

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Hovorka

### **Lokální stereologické odhady**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika, obecná matematika

2006

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Tomáš Hovorka

# Obsah

<b>Abstrakt</b>	<b>4</b>
<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Teorie</b>	<b>6</b>
1.0.1 Použité značení . . . . .	6
1.1 Teoretické vlastnosti . . . . .	6
<b>2 Výpočty rozptylu</b>	<b>10</b>
2.1 Odhady obsahu v $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
2.1.1 Elipsa . . . . .	10
2.1.2 Čtverec . . . . .	11
2.1.3 Obdélník . . . . .	12
2.1.4 Trojúhelník . . . . .	12
2.1.5 Čtverec, jehož strana je náhodná veličina . . . . .	12
2.1.6 Kruh s volně položeným středem . . . . .	13
2.1.7 Elipsa obsahující počátek . . . . .	14
2.2 Odhady objemu v $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
2.2.1 Sféroid se středem v počátku . . . . .	15
2.2.2 Elipsoid se středem v počátku . . . . .	17
2.2.3 Koule . . . . .	17
2.2.4 Vertikální elipsoid . . . . .	19
2.3 Tvarový koeficient a koeficient chyby . . . . .	20
<b>Závěr</b>	<b>21</b>
<b>Literatura</b>	<b>23</b>

Název práce: Lokální stereologické odhady

Autor: Tomáš Hovorka

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

e-mail vedoucího: pawlas@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci jsou studovány lokální stereologické odhady obsahu a objemu rovinných a prostorových částic. Nejdříve jsou uvedeny základní vlastnosti a tvar odhadu pro konvexní množiny. Hlavním cílem práce je spočítat rozptyl lokálního stereologického odhadu pro některé vybrané množiny v rovině a prostoru za předpokladu, že řez referenčním bodem dané množiny je izotropní. Pro elipsu, čtverec a obdélník je navíc vypočtena distribuční funkce a hustota odhadu. V závěrečné části je definován tvarový koeficient množiny a na vybraných množinách je ukázána závislost koeficientu chyby odhadu na tvarovém koeficientu.

Klíčová slova: lokální stereologie, rozptyl, koeficient chyby, tvarový koeficient

Title: Local stereological estimators

Author: Tomáš Hovorka

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: pawlas@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work the local stereological estimators of area and volume of planar and spatial structures are studied. First, basic properties and the form of the estimator for convex sets are introduced. The main aim of the work is to calculate the variance of the local stereological estimator for selected sets in the plane and in the space under the assumption that the section through the reference point is isotropic. Moreover, distribution and density functions are computed for the case of an ellipse, a square and a rectangle. In the final part, the shape coefficient is defined and for particular sets it is shown how the coefficient of error of the estimator depends on the shape coefficient.

Keywords: local stereology, variance, coefficient of error, shape coefficient

## Úvod

Lokální stereologie je matematický obor využívající geometrickou pravděpodobnost, integrální geometrii a matematickou statistiku. Za její počátek můžeme považovat článek [2] napsaný Rogerem Milesem na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let dvacátého století. Tato práce obsahuje cenné nástroje pro konstrukci lokálních odhadů objemu. Hlavní podíl na rozvoji lokální stereologie má Eva B. Vedelová-Jensenová. Její monografie [1], ze které jsem ve své práci především čerpal, obsahuje ucelený výklad většiny současných poznatků o lokální stereologii včetně mnoha konkrétních případů z laboratorní praxe.

Prostorová částice se považuje za okolí nějakého referenčního bodu. Lokální stereologický odhad objemu částice je pak založen na informaci získané z jednorozměrného nebo dvojrozměrného řezu procházejícího referenčním bodem. Výhodou je, že není třeba mít zvláštní předpoklady na tvar částice, stačí předpokládat izotropii řezu případně částice.

Poptávka po lokálních stereologických metodách vychází hlavně z potřeb biologů vyhodnocovat záznamy z jejich mikroskopického studia biologických tkání. Zkoumanou částicí je pak nejčastěji buňka, referenčním bodem její jádro a řezy jsou prováděny pomocí konfokálního mikroskopu. Lokální stereologie nám tak umožňuje z pozorovaných dvojrozměrných záznamů získat kvantitativní odhady o parametrech sledovaných trojrozměrných objektů.

Ve své bakalářské práci nejprve zadefinuji lokální stereologický odhad, pak spočítám jeho rozptyl pro některé množiny v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  a na závěr porovnam koeficient chyby odhadu v závislosti na tvaru množiny.

# Kapitola 1

## Teorie

### 1.0.1 Použité značení

$O$	počátek soustavy souřadnic v $\mathbb{R}^n$
$L_p$	$p$ -dimenzionální lineární podprostor $\mathbb{R}^n$
$L^\perp$	ortogonální doplněk lineárního podprostoru $L$ v $\mathbb{R}^n$ , $x \in L^\perp$ právě tehdy, když $\langle x, y \rangle = 0$ pro všechny $y \in L$
$\mathcal{L}_p^n$	množina všech $p$ -dimenzionálních lineárních podprostorů $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}_{p,L_r}^n$	množina všech $p$ -dimenzionálních lineárních podprostorů $\mathbb{R}^n$ obsahujících daný $r$ -dimenzionální lineární podprostor $L_r$
$\sigma_n$	$= 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}$ , povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^n$
$c(n, p)$	$= \frac{\sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{n-p+1}}{\sigma_p \sigma_{p-1} \cdots \sigma_1}$
$\pi_L$	ortogonální projekce na $L$
$\lambda_n^d$	$d$ -rozměrná Hausdorfova míra v $\mathbb{R}^n$
$dx^d$	$= \lambda_n^d(dx)$
$\mu_{p,L_r}^n$	rotačně invariantní míra na $\mathcal{L}_{p,L_r}^n$ , viz [1] str. 70
$dL_{p,L_r}^n$	$= \mu_{p,L_r}^n(dL_p)$

