Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Ludvík

Princip neurčitosti ve Fourierově transformaci

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: *RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.*
Studijní program: *Matematika, obecná matematika*

2006

Chtěl bych poděkovat RNDr. Daliboru Pražákovi za jeho trpělivost a důležité připomínky, které jistě pozvedly úroveň této práce. Dále kolegům Petru Poštovi a Janu Březinovi za přínosné matematické kontemplace. Na závěr děkuji Molloyovi za jeho nevyčerpatelný entuziasmus při řešení subtilních životních problémů.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 22.5. 2006 Pavel Ludvík

Obsah

Název práce: Princip neurčitosti ve Fourierově transformaci
Autor: Pavel Ludvík
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
E-mail vedoucího: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Motivací této práce je představení ideje principu neurčitosti jako obecného matematického principu a jeho ozřejmění na příkladech. Základem je důkaz Heisenbergovy nerovnosti pro funkce z $L^2(\mathbb{R})$. Uvedena jsou i její zobecnění pro funkce z $L^2(\mathbb{R}^n)$, pro obecnější normu a také analogická nerovnost pro operátory. Závěrečná část práce je věnována příkladům tzv. kvalitativních principů neurčitosti. Na nich si můžeme všimnout, že ideu principu neurčitosti lze nalézt v různých odvětvích matematiky. První příklady využívají tvrzení komplexní analýzy, kdežto závěrečná Kolmogorovova věta má blízko k funkcionální analýze.

Klíčová slova: Princip neurčitosti, Fourierova transformace

Title: The uncertainty principle and the Fourier transform
Author: Pavel Ludvík
Department: Departement of mathematical analysis
Supervisor: RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The main purpose of this work is introduction of the uncertainty principle as the general mathematical idea. We also tried to demonstrate its importance on examples. Fundamental part of the work is Heisenberg inequality for functions from $L^2(\mathbb{R})$. Then we studied generalizations for functions from $L^2(\mathbb{R})$, for others norms and also analogous inequality for operators. The last chapter of the work contains examples of so called qualitative uncertainty principle. There we can notice that idea of uncertainty principle is spread in many parts of mathematics. First examples are related to complex analysis however the final Kolmogorov theorem is rather close to functional analysis.

Keywords: Uncertainty principle, Fourier tranform

Kapitola 1

Teoretická příprava

1.1 Úvod

V této kapitole bychom chtěli zavést základní pojmy týkající se Fourierovy transformace a připomenout její nejdůležitější vlastnosti. Pro přehlednost zde uvedeme také některé ne úplně triviální věty, které budou využity v důkazech některých vět v dalších kapitolách a nebudou tak narušovat plynulost nejdůležitějších důkazů, které naše práce obsahuje. Tato kapitola nám poslouží také k zavedení příslušného značení a konvencí, které v textu budeme používat.

Poznámka. Pro lepší čitelnost textu budeme používat následující značení.

- Mějme diferencovatelnou funkci f definovanou na $\mathbb{R}^n$. Potom budeme její parciální derivace značit takto: $\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$.
- Budeme-li pracovat v Hilbertově prostoru H, skalární součin prvků $x, y \in H$ značíme jako $\langle x, y \rangle_H$. Pokud bude zřejmé, ve kterém prostoru pracujeme, budeme psát $x \cdot y$.

1.2 Fourierova transformace na L^1

1.1 Definice. *Pro funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujme operátor Fourierovy transformace $\mathcal{F}$ a funkci $\widehat{f}$ následovně*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

O funkci $\widehat{f}$ mluvíme jako o Fourierově transformaci funkce f.

Definujme dále inverzní Fourierovu transformaci takto

$$\mathcal{F}_{-1}(f)(\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nyní uvedeme větu se základními vlastnostmi Fourierovy transformace na L^1.

1.2 Věta. *Mějme čísla* α, λ *z* $\mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ *a také* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Potom platí:*

(a) $\mathcal{F}(f \exp(2\pi i\alpha \cdot \mathrm{id}))(\xi) = \widehat{f}(\xi - \alpha)$

(b) $\mathcal{F}(f(\mathrm{id} - \alpha))(\xi) = \widehat{f}(\xi) \exp(-2\pi i\alpha \cdot \xi)$

(c) $\mathcal{F}(\overline{f(-\mathrm{id})})(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$

(d) $\mathcal{F}(f(\mathrm{id}/\beta)(\xi) = \beta\widehat{f}(\beta\xi)$

(e) $\int_{R^n} \widehat{f} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g \, dx$ *(tzv. multiplikativní formule).*

1.3 Věta. *Nechť* $f, \widehat{f} \in L(\mathbb{R}^n)$. *Potom*

$$[\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_{-1}(f)](x) = f(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in \mathbb{R}^n.$$

Další věta ozřejmuje vztah mezi Fourierovou transformací a derivací.

1.4 Věta. *Nechť* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *a* $1 \leq j \leq n$.

(a) Je-li také $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *pak*

$$\partial_j \widehat{f}(x) = (-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(x).$$

(b) Jsou-li navíc funkce f *a* $\partial_j f$ *spojité na* $\mathbb{R}^n$ *a je splněno, že* $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *a* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, *potom platí*

$$(\partial_j f)\widehat{\ }(x) = 2\pi i x_j \widehat{f}(x).$$

1.5 Definice. *Multiindexem nazveme n-tici čísel* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *kde* $\alpha_i \in \mathbb{Z}_0^+$.
Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$ *nazýváme výškou (nebo také stupněm) multiindexu.*
Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ *definujeme* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$
Pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *definujeme*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Následuje zobecnění Věty 1.4.

1.6 Věta. *Nechť* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *a* k *je nezáporné celé číslo.*

(a) Je-li pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$ *funkce* $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *pak*

$$\forall |\alpha| \leq k \qquad \mathcal{D}^\alpha \widehat{f}_j = [(-2\pi i x)^\alpha f]\widehat{\ }.$$

(b) Jsou-li navíc pro každý multiindex $|\alpha| \leq k$ *funkce* f *a* $\mathcal{D}^\alpha f$ *spojité na* $\mathbb{R}^n$, $\lim_{|x|\to\infty} \mathcal{D}^\alpha f(x) = 0$ *a* $\mathcal{D}^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *potom platí*

$$\forall |\alpha| \leq k \qquad (\mathcal{D}^\alpha f)\widehat{\ }(x) = (2\pi i x)^\alpha \widehat{f}(x).$$

Důkazy všech vět v této kapitole lze nalézt v každé knize o Fourierově analýze, například v [1, 199-218], kapitola 9.

