Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
Katedra algebry a geometrie

STAVY NA ALGEBRÁCH
Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce:
Prof. RNDr. Jiří Rachůnek, DrSc.

Rok odevzdání: 2007

Vypracovala:
Martina Štěpánová
Učitelství pro SŠ, M-Dg
5. ročník, prezenční studium

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením Prof. RNDr. Jiřího Rachůnka, DrSc. a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při psaní této práce.

V Olomouci 29. března 2007

....

Děkuji vedoucímu diplomové práce panu Prof. RNDr. Jiřímu Rachůnkovi, DrSc. za cenné rady a připomínky, které mi pomohly k vypracování této práce, a také za čas věnovaný konzultacím.

Úvod

Úkolem diplomové práce je přehledné a jednotící zpracování problematiky stavů, které jsou speciálními případy zobrazení do množiny reálných čísel, na uspořádaných abelovských grupách, MV-algebrách, GMV-algebrách a DRl-monoidech.

Práce začíná uvedením základních pojmů a vlastností, které se týkají především relace uspořádání $\leq$, neboť tuto binární relaci mají všechny algebraické struktury, s nimiž budeme pracovat, zavedenou na příslušných nosičích.

Pojem stav je nejdříve definován na uspořádaných abelovských grupách, je studována jeho existence a také hodnoty, kterých nabývá.

V další části práce se budeme zabývat MV-algebrami. Zvláštní pozornost věnujeme ideálům v těchto strukturách a poukážeme na vztah MV-algeber k uspořádaným abelovským grupám.

MV-algebry zobecníme na GMV-algebry, na nichž definujeme pojem stav, který specifikujeme pro komutativní GMV-algebry (tj. MV-algebry).

Poslední třídou algeber, na kterých bude problematika studována, jsou komutativní DRl-monoidy. Před zavedením stavů na těchto systémech je ukázán jejich vztah k výše uvedeným algebrám.

Obsah

Kapitola 1

Základní definice a vlastnosti

V úvodní kapitole jsou definovány některé základní pojmy, jejichž znalost je nutná ke studiu dalšího textu. Rovněž je zde uveden přehled některých důležitých vlastností, které budou dále používané.

1.1 Relace uspořádání, uspořádané množiny, zobrazení

Definice 1.1.1 *Binární relaci* $\leq$ *nazveme* relací uspořádání na množině X, *jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní na* X.
Uspořádaná množina *je každá množina, na níž je zavedena relace uspořádání. Uspořádaná množina* X *se nazývá* úplně uspořádaná*, jsou-li každé dva prvky* $x, y \in X$ *srovnatelné, tj. buď* $x \leq y$ *nebo* $y \leq x$. *Relaci* $\leq$ *v tomto případě nazveme* úplné uspořádání na X.

Definice 1.1.2 *Uspořádaná množina* X *se nazývá* shora (zdola) usměrněná*, jestliže každá její neprázdná konečná podmnožina má horní (dolní) hranici v* X.

Jestliže každá neprázdná konečná podmnožina v uspořádané množině X má supremum a infimum v X, potom se množina X nazývá svaz.

Definice 1.1.3 *Nechť X, Y jsou uspořádané množiny. Říkáme, že zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ je*

- izotonní, *jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ takové, že $x \leq y$, platí $f(x) \leq f(y)$.*
- antitonní, *jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ takové, že $x \leq y$, platí $f(x) \geq f(y)$.*

Zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ nazveme izomorfismus X na Y, *jestliže je bijektivní a izotonní a f^{-1} je také izotonní.*

1.2 Uspořádané abelovské grupy

Definice 1.2.1 *Abelovskou grupu G, na níž je zavedena relace uspořádání $\leq$ taková, že pro každé $x, y, z \in G, x \leq y$, platí $x + z \leq y + z$, nazýváme* uspořádáná abelovská grupa. *Je-li uspořádání úplné, mluvíme o* úplně uspořádané abelovské grupě.

Definice 1.2.2 Kladným prvkem *v uspořádané abelovské grupě G nazýváme každý prvek $x \in G$ takový, že $x \geq 0$ a* ostře kladným prvkem *v G nazveme každý prvek $x \in G$ takový, že $x > 0$ (tj. $x \geq 0 \wedge x \neq 0$).*

Poznamenejme, že uspořádání na G může být dáno stanovením kladných prvků v G, protože pro každé $x, y \in G$ je $x \leq y$, právě když $y - x \geq 0$. Množina kladných prvků tvoří tzv. kužel.

Definice 1.2.3 Kuželem v abelovské grupě G *nazýváme každou podmnožinu C v G, která je uzavřená na sčítání,* $0 \in C$ *a pouze pro* 0 *platí, že* $x \in C$ *a zároveň* $-x \in C$. Kladným kuželem uspořádané abelovské grupy G *nazýváme množinu G^+ všech kladných prvků v grupě G.*

Zadáním kužele C v grupě G můžeme definovat relaci $\leq_C$ na grupě G takto: $x \leq_C y$, právě když $y - x \in C$ pro všechna $x, y \in G$. Zadáním kladného kužele G^+ je zadáno uspořádání $\leq_{G^+}$ a naopak, je-li C kužel v abelovské grupě G, potom G je uspořádaná abelovská grupa s uspořádáním $\leq_C$ a potom $G^+ = C$. V mnoha případech je určení uspořádaní abelovské grupy pomocí kladného kužele snazší než určení relace uspořádání. Dle této terminologie tedy $\mathbf{Z}^+, \mathbf{G}^+, \mathbf{R}^+$ značí nezáporná celá, racionální a reálná čísla.

Nechť H je podgrupa uspořádané abelovské grupy G. Potom uspořádání v H je indukované uspořádáním v grupě G a tedy $H^+ = H \cap G^+$.

Definice 1.2.4 Usměrněná podgrupa *uspořádané abelovské grupy G je každá podgrupa H v G, která je shora usměrněná. Jestliže grupa G je usměrněná podgrupa v G, potom ji nazýváme* usměrněnou grupou.

Lze dokázat, že každá shora (zdola) usměrněná podgrupa H uspořádané abelovské grupy G je rovněž zdola (shora) usměrněná.

Definice 1.2.5 Silná jednička v uspořádané grupě G *je takový kladný prvek* $u \in G^+$*, že pro každé* $x \in G$ *existuje kladné celé číslo* n*, pro které* $x \leq nu$*. Grupu G s existencí silné jedničky nazýváme* unitální *a značíme ji* (G, u).

V nenulové uspořádané abelovské grupě G prvek 0 nemůže být silnou jedničkou. Takže $u > 0$. Navíc $u \leq nu$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a tedy $nu > 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $mu < 0$ pro všechna záporná celá čísla m.

Definice 1.2.6 Svazově uspořádanou grupou *nazýváme každou uspořádanou abelovskou grupu, která je (jakožto uspořádaná množina) svazem. Zkráceně píšeme l-grupa.*

Například každá úplně uspořádaná grupa je l-grupa.

Definice 1.2.7 *Nechť G, H jsou uspořádané grupy.* Kladným homomorfismem grupy G do grupy H *nazýváme každý grupový homomorfismus $f : G \longrightarrow H$, který zobrazuje kladné prvky na kladné, tj. $f(G^+) \subseteq H^+$.*

Grupový homomorfismus je kladný, právě když je izotonní.

Definice 1.2.8 *Nechť G a H jsou uspořádané grupy a nechť $u \in G, v \in H$ jsou silné jedničky těchto grup.* Normalizovaným kladným homomorfismem z (G, u) do (H, v) *nazveme každý kladný homomorfismus $f : G \longrightarrow H$ takový, že $f(u) = v$.*

Definice 1.2.9 *Nechť G je uspořádaná grupa a $n \in \mathbf{N}$. Grupu nazveme* $n-$perforovaná*, jestliže existuje prvek $x \in G$, pro který $nx \geq 0$, ale $x \ngeq 0$. V opačném případě se grupa nazývá* n-neperforovaná*. Jestliže G je perforovaná pro některé n, potom G nazýváme* perforovaná*. Jestliže G je n-neperforovaná pro všechna n, potom G nazýváme* neperforovanou.

Příklad 1.2.1 *Uvažujme aditivní grupu celých čísel $\mathbf{Z}$. Nechť má kladný kužel $\{0; 2; 4; 6; \ldots\}$. Potom $\mathbf{Z}$ je 2-perforovaná, neboť například $1 \in \mathbf{Z}, 1 \ngeq 0$ a přitom $2 \cdot 1 = 2 \geq 0$.*

Definice 1.2.10 *Uspořádaná grupa G se nazývá* archimédovská*, jestliže pro všechna $x, y \in G$ platí: jestliže $nx \leq y$ pro všechna $n \in N$, potom $x \leq 0$.*

Příklad 1.2.2 *Označme množinu všech funkcí z některé množiny X do grupy $\mathbf{R}$ symbolem $\mathbf{R}^X$ a nechť uspořádání na $\mathbf{R}^X$ je dáno takto: $f \leq g$, právě když $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$. Potom každá podgrupa v $\mathbf{R}^X$ je archimédovská.*

Věta 1.2.11 *Svazově uspořádaná grupa G je archimédovská, právě když platí: jestliže $x, y \in G^+$ a $nx \leq y$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, potom $x = 0$.*

Věta 1.2.12 *Jestliže G je archimédovská usměrněná abelovská grupa, potom je neperforovaná.*

Kapitola 2

Stavy na uspořádaných grupách

Zaveďme na uspořádaných grupách se silnou jedničkou pojem stav jako speciální homomorfismus z (G, u) do $(\mathbf{R}, 1)$. Kromě zavedení pojmu odvodíme základní vlastnosti stavů (např. existenci a jednoznačnost) a popíšeme množinu jejich hodnot. Ukážeme, že stavy určují uspořádání v grupě, právě když je archimédovská.

2.1 Existence stavů

Definice 2.1.1 *Nechť (G, u) je uspořádaná abelovská grupa se silnou jedničkou.* Stav na (G,u) *je každý normalizovaný kladný homomorfismus z (G, u) do $(\mathbf{R}, 1)$, tj. každé zobrazení $s : G \longrightarrow \mathbf{R}$ takové, že platí:*

1. $s(G^+) \subseteq \mathbf{R}^+$,
2. $s(u) = 1$,
3. $s(x + y) = s(x) + s(y)$ *pro všechna $x, y \in G$ (říkáme též, že zobrazení je aditivní).*

Věta 2.1.2 *Nechť G je uspořádaná abelovská grupa, H podgrupa v G a $x \in G$. Nechť $f : H \longrightarrow \mathbf{R}$ je kladný homomorfismus a položme*

- $p = sup\ \{f(y)/m;\ y \in H;\ m \in \mathbf{N};\ y \leq mx\}$,
- $r = inf\ \{f(z)/n;\ z \in H;\ n \in \mathbf{N};\ nx \leq z\}$.

Potom platí:

1. $-\infty \leq p \leq r \leq +\infty$.
2. *Jestliže existuje kladný homomorfismus $g : H + \mathbf{Z}x \longrightarrow \mathbf{R}$ rozšiřující f, potom $p \leq g(x) \leq r$.*
3. *Jestliže existuje reálné číslo q takové, že $p \leq q \leq r$, potom lze f rozšířit na kladný homomorfismus $g : H + \mathbf{Z}x \longrightarrow \mathbf{R}$ takový, že $g(x) = q$.*

Důkaz (1) Jestliže žádný prvek z $\mathbf{N}x$ neleží nad žádným prvkem z H, potom $p = -\infty$. Jestliže žádný prvek z $\mathbf{N}x$ neleží pod žádným prvkem z H, potom $r = +\infty$. Pokud pro $y, z \in H$ a $m, n \in \mathbf{N}$ platí, že $y \leq mx$ a $nx \leq z$, potom $ny \leq mnx \leq mz$ a tedy $nf(y) \leq mf(z)$. Odtud $f(y)/m \leq f(z)/n$, neboli $p \leq r$.
(2)Jestliže $y \in H$ a $m \in \mathbf{N}$ splňují $y \leq mx$, potom $f(y) = g(y) \leq mg(x)$ a tedy $f(y)/m \leq g(x)$. Tj. $p \leq g(x)$. Obdobně se dokáže, že $g(x) \leq r$.
(3) Tvrdíme, že pokud pro $w \in H$ a $k \in \mathbf{Z}$ platí, že $w + kx \geq 0$, potom $f(w) + kq \geq 0$. Jestliže $k = 0$, potom $w \geq 0$ a tedy $f(w) + kq = f(w) \geq 0$, neboť f je kladný homomorfismus. Jestliže $k > 0$, potom ze vztahu $-w \leq kx$ dostáváme $f(-w)/k \leq p \leq q$ a tedy $f(w) + kq \geq 0$. Je-li $k < 0$, dostáváme $q \leq r \leq f(w)/(-k)$, protože $(-k)x \leq w$. A tedy opět $f(w) + kq \geq 0$. Speciálně pro $w \in H$ a $k \in \mathbf{Z}, w + kx = 0$ dostáváme: $f(w) + kq = 0$ a $f(-w) - kq \geq 0$, neboť $w + kx \geq 0$ a $-w - kx \geq 0$. Tedy $f(w) + kq = 0$.

Celkově tedy f lze rozšířit na grupový homomorfismus $g : H + \mathbf{Z}x \longrightarrow \mathbf{R}$ takový, že $g(x) = q$.

Věta 2.1.3 *Nechť G je uspořádaná abelovská grupa, H podgrupa G a předpokládejme, že každý prvek z G je shora ohraničen prvkem z H. Potom každý kladný homomorfismus $f : H \longrightarrow \mathbf{R}$ lze rozšířit na kladný homomorfismus $G \longrightarrow \mathbf{R}$.*

Důkaz Nechť $\mathcal{K}$ je množina dvojic (K, g) takových, že K je podrupa grupy G obsahující H a $g : K \longrightarrow \mathbf{R}$ je kladný homomorfismus rozšiřující f. Pro (K', g') a (K'', g'') v $\mathcal{K}$ definujme $(K', g') \leq (K'', g'')$, právě když $K' \subseteq K''$ a g'' rozšiřuje g'. Dle tzv. Zornova lemmatu existuje maximální prvek (K, g) v $\mathcal{K}$ a stačí dokázat, že $K = G$, což se provádí tak, že dokážeme neexistenci $x \in G \setminus K$.

Důsledek 2.1.4 *Nechť (G, u) je uspořádaná abelovská unitální grupa a nechť H je podgrupa v G taková, že $u \in H$. Potom každý stav na (H, u) lze rozšířit na stav na (G, u).*

Důkaz Pro každé $x \in G$ platí $x \leq nu$ pro některé $n \in \mathbf{N}$ a $nu \in H$ a dle věty 2.1.3 tvrzení platí.

Důsledek 2.1.5 *Nechť (G, u) je uspořádaná abelovská unitální grupa. Potom existuje stav na (G, u), právě když grupa (G, u) je nenulová.*

Důkaz Je-li s stav na (G, u), potom $s(u) = 1$ a tedy $u \neq 0$. Naopak nechť G je nenulová. Protože u je silná jednička, $u \neq 0$ a potom $nu \geq u > 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $mu \leq -u < 0$ pro všechna záporná celá čísla m. Odtud $\mathbf{Z}u \cap G^+ = \mathbf{Z}^+u$ a $ku \neq 0$ pro všechna $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Proto existuje grupový homomorfismus $t : \mathbf{Z}u \longrightarrow \mathbf{Z}$ tak, že $t(u) = 1$ a t je stav na $(\mathbf{Z}u, u)$ a t se rozšíří na stav na (G, u).