### 1.1 Teoretické vlastnosti

**Definice 1** *Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená a omezená množina a  $r, p, n \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq r < p \leq n$ , potom definujeme lokální stereologický odhad Lebesgueovy míry množiny  $X$  založený na základě znalosti průniku  $X \cap L_p$ , kde  $L_p \in \mathcal{L}_{p,L_r}^n$ , vzorcem:*

$$m_{p,L_r}^{(n)}(X, L_p) := \frac{\sigma_{n-r}}{\sigma_{p-r}} \int_{X \cap L_p} \|\pi_{L_r^\perp} x\|^{n-p} dx^p. \quad (1.1)$$

Lokální stereologický odhad je možno chápat jako konkrétní případ obecnějšího Horvitz-Thompsonova odhadu, viz [1] str. 2. Pro některé množiny  $X$  můžeme vzorec odhadu pro  $p = 1$  zjednodušit.

**Definice 2** Necht  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $L_1 \in \mathcal{L}_1^n$  a necht množina  $\partial X \cap L_1$  je spočetná. Přímku  $L_1$  rozložíme na dvě polopřímky a bod  $O$ :

$$L_1 = L_{1+} \cup \{O\} \cup L_{1-}.$$

Potom můžeme definovat dvě spočetné množiny:

$$\begin{aligned} L_+ &= \{x \in \mathbb{R}^2; x \in \partial X \cap L_{1+}, \exists \epsilon > 0 \text{ tak, že úsečka } ((1-\epsilon)x, x) \subseteq X \cap L_1 \\ &\quad \text{nebo } (x, (1+\epsilon)x) \subseteq X \cap L_1\} = \{x_1^+, x_2^+, \dots\}, \\ L_- &= \{x \in \mathbb{R}^2; x \in \partial X \cap L_{1-}, \exists \epsilon > 0 \text{ tak, že úsečka } ((1-\epsilon)x, x) \subseteq X \cap L_1 \\ &\quad \text{nebo } (x, (1+\epsilon)x) \subseteq X \cap L_1\} = \{x_1^-, x_2^-, \dots\}, \end{aligned}$$

kde jednotlivé body jsou číslovány podle jejich vzdálenosti od bodu  $O$ . Potom můžeme definovat funkci  $\alpha : (L_+ \cup L_-) \mapsto \{0, 1\}$  předpisem:

$$\alpha(x_1^\pm) := \begin{cases} 0 & \text{když úsečka } (O, x_1^\pm) \subseteq X, \\ 1 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a dále pro  $i > 1$ :

$$\alpha(x_i^\pm) := \begin{cases} 1 & \text{když } \alpha(x_{i-1}^\pm) = 0, \\ 0 & \text{když } \alpha(x_{i-1}^\pm) = 1. \end{cases}$$

Lokální stereologický odhad pro  $p = 1$ ,  $r = 0$  a takové množiny  $X$ , aby byly splněny předpoklady definice 2, můžeme tedy zapsat takto:

$$m_{1,O}^{(n)}(X, L_1) = \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \sum_{x \in L_+ \cup L_-} (-1)^{\alpha(x)} \|x\|^n. \quad (1.2)$$

Pro konvexní množiny můžeme tento vzorec ještě dále zjednodušit:

**Věta 3** Necht  $X \neq \emptyset$  je konvexní, otevřená a omezená množina v  $\mathbb{R}^n$  a množina  $\partial X \cap L_1$  je spočetná, pak lokální stereologický odhad pro  $p = 1$  a  $r = 0$  můžeme zapsat takto:

$$m_{1,O}^{(n)}(X, L_1) = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \left| \|x_1\|^n + \|x_2\|^n \right| & \text{pro } O \in X, \\ \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \left| \|x_1\|^n - \|x_2\|^n \right| & \text{pro } O \notin X, \end{cases} \quad (1.3)$$

pokud  $\text{card}(\partial X \cap L_1) = 2$ , kde  $x_1$  a  $x_2$  jsou dva různé průsečíky přímky  $L_1$  a  $\partial X$ , jinak  $m_{1,O}^{(n)}(X, L_1) = 0$ .

Důkaz:

Z předpokladů o množině  $X$  vyplývá, že  $\text{card}(L_1 \cap \partial X) < 3$ . Zbytek plyne z (1.2).

Q.E.D.

Nyní uvedu bez důkazu tvrzení 4.5 z [1] pro  $q = 1$ , kterému se někdy říká klasický Blaschkeův-Petkantschinův vzorec:

**Věta 4** *Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a nechť  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  je nezáporná měřitelná funkce. Nechť  $L_r \in \mathcal{L}_r^n$  a  $p > r$ . Pak s položením  $c(n, 0) := 1$  dostaneme:*

$$\begin{aligned} & c(n - r - 1, p - r - 1) \int_X g(x) dx^n \\ &= \int_{\mathcal{L}_{p,L_r}^n} \int_{X \cap L_p} g(x) \|\pi_{L_r^\perp} x\|^{n-p} dx^p dL_{p,L_r}^n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Definice 5** *Izotropní podprostor  $L_p$  obsahující  $L_r$  je náhodný element v prostoru  $\mathcal{L}_{p,L_r}^n$ , jehož rozdělení má konstantní hustotu vzhledem k  $\mu_{p,L_r}^n$ .*

Následuje tvrzení 4.8 z [1]:

**Věta 6** *Nechť  $L_{p_1}$  je izotropní podprostor obsahující  $L_r$  a nechť  $L_{p_2}$  je izotropní podprostor obsahující  $L_r$ , kde  $0 \leq r < p_1 \leq p_2 \leq n$ . Pak*

$$\text{Var}(m_{p_1,L_r}^{(n)}(X, L_{p_1})) \geq \text{Var}(m_{p_2,L_r}^{(n)}(X, L_{p_2})). \quad (1.5)$$