1.3 Základy teorie distribucí

1.7 Definice. *Mějme otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Prostor nekonečně diferencovatelných funkcí na Ω s kompaktním nosičem, který taktéž leží v Ω, budeme značit $\mathcal{D}(\Omega)$.*

1.8 Definice. *Nechť ϕ_j a ϕ jsou funkce z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Potom říkáme, že posloupnost ϕ_j konverguje v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pro $j \to \infty$ a značíme $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$, jestliže existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$ a navíc pro každý multiindex α $D^\alpha \phi_j \rightrightarrows D^\alpha \phi$ na R^n.*

1.9 Definice. *Distribucí na R^n nazveme lineární zobrazení*

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},$$

které má navíc následující vlastnost

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi \quad \Rightarrow \quad (T\phi_j \to T\phi \text{ pro } j \to \infty).$$

Občas budeme používat alternativní značení: $T\phi = (T, \phi)$.

1.1 Regulární distribuce. Mějme $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definujme lineární formu T_f na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jako

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda)\phi(\lambda)d\lambda \qquad \text{pro každou } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Snadno nahlédneme, že T_f je distribucí.

1.10 Definice. *Nechť T je distribuce na $\mathbb{R}^n$, potom pro $j \in \{1, \dots, n\}$ definujeme parciální derivaci T podle x_j jako distribuci $\frac{\partial}{\partial x_j}T$ takto*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}T, \phi\Big) = -\Big(T, \frac{\partial}{\partial x_j}\phi\Big)$$

pro všechna $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Parciální derivace T vyšších řádů jsou také dobře definovány. Nechť α je multiindex, potom

$$(\partial^\alpha T, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(T, \partial^\alpha \phi).$$

V pozdějších kapitolách využijeme následující velmi důležité vlastnosti distribucí.

1.11 Věta. *Nechť T je distribucí na $\mathbb{R}^n$ a*

$$\partial_{x_j} T = 0 \qquad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Potom je distribuce T konstantní v následujícím smyslu: existuje $C \in \mathbb{C}$ taková, že

$$T\phi = C \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, dx \qquad \text{pro všechna } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz této věty můžete nalézt jako Theorem 6.2.1 v [3, 164-165].

1.4 Fourierova transformace na L^2

Fourierova transformace je dobře definována na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ale nelze ji nějakým způsobem rozšířit na širší množinu objektů? Mohli bychom se pokusit ji definovat na prostoru distribucí tak, aby Fourierova transformace funkcí z $L^n(\mathbb{R}^n)$ odpovídala „distribuční“ Fourierově transformaci příslušných regulárních distrubucí. Inspirací nám může být multiplikativní formulí (Věta 1.2), která jistou cestu rozšíření naznačuje

$$(\widehat{T}, \phi) = (T, \widehat{\phi}) \quad \text{pro všechna } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Zde se ale dostáváme do problémů, protože Fourierova transformace funkce z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ již do do této množiny patřit nemusí. To nás motivuje hledat množinu funkcí na $\mathbb{R}^n$, která by byla uzavřená na Fourierovu transformaci.

1.12 Definice. *Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definujeme jako množinu*

$$\{f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D^\beta f(x) \text{ je omezená pro všechny multiindexy } \alpha, \beta\}.$$

1.13 Věta. *Základní vlastnosti Schwartzova prostoru:*

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *a* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *je hustý v* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *pro* $p \in [1, \infty)$

(b) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha f(x),\ D^\beta(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(c) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(d) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

Nyní už máme připraveno vše potřebné pro zavedení temperovaných distribucí.

1.14 Definice. *Temperovanou distribucí na R^n nazveme lineární zobrazení*

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},$$

které má navíc spojité v následujícím smyslu: Pokud $\{\phi_j\}$ je posloupnost funkcí z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a pro každý multiindex α a každý polynom $p(x)$ je $p\, D^\alpha \phi_j \rightrightarrows 0$, potom

$$T(\phi_j) \to 0.$$

Poznámka. Snadno nahlédneme, že temperované distribuce jsou současně distribucemi.

1.15 Definice. *Nechť T je temperovaná distribuce, potom definujeme její Fourierovu transformaci $\widehat{T}$ předpisem*

$$(\widehat{T}, \phi) = (T, \widehat{\phi}) \qquad \text{pro každé } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

$\widehat{T}$ je opět temperovaná distribuce.

A inverzní Fourierovu transformaci $\check{T}$ předpisem

$$(\check{T}, \phi) = (T, \check{\phi}) \qquad \text{pro každé } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

1.2 Regulární temperované distribuce. Mějme $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, kde $1 \le p \le \infty$. Definujme lineární formu S_f na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jako

$$S_f(\phi) = \int_\Omega f(\lambda)\phi(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{pro každou } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Potom je S_f temperovanou distribucí.

1.16 Definice. *Je-li funkce $f \in L^2(R^n)$, definujeme Fourierovu transformaci jako $g \in L^2(R^n)$, pro niž $\widehat{S}_f = S_g$. Analogicky zavádíme inverzní Fourierovu transformaci $\check{f}$.*

Následující věta ukazuje, že je tato definice skutečně korektní.

1.17 Věta (Plancherel). *Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Potom existuje $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že $\widehat{S}_f = S_g$, $S_f = \check{S}_g$ a $\|f\|_2 = \|g\|_2$.*

S drobnými obměnami lze tuto větu nalézt v téměř každé knize věnované Fourierově analýze. V tomto znění například jako Věta 33.7. v [4, 112].