Věta 2.1.6 *Nechť (G, u) je uspořádaná abelovská unitální grupa a nechť $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ je kladný homomorfismus.*

1. *Jestliže f je nenulový, potom $f(u) > 0$ a $f = f(u)s$ pro některý stav na (G, u).*

2. *Jestliže G je nenulová, potom $f = \alpha s$ pro některé nezáporné reálné číslo α a některý stav s na (G, u).*

Důkaz (1) Dle předpokladu $f(x) \neq 0$ pro některé $x \in G$. Vyberme $n \in \mathbf{N}$ takové, že $-nu \leq x \leq nu$ a tedy $-nf(u) \leq f(x) \leq nf(u)$, odsud $f(u) > 0$. Zobrazení $s = (f(u))^{-1}f$ je stav na grupě (G, u) a $f = f(u)s$.
(2) Jestliže $f \neq 0$, aplikujeme (1). Jestliže $f = 0$, potom $f = 0s$ pro každý stav s na (G, u). Existence alespoň jednoho stavu s na (G, u) je zaručena důsledkem 2.1.5.

2.2 Hodnoty stavů

Použijeme věty 2.1.2 k získání popisu množiny hodnot, které mají stavy na (G, u) pro jednotlivé prvky z grupy G.

Věta 2.2.1 *Nechť (G, u) je nenulová uspořádaná abelovská unitální grupa, nechť $x \in G$ a položme*

- $f_*(x) = sup\ \{k/m;\ k \in \mathbf{Z};\ m \in \mathbf{N};\ ku \leq mx\}$,

- $f^*(x) = inf\ \{l/n;\ l \in \mathbf{Z};\ n \in \mathbf{N};\ nx \leq lu\}$.

Potom platí:

1. $-\infty < f_*(x) \leq f^*(x) < +\infty$.

2. *Jestliže s je stav na (G, u), potom $f_*(x) \leq s(x) \leq f^*(x)$.*

3. *Jestliže q je reálné číslo takové, že $f_*(x) \leq q \leq f^*(x)$, potom existuje stav s na (G,u), pro který platí $s(x) = q$.*

4. $f_*(0) = 0 = f^*(0)$; $f_*(u) = 1 = f^*(u)$.

5. $f^*(x) = -f_*(-x)$; $f^*(-x) = -f_*(x)$.

Důkaz Pokud G je nenulová, potom $ju < 0$ pro všechna záporná celá čísla.

(1) Existují kladná celá čísla k, l taková, že $-x \leq ku$ a $x \leq lu$, tedy $f_*(x) \geq -k > -\infty$ a $f^*(x) \leq l < +\infty$. Pro $k, l \in \mathbf{Z}$ a $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $ku \leq mx$ a $nx \leq lu$ dostáváme $knu \leq mnx \leq lmu$ a tedy $(lm - kn)u \geq 0$. Vidíme tedy, že $lm - kn \geq 0$ a odtud $k/m \leq l/n$. Neboli $f_*(x) \leq f^*(x)$.

(2) Pro $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$ taková, že $ku \leq mx$, dostáváme $k \leq ms(x)$, neboť $s(u) = 1$. Proto $k/m \leq s(x)$ a $f_*(x) \leq s(x)$. Obdobně dokážeme platnost nerovnosti $s(x) \leq f^*(x)$.

(3) Nechť $H = \mathbf{Z}u$. Protože $u > 0$, existuje na (H,u) stav f a dále

p=sup $\{f(y)/m;\ y \in H;\ m \in \mathbf{N};\ y \leq mx\}$,

r=inf $\{f(z)/n;\ z \in H;\ n \in \mathbf{N};\ nx \leq z\}$

a dle věty 2.1.2 lze f rozšířit na kladný homomorfismus $g : H + \mathbf{Z}x \longrightarrow \mathbf{R}$ takový, že $g(x) = q$ a g je stav na $(H + \mathbf{Z}u, u)$ a ten lze (dle důsledku 2.1.4) rozšířit na stav s na (G,u)

(4)Platnost je evidentní.

(5) Nechť $nx \leq lu$, $l \in \mathbf{Z}$. Potom $-lu \leq n(-x)$ a tedy $f_*(x) \geq -l/n$. Tj. $f_*(-x) \geq -f^*(x)$. Nechť naopak $k'u \leq m(-x)$ pro $k' \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$. Potom $mx \leq -k'u$, což znamená, že $f^*(x) \leq -k/l$, tj. $f^*(x) \leq -f_*(-x)$. Celkově tedy dostáváme $f^*(x) \leq -f_*(-x) \leq f^*(x)$ a tato nerovnost implikuje rovnost $f^*(x) = -f_*(-x)$.

Zcela analogicky postupujeme pro druhou rovnost z tvrzení.

Důsledek 2.2.2 *Nechť* (G, u) *je nenulová uspořádaná abelovská unitální grupa,* $x \in G^+$ *a položme*

- $f'_*(x) = sup\ \{k/m;\ k \in \mathbf{Z}^+;\ m \in \mathbf{N};\ ku \leq mx\}$,
- $f'^*(x) = inf\ \{l/n;\ l, n \in \mathbf{N};\ nx \leq lu\}$.

Potom platí:

1. $0 \leq f'_*(x) \leq f'^*(x) < +\infty$.
2. *Jestliže* s *je stav na* (G, u), *potom* $f'_*(x) \leq s(x) \leq f'^*(x)$.
3. *Jestliže* q *je reálné číslo takové, že* $f'_*(x) \leq q \leq f'^*(x)$, *potom existuje stav* s *na* (G, u), *pro který platí* $s(x) = q$.

Důkaz Protože $0u \leq x$, dostáváme $f'_*(x) \geq 0$. Zbytek důkazu spočívá v dokázání rovností $f'_*(x) = f_*(x)$, $f'^*(x) = f^*(x)$.

Věta 2.2.3 *Nechť* (G, u) *je nenulová uspořádaná abelovská unitální grupa,* $x \in G$. *Potom* $s(x) \geq 0$ *pro všechny stavy* s *na* (G, u), *právě když existují kladná celá čísla* $m_1, m_2, \ldots$ *taková, že* $m_n(nx + u) > 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$.

Důkaz Nechť taková čísla $m_1, m_2, \ldots$ existují. Pro stav s dostáváme $m_n(ns(x)+1) \geq 0$, neboli $s(x) \geq -1/n$ pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ a tedy $s(x) \geq 0$. Naopak nechť $s(x) \geq 0$ pro všechny stavy s na (G, u). Nechť $f_*(x)$ je stejné jako ve větě 2.2.1. Dle této věty existuje stav s na (G, u) tak, že $s(x) = f_*(x)$ a tedy i $f_*(x) \geq 0$. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ musí existovat $k \in \mathbf{Z}$ a $m \in \mathbf{N}$ taková, že $ku \leq mx$ a $k/m > -1/n$. Potom $kn > -m$, odtud $mnx \geq knu > -mu$, a proto $m(nx + u) > 0$.

Důsledek 2.2.4 *Nechť* (G, u) *je nenulová neperforovaná uspořádaná abelovská unitální grupa,* $x \in G$. *Potom* $s(x) \geq 0$ *pro všechny stavy* s *na* (G, u), *právě když* $nx + u > 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$.

Důkaz Tvrzení plyne přímo z předchozí věty a z vlastností neperforované grupy (G, u).

Důsledek 2.2.5 *Nechť* (G, u) *je nenulová neperforovaná uspořádaná abelovská unitální grupa,* $y \in G^+$. *Potom* $s(y) = 0$ *pro všechny stavy na* (G, u)*, právě když* $ny < u$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$.

Důkaz Protože $y \in G^+$, $s(y) = 0$ pro všechny stavy na (G, u), právě když $s(-y) = 0$ pro všechny stavy na (G, u). Dle důsledku 2.2.4 toto nastane, právě když $-ny + u > 0$, neboli $ny < u$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

Věta 2.2.6 *Nechť* (G, u) *je uspořádaná abelovská unitální grupa,* $x \in G$. *Potom* $s(x) > 0$ *pro všechny stavy* s *na* (G, u)*, právě když existuje* $m \in \mathbf{N}$ *takové, že* mx *je silnou jedničkou v* G.

Důkaz Předpokládejme nenulovost G. Pokud mx je silnou jedničkou pro některé $m \in \mathbf{N}$, potom $kmx \geq u$ pro některé $k \in \mathbf{N}$. Tedy $kms(x) \geq 1$, a proto $s(x) > 0$. Naopak, ať $s(x) > 0$ pro všechny stavy s na (G, u). Dle věty 2.2.1 existují $k \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N}$ taková, že $ku \leq mx$ a $k/m > 0$. Potom $k > 0$ a $mx \geq ku \geq u > 0$. Pro každý prvek $y \in G$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že $y \leq nu$ a tedy $y \leq n(mx)$. Odtud vyplývá, že mx je silnou jedničkou v G.

Důsledek 2.2.7 *Nechť* (G, u) *je neperforovaná uspořádaná abelovská unitální grupa,* $x \in G$. *Potom* $s(x) > 0$ *pro všechny stavy* s *na* (G, u)*, právě když* x *je silnou jedničkou v* G.

Důkaz Je-li mx silnou jedničkou, potom $mx \geq 0$ a pro neperforovanou grupu $x \geq 0$ a x je silná jednička v G.

Věta 2.2.6 a její důsledek 2.2.7 ukazují, že pro prvek z nenulové uspořádané abelovské unitální grupy (G, u) platí, že pokud $s(x) > 0$ pro všechny stavy s na (G,u), potom $mx > 0$ pro některé $n \in \mathbf{N}$ a dále $x > 0$ v případě neperforované grupy. Hodnoty stavů na (G,u) tedy výrazně ovlivňují uspořádání v grupě G. Množina stavů na (G,u) určuje jednoznačně uspořádání v G, právě když je grupa G archimédovská.

Věta 2.2.8 *Pro uspořádanou abelovskou unitální grupu G jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. $G^+ = \{x \in G,\ s(x) \geq 0$ *pro všechny stavy s na* $(G,u)\}$.
2. *G je izomorfní (jako uspořádaná grupa) s podgrupou $\mathbf{R}^X$ pro nějakou neprázdnou množinu X.*
3. *G je archimédovská.*

Důkaz Předpokládejme, že G je nenulová.
(1)⇒(2) Nechť X je množina stavů na (G,u) (X je dle důsledku 2.1.5 neprázdná) a nechť pro zobrazení $\Phi : G \longrightarrow \mathbf{R}^X$ platí: $\Phi(x)(s) = s(x)$ pro každé $x \in G$ a $s \in X$. Dle (1) pro všechna $x, y \in G$ platí $x \leq y$, právě když $\Phi(x) \subseteq \Phi(y)$ a Φ je proto injektivní. Φ je tedy izomorfismus z G na podgrupu $\Phi(G) \subseteq \mathbf{R}^X$.
(2)⇒(3) Tato implikace je triviální.
(3)⇒(1) Dle definice stavu je $s(x) \geq 0$ pro všechna $x \in G^+$ a všechny stavy s na (G,u). Obráceně, uvažujme $x \in G$ takové, že $s(x) \geq 0$ pro všechny stavy s na (G,u). Protože G je dle věty 1.2.12 neperforovaná, důsledek 2.2.4 ukazuje, že $nx + u > 0$ a tedy $n(-x) < u$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. A protože G je archimédovská, platí $-x \leq 0$ a tedy $x \in G^+$.

2.3 Jednoznačnost stavů

Pomocí věty 2.2.1 a důsledku 2.2.2 odvoďme kritéria určující, které uspořádané abelovské unitální grupy mají právě jeden stav.

Pro každé dva stavy s, t na grupě (G, u) definujme binární relaci $\leq^+$ takto: $s \leq^+ t$, právě když $t - s$ je kladný homomorfismus z grupy (G, u) do $(\mathbf{R}, 1)$.

Věta 2.3.1 *Nechť (G, u) je uspořádaná abelovská unitální grupa a nechť s, t jsou stavy na (G, u). Jestliže $s \leq^+ t$ nebo $t \leq^+ s$, potom $s = t$.*

Důkaz Ze symetrie lze předpokládat, že $s \leq^+ t$. Označme $f = t - s$. f je kladný homomorfismus z G do $\mathbf{R}$ takový, že $f(u) = 1 - 1 = 0$. Pro libovolné $x \in G$ a některé $n \in \mathbf{N}$ platí $-nu \leq x \leq nu$, a proto dostáváme $0 = f(-nu) \leq f(x) \leq f(nu) = 0$. Odtud $f(x) = 0$ a konečně tedy máme $f = 0$ a $s = t$.

Věta 2.3.2 *Nechť (G, u) je nenulová uspořádaná unitální grupa. Pro všechna $x \in G^+$ položme:*

- $\bar{f}_*(x) =$*sup* $\{k/m;\ k \in \mathbf{R}^+;\ m \in \mathbf{N};\ ku \leq mx\}$,
- $\bar{f}^*(x) =$*inf* $\{l/n;\ l, n \in \mathbf{N};\ nx \leq lu\}$.

Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *Existuje právě jeden stav na (G, u).*
2. $\bar{f}^* = \bar{f}_*$. *(V tomto případě lze $\bar{f}^*$ rozšířit na stav na (G, u)).*
3. $\bar{f}^*$ *je aditivní zobrazení.*
4. $\bar{f}_*$ *je aditivní zobrazení.*

Důkaz Dle důsledku 2.1.5 existuje alespoň jeden stav na (G, u).
(1) $\Rightarrow$ (2) Pro dané $x \in G^+$ dle důsledku 2.2.2 existují stavy s, t na (G, u) tak, že $s(x) = \bar{f}^*$ (x) a $t(x) = \bar{f}_*(x)$. Jelikož $s = t$, tak rovněž $\bar{f}^* = \bar{f}_*$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Nechť s, t jsou stavy na (G, u). Potom opět dle důsledku 2.2.2 pro každé $x \in G^+$ platí $\bar{f}_*(x) \leq s(x) \leq \bar{f}^*(x)$, $\bar{f}_*(x) \leq t(x) \leq \bar{f}^*(x)$ a tedy $s(x) = t(x) = \bar{f}^*(x)$ na G^+. Speciálně s, t jsou rozšířením $\bar{f}^*$. Jelikož grupa G je usměrněná, platí $s = t$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Jelikož $\bar{f}^*(x)$ rozšiřuje grupový homomorfismus, musí být aditivní.
(3) $\Rightarrow$ (1) Platí, že $\bar{f}^*(0) = 0$. Rozšiřme aditivní $\bar{f}^*$ na grupový homomorfismus $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$. Dle důsledku 2.2.2 je $\bar{f}^*(x) \geq 0$ pro libovolné $x \in G^+$, takže f je kladný homomorfismus. Protože $nu \nleq lu$ pro všechna $n \in \mathbf{N}, n > l$, je vidět, že $\bar{f}^*(u) = 1$, a proto f je stav na (G, u).
Nyní uvažujme libovolný stav s na (G, u). Dle důsledku 2.2.2 $s(x) \leq \bar{f}^*(x)$ pro všechna $x \in G^+$. Tj. $s \leq^+ f$. Dle předchozí věty $s = f$ a f je tedy jediný stav na (G, u).
(2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) Postupujeme stejně jako pro (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Důsledek 2.3.3 *Nechť (G, u) je nenulová úplně uspořádaná abelovská unitální grupa. Potom existuje jediný stav s na (G, u) a pro každé $x \in G^+$ platí:* $s(x) = sup\ \{k/m;\ k \in \mathbf{Z}^+;\ m \in \mathbf{N};\ ku \leq mx\} = inf\ \{l/n;\ l, n \in \mathbf{N};\ nx \leq lu\}$.

Důkaz Definujme $\bar{f}^*, \bar{f}_*$ dle věty 2.3.2. Pokud na (G, u) existuje více stavů, potom $\bar{f}^*(x) \neq \bar{f}_*(x)$ pro některé $x \in G^+$. Dle důsledku 2.2.2 platí $0 \leq \bar{f}_*(x) < \bar{f}^*(x)$ a tedy existují $k, n \in \mathbf{N}$ taková, že $\bar{f}_*(x) < k/n < \bar{f}^*(x)$. Protože $k/n < \bar{f}^*$(x), dostáváme $nx \nleq ku$ a následovně $ku \leq nx$. Potom ale $k/n \leq \bar{f}_*(x)$, což je spor.
Existuje tedy právě jeden stav s na (G, u) a dle věty 2.3.2 je restrikce s na G^+ rovna $\bar{f}^* = \bar{f}_*$ a tedy $s(x)$ má požadovanou hodnotu.