Důkaz:

Z tvrzení 3.11 [1] str. 80 dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{L}_{p_1,L_r}^n} f(L_{p_1}) \frac{dL_{p_1,L_r}^n}{c(n-r, p_1-r)} \\ &= \int_{\mathcal{L}_{p_2,L_r}^n} \int_{\mathcal{L}_{p_1,L_r}^{p_2}} f(L_{p_1}) \frac{dL_{p_1,L_r}^{p_2}}{c(p_2-r, p_1-r)} \frac{dL_{p_2,L_r}^n}{c(n-r, p_2-r)}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy vytvořit izotropní podprostor  $L_{p_1}$  obsahující  $L_r$  vytvořením nejdříve podprostoru  $L_{p_2}$  obsahujícího  $L_r$  a následným vytvořením podprostoru  $L_{p_1}$  obsazeného v  $L_{p_2}$  a obsahujícího  $L_r$ . Touto konstrukcí obdržíme:

$$\begin{aligned} & \text{Var}(m_{p_1,L_r}^{(n)}(X, L_{p_1})) \\ &= \text{Var}(E(m_{p_1,L_r}^{(n)}(X, L_{p_1}) | L_{p_2})) + E(\text{Var}(m_{p_1,L_r}^{(n)}(X, L_{p_1}) | L_{p_2})). \end{aligned}$$



Nyní počítáme:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(m_{p_1, L_r}^{(n)}(X, L_{p_1}) | L_{p_2}) \\
&= \int_{\mathcal{L}_{p_1, L_r}^{p_2}} m_{p_1, L_r}^{(n)}(X, L_{p_1}) \frac{dL_{p_1, L_r}^{p_2}}{c(p_2 - r, p_1 - r)} \\
&= \frac{\sigma_{n-r}}{\sigma_{p_1-r}} \cdot \frac{1}{c(p_2 - r, p_1 - r)} \int_{\mathcal{L}_{p_1, L_r}^{p_2}} \int_{X \cap L_{p_1}} \|\pi_{L_r^\perp} x\|^{n-p_1} dx^{p_1} dL_{p_1, L_r}^{p_2} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{\sigma_{n-r}}{\sigma_{p_1-r}} \cdot \frac{c(p_2 - 1 - r, p_1 - 1 - r)}{c(p_2 - r, p_1 - r)} \int_{X \cap L_{p_2}} \|\pi_{L_r^\perp} x\|^{n-p_2} dx^{p_2} \\
&= \frac{\sigma_{n-r}}{\sigma_{p_2-r}} \int_{X \cap L_{p_2}} \|\pi_{L_r^\perp} x\|^{n-p_2} dx^{p_2} \\
&= m_{p_2, L_r}^{(n)}(X, L_{p_2}), \tag{1.6}
\end{aligned}$$

kde jsme v rovnosti označené (\*) použili větu 4 pro  $n = p_2$ ,  $p = p_1$ . Závěrem tedy máme:

$$\begin{aligned}
& \text{Var}(m_{p_1, L_r}^{(n)}(X, L_{p_1})) \\
&= \text{Var}(\mathbb{E}(m_{p_1, L_r}^{(n)}(X, L_{p_1}) | L_{p_2})) + \mathbb{E}(\text{Var}(m_{p_1, L_r}^{(n)}(X, L_{p_1}) | L_{p_2})) \\
&\geq \text{Var}(m_{p_2, L_r}^{(n)}(X, L_{p_2})).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

**Věta 7** *Odhad (1.1) je nestranný.*

Důkaz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m_{p, L_r}^{(n)}(X, L_p)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(m_{p, L_r}^{(n)}(X, L_p) | L_n)) \\
&= m_{n, L_r}^{(n)}(X, L_n),
\end{aligned}$$

což se z definice odhadu (1.1) rovná Lebesgueově míře množiny  $X$  (v druhé rovnosti je využita rovnost (1.6) z předchozí věty pro  $p_1 = p$ ,  $p_2 = n$ ).

Q.E.D.

# Kapitola 2

## Výpočty rozptylu

### 2.1 Odhady obsahu v $\mathbb{R}^2$

Pro množiny v  $\mathbb{R}^2$  máme k dispozici jediný lokální odhad objemu množiny  $X$ :

$$\hat{S} := m_{1,O}^{(2)}(X, L_1) = \pi \int_{X \cap L_1} \|x\| dx^1. \quad (2.1)$$

V této kapitole budeme předpokládat, že  $L_1$  je izotropní jednorozměrný lineární podprostor  $\mathbb{R}^2$  a spočteme rozptyly odhadu (2.1) pro některé volby útvarů  $X$ .

Přímku  $L_1$  můžeme charakterizovat úhlem  $\alpha \in [0, \pi]$ , který přímka svírá s osou  $x$ . Pro následující konvexní množiny můžeme použít větu 3, kde vzdálenost obou průsečíků vyjádříme jako funkci úhlu  $\alpha$ . Dostáváme tedy:

$$\hat{S} = \frac{\pi}{2} |r_1^2(\alpha) \pm r_2^2(\alpha)|, \quad (2.2)$$

kde  $r_1, r_2$  jsou vzdálenosti dvou průsečíků přímky  $L_1$  a  $\partial X$  od  $O$  a znaménko závisí na tom, jestli  $O \in X$  nebo nikoliv, viz věta 3.

