

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martin Hrba

**Aplikace modelů mnohorozměrných časových řad ve finanční
analýze**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Poděkování patří vedoucí diplomové práce, RNDr. Jitce Zichové, Dr., za cenné připomínky a podněty k této práci, čas strávený konzultacemi a za umožnění práce s potřebným softwarem.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 12. 4. 2006

Martin Hrba

Obsah

Úvod	6
1 Mnohorozměrný náhodný proces	7
2 Mnohorozměrné ARMA modely	9
2.1 Definice posloupnosti ARMA	9
2.2 Stacionarita a invertibilita posloupností ARMA	11
3 Identifikace ARMA modelu	18
3.1 Určení řádu modelu	18
3.1.1 Kovarianční a korelační maticová funkce	19
3.1.2 Parciální autoregresní maticová funkce	22
3.1.3 Parciální korelační maticová funkce	25
3.1.4 Shrnutí volby řádu modelu	27
3.2 Odhad parametrů modelu	29
3.2.1 Momentová metoda	29
3.2.2 Metoda maximální věrohodnosti	29
3.3 Verifikace modelu	30
4 Konstrukce předpovědí	32
5 Zpracování konkrétních časových řad	36
5.1 Řada měnových kurzů	36
5.2 Řada oborových burzovních indexů	42
Závěr	49
Literatura	50
Přílohy	51
Příloha č. 1: Výpis programu rada1.nb	52
Příloha č. 2: Výpis programu rada2.nb	59
Příloha č. 3: Komentář k programovému řešení	70

Název práce: Aplikace modelů mnohorozměrných časových řad ve finanční analýze

Autor: Martin Hrba

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

e-mail vedoucího: zichova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce se zabývá aplikací mnohorozměrných ARMA modelů na konkrétní časové řady z finančních trhů a sestává z teoretické a praktické části. V první části je vyložena teorie mnohorozměrných posloupností ARMA a postupy při jejich použití. V druhé části jsou za pomoci systému Mathematica 5.0 zpracovány dvě časové řady, a to řada měnových kurzů a řada burzovních indexů. Zpracovaná data a výpis programu jsou přiloženy na CD.

Klíčová slova: Analýza časových řad, mnohorozměrná časová řada, ARMA model

Title: Application of Multivariate Time Series Models in Financial Analysis

Author: Martin Hrba

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Supervisor's e-mail address: zichova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with the applications of multivariate ARMA models for particular time series from financial markets; it consists of a theoretical part and a practical part. The former refers to the theory of multivariate ARMA models and methods of their applications. In the latter two time series are solved by system Mathematica 5.0, one currency courses series and one stock exchange index series. The data and programme source code are enclosed on a CD.

Keywords: Time series analysis, multivariate time series, ARMA model

Úvod

Velké množství dat ve financích má podobu časové řady, tj. hodnota stejného ukazatele je zaznamenána v konkrétních časech v minulosti. Přitom se zřídka vyskytne časová řada, která by existovala sama o sobě a byla zcela nezávislá na řadách ostatních, proto se v rámci modelů mnohorozměrných časových řad zkoumají celé vektory hodnot pozorovaných v jednotlivých časech. Úkolem je vyšetřit, zda se vzájemně ovlivňují složky vektoru v konkrétním čase nebo zda hodnota současných pozorování souvisí s hodnotami pozorování minulých, identifikovat pro data vhodný model, který by tyto souvislosti popisoval, a pak na jeho základě předpovídat data do budoucnosti.

Tato práce se zabývá aplikací mnohorozměrných ARMA modelů na konkrétní finanční data. ARMA modely jsou lineární modely založené na předpokladu, že pozorování časové řady v určitém čase je lineární funkcí předchozích pozorování a náhodné složky s neměnným rozdělením pravděpodobnosti.

Práce je členěna do pěti kapitol, v nichž je nejprve vyložena teorie mnohorozměrných ARMA modelů a poté je aplikována na konkrétní data. Bez dalšího vysvětlování jsou používány základní pojmy matematické statistiky (pojem náhodného vektoru, základní pravděpodobnostní rozdělení, jejich momenty apod.).

V první kapitole jsou shrnuty základy teorie mnohorozměrných náhodných procesů.

Druhá kapitola je zaměřena na teorii mnohorozměrných ARMA modelů a definuje klíčové vlastnosti posloupností ARMA: stacionaritu a invertibilitu.

Třetí kapitola se již věnuje konkrétním postupům analýzy mnohorozměrných časových řad, jsou popsány způsoby identifikace modelu, které spočívají v určení řádů posloupnosti ARMA a odhadu jejich parametrů.

Ve čtvrté kapitole je vyložena konstrukce předpovědí.

Pátá kapitola popisuje výsledky aplikace postupů vyložených v této práci na dvě konkrétní mnohorozměrné časové řady z finančních trhů.

V přílohách jsou uvedeny zdrojové kódy programů použitých k analýze dat a vybrané výstupy, dále také stručný komentář k programovému řešení.

Na přiloženém CD jsou soubory obsahující zpracovávaná data (*data1.txt* a *data2.txt*) a oba použité programy (*rada1.nb* a *rada2.nb*).

Značení:

V celé práci budou vektory uvažovány sloupcové a budou značeny tučnými písmeny, transpozice vektoru \mathbf{X} bude značena \mathbf{X}^T .

Matice budou ve většině případů značeny řeckými písmeny, opět matice transponovaná k matici Γ bude značena Γ^T .

Střední hodnota náhodného vektoru \mathbf{X} bude značena $E\mathbf{X}$, rozptylová matice $\text{var}\mathbf{X}$ a kovarianční matice náhodných vektorů \mathbf{X} a \mathbf{Y} bude značena $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Kapitola 1

Definice a základní vlastnosti mnohorozměrného náhodného procesu

Definice 1.1: Náhodný proces

Nechť $T \subset \mathbb{R}$ a pro všechna $t \in T$ je \mathbf{X}_t m -rozměrný reálný náhodný vektor. Pak se systém $\{\mathbf{X}_t, t \in T\}$ nazývá *m -rozměrný náhodný proces*. Je-li speciálně T podmnožina celých čísel, nazývá se $\{\mathbf{X}_t, t \in T\}$ *m -rozměrná náhodná posloupnost* nebo také *m -rozměrná časová řada*. Pokud je z kontextu zřejmé, o jakou množinu T se jedná, budeme psát pouze $\{\mathbf{X}_t\}$.

Úmluva 1.2:

Protože se celá práce zabývá mnohorozměrným případem náhodných procesů, budeme v dalším textu většinou slovo *m -rozměrný* vynechávat, přitom m bude nadále značit rozměr příslušné náhodné posloupnosti, i pokud nebude explicitně uveden.

Definice 1.3: Střední hodnota

Nechť $\{\mathbf{X}_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $E\mathbf{X}_t$. Pak se vektorová funkce $\mathbf{e}_t = E\mathbf{X}_t$ definovaná na T nazývá *střední hodnota* náhodného procesu $\{\mathbf{X}_t\}$. Náhodný proces s nulovou střední hodnotou nazýváme *centrovaný náhodný proces*.

Definice 1.4: Kovarianční maticová funkce

Nechť $\{\mathbf{X}_t, t \in T\}$ je m -rozměrný náhodný proces se střední hodnotou $E\mathbf{X}_t$, kde $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{m,t})^T$, a platí $E(X_{k,t})^2 < \infty$ pro $t \in T$ a $k = 1, \dots, m$. Pak se maticová funkce $\Gamma(s, t) = E(\mathbf{X}_s - E\mathbf{X}_s)(\mathbf{X}_t - E\mathbf{X}_t)^T$ definovaná na $T \times T$ nazývá *kovarianční maticová funkce* náhodného procesu $\{\mathbf{X}_t\}$.

Funkce $\Gamma(t, t)$ definovaná na T se nazývá *rozptylová maticová funkce* náhodného procesu $\{\mathbf{X}_t\}$.

Definice 1.5: *Slabá stacionarita*

Je-li střední hodnota nějakého náhodného procesu konstantní a kovarianční maticová funkce $\Gamma(s, t)$ je pouze funkcí rozdílu argumentů $t - s$ a je konečná pro všechna $s, t \in T$, pak se tento náhodný proces nazývá *slabě stacionární*. Pak zkráceně píšeme $\Gamma(k) = \Gamma(t, t + k)$ a $\Gamma(0)$ nazýváme *rozptylová matice*.

Poznámka 1.6:

Pro $t \in \mathbb{Z}$ zřejmě platí $\Gamma(-k) = \Gamma(k)^T$, proto často matici $\Gamma(k)$ počítáme pouze pro $t \in \mathbb{N}_0$.

Kapitola 2

Mnohorozměrné ARMA modely

Důležitou třídou náhodných procesů jsou modely lineárních náhodných posloupností, často zkráceně označované jako posloupnosti ARMA nebo ARMA modely.

2.1 Definice posloupnosti ARMA

Definice 2.1: *Bílý šum*

Nechť $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je náhodná posloupnost, $E\mathbf{Y}_t = \mathbf{0}$ pro všechna $t \in \mathbb{Z}$, kovarianční maticová funkce $\Gamma(s, t) = 0$ je nulová matice pro všechna $s \neq t$, $s, t \in \mathbb{Z}$ a $\Gamma(t, t)$ je konečná, symetrická, pozitivně definitní matice a je stejná pro všechna $t \in \mathbb{Z}$. Pak se $\{\mathbf{Y}_t\}$ nazývá *bílý šum*.

Poznámka 2.2:

Bílý šum je zřejmě centrovaná slabě stacionární náhodná posloupnost, jejíž kovarianční maticová funkce $\Gamma(k)$ ve smyslu definice 1.5 je nulová pro všechna $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Úmluva 2.3:

Dále bude symbol $\{\mathbf{Y}_t\}$ vždy označovat bílý šum.
Rozptylová matice $\Gamma(0)$ bílého šumu bude značena Σ

Při definici i při dalším použití ARMA modelů je vhodné za účelem zjednodušení zápisu používat následující operátor.

Definice 2.4: *Operátor zpětného posunutí*

Nechť $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je systém m -rozměrných vektorů. Pak se operátor \mathcal{B} , který pro všechna $t \in \mathbb{Z}$ vektoru \mathbf{X}_t přiřazuje vektor \mathbf{X}_{t-1} , nazývá *operátor zpětného posunutí*.

Pro $n = 1, 2, \dots$ definujeme rekurentně operátor *n -násobného zpětného posunutí*: Nejprve položíme $\mathcal{B}^1 \mathbf{X}_t = \mathcal{B} \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t-1}$, dále pak $\mathcal{B}^n \mathbf{X}_t = \mathcal{B}(\mathcal{B}^{n-1} \mathbf{X}_t) = \dots = \mathbf{X}_{t-n}$.

Definice 2.5: *Posloupnost klouzavých součtů*

Nechť $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je m -rozměrný bílý šum, $q \in \mathbb{N}$, $\Theta_1, \dots, \Theta_q$ jsou matice typu $m \times m$, přičemž Θ_q je nenulová. Pak se m -rozměrná náhodná posloupnost $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nazývá *posloupnost klouzavých součtů řádu q* , značíme $MA(q)$, jestliže

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{Y}_t + \Theta_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Theta_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \Theta_q \mathbf{Y}_{t-q} \text{ pro všechna } t \in \mathbb{Z}.$$

Označíme-li $\Theta(\mathcal{B}) = \sum_{s=0}^q \Theta_s \mathcal{B}^s$, kde \mathcal{B} je operátor zpětného posunutí a $\Theta_0 = I$ je jednotková matice, lze ekvivalentně psát

$$\mathbf{X}_t = \Theta(\mathcal{B}) \mathbf{Y}_t.$$

Protože v mnohorozměrném případě je problematické si vytvořit intuitivní představu o operátorech \mathcal{B} nebo $\Theta(\mathcal{B})$, pokusíme se je dát do souvislosti s analogickými jednorozměrnými operátory známými z teorie jednorozměrných ARMA modelů.

Poznámka 2.6:

Operátor zpětného posunutí \mathcal{B} přiřazuje každému vektoru \mathbf{X}_t vektor \mathbf{X}_{t-1} . Při zavedení jednorozměrného operátoru B , který veličině X_t přiřazuje veličinu X_{t-1} , si lze \mathcal{B} lépe představit jako diagonální matici, jejíž prvky na diagonále jsou právě B , pak je totiž možno formálně psát

$$\mathcal{B}\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ \vdots \\ X_{m,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX_{1,t} \\ BX_{2,t} \\ \vdots \\ BX_{m,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ \vdots \\ X_{m,t-1} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{t-1}.$$

Poznámka 2.7:

Podobně si lze v maticové podobě představit i operátor $\Theta(\mathcal{B})$. Označme nejprve pro každé $s = 0, 1, \dots, q$ prvky matice Θ_s jako $\theta_{ij,s}$, pak

$$\begin{aligned} \Theta(\mathcal{B}) &= \sum_{s=0}^q \Theta_s \mathcal{B}^s = \\ &= \sum_{s=0}^q \begin{pmatrix} \theta_{11,s} & \theta_{12,s} & \dots & \theta_{1m,s} \\ \theta_{21,s} & \theta_{22,s} & \dots & \theta_{2m,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1,s} & \theta_{m2,s} & \dots & \theta_{mm,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B^s \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{s=0}^q \begin{pmatrix} \theta_{11,s} B^s & \theta_{12,s} B^s & \dots & \theta_{1m,s} B^s \\ \theta_{21,s} B^s & \theta_{22,s} B^s & \dots & \theta_{2m,s} B^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1,s} B^s & \theta_{m2,s} B^s & \dots & \theta_{mm,s} B^s \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^q \theta_{11,s} B^s & \sum_{s=0}^q \theta_{12,s} B^s & \dots & \sum_{s=0}^q \theta_{1m,s} B^s \\ \sum_{s=0}^q \theta_{21,s} B^s & \sum_{s=0}^q \theta_{22,s} B^s & \dots & \sum_{s=0}^q \theta_{2m,s} B^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=0}^q \theta_{m1,s} B^s & \sum_{s=0}^q \theta_{m2,s} B^s & \dots & \sum_{s=0}^q \theta_{mm,s} B^s \end{pmatrix}.$$

Při označení $\theta_{ij}(B) = \sum_{s=0}^q \theta_{ij,s} B^s$ lze tedy psát

$$\Theta(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) & \dots & \theta_{1m}(B) \\ \theta_{21}(B) & \theta_{22}(B) & \dots & \theta_{2m}(B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1}(B) & \theta_{m2}(B) & \dots & \theta_{mm}(B) \end{pmatrix}.$$

Definice 2.8: *Autoregresní posloupnost*

Nechť $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je m -rozměrný bílý šum, $p \in \mathbb{N}$, $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ jsou matice typu $m \times m$, přičemž Φ_p je nenulová. Pak se m -rozměrná náhodná posloupnost $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nazývá *autoregresní posloupnost řádu p* , značíme $\text{AR}(p)$, jestliže

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{Y}_t - \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} - \Phi_2 \mathbf{X}_{t-2} - \dots - \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} \text{ pro všechna } t \in \mathbb{Z}.$$

Označíme-li opět $\Phi(\mathcal{B}) = \sum_{s=0}^p \Phi_s \mathcal{B}^s$, kde $\Phi_0 = I$ je jednotková matice, lze ekvivalentně psát

$$\Phi(\mathcal{B})\mathbf{X}_t = \mathbf{Y}_t.$$

Úmluva 2.9:

V definicích 2.5 a 2.8 byly pro zpřehlednění zápisu zavedeny matice $\Theta_0 = I$ a $\Phi_0 = I$. Ze stejného důvodu budeme i v dalším textu matice Θ_0 a Φ_0 ztotožňovat s jednotkovými maticemi.

Definice 2.10: *Posloupnost ARMA*

Nechť $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum, $p, q, \Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_q, \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta(\mathcal{B})$ a $\Phi(\mathcal{B})$ jako v předchozích definicích, pak se náhodná posloupnost $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nazývá *smíšený model autoregrese a klouzavých součtů řádů p a q* , značíme $\text{ARMA}(p, q)$, jestliže

$$\Phi(\mathcal{B})\mathbf{X}_t = \Theta(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t.$$

2.2 Stacionarita a invertibilita posloupností ARMA

Teorie ARMA modelů je vytvořena hlavně pro třídu posloupností, které mají vlastnost stacionarity a invertibility. Stacionarita a invertibilita jsou důležité pro identifikaci příslušného ARMA modelu a pro konstrukci předpovědí. Pokud je úkolem analyzovat nestacionární časovou řadu, je obvykle možné ji transformovat na řadu stacionární, jak bude ještě dále zmíněno.

Definice 2.11: *Sčitatelnost v absolutní hodnotě*

Posloupnost matic $\{\Psi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$, kde $\Psi_s = [\psi_{ij,s}]_{i,j=1,2,\dots,m}$, se nazývá *sčitatelná v absolutní hodnotě*, jestliže $\sum_{s=0}^{\infty} |\psi_{ij,s}| < \infty$ pro všechna i a j .

Definice 2.12: *Stacionarita*

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je posloupnost ARMA(p, q).

Posloupnost $\{\mathbf{X}_t\}$ se nazývá *stacionární*, jestliže existuje posloupnost matic $\{\Psi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$ sčitatelná v absolutní hodnotě a taková, že $\mathbf{X}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$.