Nyní uveďme (již bez důkazu) další kritérium udávající, zda na grupě existuje právě jeden stav.

Věta 2.3.4 *Pro libovolnou nenulovou uspořádanou abelovskou unitální grupu (G, u) jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *Existuje jediný stav na (G, u).*
2. *Pro libovolná kladná celá čísla $a > b$ a libovolné prvky $x, y \in G^+$, pro které je $x+y$ silnou jedničkou, existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že buď $nbx < nay$ nebo $nby < nax$.*
3. *Existují $a, b \in \mathbf{N}$, $a \geq b$ takové, že pro každý prvek $x \in G^+$ a každé $l \in \mathbf{N}$ existuje $n \in \mathbf{N}$, pro které buď $nbx \leq na(lu)$ nebo $nb(lu) \leq nax$.*

2.4 Diskrétní stavy

Obraz stavu $s(G)$ je aditivní podgrupa v $\mathbf{R}$. Ukažme, že v $\mathbf{R}$ existují dva zcela odlišné typy aditivních podgrup a že tento typ ovlivňuje chování stavu.

Věta 2.4.1 *Každá aditivní podgrupa v $\mathbf{R}$ je buď cyklická grupa nebo hustá podmnožina v $\mathbf{R}$.*

Důkaz Uvažujme aditivní podgrupu G v $\mathbf{R}$, která není hustá. Potom G neobsahuje libolně malá kladná reálná čísla a tedy existuje $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ takové, že interval $(0, \varepsilon)$ je disjunktní s G. V G existuje nejmenší kladné reálné číslo, neboť v opačném případě by existovala kladná reálná čísla $a_1 > a_2 > \dots$ taková, že všechna leží v G. Všechna kladná reálná čísla $a_i - a_{i+1}$ pak leží v G a všechna (až na konečný počet) musí být menší než ε, což není možné. Existuje tedy nejmenší kladné reálné číslo $a \in G$. Každé reálné číslo b lze vyjádřit ve tvaru $na + c$, kde $n \in \mathbf{Z}$ a $0 \leq c < a$. Jestliže $b \in G$, potom též

$c \in G$ a z minimality čísla a plyne, že $c = 0$. Tedy $b = na$ a odtud $G = \mathbf{Z}a$. Proto je G cyklická grupa.

Definice 2.4.2 *Nechť (G, u) je uspořádaná abelovská unitální grupa. Stav s na (G, u) nazveme* diskrétní, *právě když jeho obraz $s(G)$ je cyklickou podgrupou v $\mathbf{R}$.*

Protože $s(u) = 1 \in s(G)$, musí generátor $s(G)$ diskrétního stavu být ve tvaru $1/n$ a tedy $s(G) = (1/n)\mathbf{Z}$ pro některé $n \in \mathbf{N}$.

Příklad 2.4.1 *Nechť $G = \mathbf{Z}^2$ a $u = (m, n)$ pro některá kladná $m, n \in \mathbf{Z}$. Potom stavy s, t definované $s(x, y) := x/m$ a $t(x, y) := y/n$ jsou diskrétní, neboť $s(G) = (1/m)\mathbf{Z}$, $t(G) = (1/n)\mathbf{Z}$. Naopak ale stav r na (G, u) definovaný $r(x, y) = (x + y\alpha)/(m + n\alpha), \alpha$ je kladné iracionální číslo, není diskrétní, neboť $r(G) = (m + n\alpha)^{-1}\mathbf{Z} + \alpha(m + n\alpha)^{-1}\mathbf{Z}$ je hustá podgrupa v $\mathbf{R}$.*

Kapitola 3

MV-algebry a jejich vztah k uspořádaným grupám

Pro klasickou dvouhodnotovou logiku byly jako jejich algebraický protějšek zavedeny Booleovy algebry. Naskýtá se tedy otázka, zda k Łukasiewiczově (komutativní) nekonečně hodnotové logice existuje v teorii algebraických struktur tento protějšek také.

Kladnou odpověď nám poskytují tzv. MV-algebry (zkráceno z anglického many valued algebras), které byly zavedeny v padesátých letech 20.století americkým matematikem C.C.Changem.

Definujme nyní tyto algebry a uveďme některé jejich základní vlastnosti včetně jejich vztahu k dalším algebraickým strukturám.

3.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 3.1.1 MV-algebrou *nazýváme algebru* $M = (M, \oplus, \neg, 0)$ *typu* $(2, 1, 0)$, *která splňuje následující rovnosti:*

MV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, *MV2)* $x \oplus y = y \oplus x$,

MV3) $x \oplus 0 = x$,

MV4) $\neg\neg x = x$,

MV5) $x \oplus \neg 0 = \neg 0$,

MV6) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Na každé MV-algebře definujme konstantu 1 a operace $\odot, \ominus$ následovně:

$$1 := \neg 0,$$
$$x \odot y := \neg(\neg x \oplus \neg y),$$
$$x \ominus y := x \odot \neg y.$$

Nejdříve provádíme operaci $\neg$, operaci $\odot$ dáváme přednost před operací $\oplus$ resp. $\ominus$.

Definice 3.1.2 *MV-algebra se nazývá* netriviální, *právě když její nosič M má více než jeden prvek. V opačném případě se nazývá* triviální.

Jistě platí, že MV-algebra je netriviální, právě když $0 \neq 1$. Triviální příkladem MV-algebry je jednoprvková množina $\{0\}$.

Uveďme nyní příklady netriviálních algeber.

Příklad 3.1.1 *Uvažujme jednotkový interval* $[0; 1] = \{x \in \mathbf{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ *a pro všechna* $x, y \in [0; 1]$ *definujme:*

$$x \oplus y := min\{x + y; 1\},$$
$$\neg x := 1 - x.$$

Pro operace $\odot$ a $\ominus$ platí:

$$x \odot y := max\{x + y - 1; 0\},$$

$$x \ominus y := max\{x - y; 0\}.$$

Výsledky těchto operací jistě náleží intervalu $[0; 1]$.

Lze ověřit, že $[0; 1] = ([0; 1], \oplus, \neg, 0)$ *je MV-algebra.*

Příklad 3.1.2 *Interval* $[0; 1]$ *z předchozí věty můžeme zobecnit na interval* $[0; u]$. *Uvažujme abelovskou l-grupu* G *a prvek* u, $0 \leq u \in G$.
Položme $\Gamma(G, u) := [0, u] = \{x \in G, 0 \leq x \leq u\}$ *a pro každé* $x, y \in [0, u]$ *definujme:*

$$x \oplus y := (x + y) \wedge u,$$

$$\neg x := u - x.$$

Pro operace $\odot$ *a* $\ominus$ *platí:*

$$x \odot y := max\{x + y - u; 0\},$$

$$x \ominus y := max\{x - y; 0\}.$$

Výsledky těchto operací evidentně náleží intervalu $[0, u]$.
Struktura $[0, u] = ([0, u], \oplus, \neg, 0)$ *je opět MV-algebra.*

Příklad 3.1.3 *Je-li* $B = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *Booleova algebra, potom struktura* $B = (B, \vee, \neg, 0)$ *je MV algebrou, kde* $\vee, \neg, 0$ *značí po řadě spojení, komplement a nejmenší prvek v* B.

Přímo z definice plyne:

$MV7)$ $\neg 1 = 0$,

$MV8)$ $x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y)$,

$MV9)$ $x \oplus \neg x = 1$.

Definice 3.1.3 *Nechť* $M = (M, \oplus, \neg, 0)$ *je MV-albebra,* S *podmnožina množiny* M *obsahující prvek* 0. *Potom strukturu* $S = (S, \oplus_S, \neg_S, 0)$, *kde* S *je uzavřená na operace z* A *a* $\oplus_S, \neg_S$ *značí restrikce* $\oplus, \neg$ *na množinu* S, *nazýváme* podalgebra MV-algebry M.

Průnik neprázdné množiny podalgeber MV-algebry M je opět podalgebra MV-algebry M.

Definice 3.1.4 *Nechť X je podmnožina množiny M. Průnik všech podalgeber MV-algebry M obsahující množinu X se nazývá* podalgebra MV-algebry M generovaná množinou X.

Lemma 3.1.5 *Nechť M je MV algebra a $x, y \in M$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. $\neg x \oplus y = 1$.
2. $x \odot \neg y = 0$.
3. $y = x \oplus (y \ominus x)$.
4. *Existuje prvek $z \in M$ takový, že $x \oplus z = y$.*

Pro každé dva prvky $x, y \in M$ definujme relaci $\leq$ takto:

$$x \leq y, \text{ právě když } \neg x \oplus y = 1.$$

Je snadno ověřitelné, že tato relace $\leq$ je relace uspořádání na M (tzv. přirozené uspořádání na M). Zmiňme některé vlastnosti této relace, která hraje roli v definici ideálu v MV-algebře.

Definice 3.1.6 *MV algebru M s úplným uspořádáním nazýváme* MV-řetězec.

Poukažme na skutečnost, že přirozené uspořádání MV-řetězce $[0; 1]$ splývá s přirozeným uspořádáním reálných čísel.

Věta 3.1.7 *V každé MV-algebře M má relace $\leq$ následující vlastnosti:*

1. $x \leq y$*, právě když* $\neg y \leq \neg x$.
2. *Jestliže* $x \leq y$*, potom pro každé* $z \in M$ *platí:* $x \oplus z \leq y \oplus z$, $x \odot z \leq y \odot z$.

3. $x \odot y \leq z$, *právě když* $x \leq \neg y \oplus z$.

Důkaz (1) Plyne přímo z lemmatu 3.1.5(1), neboť $\neg x \oplus y = \neg(\neg y) \oplus \neg x$.
(2) Monotonie sčítání $\oplus$ je důsledek lemmatu 3.1.5(4).
Pro důkaz monotonie násobení $\odot$ využijeme část (1) a monotonie $\oplus$: Jestliže $x \leq y$, potom $x \oplus z \leq y \oplus z$. Z toho, že $\neg x \geq \neg\, y$ máme $\neg x \oplus \neg z \geq \neg y \oplus \neg z$, neboli $\neg(\neg x \oplus \neg z) \leq \neg(\neg y \oplus \neg z)$. Tedy $x \odot z \leq y \odot z$.
(3) Stačí si uvědomit, že nerovnost $x \odot y \leq z$ je dle definice ekvivalentní s $1 = \neg(x \odot y) \oplus z = \neg x \oplus (\neg y \oplus z)$ a tedy s nerovností $x \leq \neg y \oplus z$.

Na každé MV-algebře M je přirozené uspořádání svazovým uspořádáním. Spojení $x \vee y$ a průsek $x \wedge y$ prvků $x, y \in M$ jsou dány takto:

$$x \vee y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y,$$
$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = x \odot (\neg x \oplus y).$$

V každé MV-algebře dále platí následující rovnosti, jejichž platnost lze ověřit pomocí výše uvedených vlastností:

$$x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z),$$
$$x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z),$$
$$(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0,$$
$$\neg x \odot x = 0.$$

3.2 Homomorfismy a ideály MV-algeber

Definice 3.2.1 *Nechť M, N jsou MV-algebry. Zobrazení $h : M \longrightarrow N$ nazýváme* homomorfismus MV-algeber, *právě když pro všechna $x, y \in M$ platí:*
H1) $h(0) = 0$,
H2) $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$,

H3) $h(\neg x) = \neg h(x)$.

Bijektivní homomorfismus MV-algeber nazýváme izomorfismus MV-algeber *a skutečnost, že pro MV-algebry existuje tento izomorfismus značíme* $M \cong N$.

Množinu $Ker(h) = h^{-1}(0) = \{x \in M;\ h(x) = 0\}$ *nazýváme* jádrem homomorfismu h.

Definice 3.2.2 Ideál v MV-algebře M *je podmnožina* I *množiny* M *mající následující vlastnosti:*

I1) $0 \in I$;

I2) jestliže $x \in I$ *a* $y \in I$, *potom* $x \oplus y \in I$;

I3) jestliže $x \in I, y \in M$ *a* $y \leq x$, *potom* $y \in I$.

Průnik ideálů MV-algebry M je opět ideál MV-algebry M.

Definice 3.2.3 *Nechť* M *je MV algebra a nechť* W *je podmnožina množiny* M. *Průnik všech ideálů obsahující* W *nazýváme* ideál generovaný W *a značíme jej* $\langle W \rangle$.

Přímo z definice triviálně vyplývá následující lemma:

Lemma 3.2.4 *Nechť* M *je MV algebra a nechť* W *je podmnožina množiny* M.

Jestliže $W = \emptyset$, *potom* $\langle W \rangle = \{0\}$.

Jestliže $W \neq \emptyset$, *potom* $\langle W \rangle = \{x \in M, x \leq w_1 \oplus w_2 \oplus \ldots \oplus w_k$ *pro některá* $w_1, w_2, \ldots, w_k \in W\}$.

Pro každé x z MV-algebry M položme $0x = 0$ a pro každé $n \in \mathbf{Z}^+$ nechť $(n+1)x = nx \oplus x$.

Definice 3.2.5 *Ideál I v MV-algebře M se nazývá*

- hlavní ideál generovaný prvkem z, *právě když* $I = \langle z \rangle = \langle \{z\} \rangle$.
- vlastní, *právě když* $I \neq M$.
- prvoideál, *právě když je vlastní a splňuje podmínku: jestliže* $x \wedge y \in I$, *potom* $x \in I$ *nebo* $y \in I$.
- maximální, *právě když je vlastní a žádný jiný vlastní ideál J ideál I neobsahuje. Tj. pro každý ideál $J \neq I$ platí, že pokud $I \subseteq J$, potom $J = M$.*

Platí, že $\langle \{z\} \rangle = \{x \in M, \ nz \geq x$ pro některé $n \in \mathbf{Z}^+\}$. Například $\langle 0 \rangle = \{0\}$ a $\langle 1 \rangle = M$. Dále rovněž pro každý ideál J v M a pro každé $z \in M$ platí: $\langle J \cup \{z\} \rangle = \{x \in M, \ x \leq nz \oplus a$ pro některé $n \in \mathbf{N}$ a $a \in J\}$.

Věta 3.2.6 *Pro každý vlastní ideál J v MV-algebře M jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *J je maximální ideál.*
2. *Pro každé $x \in M$ platí: $x \notin J$ právě když $\neg nx \in J$ pro nějaké $n \in \mathbf{N}$.*

Důkaz (1) $\Rightarrow$ (2) Předpokládejme, že J je maximální.
Jestliže $x \notin J$, potom $\langle \{x\} \cup J \rangle = M$ a $1 = nx \oplus a$ pro některé $n \in \mathbf{N}$ a $a \in J$. Jinak vyjádřeno $\neg nx \leq a \in J$ a dle $I3)$ $\neg nx \in J$. Naopak, jestliže $x \in J$, potom $nx \in J$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a jelikož J je vlastní, platí $\neg nx \notin J$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Nechť $K \neq J$ je ideál v M takový, že $J \subseteq K$. Pro každé $x \in K \setminus J$ musí $\neg nx \in J$ pro některé $n \in \mathbf{N}$. Odtud $1 = nx \oplus \neg nx \in K$, a proto $K = M$.

Následující lemma bude mít významné využití v dále uvedené problematice stavů.

