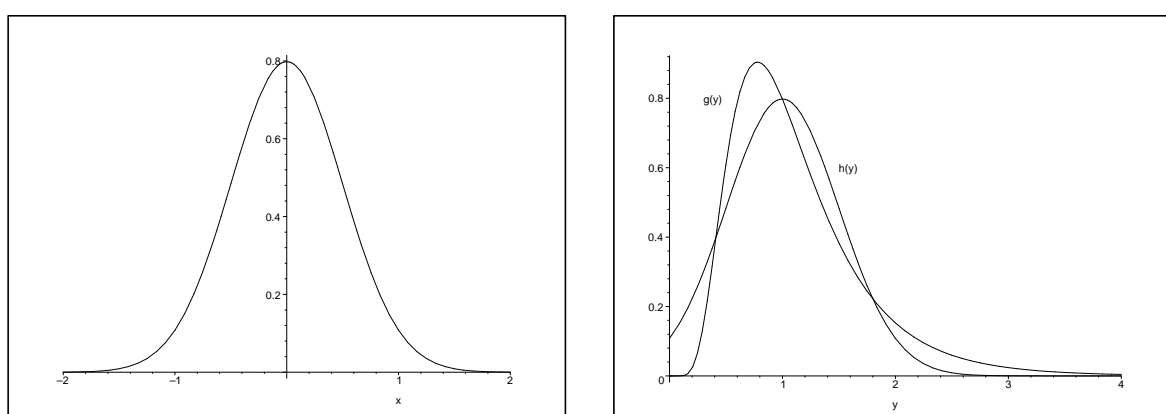
Obrázek 4.1: Vlevo graf funkce  $g(y)$ , vpravo graf funkce  $h(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 1$ .



Obrázek 4.2: Vlevo graf funkce  $f(x)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y)$  a  $h(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 1$ .



Obrázek 4.3: Vlevo graf funkce  $g(y)$ , vpravo graf funkce  $h(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 0,5$ .



Obrázek 4.4: Vlevo graf funkce  $f(x)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y)$  a  $h(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 0,5$ .



## 4.2 Dvourozměrný případ

Nechť posloupnost náhodných vektorů  $\mathbf{X}_n = (X_{n1}, X_{n2})^T$  je  $\text{AN}(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$ , kde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$  je nějaký vektor středních hodnot a  $\boldsymbol{\Sigma}$  je pozitivně definitní varianční matice. Zajímá nás, co můžeme říci o rozdělení posloupnosti náhodných vektorů  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T$ , jestliže pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$Y_{n1} = \frac{\exp(X_{n1})}{\exp(X_{n1}) + \exp(X_{n2})}, \quad (4.7)$$

$$Y_{n2} = \exp(X_{n2}).$$

V první metodě se podíváme na to, jak by to vypadalo, kdybychom místo posloupnosti asymptoticky normálních vektorů měli náhodný vektor, který má přesně normální rozdělení. Zvolíme tedy pevně dostatečně velké  $n$ , označíme  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{V} = \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ , kde  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  a  $\rho \in (-1, 1)$ , a předpokládáme, že  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \sim \text{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ . V příkladu 2.4 jsme vypočítali hustotu (2.5) transformovaného náhodného vektoru:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(\log \frac{y_1 y_2}{1-y_1} - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(\log \frac{y_1 y_2}{1-y_1} - \mu_1)(\log y_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\log y_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$  a  $y_2 \in (0, \infty)$ , jinak  $g(y_1, y_2) = 0$ .

Ve druhé metodě vyjdeme z toho, že  $\mathbf{X}_n$  je  $\text{AN}(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$  a platí (4.7). Postupujeme jako v příkladu 3.7 a dostaneme (3.5), tedy

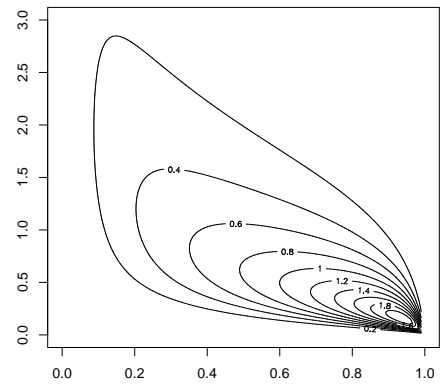
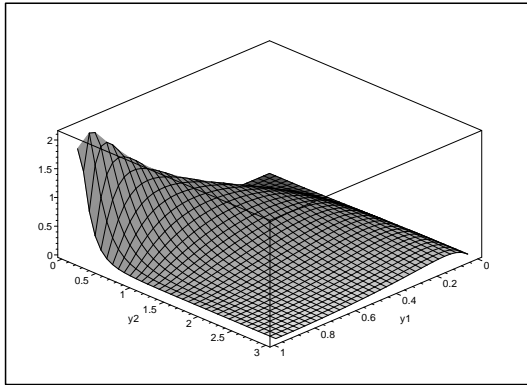
$$(Y_{n1}, Y_{n2})^T \text{ je } \text{AN} \left( \left( \frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_1} + e^{\mu_2}}, e^{\mu_2} \right)^T, \frac{1}{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}^T \right), \quad (4.8)$$

kde matice  $\mathbf{D}$  je uvedena v (3.4). Pokud nyní zvolíme pevně dostatečně velké  $n$  (stejně jako v první metodě) a pokud označíme  $\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ , pak

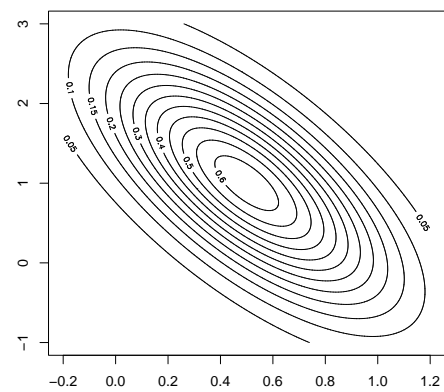
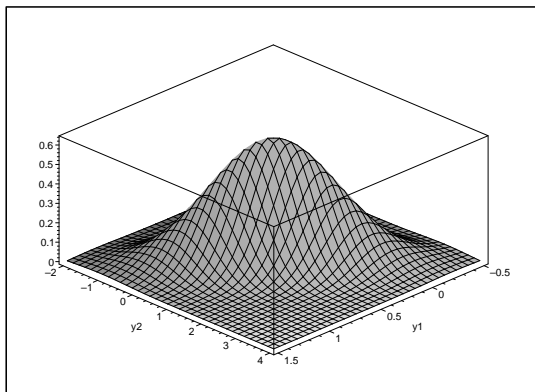
$$\mathbf{W} = \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} \frac{e^{2\mu_1} e^{2\mu_2}}{(e^{\mu_1} + e^{\mu_2})^4} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) & \frac{e^{\mu_1} e^{2\mu_2}}{(e^{\mu_1} + e^{\mu_2})^2} \cdot (\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) \\ \frac{e^{\mu_1} e^{2\mu_2}}{(e^{\mu_1} + e^{\mu_2})^2} \cdot (\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) & \sigma_2^2 e^{2\mu_2} \end{pmatrix}.$$