1.3 Poznámka. Podle multiplikativní formule z Věty 1.2 platí, že Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^n)$ je skutečně rozšířením Fourierovy transformace v $L^1(\mathbb{R}^n)$, ztotožníme-li temperovanou distribuci S_f s funkcí f. Protože je $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ hustá v $L^2(\mathbb{R}^n)$ není jistě překvapením, že i ostatní vztahy z Věty 1.2 platí i pro Fourierovu transformaci v $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.18 Lemma. *Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$ a $\xi\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Potom f je slabě diferencovatelná, a platí*

$$(f')\widehat{\ }(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi) \quad \textit{skoro všude.}$$

Důkaz. Z Plancherelovy věty plyne, že existuje funkce $g \in L^2(\mathbb{R})$ taková, že

$$\widehat{S}_g = S_{2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)}, \text{ a tedy pro všechna } \phi \in S(\mathbb{R})$$

$$\int g(x)\widehat{\phi}(x)\, dx = \int 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)\phi(\xi)\, d\xi. \tag{1.1}$$

Nyní ukážeme, že temperovaná distribuce S_g je derivací distribuce S_f, což je ekvivalentní s tvrzením, že

$$\int g(x)\phi(x) = -\int f(x)\phi'(x) \quad \text{pro všechna } \phi \in S(\mathbb{R}).$$

Protože je Fourierova transformace lineární izomorfizmus $S(\mathbb{R})$ na $S(\mathbb{R})$, bude nám stačit dokázat, že

$$\int g(x)\widehat{\phi}(x) = -\int f(x)(\widehat{\phi})'(x).$$

Dosazením do (1.1), s využitím definice Fourierovy transformace a derivace pro temperované distribuce a vztahů z Věty 1.4 počítejme:

$$\int g\widehat{\phi} = 2\pi i\int \xi\widehat{f}(\xi)\phi(\xi) = 2\pi i\int f(\xi)[\xi\phi(\xi)]\widehat{\ } = -\int f(\xi)(\widehat{\phi})'(\xi).$$

Distribuce S_g je tedy skutečně distributivní derivací S_f. Protože $g \in L^2(\mathbb{R})$, je také $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Navíc je prostor testovacích funkcí v definici slabé derivace menší než prostor testovacích funkcí při ověřování distributivní derivace, to znamená $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$. Z toho plyne, že funkce g je slabou derivací f přímo z definice.

Rovnost uvedenou v lemmatu již získáme snadným výpočtem. Pro všechna $\phi \in S(\mathbb{R})$ totiž platí

$$\int \widehat{g}(x)\phi(x)\,dx = \int g(x)\widehat{\phi}(x)\,dx = \int 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi)\phi(\xi)\,d\xi$$

a tedy $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi)$ pro skoro všechna $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Kapitola 2

Princip neurčitosti

2.1 O co vlastně jde?

Princip neurčitosti není jedna nerovnost nebo přesné tvrzení. Spíše je vhodné na něj nahlížet jako na obecný princip týkající se Fourierovy transformace, který poukazuje na vztah mezi nosiči funkce a její Fourierovy transformace nebo mezi jejich „rozprostřenostmi“. Jeho význam nejlépe vystihuje tvrzení:

Nenulovou funkci a její Fourierovu transformaci nemůžeme současně přesně lokalizovat.

Hlavní důvod, proč se princip neurčitosti začal zkoumat, leží ve fyzikální praxi. Fyzika také dává sousloví *princip neurčitosti* dobrý smysl. Ten můžeme pochopit z názorné interpretace v klasické fyzice: Amplitudu zvukového signálu v čase t můžeme reprezentovat funkcí f. Potom Fourierova transformace $\widehat{f}$ nese informaci o složení funkce f ze sinových vln různých frekvencí. Princip neurčitosti vyjadřuje, že signál nemůžeme libovolně omezit současně časově i frekvenčně. Takto princip neurčitosti vykládal na svých přednáškách již Norbert Wiener v roce 1925. Matematická stránka principu neurčitosti byla dlouhou dobu opomíjena a zasloužené pozornosti se dočkala až v šedesátých a sedmdesátých letech dvacátého století. Od té doby se stala předmětem mnoha článků a monografií.

2.2 Heisenbergova nerovnost

2.1 Věta. *Pro každou $f \in L^2(\mathbb{R})$ a čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí nerovnost*

$$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}} (\xi - b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2}. \tag{2.1}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $f(x) = C \exp(2\pi i b x) \exp(\frac{\lambda}{2}(x-a)^2)$ pro nějaké $C \in \mathbb{C}$ a $\lambda < 0$ (skoro všude).

Důkaz. V prvním kroku nerovnost lehce zjednodušíme. Pro libovolné hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ uvažujme transformaci, která každé funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ přiřadí funkci $f_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$, kde

$$f_{a,b}(x) = e^{2\pi i b x} f(x-a),$$

pro kterou podle Poznámky 1.4 platí následující vztah

$$(f_{a,b})\widehat{\ }(\xi) = e^{-2\pi i a(\xi - b)} \widehat{f}(\xi - b)$$

a proto také

$$|f_{a,b}(x)| = |f(x-a)| \text{ a } \left|(f_{a,b})\widehat{\ }(\xi)\right| = |\widehat{f}(\xi - b)|\,.$$

Nejprve dokážeme nerovnost

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2},$$

tedy nerovnost (2.1) se speciální volbou $a = b = 0$. Dosazením funkce $f_{a,b}$ získáme

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x-a)|^2\,dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi - b)|^2\,d\xi \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2}$$

a snadnými lineárními substitucemi $y = x - a$ a $\psi = \xi - b$ provedenými v uvedených integrálech již dostaneme nerovnost (2.1). V další části důkazu proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = b = 0$.

Funkce f leží v $L^2(\mathbb{R})$, ale to nám ještě nezaručuje, že integrály na levé straně nerovnosti jsou konečné. Pokud by byl první z integrálů nekonečný, pak by byla nerovnost triviálně splněna v případě, že je druhý integrál různý od nuly. Předpokládejme, že je nulový. Z toho plyne, že $\widehat{f}$ je nulová skoro všude. A protože je Fourierova transformace určena jednoznačně až na množinu míry nula, znamenalo by to, že i funkce f je skoro všude nulová, což je spor s nekonečností prvního integrálu. Druhý integrál je v tedy nutně nenulový a nerovnost platí. Podobnou úvahu můžeme provést i v případě, že je nekonečný druhý integrál.

V dalším chodu důkazu proto považujme oba integrály na levé straně za konečné. Zde se zřejmě skrývá jádro celého tvrzení.