Lemma 3.2.7 *Nechť M, N jsou MV-algebry a $h : M \longrightarrow N$ homomorfismus. Potom platí:*

1. *Pro každý ideál J v N je množina $h^{-1}(J) := \{x \in M, h(x) \in J\}$ ideálem v M. Tedy i $Ker(h)$ je ideál v M.*
2. *$h(x) \leq h(y)$, právě když $x \ominus y \in Ker(h)$.*
3. *h je injektivní, právě když $Ker(h) = \{0\}$.*
4. *$Ker(h) \neq M$, právě když N je netriviální.*
5. *$Ker(h)$ je prvoideál, právě když N je netriviální a obraz $h(M)$, jakožto podalgebra MV-algebry N, je MV-řetězec.*

Definujme funkci, pomocí které zavedeme relaci kongruence a pro tuto relaci ukažeme její vzájemně jednoznačný vztah k ideálům v MV-algebrách.

Definice 3.2.8 *Nechť M je MV algebra.* Funkcí vzdálenosti prvků x, y v M *nazveme zobrazení $d : M \times M \longrightarrow M$ definované vztahem*

$$d(x, y) := (x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \text{ pro všechna } x, y \in M.$$

Věta 3.2.9 *V každé MV-algebře M platí:*

1. $d(x, y) = 0$, *právě když* x=y,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) \oplus d(y, z)$,
4. $d(x, y) = d(\neg x, \neg y)$,
5. $d(x \oplus s,\ y \oplus t) \leq d(x, y) \oplus d(s, t)$.

Věta 3.2.10 *Nechť I je ideál v MV-algebře M. Potom binární relace $\equiv_I$ na M definovaná vztahem $x \equiv_I y$, právě když $d(x, y) \in I$ je relace kongruence (tj. $\equiv_I$ je relace ekvivalence, pro kterou platí: jestliže pro všechna $x,\ y,\ s,\ t \in M$, $x \equiv_I s$ a $y \equiv_I t$, potom $\neg x \equiv_I \neg s$ a $x \oplus y \equiv_I s \oplus t$). Navíc platí, že $I = \{x \in M,\ x \equiv_I 0\}$.*
Naopak, jestliže $\equiv$ je relace kongruence na M, potom $\{x \in M, x \equiv 0\}$ je ideál a $x \equiv y$, právě když $d(x, y) \equiv 0$. Tedy vztah $I \longmapsto \equiv_I$ je bijekcí množiny všech ideálů v M na množinu všech kongruencí na M.

Pro dané $x \in M$ a relaci $\equiv_I$ označme třídu ekvivalence prvku x symbolem x/I a faktorovou množinu $M/\equiv_I$ symbolem M/I.
Protože $\equiv_I$ je relace kongruence, lze na M/I definovat operace $\neg, \oplus$ takto:

$$\neg(x/I) := \neg x/I,$$
$$x/I \oplus y/I := (x \oplus y)/I.$$

Systém $(M/I, \oplus, \neg, 0/I)$ je MV-algebrou, tzv. *faktorovou algebrou MV-algebry M podle ideálu I*. Navíc vztah $x \longmapsto x/I$ určuje homomorfismus h_I z MV-algebry M na faktorovou algebru M/I, který nazýváme *přirozený homomorfismus* z M na M/I. Z výše uvedeného je patrné, že $Ker(h_I) = I$.

Jelikož platí, že $Ker(h) = Ker(h_{Ker(h)})$, dostáváme větu o homomorfismu MV - algeber.

Věta 3.2.11 *Nechť M, N jsou MV-algebry. Jestliže $h : M \longrightarrow N$ je surjektivní homomorfismus, potom existuje izomorfismus $f : M/Ker(h) \longrightarrow N$ takový, že $f(x/Ker(h)) = h(x)$ pro všechna $x \in M$.*

Věta 3.2.12 *Jestliže M je MV-řetězec, potom všechny vlastní ideály v M jsou prvoideály.*

Důkaz Nechť I je vlastní ideál v MV-řetězci. Protože $h_I : M \longrightarrow M/I$ je surjektivní homomorfismus, potom M/I je také MV-řetězec a odsud dle lemmatu 3.2.7(5), I musí být prvoideál.

Je-li M MV-řetězec, potom množina všech jeho ideálů $\mathcal{I}(M)$ je úplně uspořádaná pomocí inkluze. Skutečně toto platí, neboť pokud by I, J byly dva ideály MV-řetězce M takové, že $I \not\subseteq J$ a $J \not\subseteq I$, potom by musely existovat prvky x, y tak, že $x \in I \setminus J$ a $y \in J \setminus I$ a tedy $x \not\leq y$ a $y \not\leq x$, což nelze.

Věta 3.2.13 *Každá MV-algebra M má tyto vlastnosti:*

1. *Každý vlastní ideál v M obsahující prvoideál je prvoideálem.*
2. *Pro každý prvoideál J v M, množina $\{I \in \mathcal{I}(M),\ J \subseteq I\}$ je úplně uspořádaná pomocí relace inkluze.*

Důsledek 3.2.14 *Každý prvoideál J v MV-algebře M je obsažen v jediném maximálním ideálu v M.*

Důkaz Množina $\mathcal{H} := \{I \in \mathcal{I}(M),\ I \neq M,\ J \subseteq I\}$ je úplně uspořádaná pomocí inkluze. Proto $\mathcal{M} := \bigcup_{I \in \mathcal{H}} I$ je ideál v M. $\mathcal{M}$ je rovněž vlastním ideálem, neboť $1 \notin \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ je jediný maximální ideál obsahující J.

Věta 3.2.15 *Nechť M je MV-algebra, J ideál v M a $a \in M \setminus J$. Potom existuje prvoideál P v M tak, že $J \subseteq P$ a $a \notin P$.*

Důsledek 3.2.16 *Každý vlastní ideál v MV-algebře M je průnikem prvoideálů.*

Z věty 3.2.15 a důsledku 3.2.14 ihned dostáváme:

Důsledek 3.2.17 *Každá netriviální MV- algebra má maximální ideál.*

Věta 3.2.18 *Nechť M,N jsou MV-algebry a K nechť je maximální ideál v N. Potom:*

1. *Pro každý homomorfismus $h : M \longrightarrow N$ je úplný vzor $h^{-1}(K)$ maximálním ideálem v M.*

2. *Pro každou podalgebru S v N platí, že $S \cap K$ je maximální ideál v S.*

Důkaz (1) Dle lemmatu 3.2.7 je množina $h^{-1}(K)$ ideálem v M. Protože $h(1) = 1 \notin K$ je $h^{-1}(K)$ vlastním ideálem. Předpokládejme, že $z \notin h^{-1}(K)$. Protože $h(z) \notin K$, musí zde dle věty 3.2.6 existovat $n \in \mathbf{N}$ takové, že $\neg nh(z) \in K$, což implikuje $\neg nz \in h^{-1}(K)$ a použijeme-li podruhé větu 3.2.6, dostáváme, že $h^{-1}(K)$ je maximální ideál v M.
(2) Důkaz plyne z části (1). Stačí uvažovat přirozené vnoření ι, $\iota : S \longrightarrow N$, $\iota(x) = x$ pro všechna $x \in S$ a přitom $K \cap N = \iota^{-1}(K)$.

3.3 Vztah MV-algeber a uspořádaných grup

V roce 1959 C. C. Chang [1] dokázal, že každá MV-algebra s lineárním uspořádáním je izomorfní s MV-algebrou ve tvaru $\Gamma(G, u)$, kde G je komutativní lineárně uspořádaná (aditivní) grupa, $0 \leq u \in G$ je silná jednička v G, $\Gamma(G, u) = [0, u] := \{x \in G,\ 0 \leq x \leq u\}$ a pro všechna $x, y \in \Gamma(G, u)$ jsou operace takovéto: $\neg x := u - x$, (a proto $1 = u$),

$$x \oplus y := min\{x + y; u\},$$
$$x \odot y := max\{x + y - u; 0\} = \neg(\neg x \oplus \neg y).$$

Tento výsledek zobecnil D. Mundici [12] pro jakoukoli MV - algebru. Mundiciho reprezentační větu pro MV-algebry lze vyslovit takto:
Každá MV-algebra je izomorfní s MV-algebrou $\Gamma(G, u)$, kde (G, u) je komutativní unitální l-grupa, $0 \leq u \in G$ a operace na $\Gamma(G, u)$ jsou následující:

$\neg x := u - x$, (a proto $1 = u$),

$x \oplus y := (x + y) \wedge u$,

$x \odot y := \neg(\neg x \oplus \neg y)$ pro všechna $x, y \in \Gamma(G, u)$.

Kapitola 4

GMV-algebry a stavy na nich

V této kapitole se budeme zabývat GMV-algebrami, které jsou nekomutativním zobecněním MV-algeber. Neklademe na ně požadavek, aby operace $\oplus$ a $\odot$ byly komutativní.

Tyto struktury byly nedávno zavedeny J. Rachůnkem [13]. V některých literaturách se můžeme rovněž setkat s tzv. pseudo MV-algebrami, které byly zavedeny Rumuny G. Georgescuem a A. Iorgulescuovou [6]. Tyto algebraické struktury jsou rovněž nekomutativním zobecněním Changovým MV-algeber a jsou ve skutečnosti s GMV-algebrami ekvivalentní.

GMV-algebry můžeme opět chápat jako algebraický protějšek jisté logiky, a to konkrétně nekomutativní nekonečně hodnotové logiky, kterou zavedla v roce 2006 I. Leusteanová [11].

Setkáme se s ní např. v psychologických procesech, v paralelním programování nebo v technické praxi.

4.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 4.1.1 GMV-algebra *je algebra* $M = (M, \oplus, \neg, \sim, 0, 1)$ *typu* $(2, 1, 1, 0, 0)$ *taková, že pro všechna* $x, y, z \in M$ *platí:*

GMV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$,

GMV2) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$,

GMV3) $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$,

GMV4) $\neg 1 = 0; \sim 1 = 0$,

GMV5) $\sim (\neg x \oplus \neg y) = \neg(\sim x \oplus \sim y)$,

GMV6) $x \oplus (\sim x \odot y) = y \oplus (\sim y \odot x) = (x \odot \neg y) \oplus y = (y \odot \neg x) \oplus x$,

GMV7) $x \odot (\neg x \oplus y) = (x \oplus \sim y) \odot y$,

GMV8) $\sim (\neg x) = x$,

kde $y \odot x = \sim (\neg x \oplus \neg y)$.

Věta 4.1.2 *Nechť* M *je GMV-algebra,* $x, y \in M$. *Potom platí:*

1. $\neg(x \oplus y) = \neg y \odot \neg x; \sim (x \oplus y) = \sim y \odot \sim x$,
2. $\neg(x \odot y) = \neg y \oplus \neg x; \sim (x \odot y) = \sim y \oplus \sim x$,
3. $\neg(\sim x) = x$,
4. $\neg 0 = 1; \sim 0 = 1$,
5. $x \odot 1 = x = 1 \odot x$,
6. $x \odot 0 = 0 = 0 \odot x$.

Důkaz (1) $\neg(x \oplus y) = \neg(\sim (\neg x) \oplus \sim (\neg y)) = \neg y \odot \neg x$.

(2) $\neg(x \odot y) = \neg(\sim (\neg y \oplus \neg x)) = \neg y \oplus \neg x$.

(3) $\neg(\sim x) = \neg(\sim (x \oplus 0)) = \neg(\sim 0 \odot \sim x) = \sim (\neg 0 \odot \neg x) = \sim (\neg(x \oplus 0)) =$
$= \sim (\neg x) = x$.

(4) $\neg 0 = \neg(\sim 1) = 1$.
(5) $x \odot 1 =\sim (\neg 1 \oplus \neg x) =\sim (0 \oplus \neg x) =\sim (\neg x) = x$.
(6) $x \odot 0 =\sim (\neg 0 \oplus \neg x) =\sim (1 \oplus \neg x) =\sim 1 = 0$.
Zbývající rovnosti v tvrzeních (1)-(6) se dokáží zcela analogicky.

Pro všechna $x, y \in M$ zaveďme na M binární relaci uspořádání takto: $x \leq y$, právě když $\neg x \oplus y = 1$. M je potom distributivní svaz, kde spojení $x \vee y$ a průsek $x \wedge y$ prvků x, y jsou dány:

$$x \vee y = x \oplus (\sim x \odot y),$$
$$x \wedge y = (x \oplus \sim y) \odot y.$$

Následující věta nám umožní zavést binární relaci $\leq$ ekvivalentně pomocí operace $\odot$.

Věta 4.1.3 *Pro všechna x, y z GMV-algebry M jsou následující rovnosti ekvivalentní:*

1. $\neg x \oplus y = 1$
2. $\sim y \odot x = 0$

Důkaz (1) $\Rightarrow$ (2) Předpokládáme platnost vztahu (1). Potom $\sim y \odot x = \, =\sim (\neg x \oplus \neg(\sim y)) =\sim (\neg x \oplus y) =\sim 1 = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Naopak, platí-li vztah (2), potom $\neg x \oplus y = \neg (\sim y \odot \sim (\neg x)) = \, = \neg(\sim y \odot x) = \neg 0 = 1$.

A tedy dostáváme, že pro všechna $x, y \in M$ platí: $x \leq y$, právě když $\sim y \odot x = 0$.

Věta 4.1.4 *Nechť M je GMV-algebra. Pro všechna $x, y \in M$ platí:*

1. $x \vee 0 = x = x \wedge 1$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = 1$,

2. $x \leq y \;\Leftrightarrow\; \neg y \leq \neg x \;\Leftrightarrow \sim y \leq \sim x$,

3. $x \odot y \leq x \wedge y \leq x \vee y \leq x \oplus y$,

4. $x \oplus y = 0 \Rightarrow x = 0 = y$;
   $x \odot y = 1 \Rightarrow x = 1 = y$.

Věta 4.1.5 *V GMV-algebře M pro vztahy mezi průsekem (resp. spojením) a negacemi platí:*

1. $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$,

2. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$,

3. $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$,

4. $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

Důkaz (1)$\neg(x \vee y) = \neg(x \oplus (\sim x \odot y)) = \neg(\sim (\neg(\sim x \odot y) \odot \neg x)) =$
$= \neg(\sim x \odot y) \odot \neg x = (\neg y \oplus x) \odot \neg x = \neg y \wedge \neg x = \neg x \wedge \neg y$.
Zbývající vztahy lze dokázat zcela analogicky.

Příklad 4.1.1 *Obdobně jako u MV-algeber, kde existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi nimi a abelovskými l-grupami se silnou jedničkou, i zde u GMV-algeber lze nalézt tento vztah s obecnějšími strukturami:*
Nechť G je (ne nutně abelovská) unitální l-grupa. Položme $\Gamma(G, u) := [0, u]$. Pro všechny prvky z $\Gamma(G, u)$ nechť platí:

$$\neg x := u - x,$$

$$\sim x := -x + u,$$
$$x \oplus y := (x + y) \wedge u,$$
$$x \odot y := (x - u + y) \vee 0.$$

Potom $\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus, \neg, \sim, 0, u)$ *je GMV-algebra.*

Je známo, že každá konečná GMV-algebra je MV-algebrou.

Nechť M je GMV-algebra. Definujme částečnou binární operaci $+$ na M takto: $x + y$ je definováno, právě když $x \leq \neg\, y$ a potom platí: $x + y := x \oplus y$.

Je zřejmé, že tato operace $+$ je definována, právě když $\sim x \geq y$. Navíc platí, že $x \leq y$, právě když existuje prvek $k \in M$ takový, že $x + k = y$ a právě když existuje prvek $l \in M$ takový, že $l + x = y$.

Uveďme nyní zobecnění Mundiciho reprezentační věty pro MV-algebry a dostaneme tak následující reprezentační větu pro GMV-algebry, kterou dokázal A. Dvurečenskij [4].

Věta 4.1.6 *Pro každou GMV-algebru* M *existuje jediná (až na izomorfismus) unitální l-grupa* G *se silnou jedničkou* u *taková, že* $M \cong \Gamma(G, u)$.

4.2 Ideály v GMV-algebrách

Obdobně jako pro komutativní MV-algebry zaveďme pojem ideál, definujme některé typy ideálů a následně uveďme vztahy mezi nimi a poukažme na jejich roli v budování teorie stavů na GMV-algebrách.