Poznámka 2.13:

V celé práci se konvergencí náhodných veličin a vektorů myslí konvergence podle kvadratického středu, tedy například symbol $\mathbf{X}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$ znamená

$$\lim_{q \rightarrow \infty} E \left[\left(\mathbf{X}_t - \sum_{s=0}^q \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s} \right)^T \left(\mathbf{X}_t - \sum_{s=0}^q \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s} \right) \right] = 0.$$

Aby však uvedená definice stacionarity byla korektní, je třeba si uvědomit, že symbol $\mathbf{X}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$ znamená, že jednak existuje limita podle kvadratického středu posloupnosti $\sum_{s=0}^q \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$ pro $q \rightarrow \infty$ a jednak že je tato limita rovna \mathbf{X}_t . Následující tvrzení vysvětluje, že v případě stacionarity se není potřeba existencí limity nijak zvlášť zabývat.

Tvrzení 2.14:

Pokud $\{\Psi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost matic sčitatelná v absolutní hodnotě, pak posloupnost částečných součtů $\mathbf{X}_t^q = \sum_{s=0}^q \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$ konverguje podle kvadratického středu pro všechna $t \in \mathbb{Z}$ a pro $q \rightarrow \infty$.

Důkaz:

Dokážeme, že posloupnost $\{\mathbf{X}_t^q, q \in \mathbb{N}\}$ je cauchyovská podle kvadratického středu pro libovolné t .

Mějme $n_1 < n_2$, je třeba dokázat

$$E \left[\left(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1} \right)^T \left(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1} \right) \right] \rightarrow 0, n_1, n_2 \rightarrow \infty.$$

Protože $(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})^T (\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})$ je součtem diagonálních prvků (tzv. stopou) matice $(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})^T$, je také $E[(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})^T (\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})]$ součtem diagonálních prvků $\lambda_{ii}^{n_1 n_2}$ matice $\Lambda^{n_1 n_2} = E[(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1})^T]$ přes $i = 1, 2, \dots, m$. Zabývejme se tedy maticí $\Lambda^{n_1 n_2}$:

$$\Lambda^{n_1 n_2} = E \left[\left(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1} \right) \left(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1} \right)^T \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[\left(\sum_{s=n_1+1}^{n_2} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}\right)\left(\sum_{l=n_1+1}^{n_2} \Psi_l \mathbf{Y}_{t-l}\right)^T\right] = \\
&= E\left[\sum_{s=n_1+1}^{n_2} \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T \Psi_l^T\right] = \\
&= \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \Psi_s E\left[\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T\right] \Psi_l^T.
\end{aligned}$$

Protože $E[\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T]$ je podle definic 1.4 a 2.1 nulová pro $s \neq l$, je

$$\Lambda^{n_1 n_2} = \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \Psi_s \Sigma \Psi_s^T,$$

kde $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,m}$ je rozptylová matice $E[\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-s}^T]$ bílého šumu. Matice $\Lambda^{n_1 n_2}$ má tedy prvky

$$\begin{aligned}
\lambda_{ij}^{n_1 n_2} &= \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \psi_{il,s} \sigma_{lk} \right) \psi_{kj,s}^T \right) = \\
&= \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \psi_{il,s} \sigma_{lk} \psi_{jk,s} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sigma_{lk} \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \psi_{il,s} \psi_{jk,s}
\end{aligned}$$

a speciálně na diagonále

$$\lambda_{ii}^{n_1 n_2} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sigma_{lk} \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \psi_{il,s} \psi_{ik,s}.$$

Není těžké si uvědomit, že z podmínky sčitatelnosti v absolutní hodnotě $\sum_{s=0}^{\infty} |\psi_{ij,s}| < \infty$ pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, m$ plyne mimo jiné také $\sum_{s=0}^{\infty} |\psi_{il,s} \psi_{ik,s}| < \infty$ pro libovolná $i, l, k = 1, 2, \dots, m$, tedy také $\sum_{s=n_1+1}^{n_2} |\psi_{il,s} \psi_{ik,s}| \rightarrow 0$ pro $n_1 < n_2$ a $n_1, n_2 \rightarrow \infty$. Pak také $\lambda_{ii}^{n_1 n_2} \rightarrow 0$ a konečně

$$E\left[\left(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1}\right)^T \left(\mathbf{X}_t^{n_2} - \mathbf{X}_t^{n_1}\right)\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_{ii}^{n_1 n_2} \rightarrow 0, \quad n_1, n_2 \rightarrow \infty.$$

Tedy $\{\mathbf{X}_t^q, q \in \mathbb{N}\}$ je cauchyovská podle kvadratického středu. \square

Poznámka 2.15:

Nejjednodušším příkladem stacionární posloupnosti ARMA je libovolná posloupnost MA(q).

Následující věta dává do souvislosti právě definovanou stacionaritu se slabou stacionaritou definovanou v kapitole 1.

Věta 2.16:

Stacionární posloupnost $\text{ARMA}(p, q)$ je centrovaná slabě stacionární náhodná posloupnost.

Důkaz:

Stacionární posloupnost $\text{ARMA}(p, q)$ lze podle definice 2.12 zapsat ve tvaru $\mathbf{X}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$, kde $\{\Psi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost matic sčitatelná v absolutní hodnotě.

Podle předchozího tvrzení je \mathbf{X}_t limitou podle kvadratického středu posloupnosti \mathbf{X}_t^q pro každé $t \in T$ a pro $q \rightarrow \infty$.

Protože $E\mathbf{X}_t^q = \sum_{s=0}^q \Psi_s E\mathbf{Y}_{t-s} = 0$ pro všechna $q \in \mathbb{N}$, je také střední hodnota $E\mathbf{X}_t$ nulová.

Pro každé $q \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ je

$$\begin{aligned} \Gamma^q(k) &= E\left[(\mathbf{X}_t^q)(\mathbf{X}_{t+k}^q)^T\right] = E\left[\left(\sum_{s=0}^q \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}\right)\left(\sum_{l=0}^q \Psi_l \mathbf{Y}_{t+k-l}\right)^T\right] = \\ &= E\left[\left(\sum_{s=0}^q \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}\right)\left(\sum_{l=k}^{q+k} \mathbf{Y}_{t-l}^T \Psi_{l-k}^T\right)\right] = \\ &= \sum_{s=0}^q \sum_{l=k}^{q+k} \Psi_s E\left[\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T\right] \Psi_{l-k}^T. \end{aligned}$$

Protože $E\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T$ je nulová matice pro $s \neq l$ a $E\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-s}^T$ značíme Σ , platí

$$\Gamma^q(k) = \begin{cases} \sum_{s=k}^q \Psi_s \Sigma \Psi_{s-k}^T & \text{pro } k = 0, 1, \dots, q \\ 0 & \text{pro } k > q, \end{cases}$$

nezávisle na t , pak také $\Gamma(k) = E[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t+k}^T]$ nezávisí na t . Konečnost plyne podobnou úvahou jako v předchozím důkazu ze sčitatelnosti posloupnosti $\{\Psi_s\}$ v absolutní hodnotě s použitím konečnosti matice Σ .

Posloupnost $\{\mathbf{X}_t\}$ je tedy centrovaná slabě stacionární náhodná posloupnost. \square

Věta 2.17: *Podmínka stacionarity*

Posloupnost $\text{ARMA}(p, q)$ daná rovnicí $\Phi(\mathcal{B})\mathbf{X}_t = \Theta(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t$ je stacionární, pokud kořeny polynomu $\det(\Phi(\mathcal{B}))$ leží vně jednotkového kruhu.

Důkaz:

Je potřeba dokázat, že $\Phi(\mathcal{B})\mathbf{X}_t = \Theta(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t$ lze přepsat do tvaru $\mathbf{X}_t = \Psi(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t$, kde řada $\{\Psi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$ je sčitatelná v absolutní hodnotě.

Protože s ohledem na poznámku 2.7 lze s $\Phi(\mathcal{B})$ formálně zacházet jako s maticí, je nejvhodnějším kandidátem na $\Psi(\mathcal{B})$ jistě $\Phi(\mathcal{B})^{-1}\Theta(\mathcal{B})$ (pokud $\Phi(\mathcal{B})^{-1}$ existuje), pak totiž

$$\Phi(\mathcal{B})\mathbf{X}_t = \Phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B})^{-1}\Theta(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t = \Theta(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t.$$

Předpokládejme nejprve, že inverzní matice k $\Phi(\mathcal{B})$ existuje, pak podle známého vztahu pro inverzní matici je

$$\Psi(\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{B})^{-1}\Theta(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det(\Phi(\mathcal{B}))}\Phi^+(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}),$$

kde $\Phi^+(\mathcal{B})$ značí matici adjungovanou k matici $\Phi(\mathcal{B})$.

Prvky matice $\Phi^+(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B})$ jsou konečné polynomy v B (tj. tvaru $\sum_{l=0}^L a_{ij,l}B^l$, kde $L \in \mathbb{N}$), neboť prvky matice $\Phi^+(\mathcal{B})$ jsou determinanty podmatic matice $\Phi(\mathcal{B})$ a matice $\Phi(\mathcal{B})$ a $\Theta(\mathcal{B})$ jsou podle poznámky 2.7 matice konečných polynomů v B . Prvky matice $\Psi(\mathcal{B})$ jsou tedy tvaru

$$\psi_{ij}(B) = \frac{1}{\det(\Phi(\mathcal{B}))} \sum_{l=0}^L a_{ij,l}B^l$$

V [4] na str. 60 je dokázáno, že leží-li kořeny nějakého polynomu $p(B)$ vně jednotkového kruhu, lze $\frac{1}{p(B)}$ psát ve tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} b_k B^k$, kde navíc $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$. Odtud plyne existence posloupnosti $\{b_k, k \in \mathbb{Z}\}$, kde $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$, takové, že

$$\frac{1}{\det(\Phi(\mathcal{B}))} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k B^k$$

a následně také existence $\Phi(\mathcal{B})^{-1}$.

Je tedy

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k B^k \sum_{l=0}^L a_{ij,l} B^l = \\ &= \sum_{s=0}^{L-1} \left(\sum_{l=0}^s a_{ij,l} b_{s-l} \right) B^s + \sum_{s=L}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^L a_{ij,l} b_{s-l} \right) B^s. \end{aligned}$$

Přitom

$$\sum_{s=L}^{\infty} \left| \sum_{l=0}^L a_{ij,l} b_{s-l} \right| \leq \sum_{l=0}^L |a_{ij,l}| \left(\sum_{k=L-l}^{\infty} |b_k| \right) < \infty,$$

tudíž

$$\sum_{s=0}^{L-1} \left| \sum_{l=0}^s a_{ij,l} b_{s-l} \right| + \sum_{s=L}^{\infty} \left| \sum_{l=0}^L a_{ij,l} b_{s-l} \right| < \infty$$

Označíme-li $\psi_{ij,s} = \sum_{l=0}^{\min(s,L)} a_{ij,l} b_{s-l}$ prvky matice Ψ_s pro $s \in \mathbb{N}_0$, pak $\{\Psi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$ je sčitatelná v absolutní hodnotě a $\mathbf{X}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-s}$, tedy $\{\mathbf{X}_t\}$ je stacionární. \square

Definice 2.18: *Invertibilita*

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je posloupnost ARMA(p, q).

Posloupnost $\{\mathbf{X}_t\}$ se nazývá *invertibilní*, jestliže existuje posloupnost matic $\{\pi_s, s \in \mathbb{N}_0\}$ sčitatelná v absolutní hodnotě a taková, že $\mathbf{Y}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \pi_s \mathbf{X}_{t-s}$.

V případě invertibility již neplatí analogie s tvrzením 2.14, že pro libovolnou posloupnost $\{\Pi_s\}$ a libovolnou náhodnou posloupnost $\{\mathbf{X}_t\}$ existuje limita podle kvadratického středu posloupnosti $\sum_{s=0}^p \pi_s \mathbf{X}_{t-s}$ pro $p \rightarrow \infty$. Proto je potřeba v podmínce invertibility přidat dodatečný předpoklad o konečnosti kovarianční maticové funkce posloupnosti $\{\mathbf{X}_t\}$.

Věta 2.19: *Podmínka invertibility*

Posloupnost ARMA(p, q) s konečnou kovarianční maticovou funkcí daná rovnicí $\Phi(\mathcal{B})\mathbf{X}_t = \Theta(\mathcal{B})\mathbf{Y}_t$ je invertibilní, pokud kořeny polynomu $\det(\Theta(\mathcal{B}))$ leží vně jednotkového kruhu.

Důkaz:

Posloupnost $\{\Pi_s\}$ sčitatelná v absolutní hodnotě se sestrojí analogickým postupem jako posloupnost $\{\Psi_s\}$ v důkazu podmínky stacionarity.

K dokončení důkazu je zapotřebí ukázat existenci limity podle kvadratického středu posloupnosti $\sum_{s=0}^p \Pi_s \mathbf{X}_{t-s}$ pro $p \rightarrow \infty$. Vzhledem k analogii s důkazem tvrzení 2.14 stačí vyšetřovat pro libovolné $t \in T$ diagonální prvky matice

$$\Lambda^{n_1 n_2}(t) = \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \Psi_s \Gamma(t-s, t-l) \Psi_l^T,$$

ty mají (při zřejmém označení prvků matic Π a Γ) tvar

$$\lambda^{n_1 n_2}(t) = \sum_{s=n_1+1}^{n_2} \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \pi_{ik,s} \gamma_{kk'}(t-s, t-l) \pi_{ik',l} \right).$$

Vzhledem ke konečnosti kovarianční maticové funkce Γ je

$$|\lambda^{n_1 n_2}(t)| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \max_{s,l} (\gamma_{kk'}(t-s, t-l)) \left(\sum_{s=n_1+1}^{n_2} |\pi_{ik,s}| \right) \left(\sum_{l=n_1+1}^{n_2} |\pi_{ik',l}| \right),$$

pak díky sčitatelnosti posloupnosti $\{\Pi_s\}$ v absolutní hodnotě platí $\lambda^{n_1 n_2}(t) \rightarrow 0$ pro $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ a posloupnost $\sum_{s=0}^p \Pi_s \mathbf{X}_{t-s}$ je cauchyovská a tedy konvergentní podle kvadratického středu. \square

Poznámka 2.20:

Zatímco v jednorozměrném případě je při zápisu stacionární posloupnosti ARMA ve tvaru $X_t = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s Y_{t-s}$ součet na pravé straně vždy součtem nekonečně mnoha členů (takovou posloupnost bychom mohli značit MA(∞)) a stejně tak invertibilní posloupnost ARMA lze zapsat jedině jako AR(∞), v mnohorozměrném případě existují posloupnosti, které lze současně zapsat jako posloupnost AR(p) a současně jako MA(q) pro konečná p i q , podrobnější vysvětlení lze nalézt v [5] na str. 347-348.

Stacionarizace časové řady

Podle věty 2.16 se stacionární ARMA posloupnost vyznačuje tím, že její střední hodnota je nulová a její kovarianční maticová funkce se nemění v čase. Pokud analyzovaná časová řada vykazuje buď nenulovou střední hodnotu, nebo nekonstantní kovarianční maticovou funkci, využívají se ke stacionarizaci takové řady metody analogické metodám používaným v jednorozměrném případě, mnohorozměrnou časovou řadu je totiž možno transformovat po složkách. Postupy transformace jsou uvedeny v [1] na str. 144-148. Zde jen ve zkratce uvedme, že typickou transformací odstraňující nestacionaritu v kovarianční maticové funkci je přechod od původní řady k řadě jejích logaritmů a typickou transformací odstraňující nestacionaritu ve střední hodnotě je přechod k řadě diferencí.

Kapitola 3

Identifikace ARMA modelu

Stěžejní součástí použití ARMA modelů na pozorovanou časovou řadu je identifikace modelu. Na základě pozorovaných dat je potřeba určit řád modelu, který budeme používat, a odhadnout parametry modelu. Poznamenejme, že velký důraz bývá kladen na to, aby řád modelu nebyl zbytečně vysoký a nezvyšoval tak výpočtovou náročnost odhadu parametrů i konstrukce předpovědí.

Ještě před vlastní identifikací modelu by měla být pozorovaná časová řada transformována na řadu stacionární a centrovanou, jak je popsáno na konci kapitoly 2. Po skončení celého dále popsaného postupu včetně konstrukce předpovědí se inverzní transformací přejde k původní řadě.

Úmluva 3.1:

Dále budeme, jak bývá zvykem, pojmem časová řada rozumět řadu pozorovaných hodnot, přičemž hodnotu v čase t budeme značit \mathbf{x}_t . Pro teoretický popis budeme i nadále používat pojem náhodná posloupnost a příslušné náhodné vektory značit \mathbf{X}_t .

Složky těchto jednotlivých vektorů budeme značit $x_{i,t}$, resp. $X_{i,t}$ pro $i = 1, 2, \dots, m$.

Rozsah výběru \mathbf{x}_t budeme označovat n , tzn. předpokládáme, že známe \mathbf{x}_t pro $t = 1, 2, \dots, n$.

3.1 Určení řádu modelu

Určení řádů p a q modelu ARMA(p, q) je založeno na zkoumání výběrové korelační maticové funkce, výběrové parciální autoregresní maticové funkce a výběrové parciální korelační maticové funkce. Obvykle stačí použít jen několik prvních hodnot těchto funkcí, například 10 až 20, přitom by se jich nemělo používat více než $\frac{n}{4}$. I tak je však potřeba počítat s tím, že pracujeme pouze s odhady příslušných charakteristik, které mohou být zkreslené, a netrvat proto striktně na výsledcích dále popsaných statistických testů. V případě nejasné volby mezi několika modely je vhodné pokračovat se všemi modely a pro ten správný se rozhodnout až ve fázi odhadu parametrů nebo ve fázi verifikace modelu.