Z Lemmatu 1.18 víme, že je f slabě diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a má proto (lokálně) absolutně spojitého reprezentanta. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je funkce f absolutně spojitá na každé kompaktní množině. Můžeme tedy použít větu o integrování per-partes na kompaktním intervalu $[A, B]$. Protože $(|f(x)|^2)' = (f\overline{f})' = \operatorname{Re}(f'\overline{f} + f\overline{f}') = \operatorname{Re}(\overline{f'}f + f\overline{f'}) = 2\operatorname{Re}(\overline{f'}f)$, platí také

$$\int_A^B |f(x)|^2 = x|f(x)|^2\Big|_A^B - \int_A^B x(|f(x)|)' = \\ = x|f(x)|^2\Big|_A^B - 2\operatorname{Re}\int_A^B x f(x)\overline{f'(x)}. \quad (2.2)$$

Z předpokladu $f \in L^2(\mathbb{R})$ získáme konečnost výrazu $\int_A^B |f(x)|^2$ pro $A \to -\infty$ a také $B \to -\infty$. Z poznatků, že $f' \in L^2(\mathbb{R})$ a $xf \in L^2(\mathbb{R})$, dostáváme konečnost výrazu $\int_A^B x f(x)\overline{f'(x)}\,dx$ pro $A \to -\infty$ nebo $B \to \infty$. To nahlédneme s pomocí Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

$$\Big(\int_A^B |xf(x)\overline{f'(x)}|\Big)^2 \leq \int_A^B |xf(x)|^2 \int_A^B |f'(x)|^2 < \|xf\|_2 \|f'\|_2\,.$$

Z konečnosti těchto integrálů a ze vztahu (2.2) plyne existence limit

$$\lim_{x\to-\infty} x|f(x)|^2 = K \qquad \lim_{x\to\infty} x|f(x)|^2 = L,$$

kde $K, L \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že dokonce $K = L = 0$. Předpokládejme pro spor, že $K > 0$. Z definice limity tedy existuje $d \in \mathbb{R}$, že $\forall x > d$ je $x|f(x)|^2 > \frac{L}{2}$ a platí následující nerovnost

$$\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \leq \int_d^\infty |xf(x)|^2 \leq \frac{L}{2}\int_d^\infty 1 = \infty,$$

což je spor s $xf \in L(\mathbb{R})$. Proto platí, že $L = 0$. Analogicky dostaneme, že $K = 0$.

Provedeme-li nyní zmíněné limitní přechody v rovnosti (2.2), dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = -2\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,dx. \tag{2.3}$$

Nyní již máme připraveno vše potřebné. Aplikací Cauchy-Schwarzovy nerovnosti, Plancherelovy věty a vztahu z Lemmatu 1.18 získáme kýženou nerovnost

$$\|f\|_2^4 = \Big(\int |f(x)|^2\Big)^2 = \Big(-2\operatorname{Re}\int xf(x)\overline{f'(x)}\,dx\Big)^2 \underset{(1)}{\leq} 4\Big|\int xf(x)\overline{f'(x)}\,dx\Big|^2$$

a dále

$$\begin{aligned} 4\Big|\int xf(x)\overline{f'(x)}\,dx\Big|^2 &\underset{(2)}{\leq} 4\int \big|xf(x)\big|^2 \int \big|f'(x)\big|^2 = \\ = 16\pi^2 \int x^2|f(x)|^2 \int \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 &= 16\pi^2\|xf\|^2\|\xi\widehat{f}\|^2. \end{aligned}$$

Naším posledním úkolem je vyšetřit, kdy v (2.1) nastává rovnost. Pro tento účel sledujme chování nerovností označených výše jako (1) a (2).

Označme si $\phi(x) = xf(x)\overline{f'(x)}$. Potom v nerovnosti (1) nastane rovnost, právě když $\big(\operatorname{Re}\int\phi(x)\big)^2 = \big(\int|\phi(x)|\big)^2$. Díky (2.3) platí $\operatorname{Re}\int\phi(x) \leq 0$. Pro rovnost v (1) tedy musí být

$$-\operatorname{Re}\int\phi(x) = -\int\operatorname{Re}\phi(x) = \int|\phi(x)|$$

Úpravou rovnosti získáme $\int|\phi(x)| + \operatorname{Re}\phi(x)\,dx = 0$. A protože je integrand nezáporný, platí z vlastností Lebesgueova integrálu, že je $|\phi(x)| = -\operatorname{Re}\phi(x)$ skoro všude v $\mathbb{R}$. Odsud plyne, že nutně $\phi(x) \in \mathbb{R}$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Za předpokladu, že je splněna rovnost v (1) – a tedy $xf(x)\overline{f'(x)} \in \mathbb{R}$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ – můžeme přepsat nerovnost (2) do tvaru

$$4\Big(\int xf(x)\overline{f'(x)}\,dx\Big)^2 \leq 4\int\big|xf(x)\big|^2\int\big|f'(x)\big|^2$$

V použité Cauchy-Schwarzově nerovnosti nastává rovnost, pokud existuje číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $f'(x) = \lambda xf(x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jednoduchou úpravou získáme, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathbb{R} \ni f(x)\overline{f'}(x) = f(x)\overline{\lambda xf}(x) = f(x)\overline{f}(x)\overline{\lambda}x = |f(x)|^2x\overline{\lambda}$$

a tedy $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Nyní stačí vyřešit diferenciální rovnici $f'(x) = \lambda x f(x)$. Nejprve vynásobme rovnost integračním faktorem $\exp(-\frac{\lambda}{2}x^2)$. Po úpravě tedy

$$\big(\exp(-\frac{\lambda}{2}x^2) f(x)\big)' = 0 \qquad \text{pro skoro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Připomeňme, že se jedná o slabou derivaci. Nicméně stále platí, že pokud je slabá derivace nějaké funkce nulová v $\mathbb{R}$, potom je daná funkce na $\mathbb{R}$ konstantní (obecně až na změnu na množině nulové míry, ale zde je díky absolutní spojitosti uvažovaného reprezentanta funkce f konstantní všude na $\mathbb{R}$). Řešením rovnice je tedy $f(x) = C\exp(\frac{\lambda}{2}x^2)$, kde $C \in \mathbb{C}$. Aby $f \in L^2(\mathbb{R})$, musí být navíc $\lambda < 0$. Dosazením ověříme, že pro tuto funkci skutečně nastává v Heisenbergově nerovnosti rovnost. $\square$

Nerovnost (2.1) můžeme přepsat tímto způsobem

$$\|xf\|_2 \|\xi \widehat{f}\|_2 \geq \frac{\|f\|_2^2}{4\pi}\,.$$

Nabízí se přirozená otázka, zda by nerovnost platila, pokud bychom nahradili L^2 normu obecnou L^p normou. Další věta představuje úvod do této problematiky.