Definice 4.2.1 Ideálem v GMV-algebře M *rozumíme podmnožinu I množiny M splňující následující podmínky:*
IG1) $0 \in I$;
IG2) jestliže $x, y \in I$, *potom* $x \oplus y \in I$;
IG3) jestliže $x \in I$, $y \in M$ *a* $y \leq x$, *potom* $y \in I$.

Definice 4.2.2 *Ideál I v GMV-algebře M se nazývá*

- vlastní*, právě když* $I \neq M$.
- normální*, právě když* $x \oplus I = I \oplus x$ *pro všechna* $x \in M$, *kde* $x \oplus I := = \{x \oplus y,\ y \in I\}$, $I \oplus x := \{y \oplus x,\ y \in I\}$.
- prvoideál*, jestliže* $x \wedge y \in I$ *implikuje* $x \in I$ *nebo* $y \in I$.
- maximální*, jestliže je vlastní a není obsažen v žádném jiném vlastním ideálu, tj. pro každý ideál* $J \neq I$ *platí, že pokud* $I \subseteq J$, *potom* $J = M$.

Stejně jako u komutativních MV-algeber, existuje pro GMV-algebry vzájemně jednoznačný vztah mezi kongruencemi a jistými množinami, které jsou zde u GMV-algeber jejich normální ideály. Lze tedy opět vytvořit faktorovou GMV-algebru M/I dle normálního ideálu I algebry M.

Tato faktorová algebra je definována jako množina všech prvků ve tvaru $x/I := \{y \in M, (x \odot \neg y) \oplus (y \odot \neg x) \in I\}$ nebo také ekvivalentně ve tvaru $x/I := \{y \in M, (\sim x \odot y) \oplus (\sim y \odot x) \in I\}$.

Operace na faktorové GMV-algebře jsou dány následovně:

$$\neg(x/I) = (\neg x)/I,$$
$$\sim (x/I) = (\sim x)/I,$$
$$x/I \oplus y/I = (x \oplus y)/I.$$

Věta 4.2.3 *Každý maximální ideál J v M je prvoideál.*

Důkaz Pro MV-algebry dle důsledku 3.2.16 platí, že každý vlastní ideál je průnikem prvoideálů.
G. Georgescu a A. Iorgulescu tuto skutečnost dokázali i pro GMV-algebry a z toho již přímo vyplývá tvrzení věty.

Definice 4.2.4 *GMV-algebra M se nazývá* prostá*, právě když neobsahuje žádný netriviální vlastní ideál.*

Věta 4.2.5 *Normální ideál I v GMV-algebře M je maximální, právě když M/I je prostá MV-algebra.*

Definice 4.2.6 *GMV-algebra M se nazývá* archimédovská*, platí-li implikace: jestliže $na := a + a + \ldots + a$ (kde na pravé straně je n sčítanců) existuje v M pro všechna $n \in \mathbf{N}$, potom $a = 0$.*

Věta 4.2.7 *Nechť I je normální a maximální ideál v GMV-algebře M. Potom M/I je archimédovská.*

Důsledek 4.2.8 *Jestliže I je normální a maximální ideál v GMV-algebře M, potom M/I je komutativní.*

Důkaz Dle věty 4.2.7 je M/I archimédovská a A. Dvurečenskij dokázal, že každá archimédovská GMV-algebra je komutativní, tedy je MV-algebrou.

4.3 Stavy na GMV-algebrách

Definice 4.3.1 Stav na GMV-algebře M *je zobrazení* $m : M \longrightarrow [0;1]$ *takové, že platí:*

S1) $m(1) = 1$,

S2) jestliže v M *existuje součet* $a + b$, *potom* $m\,(a+b) = m(a) + m(b)$.

Věta 4.3.2 *Nechť* m *je stav na GMV algebře* M. *Potom pro všechna* $a, b \in M$ *platí:*

1. $m(0) = 0$;
2. *jestliže* $a \leq b$, *potom* $m(a) \leq m(b)$ *a platí* $m(b \odot \neg a) = m(b) - m(a) = = m(\sim a \odot b)$;
3. $m(\neg a) = 1 - m(a) = m(\sim a)$,
4. $m(\neg(\neg a)) = m(a) = m(\sim (\sim a))$,
5. $m(a \vee b) + m(a \wedge b) = m(a) + m(b)$,
6. $m(a \oplus b) + m(b \odot a) = m(a) + m(b)$,
7. *množina* $Ker(m) := \{a \in M,\ m(a) = 0\}$ *je normální ideál v* M,
8. $a/Ker(m) = b/Ker(m)$, *právě když* $m(a) = m(a \wedge b) = m(b)$,
9. *existuje jediný stav* $\hat{m}$ *na* $M/Ker(m)$ *tak, že* $\hat{m}([a]) = m(a)$, $[a] \in M/Ker(m)$, *kde* $[a]$ *je třída ekvivalence prvku* $a \in M$,
10. $m(a \oplus b) = m(b \oplus a)$.

Definice 4.3.3 *Nechť* $M_1,\ M_2$ *jsou GMV-algebry. Zobrazení* $h: M_1 \longrightarrow M_2$ *se nazývá* homomorfismus GMV-algeber*, jestliže pro všechna* $a, b \in M_1$ *platí:*

1. $h(a \oplus b) = h(a) \oplus h(b)$,

2. $h(\neg a) = \neg h(a)$,

3. $h(\sim a) = \sim h(a)$,

4. $h(0_{M_1}) = 0_{M_2}$,

5. $h(1_{M_1}) = 1_{M_2}$.

Definice 4.3.4 *Buď* $[0;1] = ([0;1], \oplus_{\mathbf{R}}, \neg, 0, 1)$ *MV-algebra na reálném intervalu* $[0;1]$*, kde* $s \oplus_{\mathbf{R}} t := min\{s+t, 1\}$, $\neg s = 1 - s$ *pro všechna* $s, t \in [0;1]$. *Zobrazení* m *z GMV-algebry* M *do MV-algebry* $[0;1]$ *takové, že pro všechna* $a, b \in M$ *platí:*

1. $m(a \oplus b) = m(a) \oplus_{\mathbf{R}} m(b)$,

2. $m(\neg a) = m(\sim a) = 1 - m(a)$,

3. $m(1) = 1$,

se nazývá stavový morfismus. *(Jinými slovy: zobrazení* m *je stavový morfismus, právě když* m *je homomorfismus z GMV-algebry* M *do MV-algebry* $[0;1]$*.)*

Je evidentní, že je-li m stavový morfismus, potom je stavem. Obrácená věta však obecně neplatí. Situace, kdy je možno větu obrátit, vyjadřují následující tvrzení.

Věta 4.3.5 *Nechť m je stav na GMV-algebře M. Potom m je stavovým morfismem, právě když $m(a \wedge b) = min\{m(a), m(b)\}$ pro všechna $a, b \in M$.*

Důkaz *Předpokládejme, že m je stavový morfismus. Potom $m(a \wedge b) = = m(a \odot (\neg a \oplus b)) = m(a) \odot_{\mathbf{R}} (m(\neg a) \oplus_{\mathbf{R}} m(b)) = min\{m(a), m(b)\}$. Naopak, nechť platí uvedený vztah. Potom $a \oplus b = a + (\sim a \odot (a \oplus b)) = a + (\sim a \wedge b)$, a proto $m(a \oplus b) = m(a) + m(\sim a \wedge b) = m(a) + min\,\{1 - m(a), m(b)\} = = min\,\{m(a) + m(b), 1\}$.*

Věta 4.3.6 *Nechť m je stav na GMV-albebře M. Potom m je stavový morfismus, právě když $Ker(m)$ je maximální ideál v M.*

Věta 4.3.7 *(1) Nechť G_1, G_2 jsou komutativní l-podgrupy grupy $(\mathbf{R}, +)$, z nichž každá obsahuje společný nenulový prvek g_0. Pokud existuje injektivní grupový homomorfismus $\Phi : G_1 \longrightarrow G_2$ zachovávající uspořádání takový, že $\Phi(g_0) = g_0$, potom $G_1 \subseteq G_2$ a Φ je identita na G_1. Je-li navíc Φ surjektivní, potom $G_1 = G_2$.*
(2) Nechť M_1, M_2 jsou MV-podalgebry MV-algebry $[0; 1]$. Pokud existuje MV-izomorfismus $\Psi : M_1 \longrightarrow M_2$, potom $M_1 = M_2$ a Ψ je identita.

Důkaz (1) Předpokládejme opak, tedy že existuje nenulový prvek $g \in G_1$ takový, že $\Phi(g) = h \neq g$. Potom existují $p, q \in \mathbf{Z}, q > 1$ taková, že buď $h < \frac{p}{q} g_0 < g$ nebo $g < \frac{p}{q} g_0 < h$. V prvním případě dostáváme $qh < pg_0 < qg$, takže $\Phi(pg_0) < \Phi(qg)$, z čehož $p\Phi(g_0) = pg_0 < q\Phi(g) = qh$, což není současně s $qh < pg_0$ možné. Obdobně postupujeme v druhém případě.
(2) Dle Mundiciho věty existují abelovské l-podgrupy G_1, G_2 grupy $(\mathbf{R}, +)$ takové, že $M_i = \Gamma(G_i, 1)$, $i = 1, 2$. Kategorická ekvivalence mezi kategoriemi MV- algeber a abelovských unitálních l-grup dává vztah $(G_1, 1) \cong (G_2, 1)$. Tedy G_1, G_2 jsou izomorfní unitální l-grupy a dle (1) $G_1 = G_2$ a odtud $M_1 = M_2$.

Věta 4.3.8 *Nechť* m_1 *a* m_2 *jsou stavové morfismy na GMV-algebře* M *takové, že* $Ker(m_1) = Ker(m_2)$. *Potom* $m_1 = m_2$.

Důkaz Dle věty 4.3.6 je $Ker(m_1)$ normální a maximální ideál v M, tedy $M/Ker(m_1)$ je lineární archimédovská GMV-algebra. Tzn., že $M/Ker(m_1)$ je MV-algebra, která je MV-podalgebrou MV-algebry $[0;1]$.

Definujme $\hat{m}_1, \hat{m}_2$ dle věty 4.3.2(9). Tedy $\hat{m}_1, \hat{m}_2$ jsou stavové morfismy na $M/Ker(m_1)$. Definujme MV-algebry $M_i := \hat{m}_i(M/Ker(m_1))$ pro $i = 1, 2$. Potom M_1, M_2 jsou MV-podalgebrami MV-algebry $[0;1]$. Definujeme-li zobrazení $\Psi : M_1 \longrightarrow M_2$, $\Psi(\hat{m}_1([x])) = \hat{m}_2([x])$, $x \in M$, potom Ψ je MV-homomorfismus, který je bijektivní a dle věty 4.3.7(2) $M_1 = M_2$ a tedy $m_1 = m_2$.

Věta 4.3.9 *Nechť* I *je normální a maximální ideál v GMV-algebře* M. *Potom existuje právě jeden stavový morfismus na* M, *pro který* $Ker(m) = I$.

Důkaz M/I je lineární archimédovská komutativní MV-algebra, tedy existuje unitální l-grupa G, pro kterou $M/I = \Gamma(G, u)$. Navíc G je lineární a archimédovská a lze dokázat, že G je l-podgrupa reálné grupy $(\mathbf{R}, +)$. Tedy $M/I \subseteq [0;1]$ a zobrazení $a \mapsto a/I$, $a \in M$, definuje stavový morfismus takový, že $Ker(m) = I$. Jednoznačnost plyne z věty 4.3.8.

Označme $\mathcal{S}(M)$ množinu všech stavů na GMV-algebře M. Potom $\mathcal{S}(M)$ je konvexní množina a každý stav lze vyjádřit jako konvexní kombinaci tzv. extremálních stavů.

Definice 4.3.10 *Stav* s *na GMV-algebře* M *nazveme* extremálním stavem, *jestliže rovnost* $s = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$, $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(M)$ *pro některé* $\lambda \in (0;1)$, *implikuje rovnost* $s_1 = s_2$.

Pojem extremální stav lze názorně ilustrovat graficky. Zakreslíme-li všechny stavy na M jako množinu bodů konvexního mnohoúhelníka, potom extremální stavy jsou právě vrcholy tohoto rovinného obrazce.

Věta 4.3.11 *Nechť m je stav na GMV-algebře M. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *m je extremální stav na M.*
2. *m je stavový morfismus.*
3. *$m(x \wedge y) = min\,\{m(x), m(y)\}$.*

4.4 Existence stavů na GMV-algebrách

V této podkapitole si představíme několik vět, které vypovídají o třídě GMV-algeber s existencí alespoň jednoho stavu. Začneme dvěma příklady GMV-algeber s lineárním uspořádáním, které mají stavy.

Příklad 4.4.1 *Nechť G je grupa všech matic tvaru*

$$\begin{pmatrix} \xi & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\xi,\ \alpha \in \mathbf{R}$, $\xi > 0$. Grupová operace nechť je běžné násobení matic. Označme $A = (\xi,\ \alpha)$. Potom $A^{-1} = (1/\xi,\ -\alpha/\xi)$ a $(1; 0)$ je neutrální prvek. Definujme $G^+ := \{(\xi,\ \alpha)$, kde (i) $\xi > 1$ nebo (ii) $(\xi = 1$ a $\alpha \geq 0)\}$. Potom G je lineárně uspořádaná l-grupa, $u = (2; 0)$. Nechť $M = \Gamma(G, u)$, potom $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kde $M_1 = \{(\xi, \alpha),\ 1 < \xi < 2\}$, $M_2 = \{(2, \alpha),\ \alpha \geq 0\}$ a $M_3 = \{(1, \alpha),\ \alpha \geq 0\}$. M_3 je jediný normální maximální ideál v M a existuje tedy právě jeden stavový morfismus m a to $m((\xi, \alpha)) = \log_2 \xi$ pro všechna $(\xi, \alpha) \in M$.

Příklad 4.4.2 *Nechť G je množina dvojic (x, y) reálných čísel, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ e^{x_2} y_1 + y_2)$ a nechť G^+ je množina všech dvojic (x, y), kde buď $x > 0$ nebo $x = 0$ a $y \geq 0$. Potom G je lineárně uspořádaná l-grupa s neutrálním prvkem $(0; 0)$ a inverzním prvkem $-(x, y) = (-x, -e^x y)$ a se silnou jedničkou $u = (1; 0)$. Potom $\Gamma(G, u)$ má právě jeden stav m a to $m((x, y)) = x$ pro všechna $x, y \in M$.*

Věta 4.4.1 *Nechť (G, u) je unitální l-grupa a $M = \Gamma(G, u)$. Potom M je lineární, právě když G je lineární.*

A. Dvurečenskij dokázal [3] následující větu týkající se maximálních ideálů v lineárně uspořádaných GMV-algebrách.

Věta 4.4.2 *Každá lineárně uspořádaná GMV-algebra má právě jeden maximální ideál, který je normální.*

Věta 4.4.3 *Každá lineárně uspořádaná GMV-algebra M má právě jeden stav.*

Důkaz Dle předchozí věty má M jediný maximální normální ideál I a dle věty 4.3.9 existuje jediný stavový morfismus m na M takový, že $Ker(m) = I$.

Věta 4.4.4 *Každá lineárně uspořádaná unitální l-grupa (G, u) má jediný stav.*

Důkaz Definujme $M = \Gamma(G, u)$. Dle věty 4.4.2 má M právě jeden stav m a ten může být jednoznačně rozšířen na stav s na (G, u) takový, že $m = s|M$.

Rozšiřme tyto výsledky na tzv. reprezentovatelné GMV-algebry.