#### 2.1.1 Elipsa

Nechť

$$X = \{[x, y]; x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1; a > b\}.$$

Pro tento jednoduchý příklad si nejdříve najdeme distribuční funkci a hustotu odhadu. Pro  $x \in [\pi b^2, \pi a^2]$  platí:

$$F_{\hat{S}}(x) = P(\hat{S} < x) = P(\pi r^2(\alpha) < x) = P(r(\alpha) < \sqrt{x/\pi}),$$

kde

$$r^2(\alpha) = \frac{r_1^2(\alpha) + r_2^2(\alpha)}{2} = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}$$

a vzhledem k symetrii stačí uvažovat  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Dalšími úpravami dostaneme:

$$F_{\hat{S}}(x) = P\left(\alpha > \arcsin \sqrt{\frac{\frac{\pi}{x}a^2b^2 - b^2}{a^2 - b^2}}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\frac{\pi}{x}a^2b^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \quad (2.3)$$

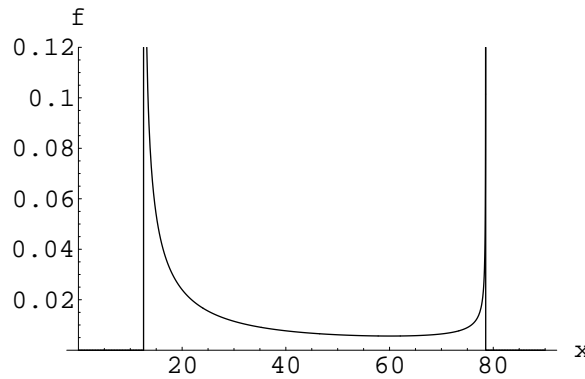
kde poslední rovnost vyplývá z rovnoměrného rozdělení n.v.  $\alpha$  na  $(0, \pi/2)$ . Dále derivací dostaneme hustotu n.v.  $\hat{S}$ :

$$f_{\hat{S}}(x) = \frac{1}{x} \frac{ab}{\sqrt{\pi a^2 - x} \sqrt{x - \pi b^2}} \quad (2.4)$$

pro  $x \in [\pi b^2, \pi a^2]$ , jinak  $f_{\hat{S}}(x) = 0$ . Graf hustoty pro  $b = 2$  a  $a = 5$  můžeme vidět na obrázku 2.1. Integrováním dostaneme střední hodnotu a rozptyl odhadu  $\hat{S}$ :

$$E \hat{S} = \pi ab, \quad (2.5)$$

$$\text{Var } \hat{S} = \frac{\pi^2}{2} ab(a - b)^2. \quad (2.6)$$



Obrázek 2.1: Hustota odhadu obsahu elipsy pro  $b = 2, a = 5$ .

### 2.1.2 Čtverec

Nechť

$$X = \{[x, y]; -a < x < a; -a < y < a; a \in \mathbb{R}^+\}.$$

Obdobně jako u elipsy počítáme (zde ovšem  $r(\alpha) = \frac{a}{\cos \alpha}$  pro  $\alpha \in [0, \pi/4]$ ):

$$\begin{aligned} F_{\hat{S}}(x) &= P(\hat{S} < x) = P(\pi r^2(\alpha) < x) = P(r(\alpha) < \sqrt{x/\pi}) \\ &= P\left(\frac{a}{\cos \alpha} < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = P(\alpha < \arccos(a\sqrt{\pi/x})) \\ &= \frac{4}{\pi} \arccos(a\sqrt{\pi/x}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

pro  $x \in [\pi a^2, 2\pi a^2]$ . Dále postupujeme standardně a obdržíme

$$\text{Var } \hat{S} = \frac{16}{3}a^4(\pi - 3). \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Obdélník

Nechť

$$X = \{[x, y]; -a < x < a; -b < y < b\}.$$

U obdélníku je výpočet distribuční funkce trochu složitější. Budeme předpokládat  $b < a$  a stejně jako u elipsy budeme uvažovat pouze  $\alpha \in [0, \pi/2]$ :

$$\begin{aligned} F_{\hat{S}}(x) &= P(\hat{S} < x) = P(\pi r^2(\alpha) < x) = P(r(\alpha) < \sqrt{x/\pi}) \\ &= \begin{cases} P\left(\frac{a}{\cos \alpha} < \sqrt{\frac{x}{\pi}} \text{ nebo } \frac{b}{\sin \alpha} < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) & \text{pro } x \in [\pi a^2, \pi(a^2 + b^2)], \\ P\left(\frac{b}{\sin \alpha} < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) & \text{pro } x \in [\pi b^2, \pi a^2], \\ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{\frac{x}{\pi}}b) + \frac{2}{\pi} \arccos(\sqrt{\frac{x}{\pi}}a) & \text{pro } x \in [\pi a^2, \pi(a^2 + b^2)], \\ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{\frac{x}{\pi}}b) & \text{pro } x \in [\pi b^2, \pi a^2], \end{cases} \\ & \quad (2.9) \end{aligned}$$

jinak  $F_{\hat{S}}(x) = 0$  nebo 1, podle vlastností každé distribuční funkce. Opět získáme integrováním rozptyl:

$$\text{Var } \hat{S} = \frac{8}{3}\pi ab(a^2 + b^2) - 16a^2b^2. \quad (2.10)$$

Výsledek je tedy konzistentní s výsledkem pro čtverec.

### 2.1.4 Trojúhelník

Pro výpočet rozptylu odhadu obsahu trojúhelníku jsem si v Mathematice [3] napsal krátký program, který po zadání trojúhelníku s bodem  $O$  v něm či na jeho obvodu vypočítá rozptyl odhadu. Program nepočítá distribuční funkci, pouze rozptyl. V tabulce 2.1 uvádím výsledky pro několik případů.

### 2.1.5 Čtverec, jehož strana je náhodná veličina

Doposud jsme předpokládali, že  $X$  je pevná podmnožina  $\mathbb{R}^2$ . Nyní uvedeme příklad náhodné částice:

$$X = \{[x, y]; -A < x < A; -A < y < A; A \text{ je nezáporná náhodná veličina}\}.$$

---

Rovnostranný trojúhelník se stranou délky $a$ a těžištěm v $O$	$\frac{\sqrt{3}\pi(21-8\ln(2))-81}{432}a^4$
Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnou délky $a$ a pravým úhlem v bodě $O$	$(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4})a^4$
Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnou délky $a$ a bodem $O$ ve středu přepony	$(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4})a^4$

---

Tabulka 2.1: Rozptyly pro různé typy trojúhelníků.