Nejprve však uveďme užitečné lemma.

2.2 Lemma (Haussdorff-Youngova nerovnost). *Nechť f je funkce měřitelná na $\mathbb{R}$. Dále $p \in [1,2]$ a q je takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pro $p = 1$ stanovíme úmluvou $q = \infty$. Potom platí následující nerovnost*

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p\,.$$

Důkaz Haussdorff-Youngovy nerovnosti lze najít jako Theorem 1.2.1 v [5, 6].

2.3 Věta. *Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$ a $p \in [1,2]$. Potom platí*

$$\|xf\|_p \|\xi \widehat{f}\|_p \geq \frac{\|f\|_2^2}{4\pi}$$

Důkaz. Ve vztahu (2.3), tedy

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = -2\,\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)}\,dx$$

použijme Hölderovu nerovnost

$$\|f\|_2^2 \leq 2\|xf\|_p \|f'\|_q, \text{ kde } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Aplikací Hausdorff-Youngovy nerovnosti na funkci $\widehat{f'}$ a použitím vztahu z Lemmatu 1.18 dále odhadněme f' takto

$$\|f'\|_q \leq \|\widehat{f'}\|_p = 2\pi \|\xi \widehat{f}\|_p\,.$$

Z těchto dvou nerovností již plyne závěr.

$\square$

Obdoba Heisenbergovy nerovnosti z Věty 2.1 platí i v $\mathbb{R}^n$. Důkaz je třeba vést jiným způsobem, protože v uvedeném důkazu pro $\mathbb{R}$ jsme zásadním způsobem využili, že f je absolutně spojitá a můžeme tudíž využít integrování per-partes. V $\mathbb{R}^n$ podobnou větu k dispozici nemáme.

Idea důkazu v $\mathbb{R}^n$ je poměrně standardní. Nerovnost se nejprve dokáže pro hustý podprostor $L^2(\mathbb{R}^n)$, který bude definován tak, aby měl všechny vlastnoti potřebné k tomu, abychom mohl vést důkaz podobným způsobem jako v jednorozměrném případě. Ukázalo se, že vhodným kandidátem na takový podprostor je Schwartzův prostor. Platnost nerovnosti se dále pomocí aproximačních vět rozšíří na celé $L^2(\mathbb{R}^n)$. Důkaz je poměrně zdlouhavý a technický, proto zde uvedeme jen výslednou zobecněnou Heisenbergovu nerovnost. Pro samotný důkaz viz například Theorem 8.1.1 v [3, 221-227].

2.4 Věta. *Pro každou $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a čísla $a, b \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-a|^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^n} |\xi - b|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \geq \frac{n^2}{16\pi^2} \|f\|_2^4. \tag{2.4}$$

Přičemž rovnost je splněna opět jen tehdy, když pro libovolné $C \in \mathbb{C}$ a $\lambda < 0$ platí skoro všude $f(x) = C \exp(2\pi i b x) \exp(\frac{\lambda}{2}(x-a)^2)$.

K tomuto výsledku lze dospět i z obecnějších vět pro operátory, kterými se budeme zabývat v příští kapitole.

2.3 Princip neurčitosti pro operátory

2.5 Definice. *Nechť H je Hilbertův prostor. Mějme samoadjungované operátory A a B na H s definičními obory $D(A)$ a $D(B)$. Potom definiční obor složeného operátoru AB je $D(AB) = \{u \in D(B) : Bu \in D(A)\}$. Definujme nový operátor*

$$[A, B] := AB - BA\,.$$

Tento operátor nazveme komutátor. Jeho definičním oborem je potom množina $D([A,B]) = D(AB) \cap D(BA)$. Normu v příslušném Hilbertově prostoru H značíme jako $\|\,.\,\|_H$.

2.6 Věta. *Nechť A a B jsou samoadjungované operátory a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\|(A-\alpha)u\|_H \|(B-\beta)u\|_H \geq \frac{1}{2} |\langle [A,B]u, u\rangle| \qquad \text{pro všechna } u \in D([A,B]).$$

Důkaz. Operátory $(A - \alpha\,\mathrm{id})$ a $(B - \beta\,\mathrm{id})$ jsou samoadjungované, protože platí

$$(A - \alpha\,\mathrm{id})^* = A^* - (\alpha\,\mathrm{id})^* = A^* - \overline{\alpha}\,\mathrm{id} = A - \alpha\,\mathrm{id}\,.$$

Dále $[A - \alpha\,\mathrm{id}, B - \beta\,\mathrm{id}] = [A, B]$. Můžeme proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\alpha = \beta = 0$.

Pro $u \in D([A,B])$ tedy platí

$$|\langle [A,B]u, u\rangle| = |\langle Bu, Au\rangle - \langle Au, Bu\rangle| = 2|\operatorname{Im}\langle Au, Bu\rangle| \leq 2\|Au\|_H \|Bu\|_H\,.$$

□

2.7 Aplikace. *Pro každé $f \in \mathcal{S}(R^n)$, platí*

$$\Big(\int |x|^2 |f(x)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{n}{4\pi}\|f\|_2^2$$

Důkaz. Na podprostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Hilbertova prostoru $L^n(\mathbb{R}^n)$ definujme pro každé $1 \leq j \leq n$ operátory A_j, B_j následovně

$$A_j : f(x) \to x_j f(x) \quad \text{a} \quad B_j : f(x) \to \frac{1}{2\pi i}\partial_j f(x)\, dx$$

S přihlédnutím k Lemmatu 1.2 a pomocí Plancherelovy věty dostáváme identitu $\|B_j f\|_2 = \|\frac{1}{2\pi i}\partial_j f\|_2 = \|\xi_j \widehat{f}(\xi)\|_2$.

