Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Blažena Frcalová

Birkhoffův a Strassenův problém

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.

Studijní program: Matematika, Matematická statistika

2006

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu profesoru Josefu Štěpánovi, vedoucímu diplomové práce, za jeho ochotu a čas, který mi věnoval a za poskytnutí mnohého materiálu, včetně poznámek k přednášce o marginálním problému a preprintu jeho nového článku. Také bych ráda poděkovala Mgr. Janu Kašparovi a Oldřichu Kepkovi za rady ohledně programu LaTeX, ve kterém byla tato práce napsána.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne Blažena Frcalová

Obsah

Název práce: *Birkhoffův a Strassenův problém*
Autor: *Blažena Frcalová*
Katedra: *Katedra Pravděpodobnosti a matematické statistiky*
Vedoucí diplomové práce: *Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.*
e-mail vedoucího: *Josef.Stepan@mff.cuni.cz*
Abstrakt: *Nechť D je podmnožina $X \times Y$, μ je pravděpodobnostní míra na X, ν je pravděpodobnostní míra na Y. Strassenův problém se zabývá existencí pravděpodobnostní míry P na $X \times Y$ takové, že $P(D) = 1$ a jejíž marginály jsou míry μ a ν. Jaké jsou nutné a postačující podmínky, aby míra byla krajním bodem konvexní množiny všech měr se stejnými marginálami? Tento problem se nazývá Birkhoffův problém. Pro X, Y spočetné je nutná a postačující podmínka, že nosič míry nesmí obsahovat cykl. V nespočetném případě je situace komplikovanější.*
Klíčová slova: *Simpliciální Míra, Množina Marginální Jednoznačnosti, Marginální Problém*

Title: *Birkhoff's and Strassen's problem*
Author: *Blažena Frcalová*
Department: *Department of Probability and Mathematical Statistics*
Supervisor: *Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.*
Supervisor's e-mail address: *Josef.Stepan@mff.cuni.cz*
Abstract: *Let D be a subset of $X \times Y$, μ is a probability measure on X, ν is a probability measure on Y. Strassen's problem is dealing with the question, if there exists any probability measure P on $X \times Y$ such as $P(D) = 1$ and whose marginals are μ and ν. What are the necessary and sufficient conditions for measures to be an extreme point of convex set of all measures with the same marginals? This is called Birkhoff's problem. When X, Y are countable, the necessary and sufficient condition is, that the measure is supported by a set without a cycle. When X, Y are uncountable, the situation is more complicated.*
Keywords: *Simplicial Measure, Set of Marginal Uniqueness, Marginal Problem*

Úvod

V roce 1940 vydal Garrett Birkhoff knihu Lattice Theory [2], ve které jako cvičení uvedl dokázat, že libovolnou dvojitě stochastickou matici A_n lze napsat jako vážený průměr permutačních matic. Toto tvrzení je také známo pod jménem Birkhoff - von Neumannova věta. Problémem 111 [2, strana 266] pak nazval nalezení vhodného rozšíření tohoto tvrzení na „nekonečné matice“. Tímto problémem se zabývali S. King a R. Shifflet v [6].

Nejdříve si připomeňme, co to vlastně stochastická, dvojitě stochastická a permutační matice je.

Definice 0.1: *Stochastická matice A_n je nezáporná (tj. $a_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j$) čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž každý řádkový součet je roven jedné. Tedy*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ pro } \forall i = 1 \dots n$$

Definice 0.2: *Dvojitě stochastická matice je stochastická matice, jejíž každý sloupcový součet je roven jedné. Tedy*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ pro } \forall j = 1 \dots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ pro } \forall i = 1 \dots n$$

Definice 0.3: *Permutační matice je taková čtvercová matice, která má v každém řádku a každém sloupci právě jeden nenulový prvek, jenž je roven jedné.*

Poznámka: *Tedy každá permutační matice je dvojitě stochastická matice.*

Věta 0.1: *[Birkhoff-von Neumannova] Každou čtvercovou konečně rozměrnou dvojitě stochastickou matici S_n lze napsat jako vážený průměr permutačních matic.*

Tuto větu si dokážeme na konci kapitoly 2.

Je zřejmé, že dvojitě stochastické matice A_n tvoří konvexní množinu obsahující také permutační matice. Věta 0.1 vlastně říká, že právě permutační matice jsou krajními body této množiny, protože žadnou permutační matici již nelze napsat jako konvexní kombinaci jiných dvojitě stochastických matic.

Podívejme se ještě na jeden problém. Nechť P je nějaká pravděpodobnostní míra na $X \times Y$, jejíž marginál na X je pravděpodobnostní míra μ a na Y ν. Je zřejmé, že takové míry tvoří také konvexní množinu. Jaké jsou tedy podmínky na pravděpodobnostní míru, aby byla krajním bodem této množiny?