3.1.1 Kovarianční a korelační maticová funkce

Kovarianční maticová funkce je vhodným nástrojem pro určení řádu q , chceme-li popsat pozorovanou časovou řadu modelem MA(q).

Věta 3.2:

Kovarianční maticová funkce $\Gamma(k)$ posloupnosti MA(q) je nulová pro všechna $|k| > q$.

Důkaz:

Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je podle definic 1.4 a 2.5

$$\begin{aligned}\Gamma(k) &= E[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t+k}^T] = E\left[\left(\sum_{s=0}^q \Theta_s \mathbf{Y}_{t-s}\right) \left(\sum_{l=0}^q \Theta_l \mathbf{Y}_{t+k-l}\right)^T\right] = \\ &= E\left[\left(\sum_{s=0}^q \Theta_s \mathbf{Y}_{t-s}\right) \left(\sum_{l=k}^{q+k} \mathbf{Y}_{t-l}^T \Theta_{l-k}^T\right)\right] = \sum_{s=0}^q \sum_{l=k}^{q+k} \Theta_s E[\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T] \Theta_{l-k}^T.\end{aligned}$$

Protože $E[\mathbf{Y}_{t-s} \mathbf{Y}_{t-l}^T] = 0$ je nulová matice pro $s \neq l$, je $\Gamma(k) = 0$ pro $k > q$. Uvážíme-li, že $\Gamma(-k) = \Gamma(k)^T$, pak $\Gamma(k) = 0$ pro $|k| > q$. \square

Řád q se tedy volí takový, jaké je poslední k , pro které je ještě kovarianční matice $\Gamma(k)$ statisticky významně nenulová.

Poznámka 3.3:

Výpočet uvedený v důkazu předchozí věty ukazuje tvar kovarianční maticové funkce pro posloupnost MA(q), ten je konkrétně

$$\Gamma(k) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{q-k} \Theta_{s+k} \Sigma \Theta_s^T, & 0 \leq k \leq q, \\ \Gamma(-k)^T, & -q \leq k \leq 0, \\ 0, & |k| > q. \end{cases}$$

Pro posloupnosti AR a ARMA je výpočet kovarianční maticové funkce složitější. Uvažujme stacionární posloupnost ARMA(p, q) danou rovnicí

$$\mathbf{X}_t + \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{X}_{t-2} + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} = \mathbf{Y}_t + \Theta_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Theta_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \Theta_q \mathbf{Y}_{t-q}.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici postupně pro $k = 1, 2, \dots$ zprava vektorem \mathbf{X}_{t-k}^T , pak rovnost středních hodnot transpozic obou stran dává soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\Gamma(0) + \Gamma(1)^T \Phi_1^T + \dots + \Gamma(p)^T \Phi_p^T &= \sum_{s=0}^q E[\mathbf{X}_t \mathbf{Y}_{t-s}^T] \Theta_s^T, \\ \Gamma(1) + \Gamma(0) \Phi_1^T + \dots + \Gamma(p-1)^T \Phi_p^T &= \sum_{s=0}^q E[\mathbf{X}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-s}^T] \Theta_s^T, \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\Gamma(p) + \Gamma(p-1)\Phi_1^T + \dots + \Gamma(0)\Phi_p^T = \sum_{s=0}^q E[\mathbf{X}_{t-p}\mathbf{Y}_{t-s}^T]\Theta_s^T,$$

$$\Gamma(k) + \Gamma(k-1)\Phi_1^T + \dots + \Gamma(k-p)\Phi_p^T = \sum_{s=0}^q E[\mathbf{X}_{t-k}\mathbf{Y}_{t-s}^T]\Theta_s^T \text{ pro } k > p.$$

Přitom výrazy na pravé straně lze rovněž vyčíslit. Předně je pravá strana nulová pro $k > q$, neboť \mathbf{X}_{t-k} a \mathbf{Y}_{t-s} jsou nekorelované pro $k > s$. Dále lze pro $k \leq q$ vypočítat $\sum_{s=0}^q E[\mathbf{X}_{t-k}\mathbf{Y}_{t-s}^T]\Theta_s^T$ podobným postupem, jakým se počítá kovarianční maticová funkce posloupnosti MA, když se dosadí $\mathbf{X}_{t-k} = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \mathbf{Y}_{t-k-s}$ ze stacionarity procesu $\{\mathbf{X}_{t-k}\}$, konkrétně vychází $\sum_{s=0}^q E[\mathbf{X}_{t-k}\mathbf{Y}_{t-s}^T]\Theta_s^T = \sum_{s=k}^q \Psi_{s-k}\Sigma\Theta_s^T$. Soustava rovnic s takto dosazenými pravými stranami se nazývá *Yule-Walkerova soustava rovnic*.

Pro testování hypotéz o nulovosti kovarianční matice je vhodné definovat ještě korelační a výběrovou korelační matici.

Definice 3.4: *Korelační matice*

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost s kovarianční maticovou funkcí $\Gamma(k) = [\gamma_{ij}(k)]_{i,j=1,2,\dots,m}$. Označme Δ diagonální matici

$$\Delta = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}(0)}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma_{22}(0)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\gamma_{mm}(0)}}\right\}.$$

Pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ definujeme *korelační matici* $\rho(k)$ jako

$$\rho(k) = \Delta\Gamma(k)\Delta.$$

Poznámka 3.5:

Matice $\rho(k)$ má na místě i, j prvek

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}},$$

což je korelační koeficient i -té složky vektoru \mathbf{X}_t a j -té složky vektoru \mathbf{X}_{t+k} . Odtud je mimo jiné patrné, že korelační matice je nulová, právě když je nulová kovarianční matice.

Definice 3.6: *Výběrová korelační matice*

Nechť časová řada $\{\mathbf{x}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je realizací náhodné posloupnosti $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$.

Pak se matice $\hat{\rho}(k)$ s prvky

$$\hat{\rho}_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_{t,i} - \bar{x}_i)(x_{t+k,j} - \bar{x}_j)}{\left(\sum_{t=1}^n (x_{t,i} - \bar{x}_i)^2 \sum_{t=1}^n (x_{t,j} - \bar{x}_j)^2\right)^{1/2}}$$

nazývá *výběrová korelační matice*.

Úmluva 3.7:

Zde i v dalším textu bude $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{i,t}$, $i = 1, 2, \dots, m$ značit odhad střední hodnoty pro jednotlivé složky časové řady.

Věta 3.8: Asymptotické vlastnosti výběrové korelační matice

Pokud pro prvky korelační maticové funkce platí $\rho_{ij}(k) = 0$ pro $|k| > q$ pro nějaké q , pak pro $k > q$ a pro velká n má $\hat{\rho}_{ij}(k)$ asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma_{ij}(k)^2 = \frac{1}{n-k} (1 + 2 \sum_{s=1}^k \rho_{ii}(s) \rho_{jj}(s))$. Navíc pro $k > q$ má statistika

$$R(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\hat{\rho}_{ij}(k)}{\sigma_{ij}(k)} \right)^2$$

asymptoticky chí-kvadrát rozdělení o m^2 stupních volnosti.

Důkaz:

Rozptyl $\hat{\rho}_{ij}(k)$ je vypočítán v [5] na str. 350 jako $\frac{1}{n-k} (1 + 2 \sum_{s=1}^q \rho_{ii}(s) \rho_{jj}(s))$, tento výraz lze za uvedeného předpokladu, že $\rho_{ij}(k) = 0$ pro $|k| > q$, nahradit výrazem $\frac{1}{n-k} (1 + 2 \sum_{s=1}^k \rho_{ii}(s) \rho_{jj}(s))$. Asymptotická normalita je dokázána v [2] na str. 228.

Rozdělení statistiky $R(k)$ pak plyne přímo z definice chí-kvadrát rozdělení. \square

Test nulovosti prvků korelační matice

Asymptotického rozdělení prvků výběrové korelační matice $\hat{\rho}_{ij}(k)$ z věty 3.8 lze využít k testování hypotézy o nulovosti jednotlivých korelačních koeficientů. Testujme nulovou hypotézu, že $\rho_{ij}(k) = 0$ pro $|k| > q$ pro zvolené q (tzn. zkoumaná časová řada je posloupnost MA řádu q), proti alternativní hypotéze $\rho_{ij}(k) \neq 0$ pro nějaké $|k| > q$. Pak vzhledem k asymptoticky normálnímu rozdělení $\hat{\rho}_{ij}(k)$ zamítáme na hladině α nulovou hypotézu ve prospěch alternativní, pokud

$$\frac{|\hat{\rho}_{ij}(k)|}{\hat{\sigma}_{ij}(k)} > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ pro některé } k,$$

kde u_β značí β -kvantil standardního normálního rozdělení a

$$\hat{\sigma}_{ij}(k) = \frac{1}{\sqrt{n-k}} \left(1 + 2 \sum_{s=1}^k \hat{\rho}_{ii}(s) \hat{\rho}_{jj}(s) \right)^{1/2}.$$

Vzhledem k tomu, že $\rho_{ij}(k) = \rho_{ji}(-k)$ pro $k \neq 0$, stačí $\hat{\rho}_{ij}(k)$ uvažovat pouze pro kladná k .

V případě, že za hladinu α volíme často používaných 5%, je $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \doteq 2$ a testování hypotézy o nulovosti prvků korelační matice se redukuje na porovnání absolutní hodnoty odhadu $\hat{\rho}_{ij}(k)$ s dvojnásobkem odhadnuté směrodatné odchylky $\hat{\sigma}_{ij}(k)$.

Pro zjednodušení zápisu výsledku testu se v literatuře ustálila následující symbolika: Prvek $\hat{\rho}_{ij}(k)$ se v matici $\hat{\rho}(k)$ nahradí
 symbolem $+$ pokud $\hat{\rho}_{ij}(k) > 2 \hat{\sigma}_{ij}(k)$,
 symbolem $-$ pokud $\hat{\rho}_{ij}(k) < -2 \hat{\sigma}_{ij}(k)$ a
 symbolem \cdot jinak.

Praktický postup je tedy takový, že se pro jednotlivá k porovná hodnota $\hat{\rho}_{ij}(k)$ se součinem $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{ij}(k)$, pokud existuje q takové, že pro $k > q$ již $\hat{\rho}_{ij}(k)$ nepřesahují $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{ij}(k)$, zkoumaná časová řada je pravděpodobně posloupnost MA(q). Obvykle se doporučuje hledat takto pouze velmi malá q (například nejvýše 2), pokud je nalezené q příliš velké nebo se žádné vhodné nepodaří najít, zkoumaná časová řada pravděpodobně není posloupnost MA, ale spíše posloupnost AR nebo ARMA.

Na tomto místě dále rozvedeme myšlenku z úvodu kapitoly, že je potřeba k tomuto testu přistupovat s jistou rezervou způsobenou možným zkreslením odhadů $\hat{\rho}_{ij}(k)$. V případě, že bychom na základě tohoto testu měli pro nějakou malou skupinu i, j a k nulovost $\rho_{ij}(k)$ zamítnat, prozkoumáme ještě, jak významně výběrové korelační koeficienty překročily dvojnásobek příslušné odhadnuté směrodatné odchylky, pokud se překročení nejeví příliš významné, je možné připustit, že nulovou hypotézu nezamítneme.

Test nulovosti korelační matice

S využitím chí-kvadrát rozdělení statistiky $R(k)$ z věty 3.8 lze testovat také přímo nulovost celé korelační matice. Její nulovost zamítáme, pokud

$$R(k) > \chi_{m^2}^2(1 - \alpha),$$

kde $\chi_{m^2}^2(\beta)$ značí β -kvantil chí-kvadrát rozdělení o m^2 stupních volnosti. Poznamenejme, že v $R(k)$ jsou v tomto případě místo hodnot $\sigma_{ij}(k)$ dosazeny jejich odhady $\hat{\sigma}_{ij}(k)$.

3.1.2 Parciální autoregresní maticová funkce

Parciální autoregresní matice je v jistém smyslu analogickým pojmem k parciálnímu autokorelačnímu koeficientu, který se v případě jednorozměrných časových řad často používá k volbě řádu autoregrese p . Jak je dokázáno například v [5] na str. 14-16, parciální autokorelační koeficient řádu k je roven poslednímu regresnímu parametru $\phi_{k,k}$ v případě lineárního regresního modelu

$$X_{t+k} = \phi_{k,1}X_{t+k-1} + \phi_{k,2}X_{t+k-2} + \dots + \phi_{k,k}X_t + e_{k,t+k}.$$

Definice 3.9: *Parciální autoregresní maticová funkce*

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost, uvažujme mnohorozměrný lineární regresní model

$$\mathbf{X}_{t+k} = \Phi_{k,1}\mathbf{X}_{t+k-1} + \Phi_{k,2}\mathbf{X}_{t+k-2} + \dots + \Phi_{k,k}\mathbf{X}_t + \mathbf{e}_{k,t+k},$$

kde \mathbf{X}_{t+k} je vysvětlovaná, $\mathbf{X}_{t+k-1}, \mathbf{X}_{t+k-2}, \dots, \mathbf{X}_t$ jsou vysvětlující proměnné a $\mathbf{e}_{k,t+k}$ je reziduální vektor.

Pak se funkce $\zeta(k) = \Phi_{k,k}$ definovaná pro $k = 1, 2, \dots$ nazývá *parciální autoregresní maticová funkce* náhodné posloupnosti $\{\mathbf{X}_t\}$.

Poznámka 3.10:

V [5] na str. 351-352 je odvozen způsob výpočtu parciální autoregresní maticové funkce pro náhodnou posloupnost s kovarianční maticovou funkcí $\Gamma(s)$. Zavedme nejprve následující označení blokových matic:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1)^T & \dots & \Gamma(k-2)^T \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma(k-3)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(k-2) & \Gamma(k-3) & \dots & \Gamma(0) \end{pmatrix},$$

$$b(k) = \begin{pmatrix} \Gamma(k-1)^T \\ \Gamma(k-2)^T \\ \vdots \\ \Gamma(1)^T \end{pmatrix}, \quad c(k) = \begin{pmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(k-1) \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\zeta(k) = \begin{cases} \Gamma(1)^T(\Gamma(0))^{-1}, & k = 1, \\ \left(\Gamma(k)^T - c(k)^T(A(k))^{-1}b(k) \right) \left(\Gamma(0) - b(k)^T(A(k))^{-1}b(k) \right)^{-1}, & k > 1. \end{cases}$$

Věta 3.11:

Parciální autoregresní maticová funkce $\zeta(k)$ posloupnosti $\text{AR}(p)$ je nulová pro $k > p$.

Navíc platí $\zeta(p) = -\Phi_p$, uvažujeme-li Φ_p z definice 2.8.

Důkaz:

Předpokládejme, že $\{\mathbf{X}_t\}$ je posloupnost $\text{AR}(p)$, pak se mnohorozměrný lineární regresní model uvedený v definici 3.9

$$\mathbf{X}_{t+k} = \Phi_{k,1}\mathbf{X}_{t+k-1} + \Phi_{k,2}\mathbf{X}_{t+k-2} + \dots + \Phi_{k,k}\mathbf{X}_t + \mathbf{e}_{k,t+k}$$

pro $k = p$ a po přeznačení shoduje s rovností definující posloupnost $\text{AR}(p)$ v definici 2.8

$$\mathbf{X}_t = -\Phi_1\mathbf{X}_{t-1} - \Phi_2\mathbf{X}_{t-2} - \dots - \Phi_p\mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{Y}_t,$$

proto je $\zeta(p) = -\Phi_p$.

Podobnou úvahou vychází, že pro $k > p$ je $\zeta(k) = -\Phi_k = 0$. □

Definice 3.12: *Výběrová parciální autoregresní matice*

Nechť časová řada $\{\mathbf{x}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je realizací náhodné posloupnosti $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$.

Pak se matice $\hat{\zeta}(k)$ vypočtená podle poznámky 3.10, kde se místo $\Gamma(s)$ pro $s = 0, 1, \dots, k - 1$ dosadí matice $\hat{\Gamma}(s)$ s prvky

$$\hat{\gamma}_{ij}(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-s} (x_{t,i} - \bar{x}_i)(x_{t+s,j} - \bar{x}_j),$$

nazývá *výběrová parciální autoregresní matice*.

Pokud regresní model uvedený v definici 3.9 pro nějaké k aplikujeme na pozorovanou časovou řadu, jsou jeho výstupem nejen odhady $\hat{\Phi}_{k,1}, \hat{\Phi}_{k,2}, \dots, \hat{\Phi}_{k,k}$, ale také odhad rozptylové matice bílého šumu

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-k} S(k), \text{ kde}$$

$$S(k) = \sum_{t=k+1}^n (\mathbf{x}_t - \hat{\Phi}_{k,1}\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\Phi}_{k,2}\mathbf{x}_{t-2} - \dots - \hat{\Phi}_{k,k}\mathbf{x}_{t-k}) (\mathbf{x}_t - \hat{\Phi}_{k,1}\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\Phi}_{k,2}\mathbf{x}_{t-2} - \dots - \hat{\Phi}_{k,k}\mathbf{x}_{t-k})^T.$$

Statistika $S(k)$ se použije v následující větě.

Věta 3.13: *Asymptotické vlastnosti výběrové parciální autoregresní matice*

Nechť časová řada $\{\mathbf{x}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je realizací posloupnosti $\text{AR}(p)$, pak pro $k > p$ a pro velká n má statistika

$$M(k) = -\left(n - k - \frac{1}{2} - km\right) \log \frac{\det(S(k))}{\det(S(k-1))}$$

asymptoticky chí-kvadrát rozdělení o m^2 stupních volnosti.