Označme  $h(y_1, y_2)$  hustotu normálního rozdělení

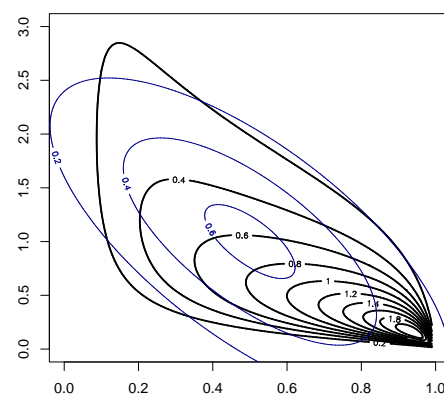
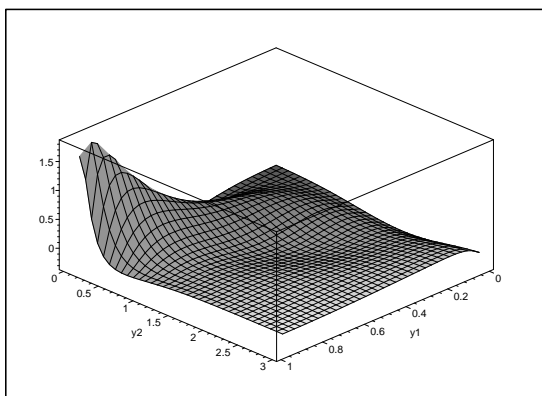
$$\text{N}_2 \left( \left( \frac{e^{\mu_1}}{e^{\mu_1} + e^{\mu_2}}, e^{\mu_2} \right)^T, \mathbf{W} \right).$$



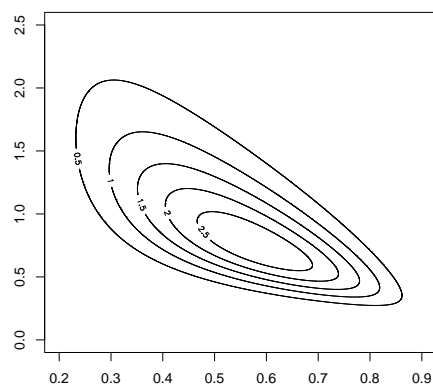
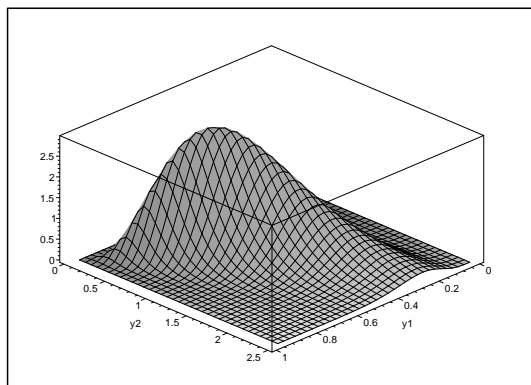
Obrázek 4.5: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0$ .



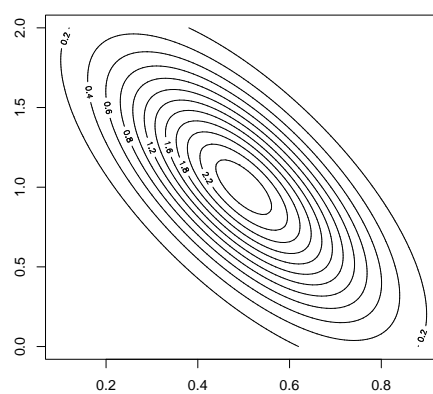
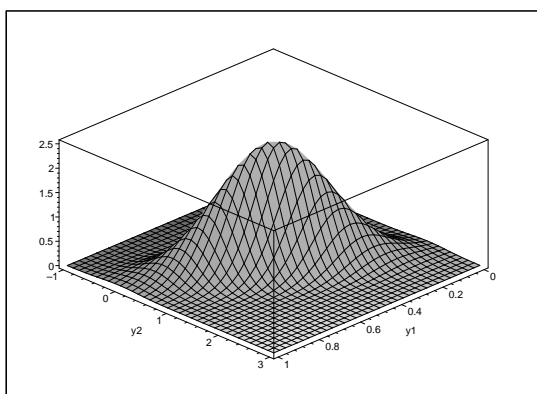
Obrázek 4.6: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0$ .



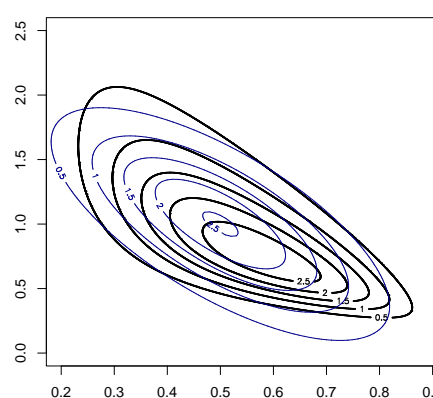
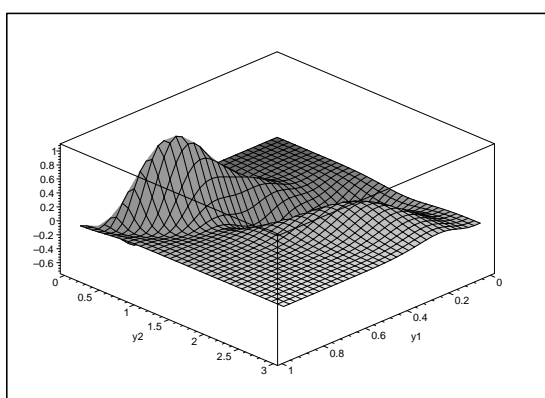
Obrázek 4.7: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0$ .



Obrázek 4.8: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0$ .



Obrázek 4.9: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0$ .



Obrázek 4.10: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0$ .

Pro naše pevně zvolené  $n$  celkem dostáváme, že hustota  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T$  by podle první metody měla přibližně být rovna hustotě  $g(y_1, y_2)$  a podle druhé metody by měla přibližně být rovna hustotě  $h(y_1, y_2)$ .

Na obrázcích 4.5 a 4.6 jsou grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0$ . Na obrázku 4.7 je jejich porovnání. Zatímco funkce  $g(y_1, y_2)$  je nenulová pouze pro  $y_1 \in (0, 1)$  a  $y_2 \in (0, \infty)$ , funkce  $h(y_1, y_2)$  je nenulová pro všechna  $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}_2$ . Poměrně velký rozdíl je i ve tvaru funkcí a poloze jejich maxima.

Stejně jako v jednorozměrném případě nás zajímá, jak se grafy obou funkcí změní, když zmenšíme rozptyly  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ . Na obrázcích 4.8 a 4.9 jsou grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0$ . Na obrázku 4.10 je jejich porovnání. Vidíme, že rozdíly mezi funkcemi  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  (jak ve tvaru funkcí, tak i v poloze maxima) se zmenšily.

V dodatku jsou další grafy nejen pro menší rozptyly, ale také pro  $\rho = -0,8$  a  $\rho = 0,8$ .

### 4.3 Třírozměrný případ

Nyní graficky porovnáme výsledky obou metod pro třírozměrný případ, zaměříme se však pouze na první dvě složky, aby bylo možné zobrazit grafy.

Nechť posloupnost náhodných vektorů  $\mathbf{X}_n = (X_{n1}, X_{n2}, X_{n3})^T$  je  $\text{AN}(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$ , kde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$  je nějaký vektor středních hodnot a  $\boldsymbol{\Sigma}$  je pozitivně definitní varianční matice. Zajímá nás, co můžeme říci o rozdělení posloupnosti náhodných vektorů  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T$ , jestliže pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$Y_{n1} = \frac{\exp(X_{n1})}{\exp(X_{n1}) + \exp(X_{n2}) + \exp(X_{n3})}, \quad (4.9)$$

$$Y_{n2} = \frac{\exp(X_{n2})}{\exp(X_{n1}) + \exp(X_{n2}) + \exp(X_{n3})}.$$

V první metodě se podíváme na to, jak by to vypadalo, kdybychom místo posloupnosti asymptoticky normálních vektorů měli náhodný vektor, který má přesně normální rozdělení. Zvolíme tedy pevně dostatečně velké  $n$ , označíme  $\mathbf{V} = \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_n$  a předpokládáme, že  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim \mathbf{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ . V příkladu 2.5 jsme vypočítali hustotu (2.6) transformovaného třírozměrného náhodného vektoru