Předpokládejme, že náhodná veličina  $A$  je nezávislá na  $L_1$ , potom:

$$E \hat{S} = E(\pi r^2(\alpha)) = \pi E\left(\frac{A^2}{\cos^2 \alpha}\right)$$

a z předpokladu nezávislosti délky strany čtverce na úhlu  $\alpha$  máme:

$$= \pi E(A^2) E\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) = 4 E(A^2). \quad (2.11)$$

Podobně dopočítáme rozptyl:

$$\text{Var } \hat{S} = \pi^2 (E(A^4) E\left(\frac{1}{\cos^4 \alpha}\right) - 16(E(A^2))^2) = \frac{16\pi}{3} E(A^4) - 16(E(A^2))^2. \quad (2.12)$$

### 2.1.6 Kruh s volně položeným středem

Nechť

$$X = \{[x, y]; (x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2\}.$$

Nejprve si vyjádříme velikost odhadu  $\hat{S}$  v závislosti na úhlu řezu  $\alpha$  a vzdálenosti  $d = \sqrt{m^2 + n^2}$  středu kruhu od bodu  $O$ :

$$\hat{S} = \begin{cases} \pi(r^2 + d^2 \cos(2\alpha)) & \text{pro } d \leq r, \\ 2\pi d \cos(\alpha) \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2(\alpha)} & \text{pro } d > r \text{ a } |\alpha| < \arcsin(r/d), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Integrováním spočítáme první i druhý moment a z nich rozptyl náhodné veličiny  $\hat{S}$  v závislosti na vzdálenosti  $d$  bodu  $O$  od středu kruhu a poloměru

$r$ :

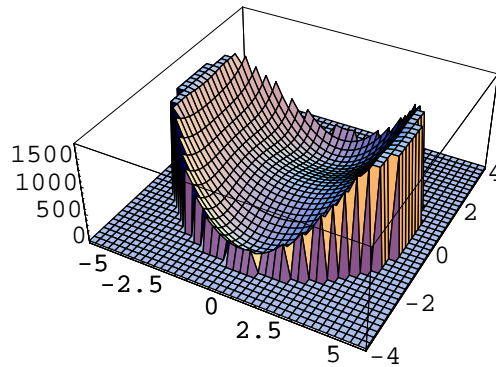
$$\text{Var } \hat{S} = \begin{cases} \frac{d^4 \pi^2}{2} & \text{pro } d \leq r, \\ \pi(r\sqrt{d^2 - r^2}(d^2 + 2r^2) - (d^4 - 4d^2 r^2) \arctan(\frac{r}{\sqrt{d^2 - r^2}})) - \pi^2 r^4 & \text{pro } d > r. \end{cases} \quad (2.14)$$

### 2.1.7 Elipsa obsahující počátek

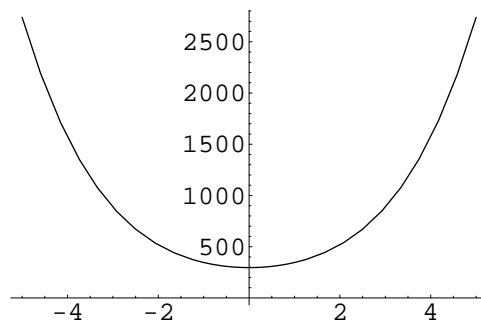
Uvažujme

$$X = \{[x, y]; \frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} < 1; \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} < 1\}.$$

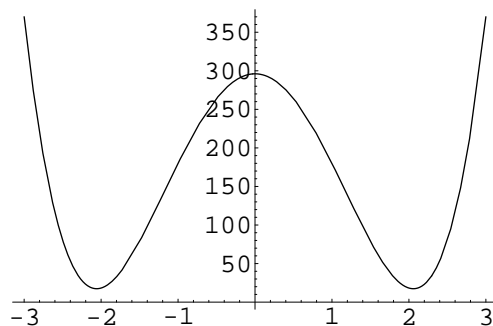
Použitím stejného postupu jako v předchozí části spočítáme velikost odhadu  $\hat{S}$  v závislosti na poloze bodu  $O$  uvnitř elipsy. Nepodařilo se mi analyticky vyjádřit  $\hat{S}$  v závislosti na parametrech elipsy a její poloze vzhledem k bodu  $O$ . Pro pevné  $a = 5$ ,  $b = 3$  můžeme rozptyl odhadu v závislosti na poloze středu elipsy vidět na obrázku 2.2. Řezy tohoto grafu podél os elipsy můžeme pro přehlednost shlédnout na obrázcích 2.3 a 2.4.



Obrázek 2.2: Rozptyl odhadu obsahu elipsy v závislosti na poloze středu.



Obrázek 2.3: Řez obr. 2.2 podle delší osy.



Obrázek 2.4: Řez obr. 2.2 podle kratší osy.

## 2.2 Odhady objemu v $\mathbb{R}^3$

Pro množiny v  $\mathbb{R}^3$  máme k dispozici dva různé odhady objemu v závislosti na rozměru  $p$  řezu, kterým množinu  $X$  prokládáme. V této kapitole budeme předpokládat, že  $L_1$  a  $L_2$  jsou izotropní lineární podprostory  $\mathbb{R}^3$ . Podprostory  $L_1$  i  $L_2$  můžeme charakterizovat dvojicí úhlů  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ,  $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Pro množiny vyhovující předpokladům věty 3 máme tyto odhady:

Pro  $p = 1$ :

$$\hat{V}_1 = \frac{2\pi}{3} |r_1^3(\alpha, \beta) \pm r_2^3(\alpha, \beta)|, \quad (2.15)$$

kde  $r_1, r_2$  jsou vzdálenosti obou průsečíků  $\partial X$  a  $L_1$  od  $O$ .