Definice 4.4.5 *Nechť* $\{(M_t, \oplus_t, \neg_t, \sim_t, 0_t, 1_t)\}_{t\in T}$ *je systém GMV-algeber. Kartézský součin* $M := \Pi_{t\in T} M_t$*, kde operace* $\oplus, \neg, \sim, 0, 1$ *jsou definovány po souřadnicích, se nazývá* direktní součin *systému* $\{(M_t, \oplus_t, \neg_t, \sim_t, 0_t, 1_t)\}_{t\in T}$*. Takto zavedená algebraická struktura* M *je také GMV-algebra.*

Definice 4.4.6 *GMV-algebra se nazývá* subdirektní součin *GMV-algeber* $\{(M_t, \oplus_t, \neg_t, \sim_t, 0_t, 1_t)\}_{t\in T}$*, právě když existuje injektivní homomorfismus* $h : M \longrightarrow \Pi_{t\in T} M_t$ *GMV-algeber takový, že pro všechna* $t \in T$, $\pi_t \circ h$ *je surjektivní homomorfismus z* M *na* M_t*, kde* π_t *je t-tá projekce z* $\Pi_{t\in T} M_t$ *na* M_t*.*

Definice 4.4.7 *Říkáme, že GMV-algebra je* reprezentovatelná*, je-li subdirektní součin lineárních GMV-algeber.*

Je známo, že každá MV-algebra je reprezentovatelná.

Věta 4.4.8 *Každá reprezentovatelná GMV-algebra má alespoň jeden stav.*

Důkaz Existuje množina lineárních GMV-algeber $\{M_t\}_{t\in T}$, pomocí které je reprezentovatelná grupa určena. Každá z těchto lineárních GMV-algeber má dle věty 4.4.3 jediný stav. Je-li h vnoření M do $\Pi_{t\in T} M_t$ takové, že $h_t := \pi_t \circ h$ je homomorfismus z M na M_t, potom $m(a) = m_t(h_t(a))$, $a \in M$, je stavový morfismus na M.

4.5 Stavy na normálně hodnotových GMV-algebrách

Rozšiřme nyní třídu GMV-algeber, které mají alespoň jeden stav na třídu tzv. normálně hodnotových.

Označme $\mathcal{I}(M), \mathcal{P}(M), \mathcal{N}(M)$ množinu všech ideálů, prvoideálů a normálních ideálů na GMV-algebře M. Podobně nechť $\mathcal{C}(G), \mathcal{P}(G), \mathcal{L}(G)$ značí množinu všech konvexních l-podgrup, prvo-podgrup (tj. konvexních prvo-l-grup) a l-ideálů v l-grupě G. Na základě reprezentace GMV-algeber pomocí l-grup se silnou jedničkou našel J. Rachůnek [14] ekvivalenci mezi ideály v M a konvexními l-podgrupami grupy (G, u) a také mezi $\mathcal{P}(M)$ a $\mathcal{P}(G)$.

Tento výsledek rozšířil A. Dvurečenskij [3]:

Věta 4.5.1 *Nechť (G, u) je unitální l-grupa, $M = \Gamma(G, u)$. Pro každý ideál I v M položme: $\Phi(I) := \{x \in G,\ |x| \wedge u \in I\}$.*
Potom:

1. *$\Phi(I)$ je konvexní l-podgrupa grupy G generovaná ideálem I. Zobrazení $\Phi : I \longrightarrow \Phi(I)$ z množiny $\mathcal{I}(M)$ do množiny $\mathcal{C}(G)$ definuje vzájemně jednoznačný vztah zachovávající množinovou inkluzi.*
   Inverzní zobrazení Ψ je dáno takto: $\Psi(K) := K \cap [0; u],\ K \in \mathcal{C}(G)$.

2. *$\Phi(I) = \{x \in G, \exists x_i, y_j \in I, x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - y_1 - y_2 - \ldots - y_m\}$.*

3. *Restrikce Φ na $\mathcal{P}(M)$ nebo $\mathcal{N}(M)$ dává bijekci mezi $\mathcal{P}(M)$ a $\mathcal{C}(G)$ a také mezi $\mathcal{N}(M)$ a $\mathcal{L}(G)$, která zachovává množinovou inkluzi.*

Definice 4.5.2 *Nechť g je nenulový prvek z GMV-algebry M. Ideál V v M takový, že $g \notin V$ a V je maximální ideál s touto vlastností, nazýváme* hodnotou prvku g.

Lze dokázat, že takový ideál V v M vždy existuje a je to prvoideál.

Označme $\Gamma(g)$ množinu všech hodnot prvku g.

Definice 4.5.3 *Pro každou hodnotu V prvku g existuje právě jeden nejmenší ideál $V^* \supset V$, který nazýváme* pokrytím hodnoty V.

Tento pojem splývá s $\bigcap\{I,\ I \supset V\}$ a je také roven ideálu generovanému ideálem V a prvkem g.

Navíc každý vlastní ideál v M je průnikem hodnot a jestliže $f \wedge g = 0$ a $V \in \Gamma(f)$, $W \in \Gamma(g)$, potom V a W jsou nesrovnatelné.

Definice 4.5.4 *Prvek $g \in M \setminus \{0\}$ se nazývá*

- speciální*, jestliže mohutnost množiny $|\Gamma(g)| = 1$. Hodnota prvku se potom nazývá speciální a značíme ji V_g.*

Řekneme, že hodnota V je

- normální v pokrytí V^**, právě když $x + V = V + x$ pro všechna $x \in V^*$.*
- podstatná*, právě když obsahuje všechny hodnoty některého prvku $g \in M \setminus \{0\}$.*

GMV-algebra se nazývá

- konečně hodnotová*, jestliže každý nenulový prvek z M má konečně mnoho hodnot.*
- normálně hodnotová*, jestliže pro každé $g > 0$ každá hodnota $V \in \Gamma(g)$ je normální v pokrytí V^*.*
- speciální*, jestliže $|\Gamma(g)| = 1$ pro všechna $g \in M \setminus \{0\}$.*

Některé výše definované pojmy lze obdobně definovat i pro l-grupu G. *Hodnotou prvku* $g \in G \setminus \{0\}$ nazýváme konvexní l-podgrupu V grupy G takovou, že $g \notin V$ a V je maximální konvexní l-podgrupa s touto vlastností. *Pokrytím hodnoty* V rozumíme nejmenší konvexní l-podgrupu V^*, pro kterou platí $V \subset V^*$. V^* je současně také konvexní l-podgrupou grupy G generovaná l-podgrupou V a prvkem g.

Věta 4.5.5 *Nechť* $M = \Gamma(G, u)$.

1. *Nechť* V *je hodnota prvku* $g \in M \setminus \{0\}$. *Potom* $\Phi(V)$ *je hodnota prvku* $g \in G$ *v grupě* G.
   Jestliže V *je hodnota prvku* $g \in G \setminus \{0\}$, *potom* $V \cap [0, u]$ *je hodnota prvku* $|g| \wedge u$ *v* $M \setminus \{0\}$. *Navíc platí, že* V^* *je pokrytí* V, *právě když* $\Phi(V)^*$ *je pokrytí* $\Phi(V)$ *a* $\Phi(V^*) = \Phi(V)^*$.

2. V *je normální v* V^*, *právě když* $\Phi(V)$ *je normální v* $\Phi(V^*)$.

3. M *je konečně hodnotová, právě když* G *je konečně hodnotová.*

Definice 4.5.6 *Nenulový prvek* s *v GMV-algebře* M *se nazývá* základní, *jestliže interval* $[0, s]$ *je řetězec a speciálně prvek* $a > 0$ *se nazývá atom, jestliže* $[0, a] = \{0, a\}$.

Je zřejmé, že pokud g a h jsou základní prvky v M, potom $g \wedge h = 0$ nebo g a h jsou vzájemně srovnatelné.

Například každý nenulový prvek v lineární GMV-algebře M je základní.

Jestliže $f \leq g$, potom pro každou hodnotu $V \in \Gamma(f)$ existuje hodnota $W \in \Gamma(g)$, pro kterou $V \subseteq W$.

Věta 4.5.7 *Nechť f, g jsou speciální prvky v GMV-algebře M.*

1. *Jestliže $f \wedge g > 0$, potom $V_f \subseteq V_g$ nebo $V_g \subseteq V_f$*

2. *Nechť g je základní prvek, potom množina $g^{\perp} := \{x \in M,\ x \wedge g = 0\}$ je prvoideál v M.*

3. *Jestliže f je speciální prvek v GMV-algebře M, potom V_f je normální ve svém pokrytí ${V_f}^*$.*

Důkaz (1) Jestliže $f \wedge g > 0$, potom buď $f \leq g$ nebo $g \leq f$. V prvním případě $g \notin V_f$, tedy $V_f \subseteq V_g$. V druhém případě dostáváme analogicky $V_g \subseteq V_f$.
(2) Nechť g je základní prvek v M. Potom $g^{\perp}$ je ideál v M, [6]. Nechť $a, b \in M$ a $a \wedge b = 0$. Potom $(a \wedge g) \wedge (b \wedge g) = 0$. Protože g je základní, $a \wedge g = 0$ nebo $b \wedge g = 0$, tj. $a \in g^{\perp}$ nebo $b \in g^{\perp}$. Tedy $g^{\perp}$ je prvoideál.
(3) Nechť V_f je speciální hodnota prvku $f \in M$. Potom $\Phi(V_f)$ je hodnota f v G a dle věty 4.5.5(1) je $\Phi(V_f)$ jediná hodnota f v G. Lze dokázat, že $\Phi(V_f)$ je normální v $\Phi(V_f)^*$, takže dle 4.5.5(2) je V_f normální v ${V_f}^*$.

Věta 4.5.8 *Nechť M je GMV-algebra.*

1. *Jestliže $|\Gamma(1)| < \infty$, potom $|\Gamma(g)| < \infty$ pro každé $g \in M \setminus \{0\}$.*

2. *Jestliže $|\Gamma(1)| < \infty$, potom každá hodnota je speciální hodnotou a M je normálně hodnotová.*

Věta 4.5.9 *Každá normálně hodnotová GMV-algebra M má alespoň jeden stav. Speciálně pro $|\Gamma(1)| = n$ platí, že M má právě n stavových morfismů.*

Důkaz Nechť $M = \Gamma(G, u)$. Potom pro $1 = u$ platí, že každá hodnota $V \in \Gamma(1)$ je normální v pokrytí $V^* = M$. Odtud M/V je lineární GMV-algebra a dle věty 4.4.3 má stav μ. Zobrazení $m(a) := \mu(a/V)$, $a \in M$, je stav na M. Druhé tvrzení plyne z předchozí věty a věty 4.3.8.

Věta 4.5.9 rozšiřuje tvrzení věty 4.4.8, neboť platí:

Věta 4.5.10 *Každá reprezentovatelná GMV-algebra je normálně hodnotová.*

Následující věta určuje, zda M je či není reprezentovatelná.

Věta 4.5.11 *GMV-algebra M je reprezentovatelná, právě když $g^\perp$ je normální v M pro každé $g \in M$.*

4.6 Neexistence stavů na GMV-algebrách

Ukažme, že existují GMV-algebry, na nichž neexistují stavy.

Věta 4.6.1 *Nechť M je GMV-algebra. Jestliže g má aspoň jednu hodnotu, která není normální, potom g má nekonečně mnoho hodnot, které nejsou normální.*

Důkaz Nechť $M = \Gamma(G, u)$ a nechť V je hodnota $g \in M \setminus \{0\}$. Dle věty 4.5.5 je $\Phi(V)$ nenormální hodnota $g \in G$ a odsud (dle výsledků M. R. Darnela) pro grupu G platí, že g má nekonečně mnoho nenormálních hodnot $W_1, W_2, \ldots \in G$. Tedy $V_n := W_n \cap [0, u]$ jsou pro každé $n \in \mathbf{N}$ nenormální hodnoty prvku g v M.

Věta 4.6.2 *Nechť* $g > 0$ *je prvek l-grupy* G *a nechť* $G(g)$ *je konvexní l-podgrupa grupy* G *generovaná prvkem* g*. Jestliže* V *je hodnota prvku* g *v* G*, potom* $V \cap G(g)$ *je hodnota* g *v* $G(g)$ *a* V *je normální v* V^**, právě když* $V \cap G(g)$ *je normální v* $G(g)$*.*

Důkaz Je zřejmé, že $V \cap G(g)$ je hodnota prvku g v $G(g)$. Zbytek tvrzení plyne z teorie l-grup.

A. Dvurečenskij [3] dále dokázal:

Věta 4.6.3 *Existuje taková GMV-algebra* M*, že nemá žádnou normální hodnotu prvku* 1 *a* $|\Gamma(1)| = \infty$*.*

Důsledek 4.6.4 *Existují GMV-algebry, které nemají stav.*

Důkaz Toto tvrzení plyne ze vzájemně jednoznačného vztahu mezi stavovými morfismy a normálními maximálními ideály, z věty 4.3.9 a z existence GMV-algebry nemající normální hodnotu prvku 1.

Existují ale GMV-algebry, které nejsou normálně hodnotové a přesto stav mají. V následujícím příkladu je taková GMV-algebra představena.

Příklad 4.6.1 *Nechť* $M_1 = [0; 1]$ *a* M_2 *je GMV-algebra nemající stav. Definujme* $M = M_1 \times M_2$*. Nechť* m_0 *je jediný stav na reálném intervalu* M_1 *daný takto:* $m_0(t) = t$*,* $t \in [0; 1]$*. Potom zobrazení* $m : M \longrightarrow [0; 1]$ *dané vztahem* $m(a, b) = m_0(a)$ *pro všechna* $(a, b) \in M_1 \times M_2$*, je jediný stav na* M*.*

4.7 Stavy na komutativních GMV-algebrách (tj. MV-algebrách)

Navraťme se nyní k problematice studia stavů na MV-algebrách. Jelikož Changovy MV-algebry jsou GMV-algebrami, platí pro ně všechny vlastnosti a pojmy uvedené výše ve 4. kapitole. Tedy stav na MV-algebře definujeme jako zobrazení $m : M \longrightarrow [0;1]$ takové, že $m(1) = 1$ a jestliže v M existuje součet $a + b$, potom $m(a + b) = m(a) + m(b)$.

Vyslovme několik vět analogickým těm, které byly vysloveny pro GMV-algebry a pro MV-algebry si můžeme dovolit jejich upřesnění.

Věta 4.7.1 *Nechť I je maximální ideál v MV-algebře M. Potom existuje právě jeden stavový morfismus na M takový, že $Ker(m) = I$.*

Důkaz Věta je triviální důsledek 4.3.9, neboť každý ideál v M je normální

Věta 4.7.2 *Každá lineárně uspořádaná MV-algebra M má právě jeden maximální ideál.*

Důkaz Jelikož všechny ideály v M jsou normální, věta je triviální důsledek věty 4.4.2.

Věta 4.7.3 *Každá lineárně uspořádaná MV-algebra má právě jeden stav.*

Důkaz Dle předchozí věty má algebra právě jeden maximální ideál I a existuje tedy jediný stavový morfismus m na M takový, že $Ker(m) = I$.

Věta 4.7.4 *Každá lineárně uspořádaná abelovská unitální l-grupa* (G, u) *má právě jeden stav.*

Důkaz Věta je důsledkem předchozí věty, Mundiciho reprezentační věty a vzájemně jednoznačného vztahu mezi stavem s na grupě a stavem m na MV-algebře.

Věta 4.7.5 *Každá MV-algebra* M *má aspoň jeden stav.*

Důkaz Jelikož každá MV-algebra M je dle věty 4.5.11 reprezentovatelná, musí mít dle věty 4.4.8 aspoň jeden stav.