Nyní aplikujme Větu 2.6. Je třeba ověřit, že A_j, B_j jsou samoadjungované operátory. To je ovšem snadné, protože pro každé $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int x_j f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int f(x)\overline{x_j g(x)}$$

a také

$$\begin{aligned} \langle B_j f, g\rangle = \int \frac{1}{2\pi i}\partial_j f(x)\overline{g(x)}\, dx = -\int f(x)\frac{1}{2\pi i}\overline{\partial_j g(x)}\, dx = \\ = \int f(x)\overline{\frac{1}{2\pi i}\partial_j g(x)}\, dx = \langle f, B_j g\rangle. \end{aligned}$$

V předchozím výpočtu jsme využili integrace per-partes a toho, že funkce z prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jdou pro $|x| \to \infty$ k nule rychleji než libovolný polynom. Náznakem:

$$\lim_{R\to\infty}\Big|\int_{\partial B(0,R)} f(x)\overline{g(x)}n_j ds\Big| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B(0,R)} \frac{K}{1+|x|^n}ds = \lim_{R\to\infty}\frac{K\alpha_n n R^{n-1}}{1+R^n} = 0$$

a proto

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \partial_j f(x)\overline{g(x)}\, dx = \lim_{R\to\infty}\int_{B(0,R)} \partial_j f(x)\overline{g(x)}\, dx = \\ = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_{\partial B(0,R)} f(x)\overline{g(x)}n_j\, ds - \int_{B(0,R)} f(x)\overline{\partial_j g(x)}\, dx\Big) = \\ = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\partial_j g(x)}\, dx \end{aligned}$$

Dále zkonstruujme komutátor A_j a B_j. Přímý výpočet dává

$$[A_j, B_j](f) = x_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{1}{2\pi i}\Big)f - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{2\pi i}\, x_j f\Big) = \frac{1}{2\pi i}f.$$

Protože podprostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je uzavřený na násobení polynomy a na derivování, je definiční obor $D([A_j, B_j]) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Předpoklady věty jsou tedy splněny a pro všechna $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\|A_j f\|_2 \|B_j f\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2$$

neboli

$$\|x_j f(x)\|_2 \|\xi_j \widehat{f}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2 \qquad \text{pro každé } 1 \leq j \leq n\,.$$

Nyní již stačí tyto nerovnosti sečíst pro $1 \leq j \leq n$ a použít diskrétní verzi Cauchy-Schwarzovy nerovnosti:

$$\begin{aligned}\frac{n}{4\pi}\|f\|_2^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j f(x)\|_2 \|\xi_j \widehat{f}(\xi)\|_2 \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} \|x_j f(x)\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|\xi_j \widehat{f}(\xi)\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \Big(\int |f(x)|^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \Big(\int |x|^2 |f(x)|^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

2.4 Kvalitativní principy neurčitosti

Dosud jsme se zabývali principy, které nám umožnily odhadnout velikosti f a $\widehat{f}$ nějakou číselnou hodnotou. Nyní přistoupíme ke kvalitativním principům, které nám sice podobný odhad neposkytnou, nicméně nám umožní tyto funkce lépe lokalizovat, nebo jinak řečeno, dají nám kvalitativní informaci o vztahu nosičů funkce a její Fourierovy transformace.

Uveďme nejprve pomocné lemma.

2.8 Lemma. *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom řada $\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k)$ konverguje v $L^1(\mathbb{T}^n)$ (kde $\mathbb{T} = [0,1]$) a Fourierova řada Φ je rovna*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) \exp(2\pi i k \cdot x).$$

Důkaz. Důkaz provedeme přímočarým výpočtem. Významně využijeme předpokladu, že $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Zaveďme označení $f_k(x) := f(x+k)$. Potom

$$\begin{aligned}\infty > \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| &= \int_{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n}([0,1)^n + k)} |f(x)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1)^n + k} |f(x)| = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} |f(x+k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f_k\|_{L^1}. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Nejprve jsme integrační množinu $\mathbb{R}^n$ rozepsali jako disjunktní sjednocení spočetně mnoha měřitelných krychliček $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n}([0,1)^n + k)$. Následovala rovnost plynoucí z aditivity Lebesgueova integrálu vzhledem k integračnímu oboru. Také jsme provedli jednoduchou translační substituci a integrační obor $[0,1)^n$ zaměnili za $[0,1]^n$. To lze ospravedlnit například tím, že Lebesgueova míra nadrovin je nulová a Lebesgueův integrál je invariantní na změnu integračního oboru o množinu nulové míry. Z úplnosti prostoru $L^1(\mathbb{T}^n)$ potom plyne, že $\sum f_k$ skutečně konverguje v $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Zbytek tvrzení o Fourierově řadě dostaneme, pokud ukážeme, že koeficienty Fourierovy řady funkce Φ (označme je $\widehat{\Phi}(m)$, kde $m \in \mathbb{Z}^n$) se rovnají $\widehat{f}(x)$. To ale platí

$$\widehat{\Phi}(m) = \int_{[0,1]^n} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) \Big) e^{-2\pi i m.x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} f(x+k) e^{-2\pi i m.(x+k)} =$$
$$= \int_{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} ([0,1]^n + k)} f(x) e^{-2\pi i m.x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i m.x} = \widehat{f}(m).$$

Záměna sumy a integrálu byla i zde možná, protože protože podle první části důkazu je $g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(x+k)| \in L^1(\mathbb{T}^n)$ a tuto funkci g můžeme využít jako majorantu v Lebesgueově větě. Dále jsme využili $2\pi i$ periodičnosti funkce e^x.

□

Nyní zavedeme značení, které nám zpřehlední význam dalších vět.

2.9 Definice. *Pro funkci f označme množinu*

$$\operatorname{supp} f := \{x : f(x) \neq 0\}.$$

Tuto množinu nazýváme nosičem funkce f.

Následující věta nám ukazuje, že Fourierova transformace „rozmazává“ nosič.

2.10 Věta. *Mějme funkci $f \in L^1(\mathbb{R})$, která má omezený nosič. Nechť také její Fourierova transformace $\widehat{f}$ má omezený nosič. Potom $f = 0$.*

Důkaz. Protože je funkce f spojitá a má omezený nosič, existuje kladné $R \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = 0$ pro $|x| > R$.