Pro  $p = 2$ :

$$\hat{V}_2 = 2 \int_{X \cap L_2} \|x\| dx^2. \quad (2.16)$$

Z věty 6 víme, že platí

$$\text{Var}(\hat{V}_1) \geq \text{Var}(\hat{V}_2). \quad (2.17)$$

### 2.2.1 Sféroid se středem v počátku

Nechť

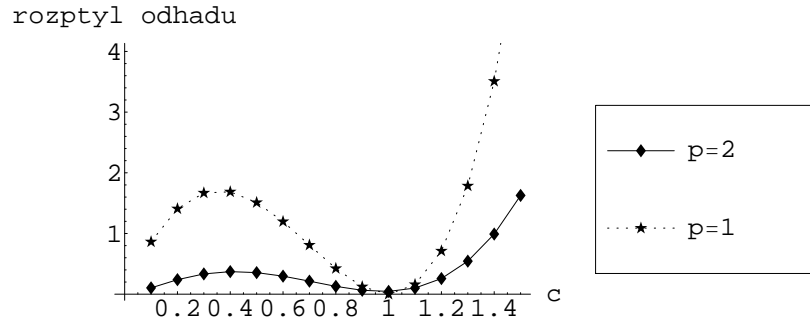
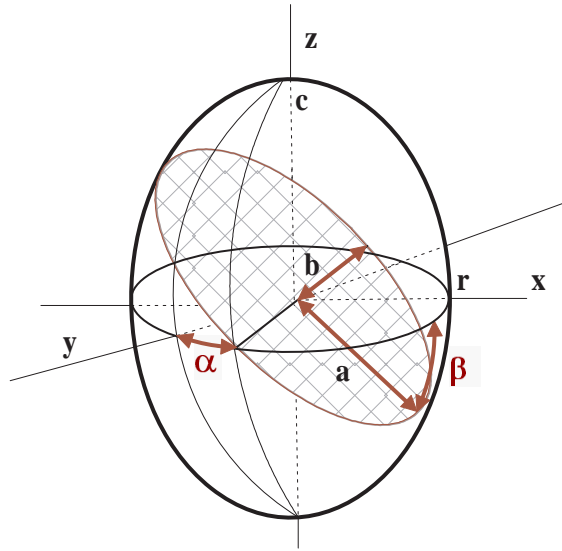
$$X = \{[x, y, z]; x^2/r^2 + y^2/r^2 + z^2/c^2 < 1; r = 1\}.$$

Pro tento rotační elipsoid se středem v počátku a dvěma shodnými poloosami (tj. sféroid) jsem spočítal oba odhady, jejichž závislost na  $c$  můžeme vidět na obrázku 2.5. Tento graf je v souladu s (2.17).

Popis výpočtu:

Pro  $p = 1$  je postup výpočtu shodný s výpočtem pro kouli s položením  $d = 0$ , viz strana 19.

Pro  $p = 2$  je postup odlišný. Schematický náhled vidíme na obrázku 2.6.

Obrázek 2.5: Závislost rozptylu odhadu na délce poloosy  $c$ .

Obrázek 2.6: Sféroid.

Víme, že průnikem elipsoidu a roviny je elipsa. V závislosti na parametrech  $c, r := 1$  sféroidu a úhlech  $\alpha, \beta$  naklonění roviny  $L_2$  spočítáme velikosti obou poloos vzniklé elipsy:

$$a = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{1 + c^2 + (c^2 - 1)\cos(2\beta)}}$$

a zřejmě  $b = 1$ . Přes tuto elipsu  $Y = \{[x, y]; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$  spočítáme velikost odhadu:

$$\hat{V}_2 = 2 \int_Y \|x\| dx^2.$$

Zavedeme polární souřadnice a poté dostaneme tvar pro elipsu

$$Y = \left\{ [p \cos \gamma, p \sin \gamma]; p^2 < \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\gamma)}; \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right\}.$$



Tedy

$$\hat{V}_2 = \hat{V}_2(c, \beta) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\left| \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\gamma)} \right|}} p^2 dp d\gamma. \quad (2.18)$$

Zde se nám při praktickém výpočtu nepodaří integrál analyticky vyjádřit. Protože odhad je závislý na úhlu  $\beta$ , přes který budeme při výpočtu rozptylu odhadu chtít integrovat, spočteme si hodnotu odhadu pro mnoho hodnot úhlu  $\beta$  v oboru  $[0, \pi/2]$ . Počet  $N$  těchto hodnot jsem určil tak, aby se střední hodnota vypočtená pomocí jednoduché numerické integrace lišila od objemu elipsoidu v řádu  $10^{-2}$ :

$$E(\hat{V}_2) = \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{N} \hat{V}_2 \left( c, \frac{i\pi}{2N} \right) \sin \left( \frac{i\pi}{2N} \right) + e, \quad (2.19)$$

kde  $|e| < 10^{-2}$ . Druhý moment a tedy i rozptyl spočítáme obdobně. Pro vytvoření grafu závislosti rozptylu odhadu na délce  $c$  třetí poloosy jsem celou proceduru opakoval pro  $c = 0,1j$ ;  $j \in \{1, \dots, 15\}$ .