Důkaz:

Věta je odvozena v [5] na str. 353-355. □

Test nulovosti parciální autoregresní matice

Testujme nulovou hypotézu, že $\zeta(k) = 0$ pro zvolené k (tzn. zkoumaná časová řada je posloupnost AR řádu nejvýše $k - 1$) proti alternativní hypotéze $\zeta(k) \neq 0$. Pak s ohledem na předchozí větu zamítáme nulovou hypotézu na hladině α ve prospěch alternativní, pokud

$$M(k) > \chi_{m^2}^2(1 - \alpha).$$

Uvedená testová statistika se tedy vypočte například pro $k = 1, 2, \dots, 10$ (nebo například až do 20) a porovná se s příslušným kvantilem chí-kvadrát rozdělení, pokud existuje takové p , že pro $k \leq p$ zamítáme nulovost $\zeta(k)$ a pro $k > p$ ji nezamítáme, zkoumaná časová řada je pravděpodobně posloupnost $\text{AR}(p)$. Stejně jako v případě testu nulovosti korelačních matic je vhodné volit poměrně malá p , jinak se pravděpodobně nejedná o posloupnost AR .

Opět připomeňme, že popsany postup není potřeba dodržovat zcela striktně, je vhodné kromě samotného výsledku testu zkoumat také velikost překročení příslušného kvantilu pro jednotlivé hodnoty $\zeta(k)$.

3.1.3 Parciální korelační maticová funkce

Parciální korelační maticová funkce je opět mnohorozměrnou analogií parciálního auto-korelačního koeficientu, tentokrát v tom smyslu, že parciální korelační maticová funkce v bodě k je korelační maticí mezi \mathbf{X}_t a \mathbf{X}_{t+k} po vyloučení lineární závislosti na vektorech $\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{X}_{t+2}, \dots, \mathbf{X}_{t+k-1}$.

Definice 3.14: *Parciální korelační maticová funkce*

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost, mějme $t \in \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}$ a zaveďme vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{k-1,t+k} &= \mathbf{X}_{t+k} - \alpha_{k-1,1}\mathbf{X}_{t+k-1} - \alpha_{k-1,2}\mathbf{X}_{t+k-2} - \dots - \alpha_{k-1,k-1}\mathbf{X}_{t+1} \text{ a} \\ \mathbf{v}_{k-1,t} &= \mathbf{X}_t - \beta_{k-1,1}\mathbf{X}_{t+1} - \beta_{k-1,2}\mathbf{X}_{t+2} - \dots - \beta_{k-1,k-1}\mathbf{X}_{t+k-1},\end{aligned}$$

kde $\alpha_{k-1,s}, \beta_{k-1,s}$ pro $s = 1, 2, \dots, k-1$ jsou matice minimalizující $E(\mathbf{u}_{k-1,t+k})^2$, resp. $E(\mathbf{v}_{k-1,t})^2$ a pro které označíme

$$\begin{aligned}V_{\mathbf{u}}(k) &= \text{var}(\mathbf{u}_{k-1,t+k}), \\ V_{\mathbf{v}}(k) &= \text{var}(\mathbf{v}_{k-1,t}) \text{ a} \\ V_{\mathbf{v}\mathbf{u}}(k) &= \text{cov}(\mathbf{u}_{k-1,t+k}, \mathbf{v}_{k-1,t}).\end{aligned}$$

Označme dále $D_{\mathbf{v}}(k)$ diagonální matici, která má na diagonále odmocniny příslušných diagonálních prvků matice $V_{\mathbf{v}}(k)$, a $D_{\mathbf{u}}(k)$ diagonální matici analogicky odvozenou z $V_{\mathbf{u}}(k)$.

Pak se funkce $\xi(k) = (D_{\mathbf{v}}(k))^{-1}V_{\mathbf{v}\mathbf{u}}(k)(D_{\mathbf{u}}(k))^{-1}$ definovaná pro $k = 1, 2, \dots$ nazývá *parciální korelační maticová funkce* náhodné posloupnosti $\{\mathbf{X}_t\}$.

Poznámka 3.15:

Matice $\xi(k)$ má na místě i, j korelační koeficient i -té složky vektoru $\mathbf{u}_{k-1,t+k}$ a j -té složky vektoru $\mathbf{v}_{k-1,t}$.

Poznámka 3.16:

V [5] na str. 359-361 je odvozen rekurentní algoritmus pro výpočet parciální kovarianční maticové funkce pro náhodnou posloupnost s kovarianční maticovou funkcí $\Gamma(s)$. Pro $k = 1$ je

$$\begin{aligned}V_{\mathbf{u}}(1) &= V_{\mathbf{v}}(1) = \Gamma(0), \\ V_{\mathbf{v}\mathbf{u}}(1) &= \Gamma(1), \\ \alpha_{1,1} &= \Gamma(1)^T(\Gamma(0))^{-1} \text{ a} \\ \beta_{1,1} &= \Gamma(1)(\Gamma(0))^{-1}.\end{aligned}$$

Dále pro $k \geq 2$ a $s = 1, 2, \dots, k-1$

$$V_{\mathbf{u}}(k) = \Gamma(0) - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_{k-1,s}\Gamma(s),$$

$$\begin{aligned}
V_{\mathbf{v}}(k) &= \Gamma(0) - \sum_{s=1}^{k-1} \beta_{k-1,s} \Gamma(s)^T, \\
V_{\mathbf{vu}}(k) &= \Gamma(k) - \sum_{s=1}^{k-1} \Gamma(k-s) \alpha_{k-1,s}^T, \\
\alpha_{k,k} &= V_{\mathbf{vu}}(k)^T (V_{\mathbf{v}}(k))^{-1}, \\
\alpha_{k,s} &= \alpha_{k-1,s} - \alpha_{k,k} \beta_{k-1,k-s}, \\
\beta_{k,k} &= V_{\mathbf{vu}}(k) (V_{\mathbf{u}}(k))^{-1}, \\
\beta_{k,s} &= \beta_{k-1,s} - \beta_{k,k} \beta_{k-1,k-s}.
\end{aligned}$$

Nechť $D_{\mathbf{v}}(k)$ a $D_{\mathbf{u}}(k)$ jsou jako v definici 3.14.

Pak

$$\xi(k) = (D_{\mathbf{v}}(k))^{-1} V_{\mathbf{vu}}(k) (D_{\mathbf{u}}(k))^{-1}.$$

Tvrzení 3.17:

Nechť $\{\mathbf{X}_t\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost, $\zeta(k)$ její parciální autoregresní maticová funkce a $\xi(k)$ její parciální korelační maticová funkce.

Pak je $\zeta(k) = 0$ právě pro taková k , pro něž je $\xi(k) = 0$.

Důkaz:

Podrobně je důkaz proveden v [5] na str. 358-359, poznamenejme jen, že vztah pro $\zeta(k)$ uvedený v poznámce 3.10 lze přepsat do tvaru $\zeta(k) = V_{\mathbf{vu}}^T(k) (V_{\mathbf{v}}(k))^{-1}$, odkud již tvrzení snadno plyne. \square

S ohledem na toto tvrzení je tedy možné pro určení řádu autoregrese zvolit jeden ze dvou rovnocenných nástrojů - parciální autoregresní maticovou funkci, nebo parciální korelační maticovou funkci.

Věta 3.18:

Parciální korelační maticová funkce $\xi(k)$ posloupnosti $\text{AR}(p)$ je nulová pro $k > p$.

Důkaz:

Věta je přímým důsledkem věty 3.11 a tvrzení 3.17. \square

Definice 3.19: Výběrová parciální korelační matice

Nechť časová řada $\{\mathbf{x}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je realizací náhodné posloupnosti $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$.

Pak se matice $\hat{\xi}(k)$ vypočtená podle poznámky 3.16, kde se místo $\Gamma(s)$ pro $s = 0, 1, \dots, k$ dosadí matice $\hat{\Gamma}(s)$ s prvky

$$\hat{\gamma}_{ij}(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-s} (x_{t,i} - \bar{x}_i)(x_{t+s,j} - \bar{x}_j),$$

nazývá výběrová parciální korelační matice.

Věta 3.20: *Asymptotické vlastnosti výběrové parciální korelační matice*

Nechť časová řada $\{\mathbf{x}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je realizací posloupnosti $\text{AR}(p)$, pak pro $k > p$ a pro velká n má $\hat{\xi}_{ij}(k)$ asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\frac{1}{n-k}$.

Navíc pro $k > p$ má statistika

$$X(k) = (n - k) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\hat{\xi}_{ij}(k) \right)^2$$

asymptoticky chí-kvadrát rozdělení o m^2 stupních volnosti.

Důkaz:

Jak je zmíněno v [5] na str. 362, za uvedeného předpokladu, že se jedná o posloupnost $\text{AR}(p)$, jsou posloupnosti $\{\mathbf{u}_{k-1,t+k}, t = 1, 2, \dots, n-k\}$ a $\{\mathbf{v}_{k-1,t}, t = 1, 2, \dots, n-k\}$ vzájemně nekorelované posloupnosti téhož bílého šumu. Použitím věty 3.8 pro bílý šum s ohledem na poznámku 3.15, podle níž je $\hat{\xi}_{ij}(k)$ korelační maticí vektorů $\mathbf{u}_{k-1,t+k}$ a $\mathbf{v}_{k-1,t}$, vychází pro $\hat{\xi}_{ij}(k)$ asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\frac{1}{n-k}$.

Odtud již z definice chí-kvadrát rozdělení plyne rozdělení statistiky $X(k)$. \square

Test nulovosti prvků parciální korelační matice

Test nulovosti jednotlivých prvků parciální korelační matice využívá jejich asymptoticky normálního rozdělení podle věty 3.20. Postup je stejný jako v případě testu nulovosti prvků korelační maticové funkce, nulovost zamítáme na hladině α , pokud

$$|\hat{\xi}_{ij}(k)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-k}}, \text{ resp. } |\hat{\xi}_{ij}(k)| > \frac{2}{\sqrt{n-k}} \text{ pro } \alpha = 0,05.$$

Pro zápis je opět možno použít symboly $+$, $-$ a \cdot zmíněné v odstavci o testování nulovosti prvků korelační matice.

Test nulovosti parciální korelační matice

Test nulovosti celé parciální korelační matice je založen na asymptotickém rozdělení statistiky $X(k)$ z věty 3.20, nulovost zamítáme na hladině α , pokud

$$X(k) > \chi_{m^2}^2(1 - \alpha).$$

3.1.4 Shrnutí volby řádu modelu

Přestože výpočet výběrové korelační maticové funkce a výběrové parciální autoregresní nebo parciální korelační maticové funkce je k odhadu řádu příslušné posloupnosti nezbytný, univerzální návod k volbě řádů p a q obvykle nedává. Zřejmým nedostatkem výše popsaných metod je fakt, že nedávají návod, jak volit řády smíšeného modelu $\text{ARMA}(p,q)$. Navíc i v případě, že se podaří zvolit konkrétní model AR , MA nebo ARMA , jedná se do značné míry o subjektivní odhad, který by bylo vhodné nějakým exaktním způsobem zhodnotit nebo jej porovnat s jinou volbou. Proto nyní popíšeme možnosti volby řádů

smíšeného modelu a také statistická kritéria pro porovnávání jednotlivých zvolených modelů.

Volba řádů smíšeného modelu ARMA

Uvedeme zde dvě možnosti přístupu k volbě řádů smíšeného modelu:

První možností vhodnou zejména pro mnohorozměrné časové řady s méně složkami je zkoumat korelační strukturu po jednotlivých složkách a přistupovat k ní jako v případě jednorozměrných časových řad. Za tímto účelem zde zapíšeme rozhodovací schéma uvedené v [1] na str. 120.

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ρ_k	neexistuje k_0 , ρ_k ve tvaru U	$k_0 = q$	neexistuje k_0 , ρ_k ve tvaru U po prvních $q - p$ hodnotách
ξ_k	$k_0 = p$	neexistuje k_0 , ξ_k omezená křivkou tvaru U	neexistuje k_0 , ξ_k omezená křivkou tvaru U po prvních $p - q$ hodnotách

V tabulce je použit symbol U , který označuje křivku ve tvaru lineární kombinace klesajících geometrických posloupností a sinusoid s geometricky klesající amplitudou, dále k_0 je takové, že pro $|k| > k_0$ je $\rho_k = 0$, resp. $\xi_k = 0$.

Za p a q pro zkoumanou mnohorozměrnou řadu pak volíme maximální hodnoty z p a q nalezených pro jednotlivé složky.

Další možností v případě, že se nepodařilo zvolit žádný AR ani MA model, je zvolit pro zkoumanou řadu model ARMA(1,1) nebo (se snahou do jisté míry se přidržel rozhodovacích kritérií z předchozího odstavce) například model ARMA(2,1) nebo ARMA(1,2) a pro tento model provést odhad parametrů a verifikaci modelu. Pokud jsou zvolené řády příliš vysoké, projeví se tato skutečnost ve fázi odhadu parametrů, kde odhady některých parametrů budou statisticky nevýznamné. Naopak volba příliš nízkých řádů se odhalí ve fázi verifikace modelu.

Statistická rozhodovací kritéria

Dosud popsáný postup identifikace modelu má zjevnou slabinu v tom, že velmi závisí na subjektivním rozhodnutí a je tudíž stěží automatizovatelný, navíc obvykle pro danou časovou řadu nabízí více alternativ. Proto jsou požadována objektivní kritéria, která by byla bez jakéhokoliv subjektivního zásahu schopna model identifikovat a postup identifikace tak automatizovat. Taková kritéria zde uvedeme dvě, jejich nejčastější použití je v případě, kdy se na základě subjektivního posouzení časové řady nabízí několik alternativ. Ještě poznamenejme, že rozhodovací kritéria sice uvádíme pro zachování struktury textu na tomto místě, ale pro jejich výpočet je potřeba znát odhady některých parametrů modelu, které budou popsány dále.

Prvním a nejpoužívanějším kritériem je *Akaikeho informační kritérium* (Akaike's Information Criterion, AIC), které má tvar

$$AIC(p, q) = \log \left(\det(\hat{\Sigma}_{p,q}) \right) + \frac{2m^2(p + q)}{n},$$

kde p a q jsou řády modelu a $\hat{\Sigma}_{p,q}$ příslušný odhad rozptylové matice bílého šumu. Za optimální model by pak měl být považován ten, který AIC minimalizuje.

Z dalších kritérií zde jmenujme *Baysovské informační kritérium* (Bayesian Information Criterion, BIC), které má tvar

$$BIC(p, q) = \log \left(\det(\hat{\Sigma}_{p,q}) \right) + 2m^2(p + q) \frac{\log n}{n}$$

a se kterým se zachází stejně jako s AIC.

3.2 Odhad parametrů modelu

V případě, že jsou již určeny řády modelu, je možno přistoupit k odhadu parametrů $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ a Σ modelu ARMA(p, q).

3.2.1 Momentová metoda

Momentová metoda odhadu parametrů spočívá ve využití Yule-Walkerovy soustavy rovnic definované v poznámce 3.3. Pokud se do této soustavy místo $\Gamma(k)$ dosadí $\hat{\Gamma}(k)$, lze z ní vypočítat parametry $\Theta_1, \dots, \Theta_q, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ a Σ . Odhad momentovou metodou pro jednorozměrný případ je možno nalézt například v [4] na str. 139-140 a 143-145, v mnohorozměrném případě je postup analogický, problémem může být nutnost řešit větší množství maticových rovností.

3.2.2 Metoda maximální věrohodnosti

Konkrétně budeme pojednávat o podmíněné metodě maximální věrohodnosti. Odhad parametrů modelu metodou maximální věrohodnosti vyžaduje dodatečnou podmínku na rozdělení bílého šumu. Nejčastěji se předpokládá, že bílý šum $\{\mathbf{Y}_t\}$ má mnohorozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylovou maticí Σ .

Věrohodnostní funkce má formálně shodný tvar s hustotou sdruženého rozdělení $\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n\}$, kde jednotlivé vektory \mathbf{Y}_t pro $t = 1, 2, \dots, n$ jsou vzájemně nezávislé a mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylovou maticí Σ , vyčíslenou v bodech odpovídajících pozorované časové řadě $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$, tedy

$$\begin{aligned} L(\Theta, \Phi, \Sigma | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \prod_{t=1}^n \left((2\pi)^m \det(\Sigma) \right)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}_t^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}_t} = \\ &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} \det(\Sigma)^{-\frac{n}{2}} \prod_{t=1}^n e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}_t^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}_t}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \Phi_1 \mathbf{x}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{x}_{t-p} - \Theta_1 \mathbf{y}_{t-1} - \dots - \Theta_q \mathbf{y}_{t-q}$.

Protože známe pouze konečnou historii $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$, nejsme schopni spočítat \mathbf{y}_t pro $t = 1, 2, \dots, \max(p, q)$, přejdeme tedy (při označení $r = \max(p, q)$) k funkci

$$L_*(\Theta, \Phi, \Sigma | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = (2\pi)^{-\frac{m(n-r)}{2}} \det(\Sigma)^{-\frac{n-r}{2}} \prod_{t=r+1}^n e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}_t^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}_t}.$$

Maximálně věrohodné odhady parametrů jsou takové hodnoty Θ, Φ, Σ , které maximalizují věrohodnostní funkci $L_*(\Theta, \Phi, \Sigma | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Pro nalezení maxima funkce L_* je vhodné přejít k úloze hledání maxima jejího logaritmu

$$\log L_*(\Theta, \Phi, \Sigma | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = -\frac{m(n-r)}{2} \log(2\pi) - \frac{n-r}{2} \log(\det(\Sigma)) - \frac{1}{2} \sum_{t=r+1}^n \mathbf{y}_t^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}_t.$$

Tvrzení 3.21: *Asymptotické vlastnosti odhadů metodou maximální věrohodnosti*

Nechť časová řada $\{\mathbf{x}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je realizací stacionární a invertibilní posloupnosti ARMA(p, q), kde navíc příslušný bílý šum má normální rozdělení. Označme η sloupcový vektor všech jejích parametrů (tj. vektor všech prvků matic $\Theta_1, \dots, \Theta_q, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ a Σ) a $\hat{\eta}$ jeho odhad metodou maximální věrohodnosti.