$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$ , pro který platí

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\exp(X_1)}{\exp(X_1) + \exp(X_2) + \exp(X_3)}, \\ Y_2 &= \frac{\exp(X_2)}{\exp(X_1) + \exp(X_2) + \exp(X_3)}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$Y_3 = \exp(X_3).$$

Pro jednoduchost zvolíme nyní následující hodnoty parametrů

$$\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0)^T \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do (2.6) dostáváme hustotu náhodného vektoru  $\mathbf{Y}$  pro tuto volbu parametrů:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{\pi^{3/2} y_1 y_2 y_3 (1 - y_1 - y_2)} \\ &\times \exp \left\{ - \left( \log \frac{y_1 y_3}{1 - y_1 - y_2} \right)^2 - \left( \log \frac{y_2 y_3}{1 - y_1 - y_2} \right)^2 - (\log y_3)^2 \right\} \end{aligned}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $(y_1 + y_2) \in (0, 1)$  a  $y_3 \in (0, \infty)$ , jinak  $g(y_1, y_2, y_3) = 0$ . Podle věty o marginální hustotě, viz Anděl [1] věta 3.10 na str. 51, pro marginální hustotu  $g_m$  vektoru  $(Y_1, Y_2)^T$  platí

$$g_m(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}} g(y_1, y_2, y_3) \, dy_3.$$

Vypočtením tohoto integrálu dostaneme hustotu náhodného vektoru  $(Y_1, Y_2)^T$

$$\begin{aligned} g_m(y_1, y_2) &= \frac{1}{\sqrt{3}\pi y_1 y_2 (1 - y_1 - y_2)} \exp \left\{ \frac{2}{3} \log \frac{y_1}{1 - y_1 - y_2} \log \frac{y_2}{1 - y_1 - y_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \left( \log \frac{y_1}{1 - y_1 - y_2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \log \frac{y_2}{1 - y_1 - y_2} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$  a  $(y_1 + y_2) \in (0, 1)$ , jinak  $g_m(y_1, y_2) = 0$ .

První metodou jsme tedy zjistili, že pro naše pevně zvolené  $n$  by hustota náhodného vektoru  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T$  měla být přibližně rovna hustotě  $g_m(y_1, y_2)$ . Graf funkce  $g_m(y_1, y_2)$  je na obrázku 4.11.

Podívejme se nyní na druhou metodu, která využívá teorii třetí kapitoly. Chceme zjistit rozdělení posloupnosti vektorů  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T$ , pro něž platí (4.9). Definujme funkci

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}} \\ \frac{e^{x_2}}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}} \end{pmatrix},$$

pak  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T = \mathbf{g}(\mathbf{X}_n) = \mathbf{g}(X_{n1}, X_{n2}, X_{n3})$ . Z věty 3.5 dostaneme, že

$$(Y_{n1}, Y_{n2})^T \text{ je AN } \left( \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}), \frac{1}{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D} \right),$$

kde matice  $\mathbf{D}$  má následující tvar

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\mu_1}(e^{\mu_2}+e^{\mu_3})}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} & -\frac{e^{\mu_1}e^{\mu_2}}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} & -\frac{e^{\mu_1}e^{\mu_3}}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} \\ -\frac{e^{\mu_1}e^{\mu_2}}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} & \frac{e^{\mu_2}(e^{\mu_1}+e^{\mu_3})}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} & -\frac{e^{\mu_2}e^{\mu_3}}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} \\ -\frac{e^{\mu_1}e^{\mu_2}}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} & -\frac{e^{\mu_2}e^{\mu_3}}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} & \frac{e^{\mu_3}(e^{\mu_1}+e^{\mu_2})}{(e^{\mu_1}+e^{\mu_2}+e^{\mu_3})^2} \end{pmatrix}.$$

Pokud zvolíme  $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0)^T$  a pro pevně zvolené dostatečně velké  $n$  (stejně jako v první metodě) je

$$\frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

pak

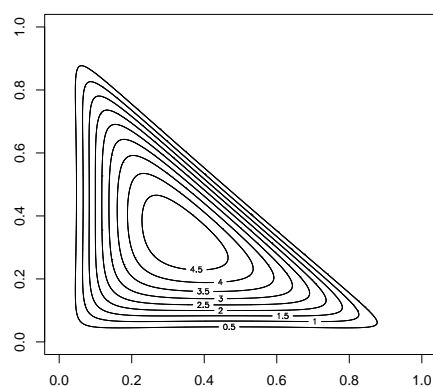
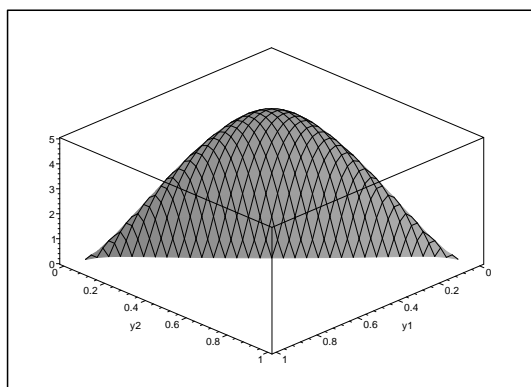
$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \frac{1}{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Označme  $h_m(y_1, y_2)$  hustotu normálního rozdělení

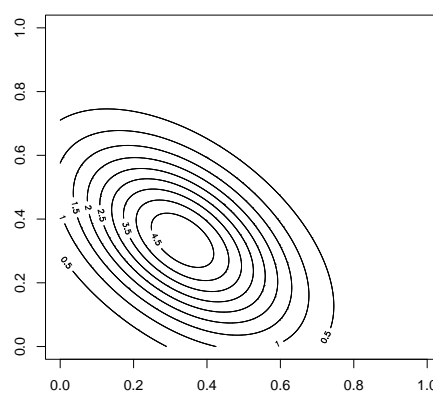
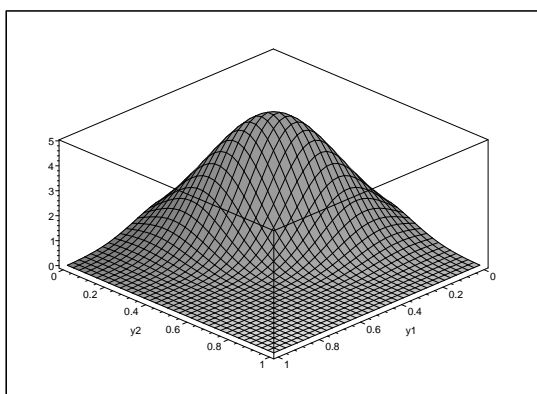
$$\mathbf{N} \left( \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Druhou metodou jsme tedy zjistili, že pro naše pevné  $n$  by hustota  $(Y_{n1}, Y_{n2})^T$  měla přibližně být rovna hustotě  $h_m(y_1, y_2)$ , jejíž graf je na obrázku 4.12.

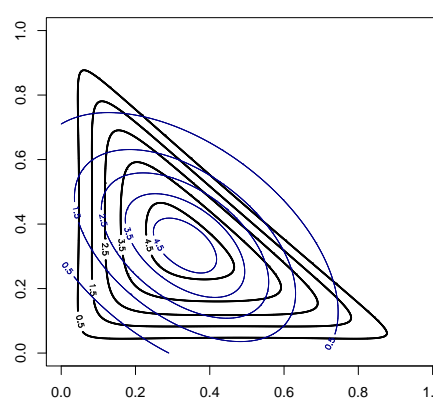
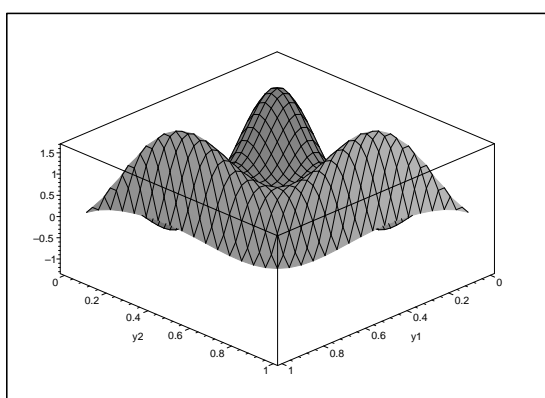
Srovnání grafů funkcí  $g_m(y_1, y_2)$  a  $h_m(y_1, y_2)$  je na obrázku 4.13. Také tentokrát se funkce liší především v tom, že funkce  $g_m(y_1, y_2)$  je nenulová jen pro  $y_1 \in (0, 1)$ ,  $y_2 \in (0, 1)$  a  $(y_1 + y_2) \in (0, 1)$ , zatímco funkce  $h_m(y_1, y_2)$  je nenulová pro všechna  $(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}_2$ .