Ve 4. kapitole jsme se také zabývali stavy na normálně hodnotových GMV-algebrách. Vzhledem ke komutativitě sčítání na MV-algebrách, je každá hodnota V normální ve svém pokrytí V^* a tedy MV-algebra je vždy normálně hodnotová. Dle věty 4.5.9 má každá normálně hodnotová MV-algebra aspoň jeden stav a tedy opět dostáváme větu 4.7.5. Navíc ji lze pomocí věty 4.5.9 upřesnit:

Věta 4.7.6 *Každá MV-algebra* M *má aspoň jeden stav a speciálně pro* $|\Gamma(1)| = n$ *platí, že* M *má právě* n *stavových morfismů.*

Kapitola 5

Komutativní DRl-monoidy a stavy na nich

Při studiu třídy komutativních l-grup a třídy tzv. Brouwerových algeber byly nalezeny některé společné vlastnosti těchto dvou algebraických struktur. Například zástupci obou tříd jsou distributivní svazy apod. Naskytla se přirozeně otázka, jak lze pojmy zobecnit. Algebra, jejíž jsou l-grupy a Brouwerovy algebry speciálním případem, se nazývá komutativní duálně reziduovaný svazově uspořádaný monoid (zkráceně komutativní DRl-monoid) a definoval ji v roce 1965 indický matematik K. L. N. Swamy [15]. Navíc se ukazuje, že tyto pologrupy s nulovým prvkem v sobě rovněž zahrnují například Booleovy algebry nebo MV-algebry.

V této kapitole uvedeme definici komutativního DRl-monoidu, budeme studovat vlastnosti této algebry, ukážeme, že komutativní l-grupy a Brouwerovy algebry jsou skutečně speciální případy komutativních DRl-monoidů. Budeme také řešit otázku, zda komutativní DRl-monoidy jsou izomorfní s direktním součinem některých algeber a nakonec zavedeme pojem stav na komutativním DRl-monoidu.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 5.1.1 *Algebra* $A = (A, \oplus, 0, \ominus, \vee, \wedge)$ *typu* $(2, 0, 2, 2, 2)$ *se nazývá* komutativní duálně reziduovaný svazově uspořádaný monoid *(zkráceně komutativní DRl-monoid), jestliže platí:*

M1) $(A, \oplus, 0, \vee, \wedge)$ *je komutativní l-pologrupa s nulovým prvkem* 0.

Tj. M1a) $(A, \oplus, 0)$ *je komutativní monoid s nulou* 0,

M1b) $(A, \vee, \wedge)$ *je svaz, ve kterém pro všechna* $a, b, c \in A$ *platí:*

$$a \oplus (b \vee c) = (a \oplus b) \vee (a \oplus c),$$

$$a \oplus (b \wedge c) = (a \oplus b) \wedge (a \oplus c).$$

M2) Pro všechny prvky $a, b \in A$ *existuje nejmenší prvek* $x \in A$ *takový, že* $b \oplus x \geq a$. *Tento prvek značíme* $a \ominus b$ *a pro každou dvojici prvků* a, b *je určen jednoznačně.*

M3) $((a \ominus b) \vee 0) \oplus b \leq a \vee b$ *pro všechna* $a, b \in A$.

M4) $(a \ominus a) \geq 0$ *pro všechna* $a \in A$.

Poznámka V definici uvedený přívlastek "komutativní" značí komutativitu operace $\oplus$. V dalším textu již tuto vlastnost nebudeme zdůrazňovat a tedy pojmem DRl-monoid budeme rozumět komutativní DRl-monoid.

Definice 5.1.2 *Systém* $B = (B, \vee, \wedge, 0, \ominus)$ *typu* $(2, 2, 0, 2)$ *se nazývá* Brouwerova algebra, *právě když platí:*

B1) $(B, \vee, \wedge, 0)$ *je svaz s nejmenším prvkem* 0,

B2) pro všechny prvky $a, b \in B$ *existuje nejmenší prvek* $x \in B$ *(značíme jej* $a \ominus b$*) takový, že* $b \vee x \geq a$.

Z definic jednotlivých algeber plyne, že každá Brouwerova algebra, ve které $a \oplus b = a \vee b$, a každá komutativní l-grupa, v níž $\oplus$ je grupová operace, jsou DRl-monoidy.

Následující věta umožňuje definování DRl-monoidu jiným způsobem.

Věta 5.1.3 *Každý DRl-monoid lze ekvivalentně definovat jako algebru* $A = (A, \oplus, 0, \ominus, \vee, \wedge)$ *typu* $(2, 0, 2, 2, 2)$ *splňující M1),M3),M4) a dále pro všechna* $a, b, c \in A$ *platí:*
M2.1) $a \oplus (b \ominus a) \geq b$,
M2.2) $a \ominus b \leq (a \vee c) \ominus b$,
M2.3) $(a \oplus b) \ominus b \leq a$.

Důkaz Nechť A je DRl-monoid dle definice 5.1.1. Potom nerovnosti *M2.1), M2.2) ,M2.3)* evidentně platí.
Naopak, nechť $A = (A, \oplus, 0, \ominus, \vee, \wedge)$ splňuje *M1), M3), M4), M2.1) M2.2)* a *M2.3)*. Dokažme, že je splněna vlastnost *M2)*. Nechť $x \in A$ je prvek, pro který $b \oplus x \geq a$. Potom dle *M2.2)* platí $a \ominus b \leq (a \vee (b \oplus x)) \ominus b = (b \oplus x) \ominus b$ a dle *M2.3)* $(b \oplus x) \ominus b \leq x$. Tedy $a \ominus b \leq x$, což značí, že $a \ominus b$ je nejmenší prvek požadované vlastnosti.

Věta 5.1.4 *Nechť* A *je DRl-monoid,* $a \in A$*. Potom*

1. $a \ominus a = 0$
2. $a \ominus 0 = a$

Důkaz (1) $a \oplus 0 = a$ a dle *M2)* $a \ominus a \leq 0$. Z *M4)* současně vyplývá, že $a \ominus a \geq 0$ a celkem tedy $a \ominus a = 0$
(2) Ze vztahu $0 \oplus a = a$ dostáváme nerovnost $a \ominus 0 \leq a$. Současně $a \ominus 0 =$ $= (a \ominus 0) \oplus 0 \geq a$ a celkem tedy $a \ominus 0 = a$.

Věta 5.1.5 *Nechť A je DRl-monoid, $a, b \in A$. Potom* $((a \ominus b) \vee 0) \oplus b = a \vee b$.

Důkaz Z distributivního zákona platí $((a \ominus b) \vee 0) \oplus b = ((a \ominus b) \oplus b) \vee (0 \oplus b)$. Dle *M2.1)* $(a \ominus b) \oplus b \geq a$ a odtud $((a \ominus b) \oplus b) \vee (0 \oplus b) \geq a \vee b$. Současně platí *M3)*, a proto $((a \ominus b) \vee 0) \oplus b = a \vee b$.

V následující větě je uveden přehled často používaných vztahů.

Věta 5.1.6 *Nechť A je DRl-monoid, $a, b, c \in A$. Potom platí:*

1. $a \ominus (b \oplus c) = (a \ominus b) \ominus c = (a \ominus c) \ominus b$,
2. $a \ominus (b \wedge c) = (a \ominus b) \vee (a \ominus c)$,
3. $(a \vee b) \oplus (a \wedge b) = a \oplus b$,
4. $a \leq b$ *implikuje* $a \ominus c \leq b \ominus c$ *a také* $c \ominus b \leq c \ominus a$,
5. $a \geq b$ *implikuje* $(a \ominus b) \oplus b = a$,
6. $a \leq b$, *právě když* $a \ominus b \leq 0$.

5.2 Vztah DRl-monoidů a MV-algeber

Věta 5.2.1 *Nechť* $A = (A, \oplus, 0, \ominus, \vee, \wedge)$ *je DRl-monoid,* 0 *je nulový prvek monoidu* $A = (A, \oplus, 0)$ *a existuje největší prvek* $1 \in A$*, pro který platí:*
(2.1) $\quad 1 \ominus (1 \ominus a) = a$ *pro všechna* $a \in A$.
Položme $\neg a = 1 \ominus a$.
Potom $(A, \oplus, \neg, 0)$ *je MV-algebra.*

Důkaz Je dokázáno, že každý shora ohraničený DRl-monoid je také zdola ohraničený a navíc 0 je nejmenším prvkem.

Protože $(A, \oplus, 0)$ je komutativní monoid s nulou 0, jsou podmínky $MV1)- MV3)$ evidentně splněny.

$MV4)\neg(\neg a) = 1 \ominus \neg a = 1 \ominus (1 \ominus a) = a,$

$MV5)(a \oplus \neg 0) = a \oplus (1 \ominus 0) = a \oplus 1 \geq 0 \oplus 1 = 1 = \neg 0,$

$MV6)\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = 1 \ominus ((1 \ominus a) \oplus b) \oplus b = (1 \ominus (1 \ominus a)) \ominus b \oplus b = a \ominus b \oplus b =$
$= b \ominus a \oplus a = (1 \ominus (1 \ominus b)) \ominus a \oplus a = 1 \ominus ((1 \ominus b) \oplus a) \oplus a = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a.$

Věta 5.2.2 *Nechť* $A = (A, \oplus, \neg, 0)$ *je MV-algebra. Pro všechna* $a, b \in A$ *nechť* $a \ominus b = \neg b \odot a$.
Jestliže $a \vee b$ *(resp.* $a \wedge b$*) značí supremum (resp. infimum) prvků* $a, b \in A$ *v indukovaném uspořádání na* A*, potom* $A = (A, \oplus, 0, \ominus, \vee, \wedge)$ *je ohraničený DRl-monoid s největším prvkem* 1 *splňující (2.1).*

Důkaz Pro všechny prvky a, b z MV-algebry A platí, že $b \oplus (a \odot \neg b) = = a \vee b \geq a$. Vezměme $z \in A$, pro které $b \oplus z \geq a$. Tato nerovnost je dle věty 3.1.7 ekvivalentní s $a \odot \neg b \leq z$. A tedy $a \odot \neg b$ je nejmenší prvek z A, pro který $b \oplus z \geq a$. Vzhledem k indukovanému uspořádání zbývá dokázat pouze platnost $M3)$ a $M4)$ pro DRl-monoidy.

$M3)$ $((a \ominus b) \vee 0) \oplus b = (\neg b \odot a) \oplus b = a \vee b$ pro všechna $a, b \in A$.

$M4)$ $(a \ominus a) = \neg a \odot a = 0$ pro všechna $a \in A$.

Ověření platnosti vztahu (2.1) je snadné, neboť $1 \ominus (1 \ominus a) = \neg(\neg a \odot 1) \odot 1 = = \neg(\neg a) \odot 1 = a \odot 1 = a$.

Předchozí dvě věty ukazují vzájemnou spojitost mezi MV-algebrami a ohraničenými DRl-monoidy s největším prvkem 1 splňující (2.1).

Uvažujme MV-algebru A_1, vytvořme z ní dle věty 5.2.2 DRl-monoid A_2, z něj dle věty 5.2.1 získejme příslušnou MV-algebru A_3 a ptejme se, jaký je vztah mezi MV-algebrami A_1 a A_3. Nechť $A_1 = (A, \oplus, \neg_1, 0)$. Potom operace $\ominus_2$ v DRl-monoidu $A_2 = (A, \oplus, 0, \ominus_2, \vee, \wedge)$ je dána: pro všechna $a, b \in A$ platí $a \ominus_2 b = \neg_1 b \odot a$ a konečně pro MV-algebru $A_3 = (A, \oplus, \neg_3, 0)$ dostáváme: $\neg_3 = 1 \ominus_2 a = \neg_1 a \odot 1 = \neg_1 a$ pro všechna $a \in A$. Proto MV-algebry A_1 a A_3 jsou totožné.

Ukažme, jak získat DRl-monoid z intervalu l-grupy.

Věta 5.2.3 *Nechť $G = (G, \oplus, 0, -, \leq)$ je komutativní l-grupa, $0 \leq u \in G$ a $A = [0, u] = \{a \in G,\ 0 \leq a \leq u\}$. Pro všechna $a, b \in A$ položme*

$$a \oplus b = (a + b) \wedge u,\ a \ominus b = (a - b) \vee 0.$$

Potom $A = (A, \oplus, 0, \ominus, \vee, \wedge)$ je DRl-monoid s největším prvkem u, který splňuje $u \ominus (u \ominus a) = a$ pro všechna $a \in A$.

Důkaz Ověřme $M1) - M4)$ pro DRl-monoidy.

$M1)$ $a \oplus 0 = (a + 0) \wedge u = a \wedge u = a$. Z komutativity operace $+$ rovněž $0 \oplus a = a$.

Protože $(a \oplus b) \oplus c = ((a + b) + c) \wedge u = (a + (b + c)) \wedge u = a \oplus (b \oplus c)$, je $(A, \oplus, 0)$ komutativní monoid.

$(A, \vee, \wedge)$ je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, G je l-grupa a tedy $a \oplus (b \vee c) =$ $= (a + (b \vee c)) \wedge u = ((a + b) \vee (a + c)) \wedge u = ((a + b) \wedge u) \vee ((a + c) \wedge u) =$ $= (a \oplus b) \vee (a \oplus c)$.

$a \oplus (b \wedge c) = (a + (b \wedge c)) \wedge u = ((a + b) \wedge (a + c)) \wedge u = ((a + b) \wedge u) \wedge ((a + c) \wedge u) =$ $= (a \oplus b) \wedge (a \oplus c)$.

$M2)$ Pro všechna $a, b \in A$: $b \oplus (a \ominus b) = b \oplus ((a - b) \vee 0) = (b + ((a - b) \vee 0)) \wedge u =$ $= ((b + 0) \vee (a - b + b)) \wedge u = (b \vee a) \wedge u = a \vee b$, a proto $b \oplus (a \ominus b) \geq a$,

Nechť $d \in A$ je prvek takový, že $b \oplus d \geq a$. Potom $(b + d) \wedge u \geq a$ a tedy i $b + d \geq a$, tj. $d \geq -b + a$. Protože $d \in A$, je $d \geq 0$. Proto $d \geq (-b + a) \vee 0 =$ $= a \ominus b$ a prvek $a \ominus b$ je skutečně nejmenší požadované vlastnosti.

$M3)$ $((a\ominus b)\vee 0)\oplus b = (a\ominus b)\oplus b = ((a-b)\vee 0)\oplus b = (((a-b)\vee 0)+b)\wedge u =$
$= ((a-b+b)\vee(0+b))\wedge u = (a\vee b)\wedge u = a\vee b$
$M4)$ $a\ominus a = (a-a)\vee 0 = a-a = 0.$
Zbývá ověřit danou rovnost: $u\ominus(u\ominus a) = (u-((u-a)\vee 0))\vee 0 = u-(u-a) = a.$

5.3 Direktní součiny na DRl-monoidech

Definice 5.3.1 *Nechť $A = (A,\oplus,0,\ominus,\vee,\wedge)$ je DRl-monoid, B podmnožina množiny A obsahující nulu* 0 *monoidu $(A,\oplus)$. Pak $B = (B,\oplus_B,0,\ominus_B,\vee,\wedge)$, kde B je uzavřená na všechny operace na A, uspořádání na B je indukované uspořádáním na A a $\oplus_B$, $\ominus_B$ značí restrikce operací $\oplus$, $\ominus$ na množinu B, nazýváme* podalgebrou DRl-monoidu.

Každá podalgebra DRl-monoidu je opět DRl-monoid.

Nechť A je DRl-monoid. Jestliže pro prvek $a\in A$ platí $0\ominus a = 0$, nazýváme ho singulární prvek. Označme $S(A)$ množinu všech singulárních prvků v A, tj. $S(A) = \{a\in A,\ 0\ominus a = 0\}$. Označme $G(A)$ množinu všech invertibilních prvků v A, tj. $G(A) = \{a\in A,\ a\oplus(0\ominus a) = 0\}$.

Věta 5.3.2 *Množina $S(A)$ je podalgebra DRl-monoidu A a navíc má nejmenší prvek* 0.

Důkaz Nechť $a,b\in S(A)$.
$0\ominus 0 = 0$ a tedy $0\in S(A)$.
Pro všechna $a\in S(A)$ platí $0\vee a = ((0\ominus a)\vee 0)\oplus a = 0\oplus a = a$ a tedy 0 je nejmenší prvek v $S(A)$.
Dle věty 5.1.6(2) $0\ominus(a\wedge b) = (0\ominus a)\wedge(0\ominus b) = 0\vee 0 = 0$. Tzn. $a\wedge b\in S(A)$.
$0\ominus(a\oplus b) = (0\ominus a)\ominus b = 0\ominus b = 0$. Tato rovnost implikuje $a\oplus b\in S(A)$.