Pak náhodná veličina $\sqrt{n}(\hat{\eta} - \eta)$ konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylovou maticí

$$\Sigma_{\hat{\eta}} = \left(-E \left[\frac{\partial^2 \log L_*(\eta | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \eta \partial \eta^T} \right] \right)^{-1}.$$

Důkaz:

Důkaz je uveden [5] str. 363. □

Test nulovosti parametrů

Za účelem snížení výpočtové náročnosti může být vhodné nahradit nulami ty parametry, které se jeví statisticky nevýznamné. Na základě tvrzení 3.21 zamítáme nulovost některého parametru označeného v tomto tvrzení η_i na hladině α , pokud

$$|\hat{\eta}_i| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma_{\hat{\eta}, ii}}, \text{ resp. } |\hat{\eta}_i| > 2\sqrt{\sigma_{\hat{\eta}, ii}} \text{ pro } \alpha = 0,05,$$

kde $\sigma_{\hat{\eta}, ii}$ značí i -tý diagonální prvek matice $\Sigma_{\hat{\eta}}$.

3.3 Verifikace modelu

Verifikace modelu spočívá v analýze reziduí

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{x}_t + \hat{\Phi}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \dots + \hat{\Phi}_p \mathbf{x}_{t-p} - \hat{\Theta}_1 \hat{\mathbf{y}}_{t-1} - \dots - \hat{\Theta}_q \hat{\mathbf{y}}_{t-q}.$$

Pokud je model zvolen správně, tzn. správně jsme určili řád modelu a odhady parametrů, rezidua $\hat{\mathbf{y}}_t$ budou realizacemi mnohorozměrného bílého šumu, tudíž by měla mít nulovou střední hodnotu a nebýt navzájem korelovaná. Pro upřesnění poznamenejme, že jednotlivé složky konkrétního vektoru $\hat{\mathbf{y}}_t$ korelované být mohou.

Protože máme k dispozici pozorování \mathbf{x}_t pouze pro $t = 1, 2, \dots, n$, je možno vypočítat rezidua $\hat{\mathbf{y}}_t$ pouze pro $t = r + 1, r + 2, \dots, n$, kde $r = \max(p, q)$ v závislosti na řádech zvoleného modelu.

Test nulovosti reziduí

Test nulovosti reziduí je založen na skutečnosti, že za nulové hypotézy jsou rezidua \hat{y}_t realizacemi bílého šumu, u kterého předpokládáme nulovou střední hodnotu, nekorelovanost pro různá t a pro který máme odhad $\hat{\Sigma}$ rozptylové matice Σ (jejich prvky označme $\hat{\sigma}_{ij}$, resp. σ_{ij}). Za předpokladu normality a použití centrální limitní věty (např. Lévyho-Lindebergovy centrální limitní věty uvedené v [3] na str. 101) to znamená, že výběrové průměry $\bar{y}_i = \frac{1}{n-r} \sum_{i=r+1}^n \hat{y}_{i,t}$, $i = 1, 2, \dots, m$ mají za nulové hypotézy asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\frac{\sigma_{ii}}{n-r}$.

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině α v případě, že pro nějaké i je

$$|\bar{y}_i| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{ii}}{n-r}}, \text{ resp. } |\bar{y}_i| > 2\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{ii}}{n-r}} \text{ pro } \alpha = 0,05.$$

Pokud navíc předpokládáme, že bílý šum má normální rozdělení (takový předpoklad například umožní pro odhad parametrů použít metodu maximální věrohodnosti), je možné testovat přímo nulovost jednotlivých reziduí, konkrétně nulovost $y_{i,t}$ zamítáme na hladině α , pokud

$$|\hat{y}_{i,t}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma_{ii}}, \text{ resp. } |\hat{y}_{i,t}| > 2\sqrt{\sigma_{ii}} \text{ pro } \alpha = 0,05.$$

Posouzení normality reziduí

Posouzení normality reziduí je do značné míry subjektivním procesem, během něhož je například možno posuzovat histogramy jednotlivých složek reziduí, jejich výběrovou šikmost či špičatost a porovnávat je s příslušnými ukazateli pro případ normálního rozdělení.

Test nekorelovanosti reziduí

K testu nekorelovanosti reziduí se použije výběrová korelační matice vypočtená pro řadu $\{\hat{y}_t\}$, neboť za nulové hypotézy jsou jednotlivá rezidua realizací bílého šumu, jehož korelační maticová funkce $\rho(k)$ je nulová pro $k \neq 0$. Z věty 3.8 použité na bílý šum pak plyne, že $\hat{\rho}_{ij}(k)$ mají asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\frac{1}{n-k}$.

Nulovost nějakého $\rho_{ij}(k)$ zamítáme na hladině α , pokud

$$|\hat{\rho}_{ij}(k)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-k}}, \text{ resp. } |\hat{\rho}_{ij}(k)| > \frac{2}{\sqrt{n-k}} \text{ pro } \alpha = 0,05.$$

I v tomto případě je možné tolerovat několik ojedinělých výjimek.

Kapitola 4

Konstrukce předpovědí

Pokud již máme dostatečně správně určeny řády ARMA modelu a odhadnuty jeho parametry, můžeme přikročit ke konstrukci předpovědí, která bývá zpravidla účelem celé analýzy časové řady.

Definice 4.1:

Předpověď hodnoty \mathbf{X}_{t+k} konstruovaná v čase t (tj. na základě hodnot $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots$) se nazývá *předpověď v čase t o k kroků dopředu* a značí se $\hat{\mathbf{X}}_{t+k}(t)$.

Předpověď $\hat{\mathbf{X}}_{t+k}(t)$ budeme konstruovat takovou, aby minimalizovala střední čtvercovou chybu $E(\hat{\mathbf{X}}_{t+k}(t) - \mathbf{X}_{t+k})^T(\hat{\mathbf{X}}_{t+k}(t) - \mathbf{X}_{t+k})$.

Věta 4.2:

Nechť $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{N}\}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost a $t, k \in \mathbb{N}$. Pak předpověď v čase t o k kroků dopředu, která minimalizuje střední kvadratickou chybu, je podmíněná střední hodnota $E[\mathbf{X}_{t+k} | \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots]$.

Důkaz:

Pro potřeby důkazu označme \mathcal{X}_t vektor všech složek vektorů $\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots$ a předpověď hledejme ve tvaru $\mathbf{g}(\mathcal{X}_t)$, kde $\mathbf{g}(\mathcal{X}_t)$ je m -rozměrná vektorová funkce se složkami $g_i(\mathcal{X}_t)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Pak je

$$E(\mathbf{g}(\mathcal{X}_t) - \mathbf{X}_{t+k})^T(\mathbf{g}(\mathcal{X}_t) - \mathbf{X}_{t+k}) = \sum_{i=1}^m E(g_i(\mathcal{X}_t) - X_{i,t+k})^2.$$

Tudíž je možno postupovat po složkách a pro $i = 1, 2, \dots, m$ platí

$$\begin{aligned} E(g_i(\mathcal{X}_t) - X_{i,t+k})^2 &= E(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k} | \mathcal{X}_t] + E[X_{i,t+k} | \mathcal{X}_t] - X_{i,t+k})^2 = \\ &= E(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k} | \mathcal{X}_t])^2 + E(E[X_{i,t+k} | \mathcal{X}_t] - X_{i,t+k})^2 + \\ &\quad + 2E[(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k} | \mathcal{X}_t])(E[X_{i,t+k} | \mathcal{X}_t] - X_{i,t+k})], \end{aligned}$$

přičemž pro poslední sčítanec platí

$$\begin{aligned}
& E\left[\left(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t]\right)\left(E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t] - X_{i,t+k}\right)\right] = \\
& = E\left[E\left[\left(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t]\right)\left(E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t] - X_{i,t+k}\right)\right]|\mathcal{X}_t\right] = \\
& = E\left[\left(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t]\right)\left(E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t] - E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t]\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned}
E\left(g_i(\mathcal{X}_t) - X_{i,t+k}\right)^2 & = E\left(g_i(\mathcal{X}_t) - E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t]\right)^2 + E\left(E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t] - X_{i,t+k}\right)^2 \geq \\
& \geq E\left(E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t] - X_{i,t+k}\right)^2
\end{aligned}$$

a rovnost nastává pro $g_i(\mathcal{X}_t) = E[X_{i,t+k}|\mathcal{X}_t]$.

Po opětovném sdružení do vektoru je $\mathbf{g}(\mathcal{X}_t) = E[\mathbf{X}_{t+k}|\mathcal{X}_t]$. \square

Úmluva 4.3:

Podmíněné střední hodnoty $E[\mathbf{X}_{t+k}|\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots]$ a $E[\mathbf{Y}_{t+k}|\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots]$ budeme pro zjednodušení značit $[\mathbf{X}_{t+k}]$ a $[\mathbf{Y}_{t+k}]$.

Uvažujme posloupnost ARMA tvaru

$$\mathbf{X}_{t+k} = \mathbf{Y}_{t+k} + \Theta_1 \mathbf{Y}_{t+k-1} + \dots + \Theta_q \mathbf{Y}_{t+k-q} - \Phi_1 \mathbf{X}_{t+k-1} - \dots - \Phi_p \mathbf{X}_{t+k-p},$$

pak lze psát

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}_{t+k}(t) & = [\mathbf{X}_{t+k}] = \\
& = [\mathbf{Y}_{t+k}] + \Theta_1 [\mathbf{Y}_{t+k-1}] + \dots + \Theta_q [\mathbf{Y}_{t+k-q}] - \Phi_1 [\mathbf{X}_{t+k-1}] - \dots - \Phi_p [\mathbf{X}_{t+k-p}].
\end{aligned}$$

Tento vztah již dává návod k výpočtu předpovědí, pokud dosadíme následující zřejmé rovnosti:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}_{t+j}] & = \hat{\mathbf{X}}_{t+j}(t) \quad \text{pro } j > 0, \\
[\mathbf{X}_{t+j}] & = \mathbf{X}_{t+j} \quad \text{pro } j \leq 0, \\
[\mathbf{Y}_{t+j}] & = 0 \quad \text{pro } j > 0 \text{ a} \\
[\mathbf{Y}_{t+j}] & = \mathbf{Y}_{t+j} = \mathbf{X}_{t+j} - \hat{\mathbf{X}}_{t+j}(t+j-1) \quad \text{pro } j \leq 0.
\end{aligned}$$

Konstrukce předpovědí

Nyní uveďme rekurentní algoritmus pro výpočet prvních k předpovědí na základě známého pozorování časové řady v rozsahu $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ (tj. v souladu s předchozím značením předpovědí $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}(n), \dots, \hat{\mathbf{x}}_{n+k}(n)$) založený na výše odvozených vztazích.

Vzhledem ke znalosti pouze hodnot $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ je nutné podmíněné střední hodnoty uvedené v úmluvě 4.3 mírně pozměnit na

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{t+k}] &= E[\mathbf{X}_{t+k} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1] \text{ a} \\ [\mathbf{Y}_{t+k}] &= E[\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1]. \end{aligned}$$

V tomto značení máme

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{t+j}] &= \hat{\mathbf{x}}_{t+j}(t) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \\ [\mathbf{X}_{t+j}] &= \mathbf{x}_{t+j} \quad \text{pro } j = -t + 1, -t + 2, \dots, 0, \\ [\mathbf{Y}_{t+j}] &= 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \text{ a} \\ [\mathbf{Y}_{t+j}] &= \mathbf{x}_{t+j} - \hat{\mathbf{x}}_{t+j}(t + j - 1) \quad \text{pro } j = -t + 1, -t + 2, \dots, 0. \end{aligned}$$

Dále je nutné si uvědomit, že například v případě symbolu $[\mathbf{X}_{t+k}]$ neplatí asociativita sčítání v indexu, proto je důležité věnovat náležitou pozornost psaní závorek, konkrétně budeme používat například $[\mathbf{X}_{(t+2)+3}] = E[\mathbf{X}_{t+5} | \mathbf{X}_{t+2}, \mathbf{X}_{t+1}, \dots, \mathbf{X}_1]$.

Pro zahájení rekurentního výpočtu je potřeba nejprve položit $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \dots = \mathbf{y}_r = 0$, kde $r = \max(p, q)$ a zkonstruovat předpovědi o jeden krok dopředu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{r+1}(r) &= [\mathbf{Y}_{r+1}] + \Theta_1[\mathbf{Y}_r] + \dots + \Theta_q[\mathbf{Y}_{r+1-q}] - \Phi_1[\mathbf{X}_r] - \dots - \Phi_p[\mathbf{X}_{r+1-p}] = \\ &= \mathbf{0} + \Theta_1\mathbf{y}_r + \dots + \Theta_q\mathbf{y}_{r+1-q} - \Phi_1\mathbf{x}_r - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{r+1-p} = \\ &= -\Phi_1\mathbf{x}_r - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{r+1-p}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{r+2}(r+1) &= [\mathbf{Y}_{(r+1)+1}] + \Theta_1[\mathbf{Y}_{(r+1)}] + \dots + \Theta_q[\mathbf{Y}_{(r+1)+1-q}] - \\ &\quad - \Phi_1[\mathbf{X}_{(r+1)}] - \dots - \Phi_p[\mathbf{X}_{(r+1)+1-p}] = \\ &= \mathbf{0} + \Theta_1\mathbf{y}_{r+1} + \dots + \Theta_q\mathbf{y}_{r+2-q} - \Phi_1\mathbf{x}_{r+1} - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{r+2-p} = \\ &= \Theta_1(\mathbf{x}_{r+1} - \hat{\mathbf{x}}_{r+1}(r)) - \Phi_1\mathbf{x}_{r+1} - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{r+2-p}, \\ &\quad \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{r+q+1}(r+q) &= [\mathbf{Y}_{(r+q)+1}] + \Theta_1[\mathbf{Y}_{(r+q)}] + \dots + \Theta_q[\mathbf{Y}_{(r+q)+1-q}] - \\ &\quad - \Phi_1[\mathbf{X}_{(r+q)}] - \dots - \Phi_p[\mathbf{X}_{(r+q)+1-p}] = \\ &= \mathbf{0} + \Theta_1\mathbf{y}_{r+q} + \dots + \Theta_q\mathbf{y}_{r+1} - \Phi_1\mathbf{x}_{r+q} - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{r+q+1-p} = \\ &= \Theta_1(\mathbf{x}_{r+q} - \hat{\mathbf{x}}_{r+q}(r+q-1)) + \dots + \Theta_q(\mathbf{x}_{r+1} - \hat{\mathbf{x}}_{r+1}(r)) - \\ &\quad - \Phi_1\mathbf{x}_{r+q} - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{r+q+1-p}, \\ &\quad \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1}(n) &= [\mathbf{Y}_{n+1}] + \Theta_1[\mathbf{Y}_n] + \dots + \Theta_q[\mathbf{Y}_{n+1-q}] - \\ &\quad - \Phi_1[\mathbf{X}_n] - \dots - \Phi_p[\mathbf{X}_{n+1-p}] = \\ &= \mathbf{0} + \Theta_1\mathbf{y}_n + \dots + \Theta_q\mathbf{y}_{n+1-q} - \Phi_1\mathbf{x}_n - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{n+1-p} = \\ &= \Theta_1(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n(n-1)) + \dots + \Theta_q(\mathbf{x}_{n+1-q} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1-q}(n-q)) - \\ &\quad - \Phi_1\mathbf{x}_n - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{n+1-p}. \end{aligned}$$

Uvedený výpočet lze provést při $n \geq r + q$, jiný případ však ani nemá smysl, neboť předpokládáme, že délka zkoumané řady n je řádově větší než volené řady modelu p a q . Dále se pokračuje výpočtem předpovědí o více kroků dopředu z času n , konkrétně

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{n+2}(n) &= [\mathbf{Y}_{n+2}] + \Theta_1[\mathbf{Y}_{n+1}] + \Theta_2[\mathbf{Y}_n] + \dots + \Theta_q[\mathbf{Y}_{n+2-q}] - \\
&\quad - \Phi_1[\mathbf{X}_{n+1}] - \Phi_2[\mathbf{X}_n] - \dots - \Phi_p[\mathbf{X}_{n+2-p}] = \\
&= \mathbf{0} + \Theta_1\mathbf{0} + \Theta_2\mathbf{y}_n + \dots + \Theta_q\mathbf{y}_{n+2-q} - \\
&\quad - \Phi_1\hat{\mathbf{x}}_{n+1}(n) - \Phi_2\mathbf{x}_n - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{n+2-p} = \\
&= \Theta_2(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n(n-1)) + \dots + \Theta_q(\mathbf{x}_{n+2-q} - \hat{\mathbf{x}}_{n+2-q}(n+1-q)) - \\
&\quad - \Phi_1\hat{\mathbf{x}}_{n+1}(n) - \Phi_2\mathbf{x}_n - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{n+2-p}, \\
\hat{\mathbf{x}}_{n+3}(n) &= [\mathbf{Y}_{n+3}] + \Theta_1[\mathbf{Y}_{n+2}] + \Theta_2[\mathbf{Y}_{n+1}] + \Theta_3[\mathbf{Y}_n] + \dots + \Theta_q[\mathbf{Y}_{n+3-q}] - \\
&\quad - \Phi_1[\mathbf{X}_{n+2}] - \Phi_2[\mathbf{X}_{n+1}] - \Phi_3[\mathbf{X}_n] - \dots - \Phi_p[\mathbf{X}_{n+3-p}] = \\
&= \mathbf{0} + \Theta_1\mathbf{0} + \Theta_2\mathbf{0} + \Theta_3\mathbf{y}_n + \dots + \Theta_q\mathbf{y}_{n+3-q} - \\
&\quad - \Phi_1\hat{\mathbf{x}}_{n+2}(n) - \Phi_2\hat{\mathbf{x}}_{n+1}(n) - \Phi_3\mathbf{x}_n - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{n+2-p} = \\
&= \Theta_3(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n(n-1)) + \dots + \Theta_q(\mathbf{x}_{n+3-q} - \hat{\mathbf{x}}_{n+3-q}(n+2-q)) - \\
&\quad - \Phi_1\hat{\mathbf{x}}_{n+2}(n) - \Phi_2\hat{\mathbf{x}}_{n+1}(n) - \Phi_3\mathbf{x}_n - \dots - \Phi_p\mathbf{x}_{n+2-p} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Tento postup pokračuje až k předpovědi o k kroků dopředu $\hat{\mathbf{x}}_{n+k}(n)$.