Označme si $M_1(D)$ množinu všech pravděpodobnostních měr na D a $M_0(D)$ množinu konečných zobecněných měr na D, které mají nulové marginály, a uveďme si zde definici simpliciální míry. Zobrazení $Marg$ přiřadí každé míře její marginály.

Definice 0.4: *Míra P na $X \times Y$ se nazývá simpliciální, pokud P je krajním bodem množiny*

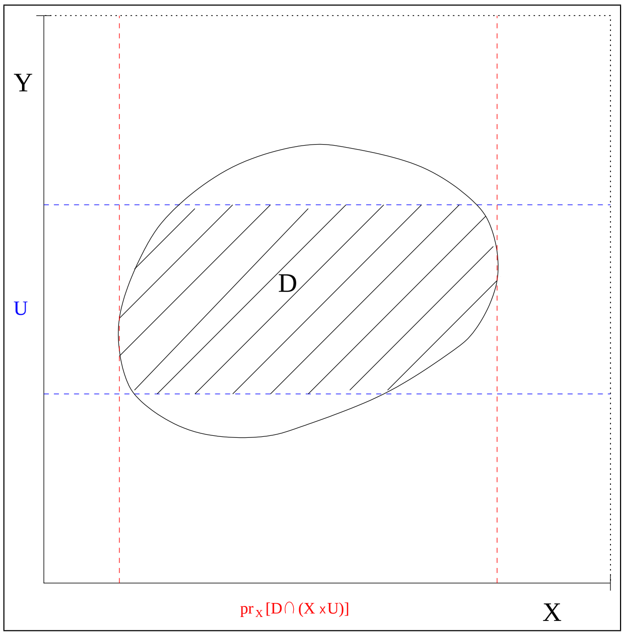
$$C(P) = \{Q \in M_1(X \times Y); Marg(Q) = Marg(P)\}.$$

Jaká je tedy charekteristika simpliciálních měr? Situaci nejdříve vyřešíme pro případ, kdy X, Y jsou spočetné množiny, a potom se podíváme na charakteristiku simpliciálních měr u X, Y nespočetných.

Uveďme si zde ještě podmínku, která zaručuje, že nějaká pravděpodobnostní míra P s danými marginály, $P(D) = 1$ pro danou uzavřenou množinu D, existuje. Problém nalezení takové podmínky se nazývá Strassenův problém.

Věta 0.2: *Nechť D je uzavřená podmnožina $X \times Y$. Pravděpodobnostní míra P na $X \times Y$ taková, že $P(D) = 1$ s marginály μ a ν, existuje právě tehdy, pokud pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset Y$ platí:*

$$\nu(U) \leq \mu[pr_X(D \cap (X \times U))].$$



Obrázek 1: Strassenův problém

Důkaz: Nutnost této podmínky je vidět z obrázku 1.1. To, že to je podmínka postačující, dokázal Strassen v [16].

□

Kapitola 1

Marginálový problém pro spočetné množiny

V této kapitole se budeme zabývat situací, kdy máme kartézský součin dvou spočetných množin X a Y a na něm definovanou nějakou pravděpodobnostní míru P. Zajímá nás, jaké podmínky musí splňovat množina $M = \{(x,y); P(x,y) > 0\}$, aby míra P byla simpliciální, a jsou-li tyto podmínky postačující. Tedy existuje-li nutná a postačující podmínka pro simpliciální míry. Věta **??** nám takovou podmínku dává.

Definice 1.1: *Množina $M \subset X \times Y$ se nazývá množina marginální jednoznačnosti, pokud zobrazení Marg:$M_1(M) \to M_1(X) \times M_1(Y)$ je prosté zobrazení.*

Poznámka: *Tedy libovolná pravděpodobnostní míra P, pro kterou platí $P(D) = 1$ pro nějakou množinu marginální jednoznačnosti D, je simpliciální. Postačující podmínku již tedy máme. Otázkou je, je-li tato podmínka i nutná.*

Definice 1.2: *Konečná množina různých bodů*

$$L = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_{2n}, y_{2n})\} \subset X \times Y, n > 1$$

se nazývá cyklus, pokud splňuje následující podmínky.