Obrázek 4.11: Graf funkce  $g_m(y_1, y_2)$ .



Obrázek 4.12: Graf funkce  $h_m(y_1, y_2)$ .



Obrázek 4.13: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g_m(y_1, y_2) - h_m(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g_m(y_1, y_2)$  a  $h_m(y_1, y_2)$ .

# Kapitola 5

## Závěr

Poznamenejme několik slov k porovnání složitosti výpočtů v obou metodách (při odvozování obecného vzorce pro  $p$ -rozměrný vektor). V první metodě využíváme teorii uvedenou ve druhé kapitole. Než jsme byli schopni odvodit hustotu transformovaného  $p$ -rozměrného vektoru v příkladu 2.7, museli jsme nejprve vypočítat několik příkladů pro konkrétní volbu  $p$ . Pokud by transformace byla složitější, mohlo by být problematické vypočítat inverzní zobrazení a jakobián (nebo ověřit předpoklad regularity). Ve druhé metodě využíváme teorii uvedenou ve třetí kapitole. V příkladu 3.8 jsme vypočetli transformované asymptoticky normální rozdělení poměrně snadno, ale pro obecné  $p$  jsme neprovedli maticové násobení ve (3.6). Pokud bychom totiž pro obecné  $p$  a pro obecnou matici  $\Sigma$  chtěli rozepsat výsledek maticového násobení  $D\Sigma D^T$ , bylo by to nepřehledné.

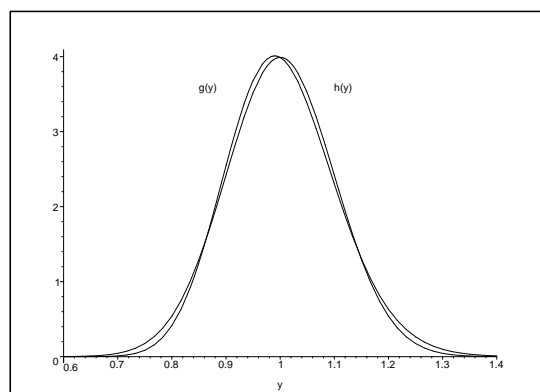
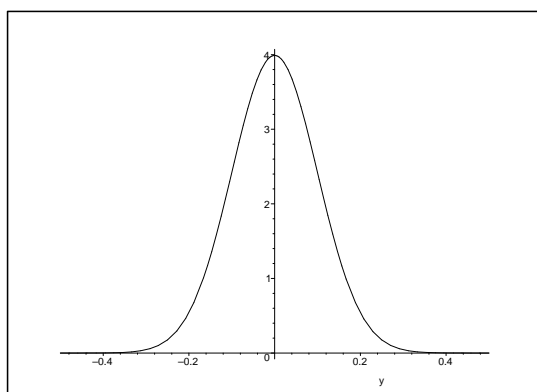
Na závěr shrneme získané výsledky. Ve čtvrté kapitole jsme metody porovnávali na základě grafů hustot, které aproximují hledané rozdělení. Ve všech třech případech (jednorozměrném, dvourozměrném i třírozměrném) jsme získali podobné výsledky. Hlavní rozdíl mezi porovnávanými hustotami byl tento: zatímco pomocí první metody dostaneme hustotu, která je nenulová na přesně vymezené oblasti, pomocí druhé metody dostaneme hustotu, která je nenulová v celém  $\mathbb{R}_p$ . Důležité je, že s rostoucím  $n$  (tzn. s klesajícími rozptyly) se k sobě obě aproximace přibližují. Grafické porovnání hustot je sice názorné, ale není přesné. Přesnější porovnání by mohlo být založeno na použití statistik.



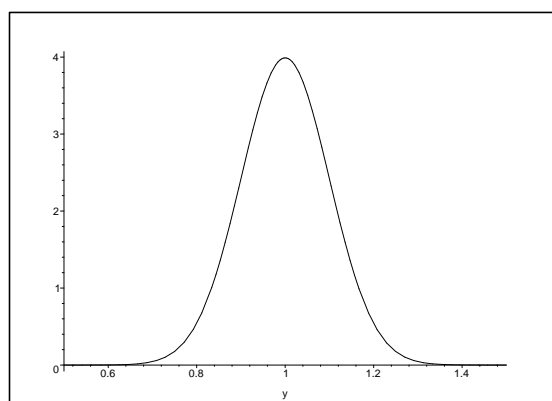
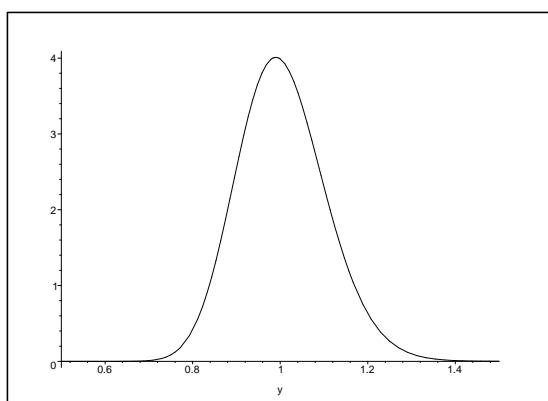
# Dodatek A

## Další grafy

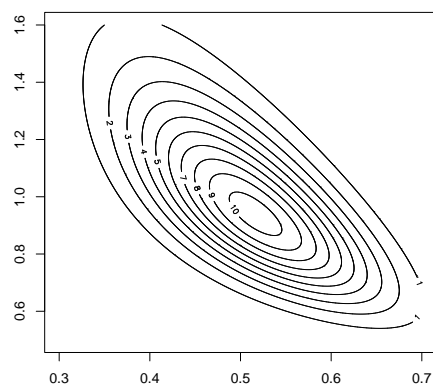
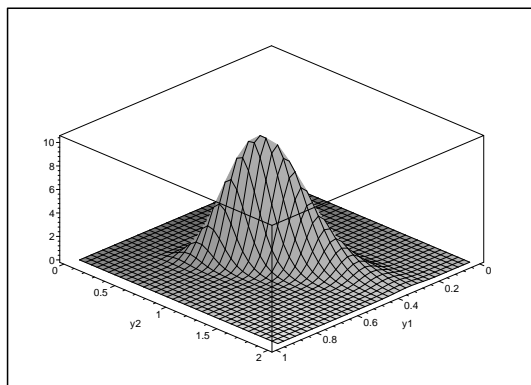
### A.1 Jednorozměrný a dvourozměrný případ



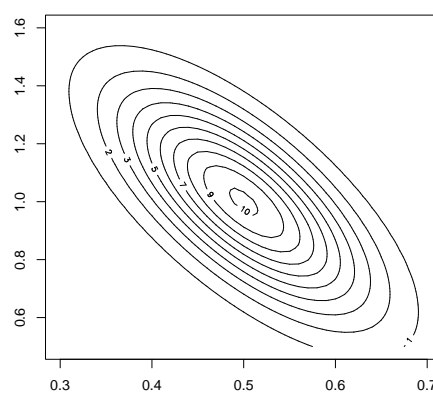
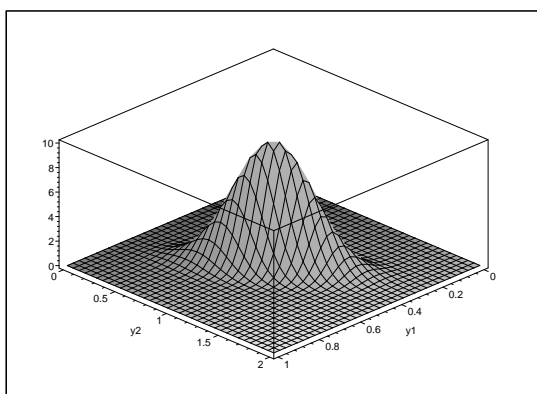
Obrázek A.1: Vlevo graf funkce  $f(x)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y)$  a  $h(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 0,1$ .