Pro zajímavost uvedme, že ve výše uvedených výpočtech se pro $s > q$ již ve vztahu pro $\hat{\mathbf{x}}_{n+s}(n)$ nevyskytují sčítance s parametry Θ , neboť ty jsou všechny násobeny nulovým vektorem. To speciálně pro model MA(q) znamená, že předpovědi o $q + 1$ a více kroků dopředu jsou nulové.

Kapitola 5

Zpracování konkrétních časových řad

V této kapitole aplikujeme dosud popsané modely ARMA posloupností na dvě konkrétní mnohorozměrné časové řady získané z finančních trhů. Potřebné výpočty provedeme v systému Mathematica 5.0.

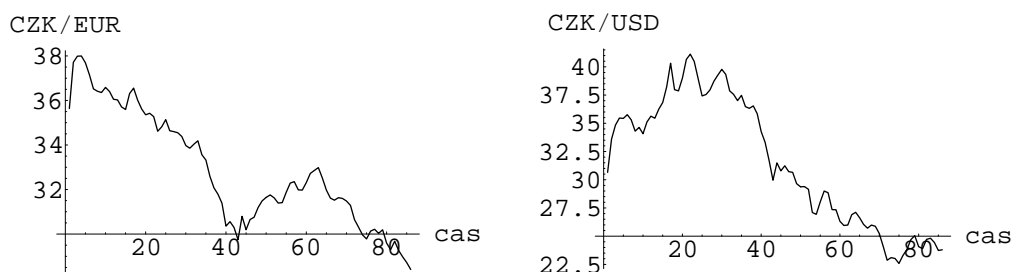
Nejprve se budeme věnovat analýze dvojrozměrné časové řady, konkrétně časové řady tvořené kurzy české koruny ke dvěma nejvýznamnějším světovým měnám - euru a americkému dolaru. Dvojrozměrná časová řada je nejjednodušším případem mnohorozměrné časové řady a její zpracování je tudíž poměrně přehledné, proto je v tomto příkladě kladen větší důraz na subjektivnější metody založené zejména na grafických znázorněních některých parametrů zkoumané časové řady.

Druhým popsaným příkladem analýzy mnohorozměrných časových řad je zpracování řady osmi oborových burzovních indexů zveřejňovaných Burzou cenných papírů Praha, a. s. Tento příklad je již méně založen na použití postupů vycházejících z grafických záznamů různých ukazatelů a více spoléhá na abstraktnější statistické přístupy.

5.1 Řada měnových kurzů

První zpracovávanou řadou je časová řada měnových kurzů české koruny k euru a americkému dolaru. Data jsou získána z webových stránek České národní banky [6] a jedná se o řadu měsíčních průměrných kurzů od ledna 1999 (zavedení eura) do února 2006, tedy řadu celkem osmdesáti šesti pozorovaných dvojrozměrných vektorů.

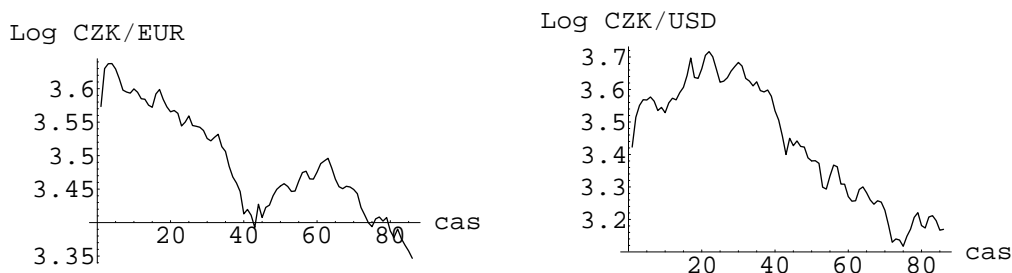
V grafickém záznamu obou složek této časové řady je kurz české koruny k euru značen CZK/EUR a kurz české koruny k americkému dolaru CZK/USD.



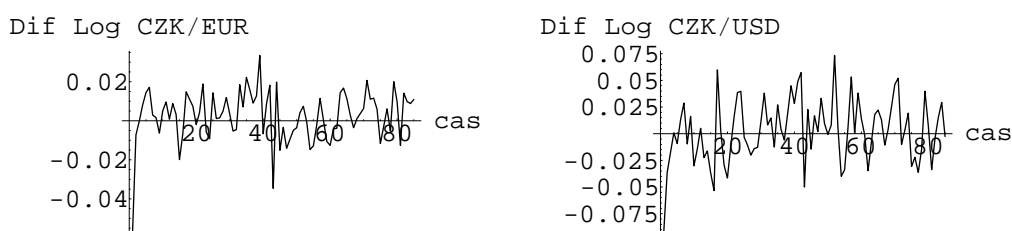
Transformace časové řady

Jak bylo uvedeno v závěru kapitoly 2, před vlastní analýzou časové řady je nutno řadu transformovat na řadu stacionární a centrovanou.

První fází transformace je stacionarizace rozptýlu řady. Z grafického znázornění časové řady je možno usuzovat, že rozptyl řady roste s hodnotou řady, neboli v období, kdy je například kurz koruny k euru vyšší, je také jeho kolísání vyšší. V takovém případě se zdá být vhodnou transformací zlogaritmování obou řad. Pro nalezení nejvhodnější transformace je popsáno i několik objektivnějších rozhodovacích postupů, například v [1] na str. 145 je doporučeno rozdělit řadu na několik úseků, pro každý z nich spočítat aritmetický průměr a rozpětí, tuto dvojici zaneš do grafu, vzniklémi body proložit křivku a z jejího tvaru pak vyvodit nejvhodnější transformaci. V našem případě byla tato metoda velmi citlivá na volbu délky úseků a proto obtížně interpretovatelná, takže ji zde pro tento konkrétní příklad neuvádíme. Nicméně z jejích výsledků se použití logaritmování jeví jako možné. Následuje graf zlogaritmované řady.



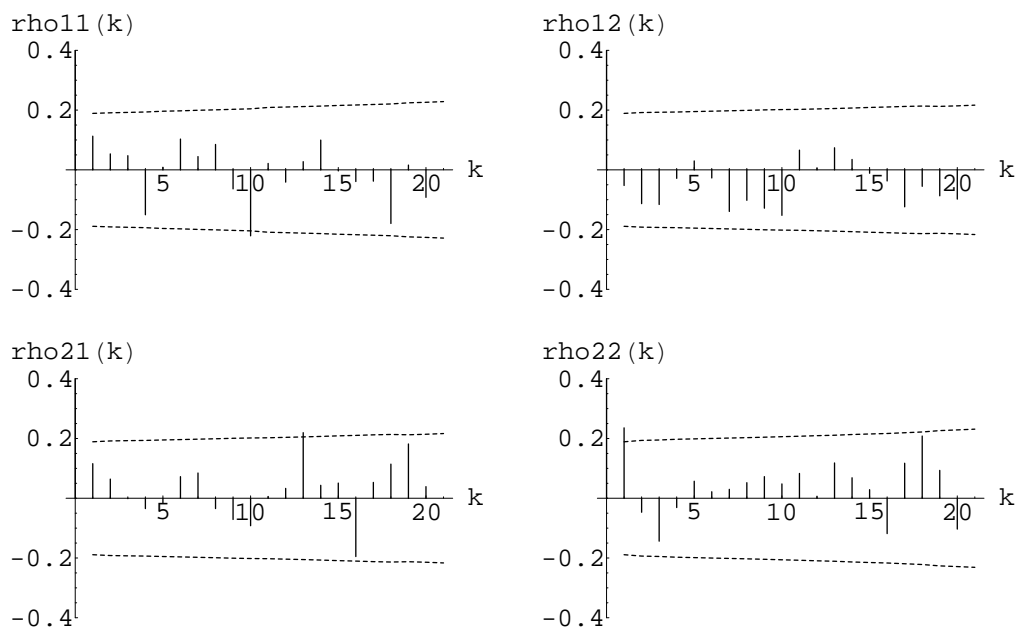
V druhé fázi je potřeba stacionarizovat a centrovat střední hodnotu řady. Za tímto účelem přejdeme od původní řady k řadě jejích diferencí. Ke stacionarizaci střední hodnoty je možno diferencování použít i vícekrát, jak je ale uvedeno například v [1] na str. 146, použití vyššího řádu diferencování, než jaký je nezbytně nutný, může vést ke ztížení nalezení vhodného ARMA modelu, neboť korelační a parciální korelační matice mohou pak klesat velmi pomalu a znesnadňovat tak identifikaci modelu. To je i případ této časové řady, u níž z grafického záznamu jednou diferencované řady není zcela zřejmé, zda není potřeba přejít k řadě druhých diferencí. Vhodný ARMA model proto budeme hledat pro řadu prvních diferencí, která je znázorněna na následujícím grafu.



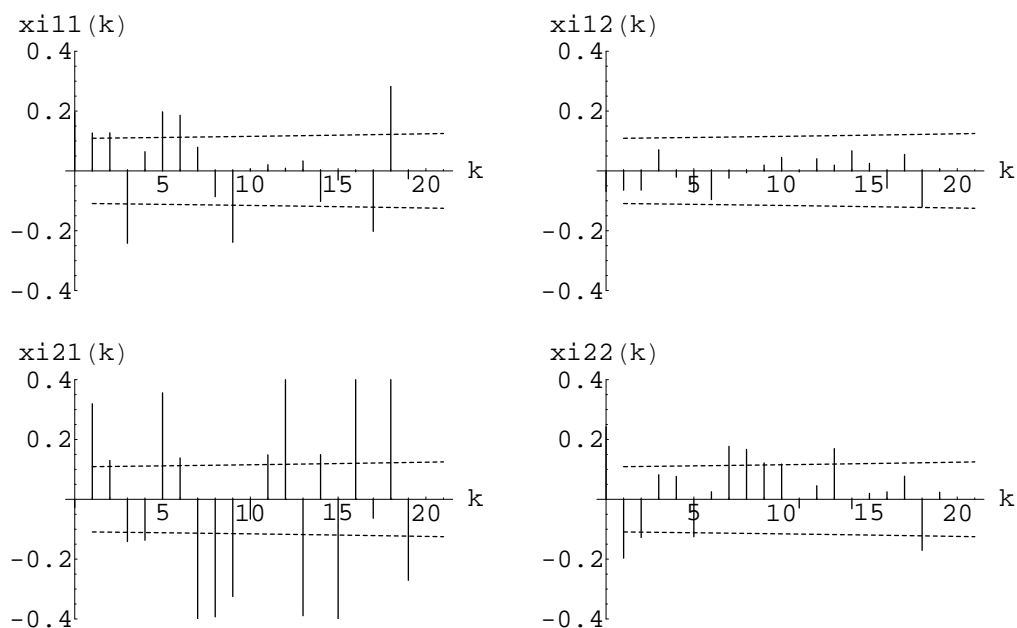
Identifikace ARMA modelu

Pro identifikaci modelu použijeme výběrové korelační matice $\hat{\rho}(k)$ a výběrové parciální korelační matice $\hat{\xi}(k)$ pro $k = 1, 2, \dots, 20$. Na grafech jsou znázorněny velikosti jednotlivých prvků těchto matic (svislou čarou) spolu s odhadnutými směrodatnými odchylkami (čárkovaně). V kapitole 3 je sice uvedeno, že například pro test nulovosti jednotlivých

prvků korelační matice na hladině 5% se použije porovnání s dvojnásobkem odhadnuté směrodatné odchylky, ale vzhledem k tomu, že účelem tohoto zkoumání korelační maticové funkce není ani tak samotné testování nulovosti, jako spíše odhadnutí možných řádů modelu prostřednictvím odhalení všech potenciálně nenulových prvků, postup mírně zpřísníme právě přechodem k samotné odhadnuté směrodatné odchylce. Tím je zaručeno, že budeme snáze upozorněni na nenulovost některého prvku korelační nebo parciální korelační matice.



Z grafů korelační maticové funkce vidíme, že žádný prvek se nejeví jako statisticky významně nenulový, proto můžeme předpokládat, že pro popis zkoumané řady je vhodné použít některý AR model. Jediný prvek $\hat{\rho}_{22}(1)$ se mezi ostatními zdá být více odlišný od nuly, proto připustíme i možnost použití modelu MA(1).



V případě grafů parciální korelační maticové funkce vidíme, že graf $\hat{\xi}_{22}(k)$ ukazuje nejspíše na model AR(1), případně AR(2). Naopak zbývající grafy $\hat{\xi}_{11}(k)$, $\hat{\xi}_{12}(k)$ a $\hat{\xi}_{21}(k)$ ukazují spíše na jiný než AR model. Grafy $\hat{\xi}_{11}(k)$ a $\hat{\xi}_{12}(k)$ jsou přibližně omezené sinusoidou s klesající amplitudou, pokud zanedbáme ojediněle se vyskytující větší hodnoty. U parciálních korelací $\hat{\xi}_{21}(k)$ dochází k překročení stanovené hladiny významnosti velmi často.

Z celkového pohledu na grafické znázornění odhadnuté autokorelační struktury zkoumané řady můžeme učinit tyto závěry: Nejvýznamnějšími kandidáty na vhodný model jsou modely AR(1) a AR(2), dále je také nutno uvážit model MA(1) a smíšené modely ARMA(1,1) a ARMA (2,1).

Pro první zúžení výběru modelů použijeme Akaikeho informační kritérium, to pro jednotlivé modely vychází:

	AR(1)	AR(2)	MA(1)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)
AIC	-16,3917	-16,3232	-16,1388	-16,3405	-16,4535

Z tohoto pohledu se jako nejvhodnější jeví modely ARMA(2,1) a AR(1), proto budeme v další analýze pokračovat už pouze s těmito dvěma modely a modelem AR(2), který jsme společně s modelem AR(1) označili za nejvhodnější na základě zkoumání kovarianční struktury. Optimální model, na jehož základě budeme konstruovat předpovědi, z nich vybereme v průběhu verifikace modelu. Nyní uveďme odhady parametrů těchto modelů metodou podmíněné maximální věrohodnosti, kde byly navíc parametry statisticky nevýznamně odlišné od nuly nahrazeny nulami. Vzhledem k tomu, že z hlediska použitého softwaru není žádný tlak na snižování výpočtové náročnosti, opět budeme postupovat poněkud přísněji a nulami nahradíme pouze ty parametry, které nepřesahují odhad své směrodatné odchylky.

	AR(1)		AR(2)		ARMA(2,1)	
$\hat{\Phi}_1$	-0,243858	0,069932	-0,187952	0,053301	-1,034820	0,243686
	0	-0,242078	0	-0,294550	0	-0,709368
$\hat{\Phi}_2$			-0,065365	0,062227	0	0
			-0,386155	0,202083	-0,461270	0,316829
$\hat{\Theta}_1$					-0,973355	0,213833
					0	-0,454278
$\hat{\Sigma}$	0,000128	0,000148	0,000127	0,000141	0,000105	0,000138
	0,000148	0,000709	0,000141	0,000690	0,000138	0,000695

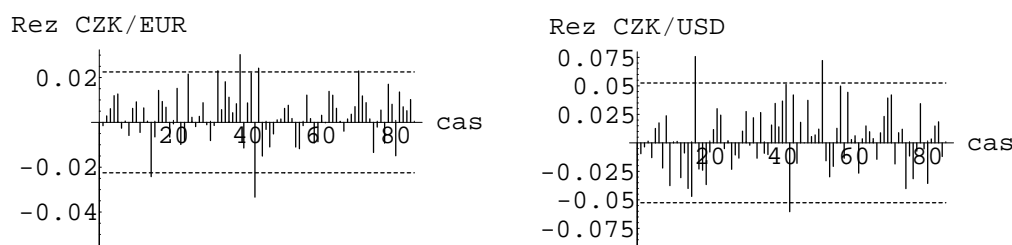
Verifikace ARMA modelu

V rámci verifikace modelu ověříme správnost volby řádu modelu, správnost odhadu parametrů a oprávněnost předpokladu na normalitu bílého šumu, který je implicitně obsažen v použití metody maximální věrohodnosti pro odhad parametrů.