### 2.2.2 Elipsoid se středem v počátku

Uvažujme nyní obecný elipsoid se středem v počátku:

$$X = \{[x, y, z]; x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1; a = 1\}.$$

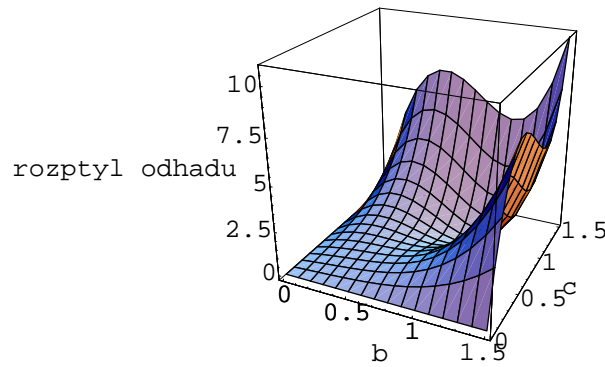
Použitím podobného postupu jako v předchozím odstavci jsem sestrojil graf (obr. 2.7) závislosti rozptylu odhadu pro  $p = 1$  pro tento elipsoid. Obtížnost výpočtu neumožňuje vyjádřit tento rozptyl analyticky.

### 2.2.3 Koule

Nechť

$$X = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + (z - d)^2 < r^2\}.$$

Rozptyl odhadu objemu koule s poloměrem  $r$  a vzdáleností  $d$  středu od počátku se mi analyticky podařilo spočítat pouze pro  $p = 1$ . Vzorec pro



Obrázek 2.7: Rozptyl odhadu objemu elipsoidu s poloosami  $a = 1, b, c$ .

rozptyl odhadu stejně jako v případě kruhu závisí na poloze středu koule:

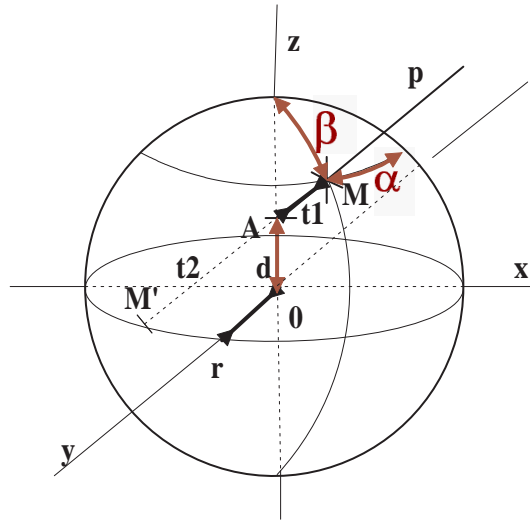
$$\text{Var } \hat{V}_1 = \begin{cases} \frac{16}{35}d^4\pi^2(7r^2 - 2d^2) & \text{pro } d \leq r \\ \frac{4}{315}\pi^2(105d^2r^4\sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}} - 140r^6\sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}} \\ - 42d^4r^2(-6 + 5\sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}}) \\ + d^6(-72 + 70\sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}}) \\ - 105d^2r^4\cos(\frac{3}{2}\arccos(1 - \frac{2r^2}{d^2})) \\ + 7d^4(d^2 - 6r^2)\cos(\frac{5}{2}\arccos(1 - \frac{2r^2}{d^2})) \\ - 5d^6\cos(\frac{7}{2}\arccos(1 - \frac{2r^2}{d^2})) & \text{pro } d > r. \end{cases} \quad (2.20)$$

Popis výpočtu:

Nejdříve si kvůli pohodlí posuneme střed koule do bodu  $O$ . Budeme počítat rozptyl odhadu objemu pomocí řezu přímkou  $p$ , kterou tedy nyní otáčíme okolo bodu  $A$ , viz obr. 2.8. Spočítáme vzdálenost  $t_1$  bodu  $M$  od  $A$  a vzdálenost  $t_2$  bodu  $M'$  od  $A$  v závislosti na úhlech  $\alpha, \beta$ , poloměru  $r$  koule a vzdálenosti bodu  $A$  od středu koule:

$$t_1 = \left| \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \beta} - d \cos \beta \right|,$$

$$t_2 = \left| \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \beta} + d \cos \beta \right|.$$



Obrázek 2.8: Koule.

Potom spočítáme odhad z věty 3:

$$\hat{V}_1(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3} |t_1^3 + t_2^3|.$$

Pro spočítání rozptylu potřebujeme spočítat první a druhý moment odhadu. Víme však, že střední hodnota odhadu se rovná objemu. Kontrolní výpočet nám to potvrzuje:

$$E(\hat{V}_1(\alpha, \beta)) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{V}_1(\alpha, \beta) \sin \beta d\beta d\alpha = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Podobně spočítáme druhý moment a z něj rozptyl odhadu, který je výše. Pro  $d > r$  je výpočet v podstatě shodný, pouze položíme

$$\hat{V}_1(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3} |t_1^3 - t_2^3|.$$

### 2.2.4 Vertikální elipsoid

Uvažujme elipsoid

$$X = \{[x, y, z]; x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}.$$

Pro  $n = 3, p = 2$  a  $r = 1$ , kde  $L_1$  je totožná s osou  $z$ , máme odhad objemu:

$$m_{2,L_1}^{(3)}(X, L_2) = \pi \int_{X \cap L_2} \|\pi_{L_1^\perp} x\| dx^2. \quad (2.21)$$

Pro trojosý elipsoid se středem v počátku a délkami poloos  $a, b, c$  spočítáme odhad založený na znalosti průniku elipsoidu a roviny  $L_2$ , která obsahuje přímkou  $L_1$  totožnou s osou  $z$ . Tento odhad závisí na parametrech elipsoidu a úhlu natočení vertikální roviny  $L_2$ :

$$m_{2,L_1}^{(3)}(X, L_2) = \frac{4\pi ca^2 b^2}{3(a^2 \cos^2(\alpha) + b^2 \sin^2(\alpha))}. \quad (2.22)$$

Integrací přes úhel  $\alpha$  dostaneme rozptyl odhadu:

$$\text{Var}(m_{2,L_1}^{(3)}(X, L_2)) = \frac{8}{9}c^2 ab\pi^2(a-b)^2. \quad (2.23)$$

## 2.3 Tvarový koeficient a koeficient chyby

V této části zavedeme tvarový koeficient a koeficient chyby a spočítáme je pro některé obrazce a tělesa uvedená v předchozí části:

**Definice 8** *Nechť  $n \in \mathbb{N} : 0 < n$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je omezená a otevřená. Potom definujeme tvarový koeficient  $\kappa$  množiny  $X$  předpisem:*

$$\kappa(X) := \frac{\max(\text{dist}(x, O); x \in \partial X)}{\min(\text{dist}(x, O); x \in \partial X)}, \quad (2.24)$$

*pokud  $O \notin \partial X$ .*

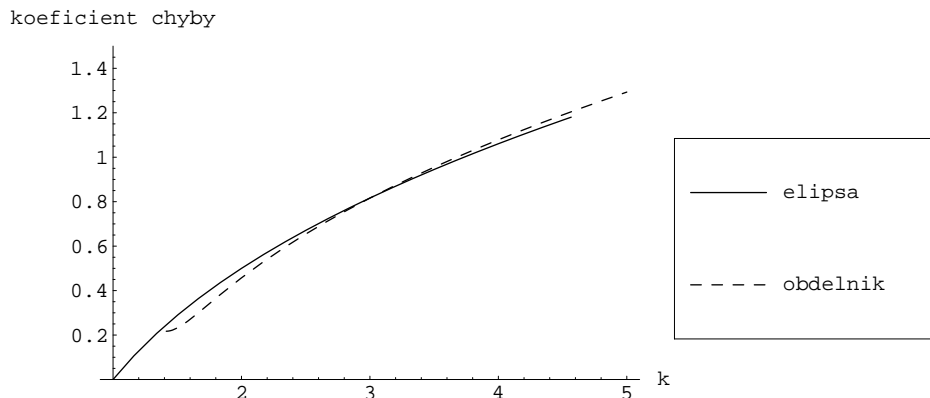
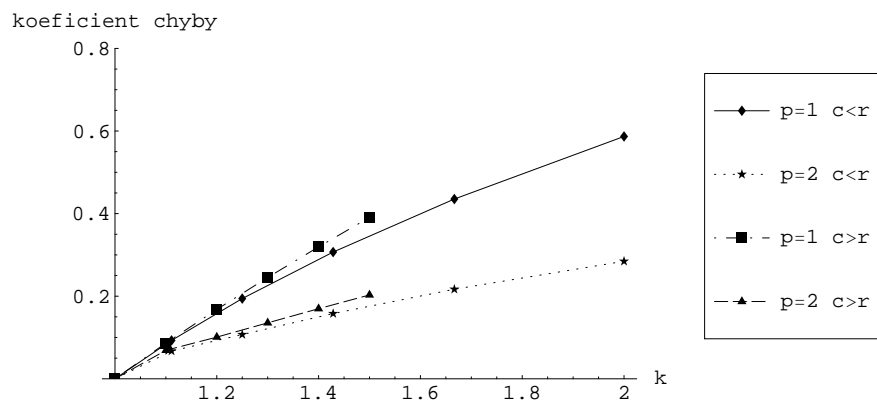
Zřejmě  $1 \leq \kappa < \infty$ .

**Definice 9** *Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je omezená a otevřená. Potom definujeme koeficient chyby jejího lokálního stereologického odhadu předpisem:*

$$W(X, L_r) := \frac{\sqrt{\text{Var}(m_{p,L_r}^{(n)}(X, L_p))}}{\text{E}(m_{p,L_r}^{(n)}(X, L_p))}, \quad (2.25)$$

*kde  $L_p$  je izotropní podprostor obsahující  $L_r$ .*

Koeficient chyby závisí pouze na tvaru, nikoliv na absolutních rozměrech množiny  $X$ . Pro rozptyly odhadu objemu některých množin s volbou  $L_r = O$  počítaných v předchozích odstavcích je možné koeficient chyby vyjádřit jako funkci tvarového koeficientu. Grafy těchto závislostí můžeme vidět na obr. 2.9 a 2.10. Na prvním z nich (obr. 2.9) jsou tyto závislosti pro množiny v  $\mathbb{R}^2$ , konkrétně elipsu a obdélník. Na druhém (obr. 2.10) je zachycena tato závislost pro zploštělý a protáhlý sféroid, pro  $p \in \{1, 2\}$ .

Obrázek 2.9: Koefficient chyby v  $\mathbb{R}^2$ .Obrázek 2.10: Koefficient chyby v  $\mathbb{R}^3$ .

## Závěr

V práci jsem zkoumal statistické vlastnosti lokálních stereologických odhadů rovinných a prostorových částic. Předpokládal jsem, že řez pevnou částicí je izotropní, což je ekvivalentní předpokladu izotropní částice a pevně orientovaného řezu. Za tohoto předpokladu závisí rozptyl lokálního stereologického odhadu na tvaru a velikosti studovaného objektu a na volbě referenčního bodu.

Rozptyl lokálního odhadu může být roven nule (např. pro kouli s referenčním bodem ve středu koule). Vzhledem k nestrannosti odhadu to znamená, že v tomto případě je lokální stereologický odhad přesný. Zavedl jsem tvarový koeficient, který měří odlišnost tvaru množiny vzhledem k referenčnímu bodu od tvaru centrované koule. Pro zvolené množiny jsem ukázal, že koeficient chyby lokálního stereologického odhadu roste se zvětšujícím se tvarovým koeficientem. Větší koeficient chyby odhadu je způsoben protažením množiny v nějakém směru nebo asymetrickou polohou referenčního bodu, např.

protáhlý sféroid dává větší koeficient chyby než příslušný zploštělý sféroid, viz obr. 2.10.

# Literatura

- [1] Jensen E.B.V.: *Local Stereology*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998.
- [2] Miles R.E.: *Some new integral geometric formulae, with stochastic applications*, J. Appl. Prob. **16** (1979), 592–606.
- [3] Wolfram Research, Inc.: *Mathematica, version 5.0*, 2003.