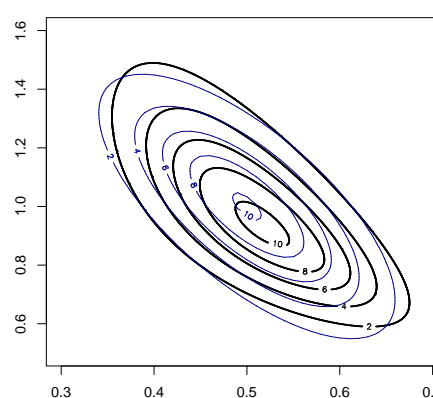
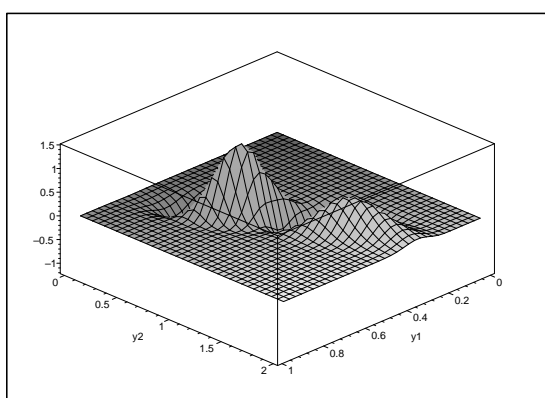
Obrázek A.2: Vlevo graf funkce  $g(y)$ , vpravo graf funkce  $h(y)$  pro  $\mu = 0$  a  $\sigma = 0,1$ .



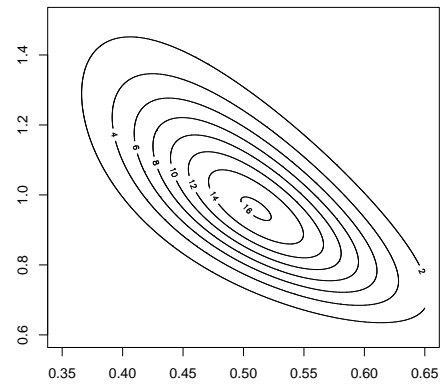
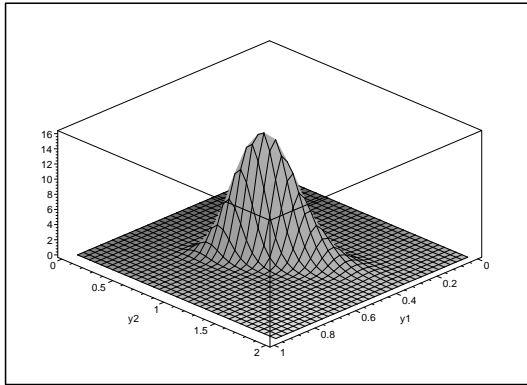
Obrázek A.3: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = 0$ .



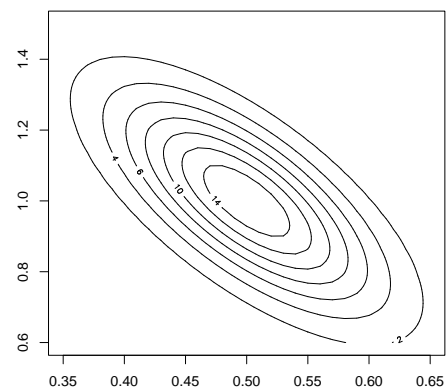
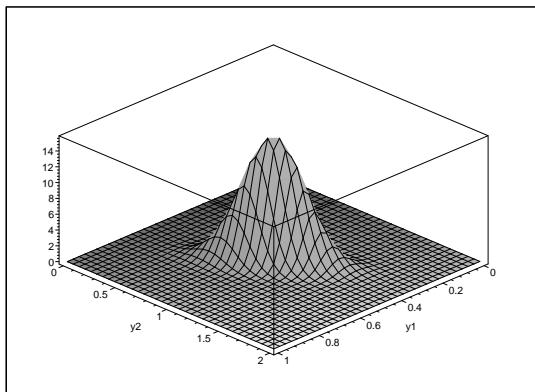
Obrázek A.4: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = 0$ .



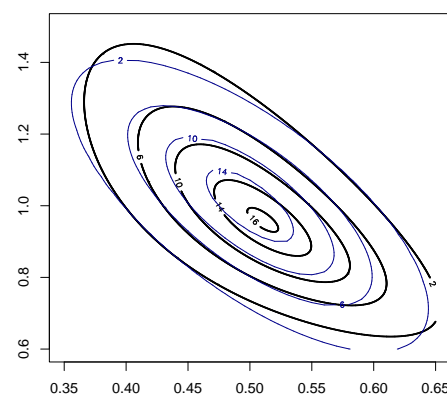
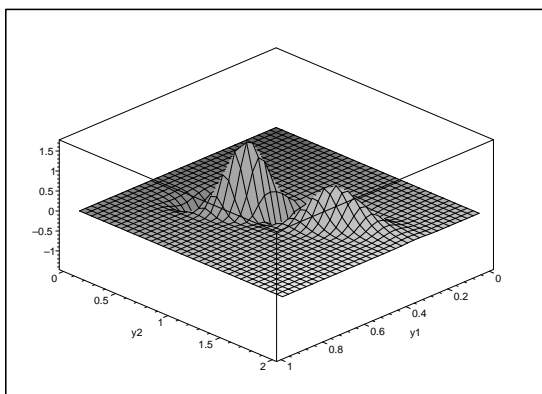
Obrázek A.5: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = 0$ .



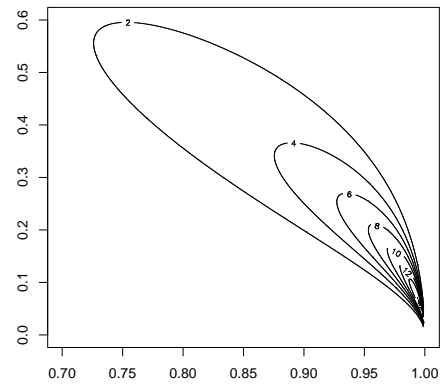
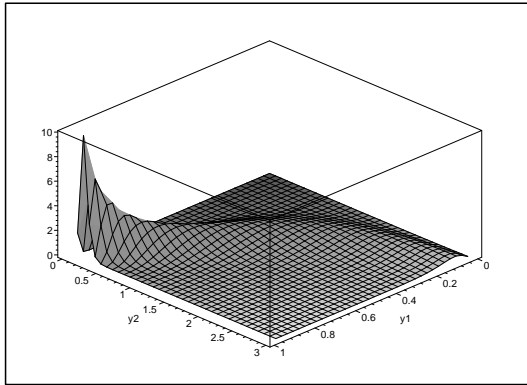
Obrázek A.6: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$  a  $\rho = 0$ .