Funkce f je spojitá na kompaktní množině $[-R, R]$ a mimo tuto množinu je nulová. Proto existuje kladné $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq K$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Ukážeme, že funkce $\widehat{f}$ je definovaná v celé komplexní rovině a na pásu definovaném jako $M = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}, |y| < P, P > 0\}$ je dokonce holomorfní. Podle předchozích pozorování platí pro každé $\xi \in \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-R}^{R} \exp(-2\pi i x \xi) f(x)\, dx = \int_{-R}^{R} \exp(-2\pi x i (\operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi) f(x)\, dx =$$
$$= \int_{-R}^{R} \exp(-2\pi x i \operatorname{Re} \xi) \exp(2\pi x \operatorname{Im} \xi) f(x)\, dx$$

a tedy

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq 2R\exp(2\pi R\,\mathrm{Im}\,\xi)K < \infty.$$

Z absolutní konvergence Lebesgueova integrálu plyne, že integrál, kterým je definovaná $\widehat{f}(\xi)$, existuje pro každé $\xi \in \mathbb{C}$.

Holomorfnost $\widehat{f}$ na $\mathbb{C}$ dokážeme přímým výpočtem derivace

$$(\widehat{f}(\xi))' = \int_{-R}^{R} -2\pi ix\exp(-2\pi ix\xi)f(x)\,dx$$

Na $\widehat{f}(\xi)$ můžeme nahlížet jako na funkci dvou reálných proměnných $\mathrm{Re}\,\xi$ a $\mathrm{Im}\,\xi$. Derivace $\widehat{f}$ podle těchto proměnných existují díky větě o derivování integrálu závislého na parametru. Podmínky nutné k jejímu použití jsou splněny triviálně. Nejpodstatnější je existence integrovatelných majorant:

$$\begin{aligned}|-2\pi i\exp(-2\pi x\xi)f(x)| = |-2\pi ix\exp(-2\pi xi\,\mathrm{Re}\,\xi)\exp(2\pi x\,\mathrm{Im}\,\xi)f(x)| \leq \\ \leq 2\pi RK\exp(2\pi RP).\end{aligned}$$

Konstanta je zřejmě integrovatelnou funkcí na omezené množině $[-R, R]$. Tím jsme dokázali existenci parciálních derivací $\widehat{f}$. Integrand integrálu, kterým je $\widehat{f}$ definována (funkce $\exp(-2\pi ix\xi)$), je pro každé $x \in [-R, R]$ holomorfní funkcí funkcí proměnné ξ na celém $\mathbb{C}$. Jeho parciální derivace podle $\mathrm{Im}\,\xi$ a $\mathrm{Re}\,\xi$ tedy splňují Cauchy-Riemannovy podmínky. Proto je splňují i parciální derivace funkce $\widehat{f}$ a ta je proto skutečně holomorfní na M.

Podle předpokladu má $\widehat{f}\restriction_{\mathbb{R}}$ omezený nosič. A protože $\mathbb{R} \subset M$, platí, že množina $N := \{\xi \in M; \widehat{f}(\xi) = 0\}$ má v M hromadný bod a z věty o jednoznačnosti holomorfních funkcích je $\widehat{f} = 0$ na M a tedy i na $\mathbb{R}$.

Protože f je spojitá funkce s omezeným nosičem a totéž platí o funkci $\widehat{f}\restriction_{\mathbb{R}}$, platí také $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ a můžeme použít Větu 1.3.

$$f(x) = [\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_{-1}(f)](x) = [\mathcal{F}(0)](x) = 0 \qquad \text{skoro všude.}$$

Ze spojitost f dostáváme $f = 0$ na $\mathbb{R}$. □

Další věta zpřesňuje a zobecňuje představu o „rozmazávání“ nosiče, kterou nám dala předchozí věta.

2.11 Věta. *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pokud je $\left|\mathrm{supp}\, f\right| < \infty$ a zároveň $\left|\mathrm{supp}\, \widehat{f}\right| < \infty$, potom $f = 0$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|\mathrm{supp}\, f| < 1$. Kdyby tomu tak nebylo, pracovali bychom s funkcí $g(x) := f(\lambda x)$, kde λ je vhodná kladná konstanta. Podle Věty 1.2 potom $\widehat{g}(x) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\frac{1}{\lambda}x)$, a tedy míra nosiče $\widehat{g}$ zůstane konečná.

Nejprve podobně jako v důkazu Lemmatu 2.8 rozložíme integrační obor následujících integrálů, získáme tak několik užitečných nerovností.

$$\infty > \left|\operatorname{supp}\widehat{f}\right| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\widehat{f}}(\xi)\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{[0,1)^n} \chi_{\operatorname{supp}\widehat{f}}(\xi+k)\,d\xi =$$
$$= \int_{[0,1)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\operatorname{supp}\widehat{f}}(\xi+k)\,d\xi$$

Pracujeme s nezápornými funkcemi, proto je z Leviho věty pro řady možná záměna sumy a integrálu, využili jsme také aditivitu Lebesgueova integrálu vzhledem k integračnímu oboru. Dále vidíme, že řada v prvním integrálu konverguje pro skoro všechna $\xi \in [0,1)^n$ a existuje tedy $E \subset [0,1)^n$ plné míry (tedy $|E| = 1$) taková, že $\sum \chi_{\operatorname{supp}\widehat{f}}(a+k) < \infty$ pro každé $a \in E$. Protože charakteristická funkce χ nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, dostaneme pro každé $a \in E$ pouze konečně hodnot k, že $\chi_{\operatorname{supp}\widehat{f}}(a+k) = 1$, což je z definice nosiče ekvivalentní s $\widehat{f}(a+k) \neq 0$.

Podobně můžeme odvodit

$$\int_{[0,1)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\operatorname{supp} f}(\xi+k)\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{[0,1)^n} \chi_{\operatorname{supp} f}(\xi+k)\,d\xi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp} f}(\xi)\,d\xi = \left|\operatorname{supp} f\right| < 1$$

Záměna řady a integrálu je opět možná podle Leviho věty, použita byla také aditivita integrálu. Tvrdíme, že existuje množina $F \subset [0,1)^n$ kladné míry taková, že $\sum \chi_{\operatorname{supp} f}(x+k) = 0$ pro všechna $x \in F$. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není. Potom by $\sum \chi_{\operatorname{supp} f}(x+k) \geq 1$ skoro všude v $[0,1)^n$, protože příslušná funkce nabývá jen nezáporných celočíselných hodnot. Potom by ovšem platilo

$$\int_{[0,1)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\operatorname{supp} f}(\xi+k)\,dx \geq 1,$$

což je spor nerovností uvedenou výše. Námi nalezená množina F má z definice $\operatorname{supp} f$ tu vlastnost, že pokud $x \in F$, potom pro každé $k \in \mathbb{Z}^n$ je $f(x+k) = 0$.