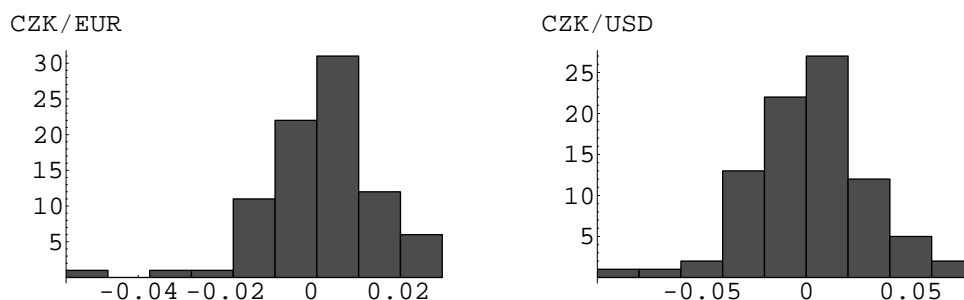
K posouzení nulovosti reziduí pro jednotlivé modely použijeme nejprve test nulovosti průměru reziduí. V následující tabulce jsou uvedeny průměry jednotlivých složek reziduí (označené \bar{y}_i v souladu s kapitolou 3) a kritické hodnoty testů jejich nulovosti na hladině 5%. Tentokrát se skutečně jedná o dvojnásobky odhadnutých směrodatných odchylek, neboť v tomto případě je již jediným účelem provedení testu nulovosti.

	AR(1)	AR(2)	ARMA(2,1)
\bar{y}_1	0,002259	0,002114	0,008326
Kritická hodnota	0,002458	0,002440	0,002224
\bar{y}_2	0,002251	0,001692	0,001189
Kritická hodnota	0,005776	0,005696	0,005721

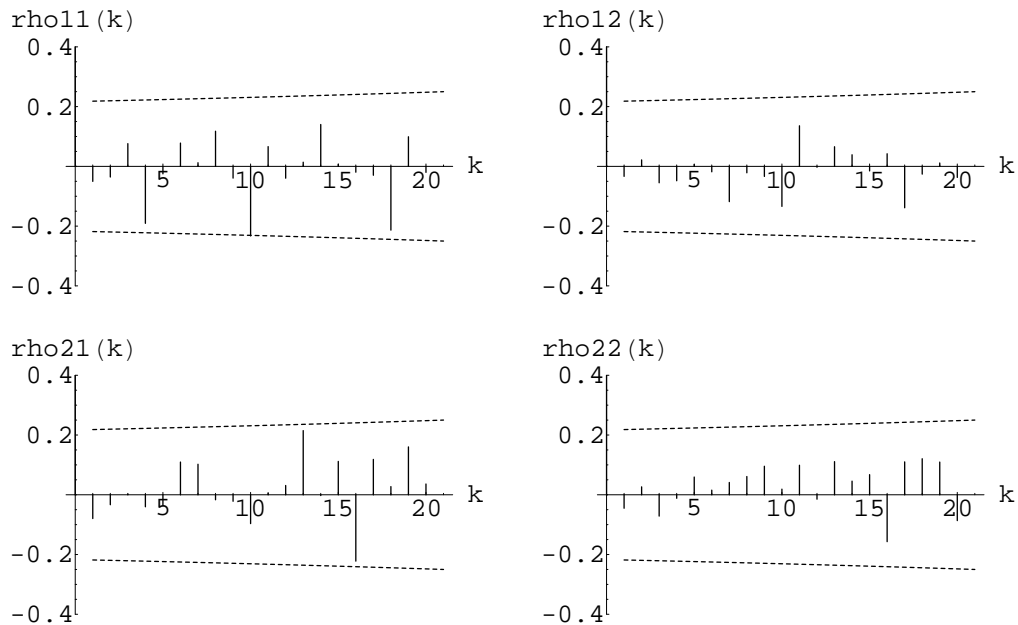
Nulovost reziduí zjevně nejlépe splňuje model AR(2), pro který zde také uvádíme přímo grafy jednotlivých reziduí (svislé čáry) spolu s kritickými hodnotami testů nulovosti po jednotlivých reziduích za předpokladu jejich normálního rozdělení (čárkovaně). Modelem ARMA(2,1) se nadále nebudeme zabývat, protože rezidua v případě jeho použití jsou významně nenulová.



S normalitou reziduí lze u obou nadále uvažovaných modelů (AR(1) a AR(2)) souhlasit, normalita byla posuzována na základě porovnání histogramů reziduí s tvarem hustoty normálního rozdělení a výsledky pro jednotlivé modely se nijak podstatně nelišily. Na grafu jsou uvedeny histogramy pro model AR(2).



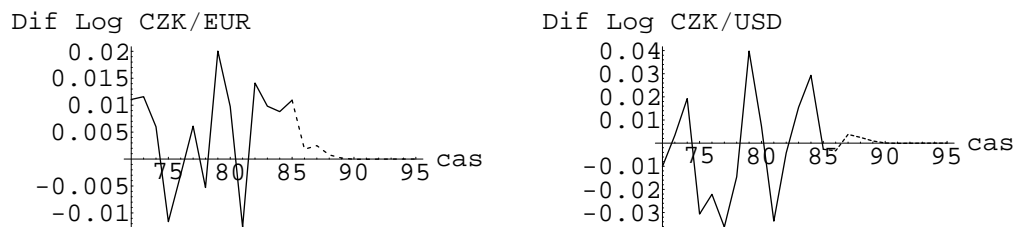
Posledním krokem verifikace modelu je posouzení korelovanosti reziduí, které se provede analogicky jako v případě analýzy korelační maticové funkce zkoumané řady. Výsledky se opět pro modely AR(1) a AR(2) téměř neliší a v obou případech se žádný prvek korelačních matic reziduí nejeví statisticky významně nenulový. Na grafu pro model AR(2) jsou zobrazeny jednotlivé prvky korelačních matic reziduí (svislými čarami) a kritické hodnoty pro testy nulovosti na hladině 5% (čárkovaně).



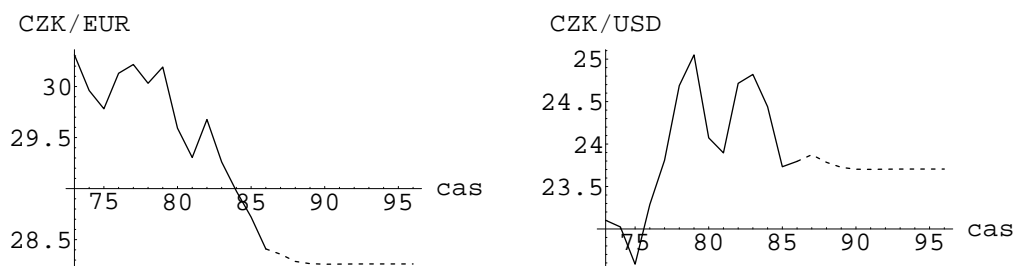
Na základě výsledků verifikace modelů zvolíme pro popis zkoumané časové řady model AR(2), který byl ve smyslu nulovosti reziduí lepší než model AR(1) a v ostatních kritériích se s tímto modelem v podstatě shodoval.

Konstrukce předpovědí a zpětná transformace

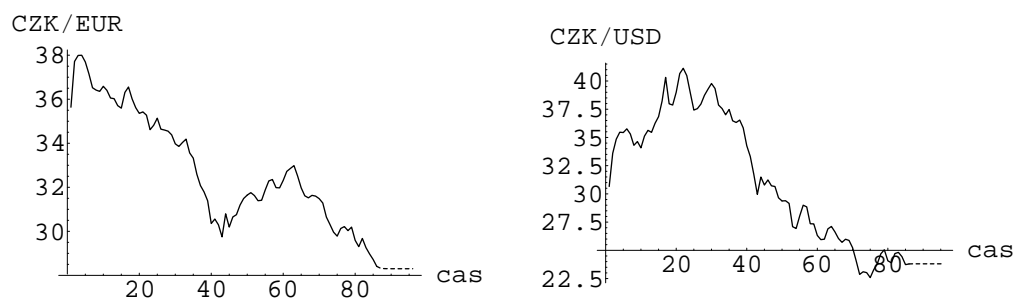
Zvolený model AR(2) použijeme ke konstrukci předpovědí následujících deseti hodnot zpracovávané časové řady, graf zachycuje posledních 14 pozorování řady a prvních 10 předpovědí.



Na následujícím grafu je opět posledních 14 pozorování zkoumané časové řady a prvních 10 předpovědí, tentokrát už po zpětné transformaci. Jedná se tedy o průměrné měsíční kurzy české koruny k euru a k americkému dolaru za rok 2005 a první dva měsíce roku 2006 a předpovědi do konce roku 2006.



Pro úplnost je připojen také graf celé řady měnových kurzů s doplněnými předpověďmi. Číselné hodnoty předpovědí je možno nalézt v programu *rada1.nb* i v jeho výpisu v příloze č. 1.



Závěr

Tento příklad dokazuje, že měnové kurzy lze poměrně dobře popisovat lineárními modely. Model je potřeba použít na zlogaritmované hodnoty, protože měnové kurzy stejně jako většina ukazatelů na finančních trzích vykazují s vyššími hodnotami také vyšší variabilitu. Naproti tomu lineární modely předpokládají variabilitu neměnnou.

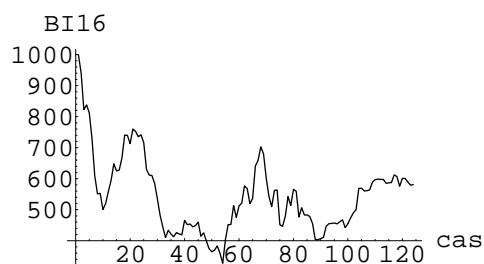
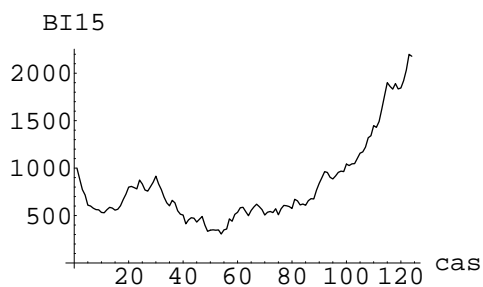
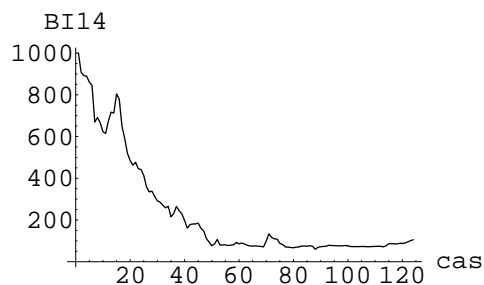
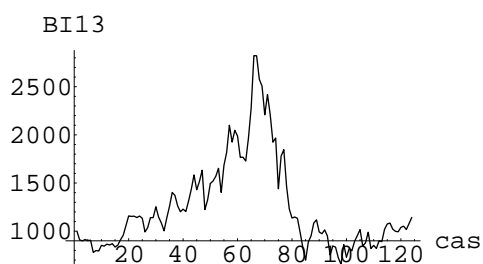
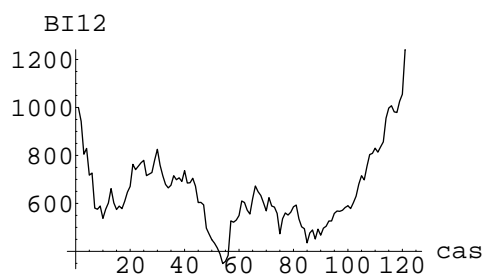
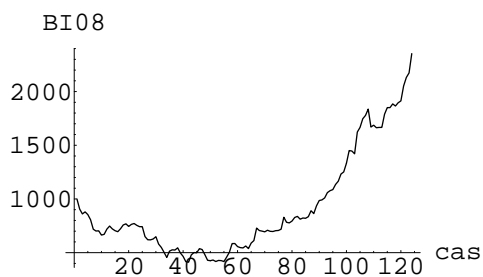
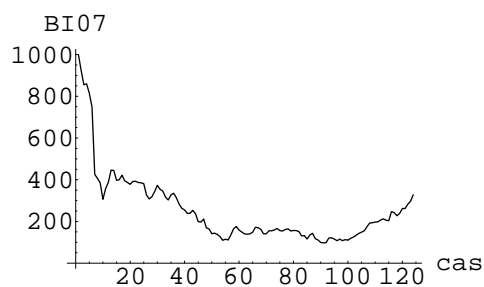
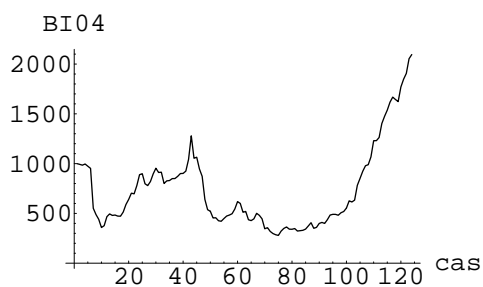
5.2 Řada oborových burzovních indexů

V rámci druhé praktické ukázky aplikace popsaných modelů mnohorozměrných časových řad provedeme analýzu řady osmi oborových indexů pražské burzy, údaje byly získány z webových stránek Burzy cenných papírů Praha, a. s. [7]. Zpracovává se celkem 124 průměrných měsíčních hodnot jednotlivých indexů, a to od začátku jejich výpočtu v září 1994 do prosince 2004. Názvy příslušných indexů jsou uvedeny v následující tabulce.

Označení	Odvětví
BI04	Těžba a zpracování nerostů a rud
BI07	Chemický, farmaceutický a gumozpracující průmysl
BI08	Stavebnictví a průmysl stavebních hmot
BI12	Energetika
BI13	Doprava a spoje
BI14	Obchod
BI15	Peněžnictví
BI16	Služby

Čísla v tabulce tvoří souvislou číselnou řadu, neboť v průběhu let 1994 až 2004 se jedenáct z původních devatenácti indexů přestalo počítat. Jedná se o důsledek odchodu velkého počtu firem z trhu pražské burzy, jednotlivé oborové indexy se totiž počítají pouze

v případě, že počet titulů v bázi je větší než tři. Následuje graf vývoje zpracovávaných osmi indexů, mimo jiné je z něj patrné, že výchozí hodnota všech indexů byla nastavena na 1000 bodů.



Transformace časové řady

Jako vhodná transformace pro stacionarizaci rozptylu se jeví opět zlogaritmování řady, pro stacionarizaci střední hodnoty použijeme tentokrát přechod k řadě druhých diferencí. Na grafu je zobrazena časová řada už po zlogaritmování a dvojnásobném diferencování.

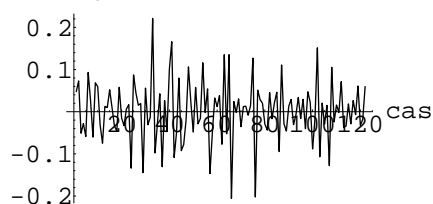
2.dif Log BI04



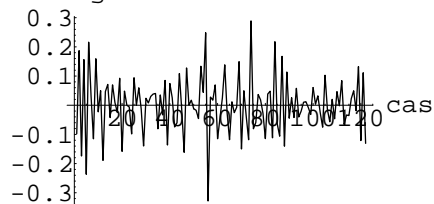
2.dif Log BI07



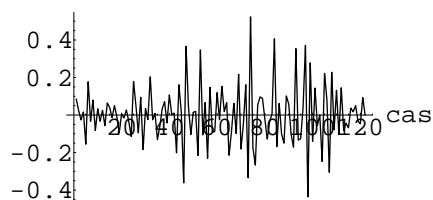
2.dif Log BI08



2.dif Log BI12



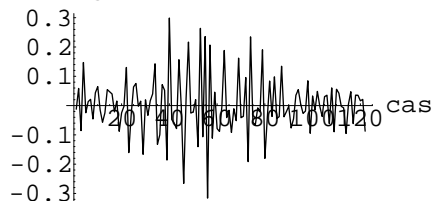
2.dif Log BI13



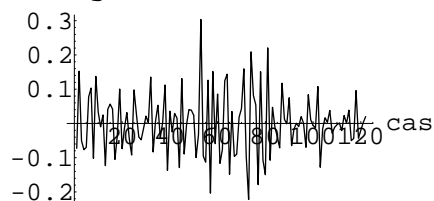
2.dif Log BI14



2.dif Log BI15



2.dif Log BI16



Identifikace ARMA modelu

K identifikaci modelu použijeme korelační a parciální korelační maticové funkce $\hat{\rho}(k)$ a $\hat{\xi}(k)$ pro $k = 1, 2, \dots, 10$. Protože v případě této osmírozměrné řady by bylo velmi náročné posuzovat tvar těchto funkcí na základě jejich grafických záznamů (jednalo by se o 64 grafů), použijeme přístupy, které se pro zpracování takové více-rozměrné řady hodí lépe. Takovým přístupem je přepis korelačních a parciálních korelačních matic pomocí symbolů $+$, $-$ a \cdot , jak bylo popsáno v kapitole 3, výstup je možno nalézt v souboru *rada2.nb* a také v příloze č. 2. Zde uvedeme pouze výsledky testu nulovosti celých matic, v následující tabulce jsou pro jednotlivé matice spočítány statistiky $R(k)$ a $X(k)$, které byly zavedeny ve větách 3.8 a 3.20, a k nim příslušné kritické hodnoty pro test nulovosti na hladině 5%.

k	R(k)	X(k)
1	300,398	342,346
2	104,775	181,467
3	63,381	147,360
4	60,744	164,937
5	79,051	186,271
6	64,368	196,484
7	43,349	160,796
8	56,373	405,935
9	86,003	273,595
10	79,585	513,281
Kritická hodnota	83,675	83,675

Korelační maticová funkce se zdá být naposledy nenulová pro $k = 2$, další překročení kritické hodnoty pro větší k budeme považovat spíše za náhodné. Je možno také připustit, že nenulová je pouze korelační matice $\rho(1)$. Parciální korelační maticová funkce zřejmě není klesající v k , což nesevřdí pro model AR, nicméně poměrně výrazný rozdíl hodnoty pro $k = 1$ od několika následujících může ukazovat na řád autoregrese 1. Za nejpravděpodobnější budeme tedy považovat model MA(2), dále budeme ještě uvažovat modely MA(1) a ARMA (1,2).