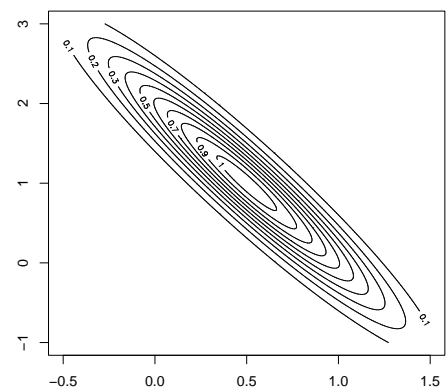
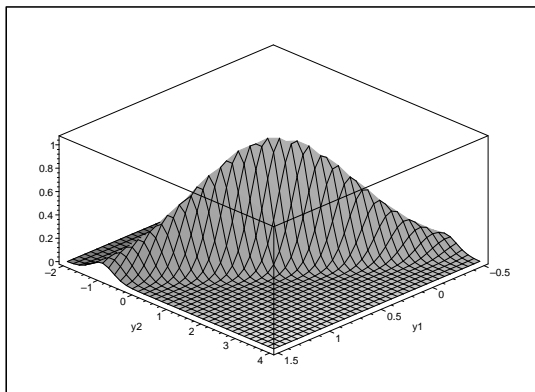
Obrázek A.7: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$  a  $\rho = 0$ .



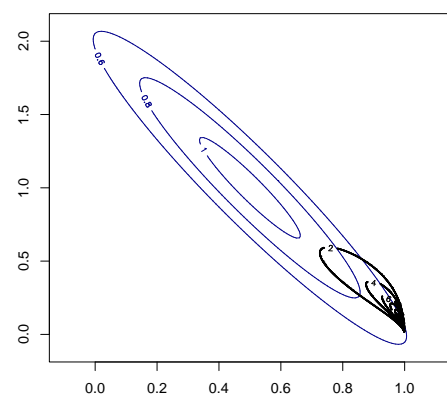
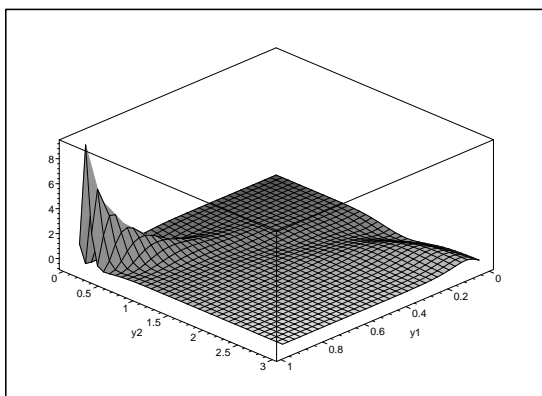
Obrázek A.8: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$  a  $\rho = 0$ .



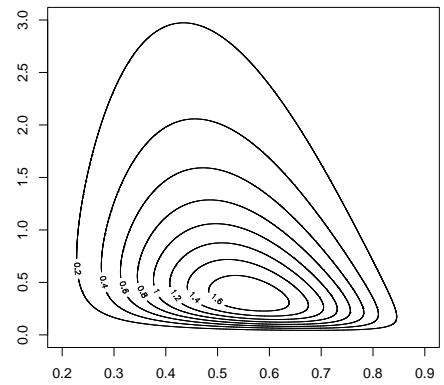
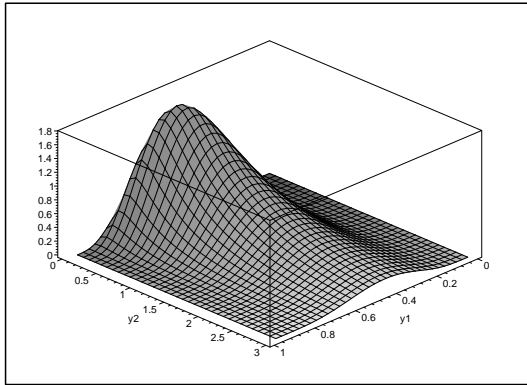
Obrázek A.9: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = -0,8$ .



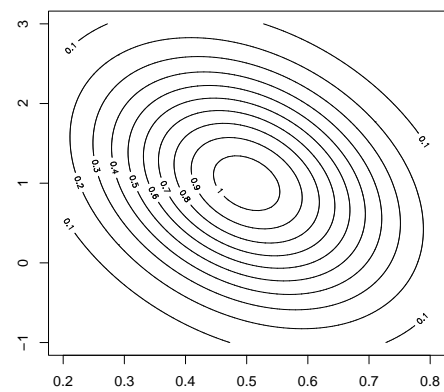
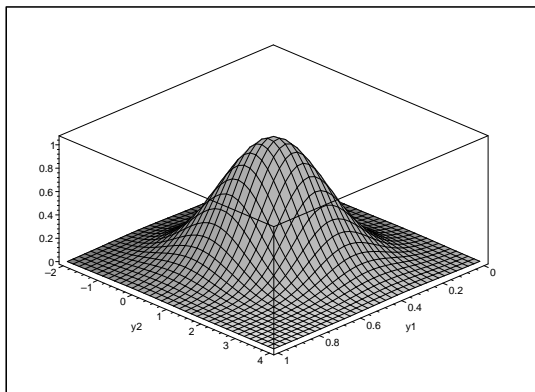
Obrázek A.10: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = -0,8$ .



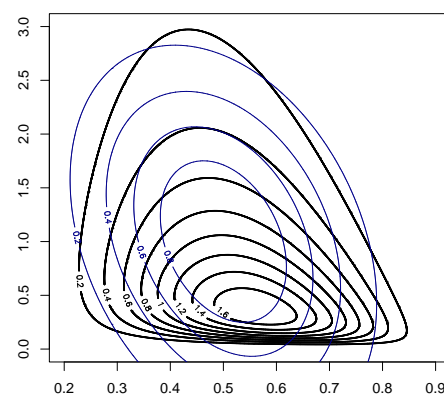
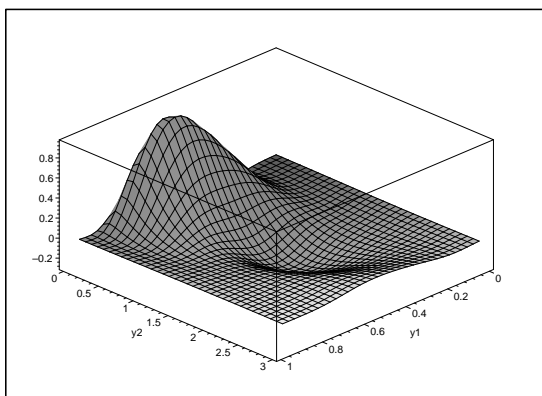
Obrázek A.11: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = -0,8$ .



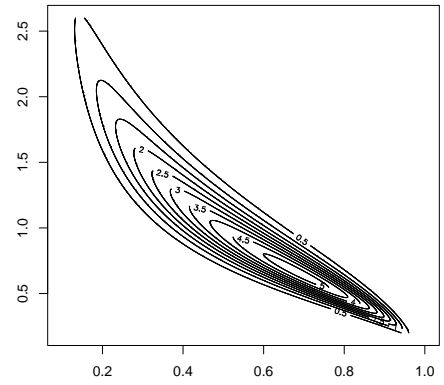
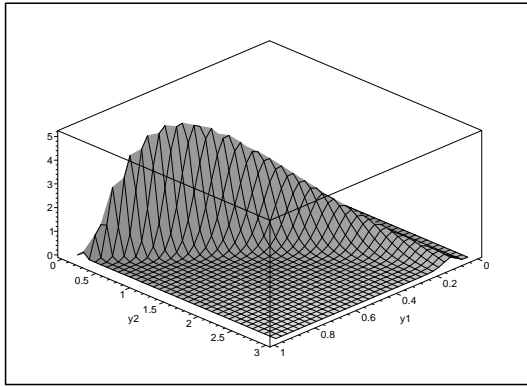
Obrázek A.12: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0,8$ .