Uvažujme nyní $a \in E$ a položme

$$\Phi_a(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k)e^{-2\pi i a(x+k)}\,.$$

Z Lemmatu 2.8 aplikovaného na funkci $f(x)e^{-2\pi i a x}$ a použitím vztahu z Věty 1.2 okamžitě dostáváme, že $\Phi_a \in L^1(\mathbb{T}^n)$ a její Fourierova řada je $\sum \widehat{f}(a+k)e^{2\pi i k.x}$. Protože $a \in E$, má tato Fourierova řada jen konečný počet nenulových sčítanců. Z toho plyne, že Φ_a je analytická. Pokud je analytická, musí být buď $\Phi_a \equiv 0$ nebo množina $\{x : \Phi_a(x) = 0\}$ protíná každou přímku jen ve spočetně mnoha bodech a tedy $\Phi_a(x) \neq 0$ skoro všude v $\mathbb{R}$.

Zkoumejme, jak se chová Φ_a pro $x \in F$. Pro všechna $x \in F$ zřejmě platí $|\Phi_a(x)| \leq \sum |f(x+k)| = 0$. Z předchozí úvahy tedy dostáváme, že $\Phi_a \equiv 0$ pro všechna $a \in E$. Ze znalosti Fourierovy řady Φ_a plyne, že $\widehat{f}(a+k) = 0$ pro všechna $a \in E$ a $k \in \mathbb{Z}^n$. Proto $\widehat{f} = 0$ skoro všude, a tedy $f \equiv 0$. $\square$

Poněkud obecnější náhled na kvalitativní vlastnosti Fourierovy transformace nám poskytne Kolmogorovova věta. Její důkaz silně využívá jednu z charakterizací kompaktních množin v $L^2(\mathbb{R})$. Viz následující lemma.

2.12 Lemma. *Nechť $\mathcal{F} \subset L^2(\mathbb{R})$ je omezená množina a platí*

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^2 \, dx \to 0 \qquad \text{pro } R \to \infty, \tag{2.6}$$

$$\int |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx \to 0 \qquad \text{pro } h \to 0, \tag{2.7}$$

stejnoměrně pro $f \in \mathcal{F}$. Potom $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $L^2(\mathbb{R})$.

Tuto charakteristiku kompaktních množin můžete najít například v [6, 38-40] jako Větu 13.1.

2.13 Věta (Kolmogorov). *Nechť $\mathcal{F} \subset L^2(\mathbb{R})$ je omezená množina. Nechť*

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^2 \, dx \to 0 \qquad \text{pro } R \to \infty, \tag{2.8}$$

$$\int_{|\xi|>R} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \to 0 \qquad \text{pro } R \to \infty. \tag{2.9}$$

stejnoměrně pro $f \in \mathcal{F}$. Potom $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $L^2(\mathbb{R})$.

Důkaz. Podle Lemmatu 2.12 stačí ověřit podmínku (2.7). Protože Fourierova transformace součtu se rovná součtu Fourierových transformací sčítanců, můžeme s pomocí Parsevalovy věty a vzorce (b) ve Větě 1.2 psát

$$\begin{aligned}\int |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx &= \int |\big(f(x+h)\big)\widehat{\ } - \widehat{f}(x)|^2 \, dx = \\ &= \int |\widehat{f}(\xi)\big(\exp(2\pi i \xi h) - 1\big)|^2 \, d\xi\end{aligned}$$

Zvolme tedy libovolné $\epsilon > 0$. Z podmínky (2.9) plyne existence R takového, že pro všechna $f \in \mathcal{F}$ je $\int_{|\xi|>R} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \frac{\epsilon}{8}$. A tedy jednoduchým použitím trojúhelníkové nerovnosti

$$\int_{|\xi|>R} |\widehat{f}(\xi)\big(\exp(2\pi i \xi h) - 1\big)|^2 \, d\xi \leq \int_{|\xi|>R} |\widehat{f}|^2 4 \leq \frac{\epsilon}{2} \, .$$

Protože víme, že $\mathcal{F}$ je omezená množina, existuje M, že pro všech $f \in \mathcal{F}$ platí $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} < M$. Navíc platí

$$\lim_{h \to 0} \int_{|\xi| \leq R} |\exp(2\pi i \xi h) - 1|^2 = \int_{|\xi| \leq R} \lim_{h \to 0} |\exp(2\pi i \xi h) - 1|^2 = 0$$

Záměna limity je možná, protože vnitřní funkce je lokálně $L^2(\mathbb{R})$.

Proto existuje δ takové, že pro každé $h < \delta$ je $\int_{|\xi| \leq R} |\exp(2\pi i \xi h) - 1|^2 < \frac{\epsilon}{2M}$ a tedy

$$\int_{|\xi| \leq R} |\widehat{f}(\xi)\big(\exp(2\pi i \xi h) - 1\big)|^2 \, d\xi < \frac{\epsilon}{2}$$

Složíme-li oba dosažené výsledky dohromady, dostaneme, že pro každé $h < \delta$ a všechna $f \in \mathcal{F}$ platí

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx =$$

$$= \int_{|\xi| > R} |\widehat{f}(\xi)\big(\exp(2\pi i \xi h) - 1\big)|^2 \, d\xi + \int_{|\xi| \leq R} |\widehat{f}(\xi)\big(\exp(2\pi i \xi h) - 1\big)|^2 \, d\xi < \epsilon,$$

což je právě podmínka (2.7), kterou jsme potřebovali dokázat. $\square$

Literatura

[1] Rudin W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, 2003.

[2] Bachman G., Narici L., Beckenstein E.: *Fourier and wavelet analysis*, Springer-Verlag, New-York, 2000.

[3] Ramanathan J.: *Methods of Applied Fourier Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1998.

[4] Lukeš J., Malý J.: *Míra a integrál*, Univerzita Karlova, Praha, 1993.

[5] Bergh J., Löfström J.: *Interpolation Spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] Fučík S., John O., Kufner A.: *Prostory funkcí I. : Integrovatelné funkce*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1974.

[7] Folland G. B., Sitaram A.: *The uncertainty principle: a mathematical survey*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997) 207–238.