Pro všechny tyto modely vypočteme Akaikeho informační kritérium:

	MA(1)	MA(2)	ARMA(1,2)
AIC	-41,5973	-41,2090	-40,6274

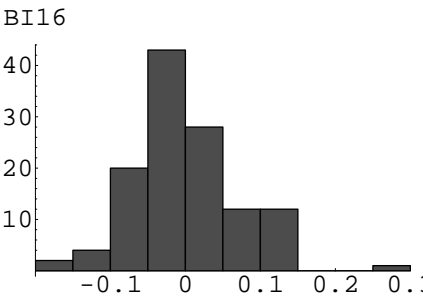
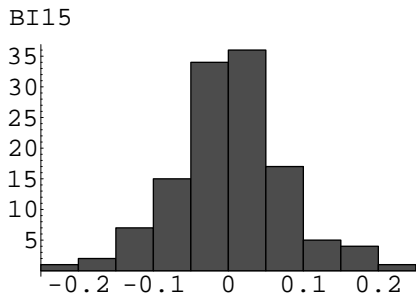
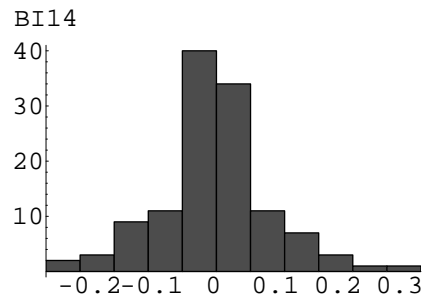
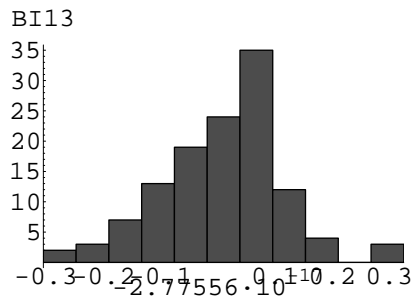
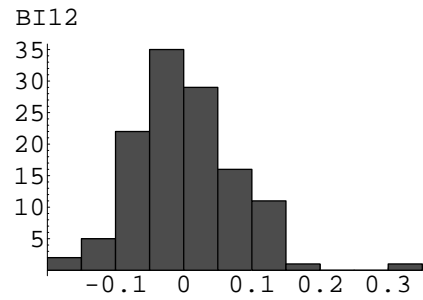
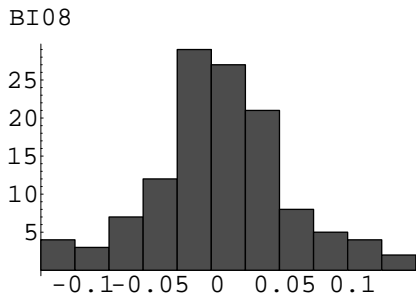
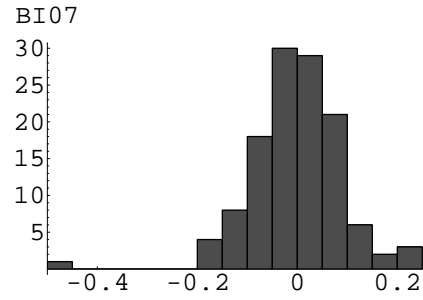
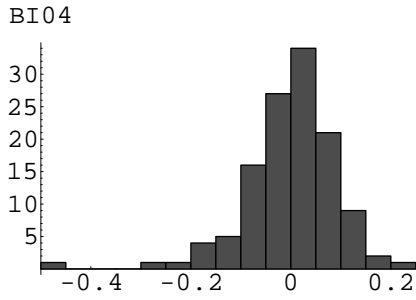
Verifikace modelu

Verifikace byla provedena pro všechny tyto modely a na jejím základě byl jako optimální vybrán model MA(2). V dalším textu budou výsledky verifikace popsány právě pouze pro tento model, výsledky verifikace pro zbývající modely lze nalézt v souboru *rada2.nb*.

V následující tabulce jsou pro model MA(2) uvedeny průměry jednotlivých složek reziduí a kritické hodnoty testů jejich nulovosti, poznamenejme, že kritickou hodnotu je nutno porovnávat s absolutní hodnotou průměru.

Řada	Průměr reziduí	Kritická hodnota
BI04	-0,000770	0,017255
BI07	-0,001344	0,016345
BI08	0,001204	0,009379
BI12	0,003280	0,013170
BI13	0,008680	0,019861
BI14	0,003451	0,015954
BI15	0,003805	0,013659
BI16	0,000926	0,012343

Normalita byla stejně jako v prvním příkladě posuzována na základě histogramů jednotlivých složek reziduí.



Nutno poznamenat, že histogramy reziduí normalitu zcela nepotvrzují, ale rozhodně také normalitě závažně neodporují. Pokud se v ostatních částech verifikace (nulovost a nekorrelovanost reziduí) ukáže, že model zkoumaná data popisuje velmi dobře, můžeme tuto skutečnost zanedbat.

Na závěr posoudíme korelační maticovou funkci reziduí, stejně jako v případě korelační maticové funkce původní řady zde pro model MA(2) uvedeme pouze hodnoty statistiky $R(k)$ spolu s kritickou hodnotou testu nulovosti, zápis korelačních matic v symbolice $+$, $-$ a \cdot je opět uveden v souboru *rada2.nb* a příloze č. 2.

k	R(k)
1	64,176
2	22,159
3	53,053
4	40,772
5	75,707
6	64,760
7	38,744
8	49,845
9	67,273
10	53,387
Kritická hodnota	83,675

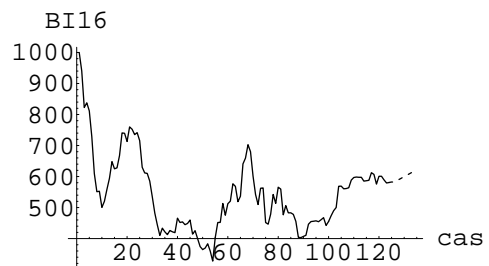
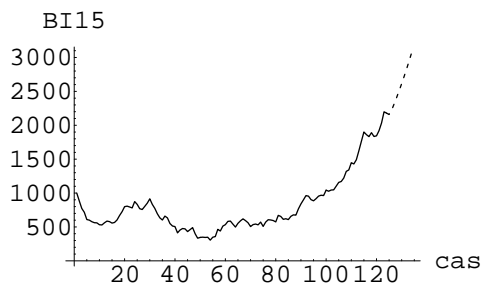
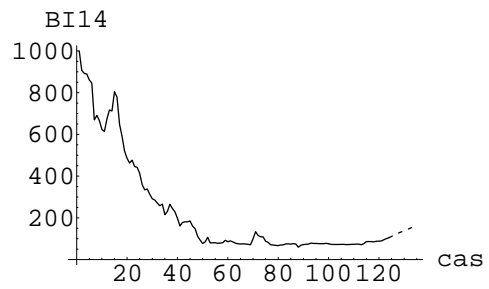
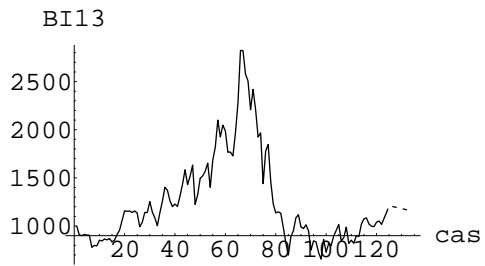
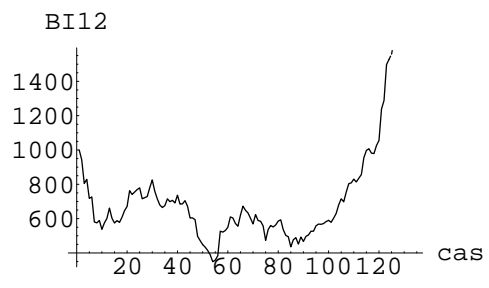
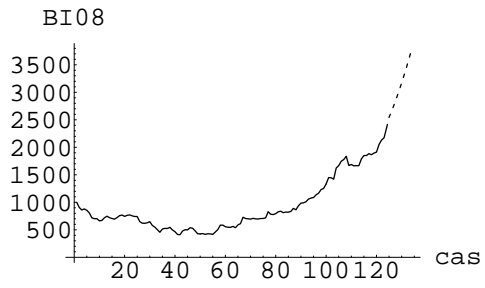
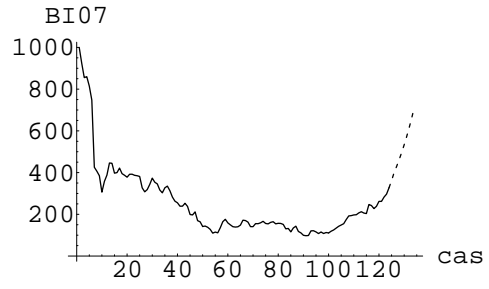
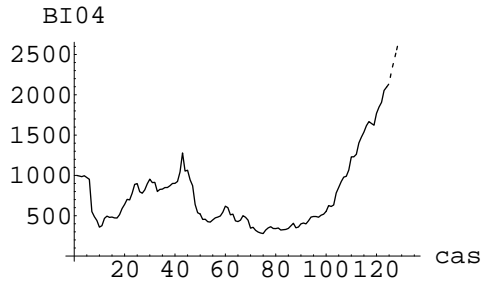
Vidíme, že není důvod nekorelovanost reziduí zamítat.

Konstrukce předpovědí a zpětná transformace

Vybraný model MA(2) použijeme pro výpočet předpovědí dvanácti následujících hodnot řady. Na grafu na následující stránce je zobrazena původní časová řada spolu s těmito předpověďmi již po provedení zpětné transformace. Číselné hodnoty lze nalézt v programu *rada2.nb* a příloze č. 2.

Závěr

I v případě analýzy oborových burzovních indexů byl lineární model aplikován na zlogaritmovanou řadu a lze konstatovat, že použití lineárního modelu se jeví jako přípustné. Jediným nedostatkem použití ARMA modelu (konkrétně modelu MA(2)) je ne zcela přesvědčivá normalita reziduí. Z histogramů reziduí lze vyzorovat mírnou šikmost jejich rozdělení, navíc se vyskytuje několik odlehlých hodnot, což pro normální rozdělení nebývá typické. Obecně však právě normalita reziduí bývá u lineárních modelů nejobtížněji splnitelný předpoklad, ke kterému ale není třeba přistupovat zvlášť přísně. Například konkrétně v našem případě modelu MA(2) se histogram reziduí svým tvarem od hustoty normálního rozdělení neliší nijak extrémně, důvodem pro odmítnutí vybraného modelu by byla například až situace, kdy by rezidua vykazovala značně vysokou šikmost nebo by se nekumulovala okolo nuly a naopak často nabývala odlehlých hodnot. Předpoklad normality se využívá pouze ve fázi odhadu parametrů modelu a pokud se podaří odhadnout parametry takové, že model zkoumanou řadu dobře popisuje, můžeme mírné porušení normality tolerovat. Závažnější by jistě byla například korelovanost nebo nenulovost reziduí, na těchto vlastnostech je totiž celá teorie ARMA modelů vystavěna.



Závěr

Cílem této práce bylo popsat teorii mnohorozměrných ARMA modelů časových řad a aplikovat ji na konkrétní data z finančních trhů.

V teoretické části je nejprve definován mnohorozměrný náhodný proces a jeho základní charakteristiky a vlastnosti (střední hodnota, kovarianční maticová funkce, slabá stacionarita). Dále se již práce věnuje pouze užší skupině náhodných procesů, a to posloupnostem ARMA, jsou popsány základní vlastnosti těchto náhodných posloupností. Dále se pokračuje výkladem použití teorie těchto posloupností k analýze konkrétních mnohorozměrných časových řad od identifikace vhodného modelu až po konstrukci předpovědi budoucích hodnot.

V praktické části práce jsou pomocí ARMA modelů zpracovány dvě časové řady z českého finančního trhu, řada kurzů české koruny k euru a americkému dolaru za posledních přibližně sedm let a řada osmi oborových indexů pražské burzy od počátku jejich výpočtu v roce 1994 až do roku 2004. Analýza byla provedena v systému Mathematica 5.0, použité programy *rada1.nb* a *rada2.nb* jsou součástí práce jednak ve vytištěné podobě v přílohách, jednak na přiloženém CD.

Přestože v současné době je díky rozvoji výpočetní techniky možno pro analýzu časových řad bez problémů použít i složitější nelineární modely, modely lineární reprezentované ARMA modely si jistě rovněž zaslouží naši pozornost. Je to zejména díky tomu, že představují výhodný kompromis ve smyslu zachování nízké výpočtové náročnosti a přesto velmi dobré schopnosti popsat zkoumaná data. Přitom tato jejich kompromisní vlastnost je obzvláště cenná právě v případě mnohorozměrných řad, kde hlavně při vyšších rozměrech může u složitějších modelů výpočtová náročnost neúměrně růst.

Literatura

- [1] Cipra, T.: Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii. SNTL, Praha, 1986.
- [2] Hannan, E. J.: Multiple Time Series. John Wiley, New York, 1970.
- [3] Lachout, P.: Teorie pravděpodobnosti. Karolinum, Praha, 2004.
- [4] Prášková, Z.: Základy náhodných procesů II. Karolinum, Praha, 2004.
- [5] Wei, W. W. S.: Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods. Addison-Wesley, New York, 1990.
- [6] www.cnb.cz
- [7] www.pse.cz

Přílohy

Příloha č. 1: Výpis programu rada1.nb

V této příloze je uveden zdrojový kód programu *rada1.nb* realizovaného v systému Mathematica 5.0, je tu možno nalézt také jeden výstup programu, a to výpis předpovědí, protože číselné hodnoty nebyly v kapitole 5 uvedeny.

Současně je program i na přiloženém CD, tam je navíc ponechána i verifikace pro zbývající modely, pro které byla provedena, ne jen pro vybraný AR(2). Protože k případnému výpočtu provedenému čtenářem by byla nutná zvláštní knihovna pro práci s časovými řadami (Time Series Pack), která není standardní součástí programu Mathematica, jsou v programu ponechány i všechny důležité výstupy.

Příloha č. 2: Výpis programu rada2.nb

V této příloze je uveden výpis zdrojového kódu programu *rada2.nb* včetně některých výstupů, na něž je odkazováno v kapitole 5.

Program je opět i na přiloženém CD, kde je znovu verifikace pro více modelů a většina výstupů.

Příloha č. 3: Komentář k programovému řešení

Jak již bylo několikrát zmíněno, analýza časových řad pomocí ARMA modelů je velmi těžko automatizovatelný proces, proto není vhodné snažit se sestavit program, který na základě vstupu v podobě libovolné časové řady sám provede celou analýzu. Oba příklady popsané v kapitole 5 byly také programově řešeny odděleně. Uvedeme zde stručný popis těchto programů a možnosti jejich použití na jiné časové řady.

Vstupní data musí být ve formě textového souboru, na prvním řádku je rozměr zapsané časové řady, na druhém řádku jsou názvy jednotlivých sloupců (první je datum, dále názvy jednotlivých složek řady) a na dalších řádcích následují samotné hodnoty, sloupce jsou odděleny tabulátory. V části *Načtení knihoven a dat ze souboru* program tyto hodnoty načte do proměnné `data` a posléze už samotné číselné hodnoty jednotlivých řad do proměnné `rada1`.

V části *Transformace dat* uživatel sám na základě vykreslených grafů volí transformaci stabilizující rozptyl (výsledek se načte do proměnné `rada2`) a posléze transformaci stabilizující střední hodnotu (výsledek se načte do proměnné `rada3`), do další analýzy transformovaná řada vstupuje v proměnné `rada`.

Část *Určení řádů modelu* popisuje kovarianční strukturu zkoumané řady, pro řady s méně složkami (například 2 až 4) je vhodnější využít program `rada1.nb`, pro řady s více složkami program `rada2.nb`.

V části *Odhad parametrů modelu* uživatel do proměnné `modely` zadá modely, kterými se chce nadále zabývat, zadané hodnoty jsou použity jako počáteční řešení pro odhad parametrů, modely s odhadnutými parametry se načtou do proměnné `modely3` a vypočítá se pro ně AIC. Uživatel z nich vybere modely, pro které chce provést verifikaci, do proměnných `modela`, `modelb` atd. Je vhodné poznamenat, že systém Mathematica používá mírně odlišnou definici posloupnosti ARMA, než jaká je uvedena v této práci (definice 2.10), parametry $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ zde mají opačná znaménka.

Verifikace modelu se provede v části *Verifikace modelu*, která se použije pro každý model zvlášť.

V části *Konstrukce předpovědí* se do proměnné `predp` zkonstruují předpovědi. Počet předpovědí a vybraný model zadá uživatel.

V poslední části *Zpětná transformace* uživatel zadá inverzní transformaci k transformaci použité v části *Transformace dat* a zvolí vhodnou formu výstupu.