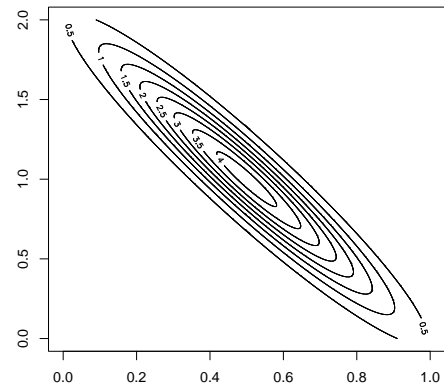
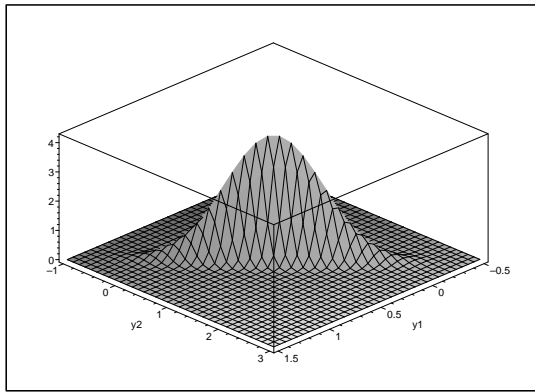
Obrázek A.13: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0,8$ .



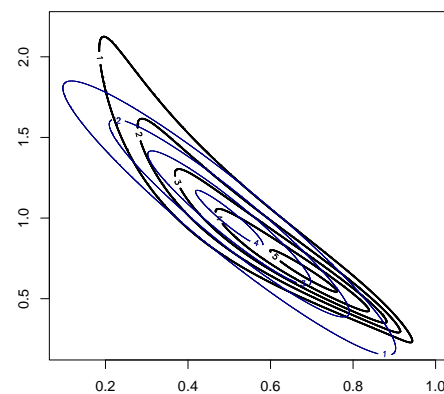
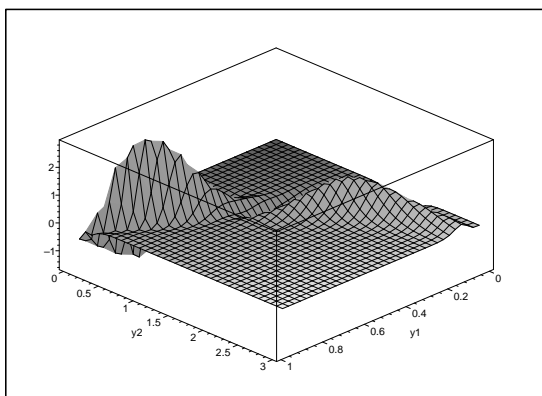
Obrázek A.14: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  a  $\rho = 0,8$ .



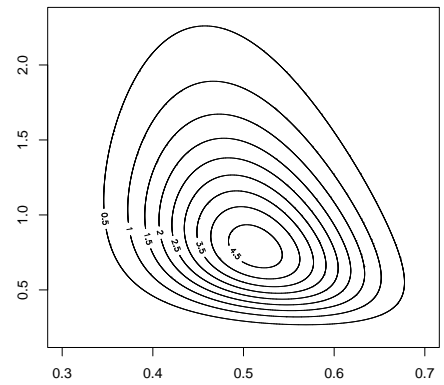
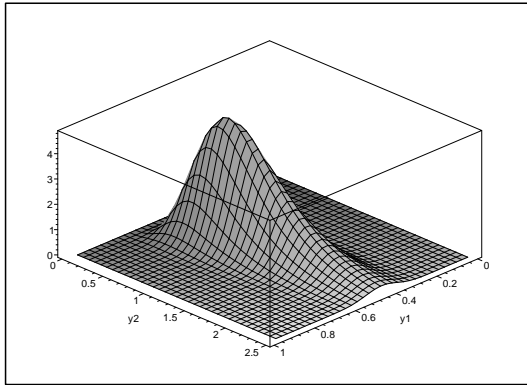
Obrázek A.15: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = -0,8$ .



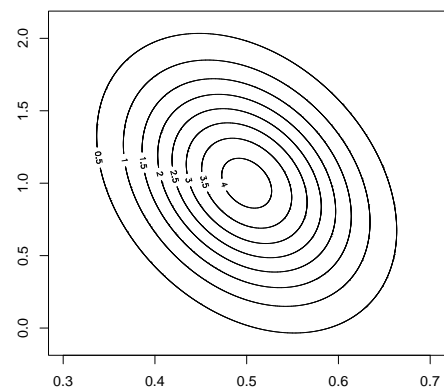
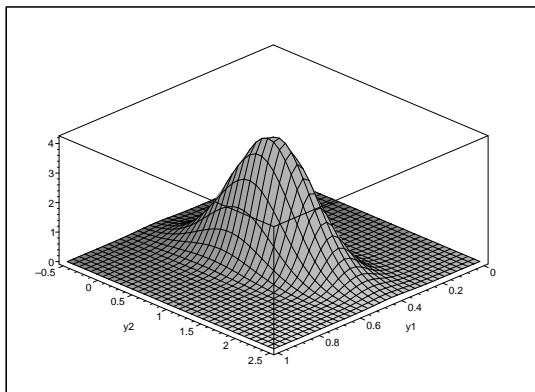
Obrázek A.16: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = -0,8$ .



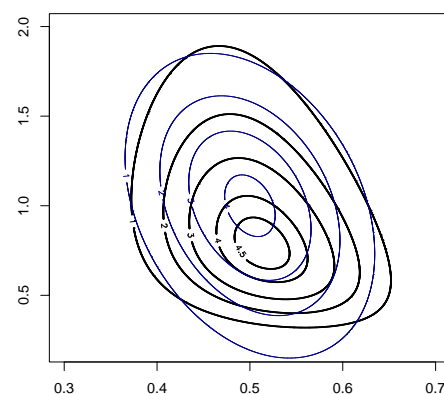
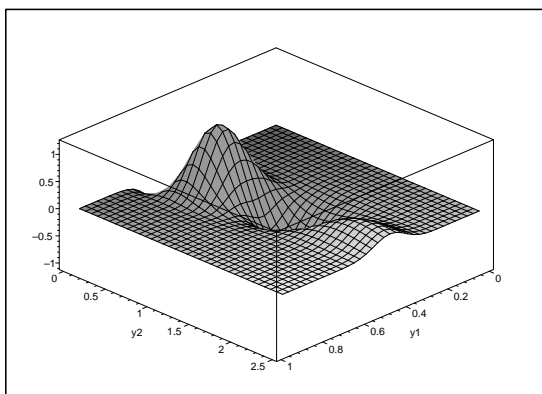
Obrázek A.17: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = -0,8$ .



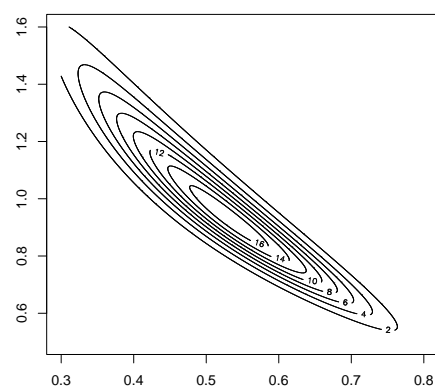
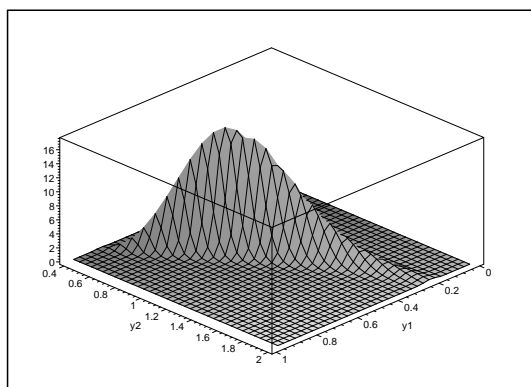
Obrázek A.18: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0,8$ .