Dle věty 5.1.6(3) lze psát $0 = 0 \ominus (a \oplus b) = 0 \ominus ((a \wedge b) \oplus (a \vee b)) = = (0 \ominus (a \wedge b)) \ominus (a \vee b) = 0 \ominus (a \vee b)$, a proto $a \vee b \in S(A)$.
Protože $a \geq 0$, je dle věty 5.1.6(4) $a \ominus b \geq 0 \ominus b = 0$. Použijeme-li opět větu 5.1.6(4), dostáváme $0 \ominus (a \ominus b) \leq 0 \ominus 0 = 0$ a $S(A)$ je uzavřená i na prvek $a \ominus b$.
Celkem tedy $S(A)$ je DRl-monoid s nejmenším prvkem 0.

Lze dokázat, že také množina $G(A)$ je podalgebra v A. Navíc platí, že $G(A)$ je l-grupou.

V šedesátých letech 20.století K. L. N. Swamy dokázal řadu vět, které určují, za jakých podmínek je DRl-monoid direktním součinem některých algeber, např. Brouwerovy algebry a komutativní l-grupy, Booleovy algebry a komutativní l-grupy a také DRl-monoidu s nejmenším prvkem a komutativní l-grupy. V druhé polovině devadesátých let T. Kovář [8] dokázal tzv. reprezentační větu pro nekomutativní DRl-monoidy, které jsou zobecněním DRl-monoidů, a proto lze jeho výsledků využít k vyslovení následující věty.

Věta 5.3.3 *Každý DRl-monoid A je izomorfní s direktním součinem komutativní l-grupy a zdola ohraničeného DRl-monoidu a konkrétně*

$$A \cong G(A) \times S(A).$$

S využitím [9] dostáváme následující větu.

Věta 5.3.4 *Každý DRl-monoid A je izomorfní s direktním součinem l-grupy a MV-algebry, právě když existuje prvek $1 \in A$ splňující*

1. $(1 \ominus a) \oplus a = 1 \oplus 1$ *pro všechna* $a \in A$.
2. $1 \ominus (1 \ominus a) = a$ *pro všechna* $a \in A$.

Konkrétně $A \cong G(A) \times S(A)$.

Důkaz S ohledem na předchozí větu stačí ověřit, že $S(A)$ je za daných podmínek MV-algebra.
Z vlastnosti (1) platí $1 = 0 \oplus 1 = (1 \ominus 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1$. Lze dokázat, že každý prvek idempotentní vzhledem k operaci $\oplus$ je současně singulárním prvkem, a proto $1 \in S(A)$. Navíc pro všechna $a \in S(A)$ platí $a \vee 1 = ((1 \ominus a) \vee 0) \oplus a =$ $= (1 \ominus a) \oplus a$. Dle (1) dále dostáváme $(1 \ominus a) \oplus a = 1 \oplus 1 = 1$. Tedy 1 je největší prvek v DRl-monoidu $S(A)$ s nejmenším prvkem 0. Splňuje-li navíc prvek 1 vlastnost (2), je $S(A)$ dle věty 5.2.1 MV-algebrou.

5.4 Stavy na DRl-monoidech

Předchozí věta uvádí, za jakých podmínek je DRl-monoid rozložitelný na direktní součin komutativní l-grupy a MV-algebry. Jelikož pojmy stav na komutativní unitální l-grupě, resp. stav na MV-algebře, již známe, definujeme pojem stav na tzv. unitálním DRl-monoidu a poté budeme studovat jeho rozklad, který uvedl ve svém rukopise J. Kůhr [10], na stavy na výše uvedených třídách algeber.

V této podkapitole nechť jsou pro každý DRl-monoid A splněny podmínky (1), (2) z věty 5.3.4.

Vzhledem k direktnímu součinu, lze každý prvek $a \in A$ psát právě jedním způsobem ve tvaru $a = a^G \oplus a^S$, kde $a^G \in G(A)$ a $a^S \in S(A)$. Protože $0 \in G(A)$ a také $0 \in S(A)$, lze ve speciálních případech, kdy $a \in G(A)$, resp. $a \in S(A)$, psát $a = a^G \oplus 0$, resp. $a = 0 \oplus a^s$.

Definice 5.4.1 *Nechť A je DRl-monoid, $0 \leq u \in A$. Prvek u nazýváme* silná jednička DRl-monoidu A*, jestliže pro každé $a \in A$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že $a \leq n \odot u$, kde $n \odot u = u \oplus u \oplus \ldots \oplus u$ a na pravé straně rovnosti je právě n*

sčítanců.

DRl-monoid A s existencí silné jedničky nazýváme unitální a značíme (A, u).

Je zřejmé, že prvek $0 \leq u \in A$, $u = u^G \oplus u^S$ je silná jednička DRl-monoidu A, právě když u^G, u^S jsou silnými jedničkami po řadě $G(A)$ a $S(A)$.

V DRl-monoidu definujme částečnou binární operaci $+$ takto: $a + b$ je definováno, právě když $(a \oplus b) \ominus b = a$. Potom $a + b := a \oplus b$.

Věta 5.4.2 *Nechť A je DRl-monoid. Potom součet* $a + b$ *je definován pro všechny prvky* $a, b \in G(A)$.

Důkaz $G(A)$ je l-grupa, tedy jistě $(a \oplus b) \ominus b = a$ pro všechna $a, b \in G(A)$.

Na množině $G(A)$ tedy oba součty $\oplus$ a $+$ splývají.

Věta 5.4.3 *Nechť A je DRl-monoid a nechť* $a \in G(A)$, $b \in S(A)$. *Potom součet* $a + b$ *je vždy definován.*

Důkaz Pomocí rozkladu prvků na direktní součet platí $(a \oplus b) \ominus a =$ $= ((a \oplus 0) \ominus a) \oplus ((0 \oplus b) \ominus 0) = 0 \oplus b = b$.

Důsledek 5.4.4 *Nechť A je DRl-monoid,* $a \in A$. *Potom* $a = a^G + a^S$.

Z výše uvedeného vyplývá, že $a + b$ existuje, právě když je definován součet $a^S + b^S$ v $S(A)$.

Je-li prvek 0 jediný singulární prvek DRl-monoidu A, tj. $S(A) = \{0\}$, potom $a = a^G + 0$. Tj. $A = G(A)$ a DRl-monoid A je l-grupou. Dle věty 5.4.2 $a + b$ existuje pro všechna $a, b \in A$. Je-li naopak $S(A) = A$, je DRl - monoid A MV-algebrou. Pro GMV-algebry (a tudíž i pro MV-algebry) však již byla operace $+$ definována a je nutné se ptát, zda definice nekolidují.

Věta 5.4.5 *Definice částečného součtu + pro DRl-monoidy a MV-algebry jsou ekvivalentní.*

Důkaz Evidentně stačí dokázat ekvivalenci podmínek $(a \oplus b) \ominus b = a$ a $a \leq \neg b$. Nejdříve však dokažme, že v každé MV-algebře pro všechny její prvky a, b platí $(1 \ominus a) \ominus b = (1 \ominus b) \ominus a$, $1 \ominus (1 \ominus a) = a$.
$(1 \ominus a) \ominus b = (1 \odot \neg a) \ominus b = \neg a \odot \neg b = \neg b \ominus a = (1 \odot \neg b) \ominus a = (1 \ominus b) \ominus a$.
$1 \ominus (1 \ominus a) = 1 \odot \neg(1 \odot \neg a) = 1 \odot \neg(\neg a) = a$.
S využitím těchto vztahů dostáváme $(a \oplus b) \ominus b = (1 \ominus (1 \ominus (a \oplus b))) = (1 \ominus b) \ominus (1 \ominus (a \oplus b)) = (1 \ominus b) \ominus ((1 \ominus b) \ominus a) = (1 \ominus b) \ominus ((1 \ominus b) \odot \neg a) =$
$= (1 \ominus b) \ominus (\neg(\neg(1 \ominus b) \oplus a)) = (1 \ominus b) \odot (\neg(1 \ominus b) \oplus a) = (1 \ominus b) \wedge a = \neg b \wedge a$.
Odtud vyplývá, že $(a \oplus b) \ominus b = a$, právě když $a \leq \neg b$ a definice jsou ekvivalentní.

Definice 5.4.6 *Nechť* (A, u) *je unitální DRl-monoid. Zobrazení* $n : A \longrightarrow \mathbf{R}$ *se nazývá* stav na unitálním DRl-monoidu (A, u), *jestliže platí:*
T1) $n(a) \geq 0$ *pro všechna* $a \in A^+$,
T2) $n(u) = 1$,
T3) jestliže existuje součet $a + b$, *potom* $n(a + b) = n(a) + n(b)$.

V případě, že $A = G(A)$, je právě definovaný stav současně stavem na unitální l-grupě. Skutečně toto platí, neboť podmínky $T1$), $T2$) jsou zcela totožné s podmínkami 1), 2) v definici 2.1.1. Jelikož $a + b$ v $G(A)$ vždy existuje, jsou ekvivalentní i podmínky $T3$) a 3).
Jestliže $A = S(A)$, potom největší prvek 1 je silnou jedničkou, a proto je stav na DRl-monoidu $(A, 1)$ také stavem na MV-algebře.

Poznámka: Na závěr uvedeme některé poznatky J. Kůhra [10] o rozkladu stavů na unitálním DRl-monoidu pomocí částečné operace $+$. Dle podmínky $T3$) v definici stavu platí $n(a) = n(a^G + a^S) = n(a^G) + n(a^S)$ a tedy se zdá, že každý stav na $A = G(A) \oplus S(A)$ by mohl být určen dvojicí stavů na $G(A)$ a $S(A)$.

Uvažujme (A, u), ve kterém současně $u^G \neq 0 \neq u^S$, který proto není ani l-grupou ani MV-algebrou. Každý stav na $(G(A), u^G)$ nebo na $(S(A), u^S)$ lze přirozeně rozšířit na stav na (A, u). Pokud n je stav na $(G(A), u^G)$, potom $\bar{n}$ definovaný $\bar{n}(a) := n(a^G)$ je stav na (A, u) a analogicky pro stav n na $(S(A), u^S)$ platí, že $\bar{n}(a) := n(a^S)$ je stav na (A, u).

V případě, že pro daný stav n na (A, u) $n(a) = 0$ pro všechna $a \in G(A)$, resp. $a \in S(A)$, lze provést restrikci stavu n na $G(A)$ nebo na $S(A)$. Tyto restrikce jsou stavy na $(G(A), u^S)$, resp. na $(S(A), u^G)$. Takové stavy neuvažujme, tj. předpokládejme, že $n(u^G) \neq 0 \neq n(u^S)$, neboli ekvivalentně $n(u^G) \neq 1 \neq n(u^S)$. A tedy restrikce stavu n na $G(A)$, resp. $S(A)$ nejsou stavy na příslušných podalgebrách.

Nechť n je stav na (A, u) a nechť $\nu_G := n(u^G)$, $\nu_S := n(u^S)$. Dle předpokladu $\nu_G \neq 0 \neq \nu_S$, dále $\nu_G + \nu_S = 1$ a ν_G, ν_S náleží reálnému intervalu $(0; 1)$. Nenulovost těchto čísel nám umožňuje definovat zobrazení n_G a n_S takto:

$$n_G(a) := \tfrac{1}{\nu_G} n(a),\ a \in G(A),$$
$$n_S(a) := \tfrac{1}{\nu_S} n(a),\ a \in S(A).$$

Zobrazení n_G je stav na l-grupě $(G(A), u^G)$, neboť evidentně $n_G(a) \in \mathbf{R}^+$ pro všechna $a \in G(A)^+$, $n_G(u_S) = \frac{1}{\nu_G}\nu_G = 1$ a vzhledem k větě 5.4.2 platí $n_G(a+b) = \frac{1}{\nu_G} n(a+b) = \frac{1}{\nu_G}(n(a)+n(b)) = \frac{1}{\nu_G} n(a) + \frac{1}{\nu_G} n(b) = n_G(a) + n_G(b)$ pro všechna $a, b \in G(A)$.

Je-li u_S největšímm prvkem v $S(A)$, potom se analogicky dokáže, že n_S je stavem na $(S(A), u^S)$.

Tyto stavy na podalgebrách DRl-monoidu (A, u) stejným způsobem jako výše rozšíříme na stavy $\bar{n}_G$, $\bar{n}_S$ na DRl-monoidu (A, u).

Pro všechna $a \in A$ platí $\nu_G \bar{n}_G(a) + \nu_S \bar{n}_S(a) = \nu_G n_G(a^G) + \nu_S n_S(a^S) = = \nu_G \frac{1}{\nu_G} n(a^G) + \nu_S \frac{1}{\nu_S} n(a^S) = n(a^G) + n(a^S) = n(a^G + a^S) = n(a)$. Tedy každý stav n na (A, u) lze vyjádřit jako konvexní kombinaci stavů na $G(A)$ a $S(A)$ a to ve tvaru $n = \nu_G \bar{n}_G + \nu_S \bar{n}_S$. Sporem lze dokázat jednoznačnost tohoto rozkladu.

Závěr

Práce poskytuje přehled některých algeber a následné definování stavů na nich.

Ukazuje však také vzájemné vztahy uvedených struktur a umožňuje tak studium spojitostí mezi stavy na jednotlivých třídách algeber.

V žádné části práce definice stavů nekolidovaly. V případě, že některá struktura byla současně i strukturou z jiné třídy, studované zobrazení vždy splňovalo identity obou příslušných stavů.

Čtenář si také mohl všimnout, že nekonečně hodnotová nekomutativní logika, pro kterou jsou GMV-algebry její algebraický protějšek, byla zavedena v roce 2006 a tedy je vidět, že této problematice je v současnosti věnována pozornost. Je studována úzká spojitost algebraických struktur s logikou a stavy jsou vnímány jako analogie pravděpodobnostní míry.

Literatura

[1] C. C. Chang: *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz Axioms*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 74-80.

[2] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici: *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer academic Publ., Dordrecht, (2000).

[3] A. Dvurečenskij: *States on pseudo MV-algebras*, Studia Logica 68 (2001), 301-327.

[4] A. Dvurečenskij: *Pseudo MV-algebras are intervals in l-groups*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A), 70 (2002), 427-445

[5] A. Dvurečenskij, S. Pulmannová: *New Trends in Quantum Structures*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, (2000).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu: *Pseudo MV-algebras*, Multi. Valued Logic 6 (2001), 95-135.

[7] K. R. Goodearl: *Partially Ordered Abelian Groups with Interpolation*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1986).

[8] T. Kovář: *A General Theory of Dually Residuated Lattice Ordered Monoids*, Ph.D.Thesis, Palacký University, Olomouc, (1996).

[9] J. Kűhr: *Direct products of DRl-monoids: Lattice ordered groups and certain algebras*, submitted

[10] J. Kűhr: *States on DRl-monoids with order-unit*, manuscript, Palacký University, Olomouc

[11] I. Leustean: *Non-commutative Łukasiewicz propositional logic*, Arch. Math. Logic 45 (2006), 191-213.

[12] D. Mundici: *Interpretation of* AFC^**-algebras in Łukasiewicz sentential calculus*, J. Funct. Anal. 65 (1986), 15-63.

[13] J. Rachůnek: *A non-commutative generalization of MV-algebras*, Czech. Math. J. 52 (2002), 255-273.

[14] J. Rachůnek: *Prime spectra of non-commutative generalizations of MV-algebras*, Algebra Univers. 48 (2002), 151-169

[15] K. L. N. Swamy: *Dually residuated lattice ordered semigroups*, Math. Ann. 159 (1965), 105-114.

[16] K. L. N. Swamy: *Dually residuated lattice ordered semigroups III*, Math. Ann. 167 (1966), 71-74.