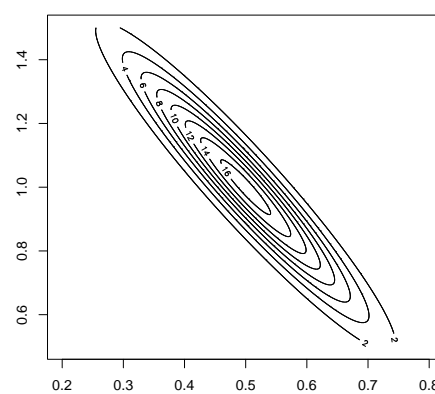
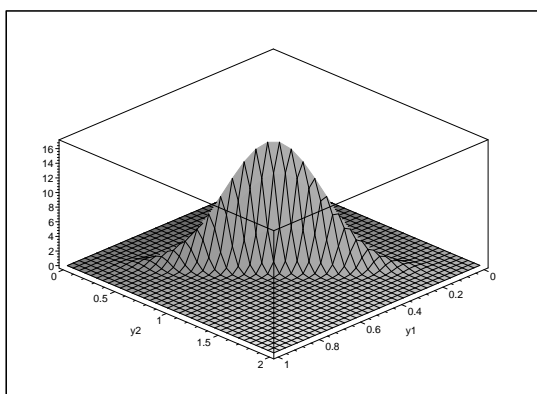
Obrázek A.19: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0,8$ .



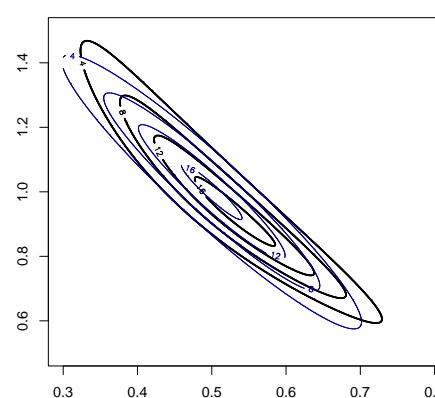
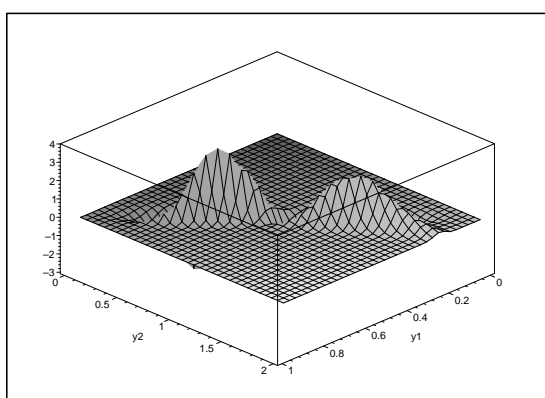
Obrázek A.20: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  a  $\rho = 0,8$ .



Obrázek A.21: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = -0,8$ .

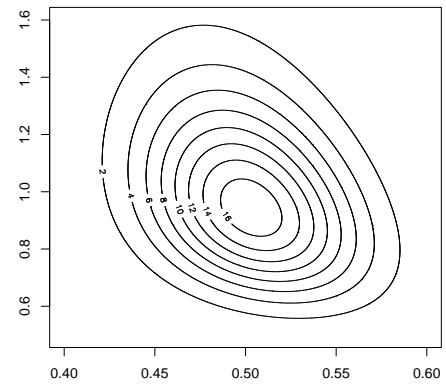
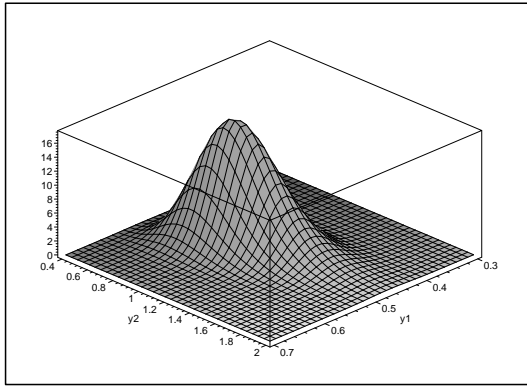


Obrázek A.22: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = -0,8$ .

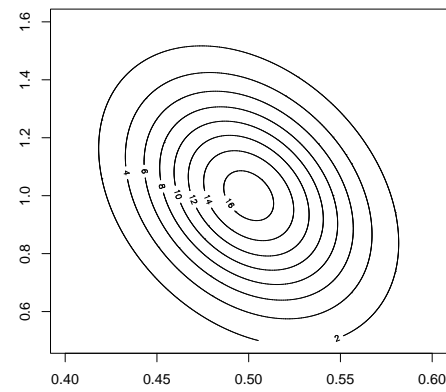
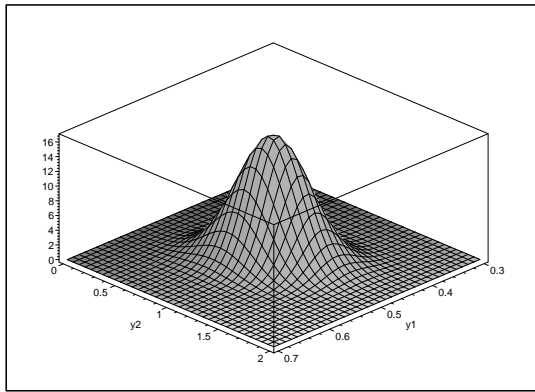


Obrázek A.23: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = -0,8$ .

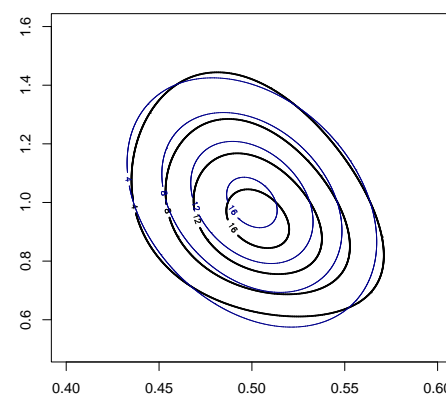
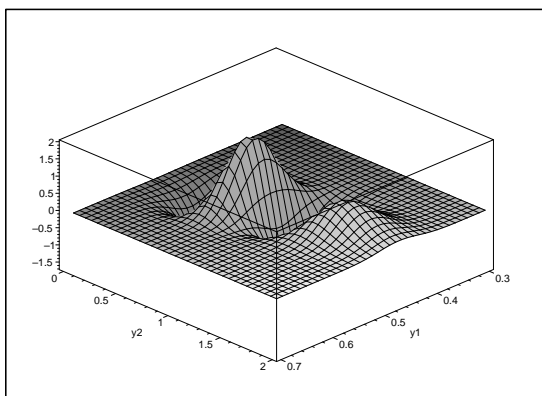




Obrázek A.24: Graf funkce  $g(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = 0,8$ .



Obrázek A.25: Graf funkce  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = 0,8$ .



Obrázek A.26: Vlevo graf rozdílu funkcí  $g(y_1, y_2) - h(y_1, y_2)$ , vpravo grafy funkcí  $g(y_1, y_2)$  a  $h(y_1, y_2)$  pro  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25$  a  $\rho = 0,8$ .

# Literatura

- [1] Anděl J. (2005): *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha.
- [2] Serfling Robert J. (2002): *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley-Interscience, New York.
- [3] Zajíček L. (2003): *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*. Matfyzpress, Praha.