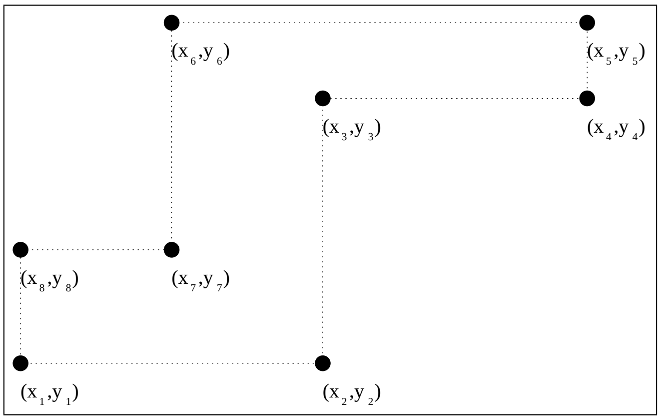
1. *pro $1 \leq i \leq 2n-1$ platí právě jedna z následujících rovností:*

$$x_i = x_{i+1}, \quad y_i = y_{i+1}$$

2. $x_i = x_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = y_{i+2}$ *a* $y_i = y_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} = x_{i+2}$ *pro* $1 \leq i \leq 2n-2$
Jinak řečeno, nemůže nastat situace $x_i = x_{i+1} = x_{i+2}$ nebo $y_i = y_{i+1} = y_{i+2}$.

3. *buď $x_1 = x_{2n}$ nebo $y_1 = y_{2n}$*

4. *žádná vlastní podmnožina L nesplňuje výše uvedené podmínky*



Obrázek 1.1: Cyklus

Je dobré ještě poznamenat, že pokud nějaká množina splňuje podmínky (1)-(3), pak existuje taková podmnožina této množiny, která je cyklus.

Lemma 1.1: *Nechť L je cyklus a na něm jsou definována zobrazení $I_{x_i} : L \to \{0,1\}$ a $I_{y_i} : L \to \{0,1\}$ pro $i = 1 \dots 2n$*

$$\begin{aligned} I_{x_i}(x,y) &= 1 \quad \textit{pokud } x = x_i \\ I_{x_i}(x,y) &= 0 \quad \textit{pokud } x \neq x_i \\ I_{y_i}(x,y) &= 1 \quad \textit{pokud } y = y_i \\ I_{y_i}(x,y) &= 0 \quad \textit{pokud } y \neq y_i \end{aligned}$$

Pak pro všechna $i = 1 \dots 2n$ platí

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j I_{x_i}(x_j, y_j) = 0$$

a

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j I_{y_i}(x_j, y_j) = 0$$

Důkaz: Důkaz plyne z definice. □

Lemma 1.2: *Nechť $L = \{(x_1,y_1),\dots,(x_{2n},y_{2n})\}$ je cyklus. Potom pro libovolné $i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq 2n$ platí, že*

$$\begin{aligned} L_i &= \{(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1})\dots,(x_{2n},y_{2n}),(x_1,y_1),\dots,(x_{i-1},y_{i-1})\} \\ L_0 &= \{(x_{2n},y_{2n}),(x_{2n-1},y_{2n-1}),\dots,(x_1,y_1)\} \end{aligned}$$

jsou cykly.

Důkaz: Důkaz plyne z definice. ☐

Definice 1.3: *Dva body $(u, v), (w, z) \in S \subset X \times Y$ se nazývají spojeni cestou (anglicky linked) v množině S, pokud existuje konečná posloupnost bodů $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\} \in S$ taková, že*

1. $(x_1, y_1) = (u, v)$ *a* $(x_n, y_n) = (w, z)$

2. *pro* $1 \leq i \leq 2n - 1$ *platí právě jedna z následujících rovností*

$$x_i = x_{i+1}, \quad y_i = y_{i+1}$$

3. $x_i = x_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = y_{i+2}$ *a* $y_i = y_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} = x_{i+2}$ *pro* $1 \leq i \leq 2n - 2$.

Tato posloupnost se nazývá cesta délky n. Pokud existuje právě jedna cesta spojující body (u,v), (w,z), říkáme, že body jsou jednoznačně spojeny cestou.

Lemma 1.3: *Relace „být spojen cestou“ je ekvivalence.*

Důkaz: Aby byla nějaká relace ekvivalence, musí být reflexivní, transitivní a symetrická. Což zřejmě relace „být spojen cestou“ je. ☐

Věta 1.1: *Množina $M \subset X \times Y$ neobsahuje cykl právě tehdy, když $(u, v), (w, z) \in M$ jsou spojeny nejvýše jedním cestou.*

Důkaz: Nejdříve ukážeme, že pokud množina obsahuje cykl, existuje dvojice bodů, které nejsou spojeny jednoznačně. Nechť

$$L = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_{2n}, y_{2n})\}$$

je cyklus. Zároveň je to cesta spojující body $(x_1, y_1), (x_{2n}, y_{2n})$. Další takova cesta je množina

$$L_1 = \{(x_1, y_1), (x_{2n}, y_{2n})\}.$$

Nyní ukážeme, že pokud množina M neobsahuje cykl, jsou všechny body, pokud jsou spojeny, spojeny jednoznačně. Důkaz provedeme sporem, tedy předpokládáme, že množina M neobsahuje cykl a zároveň obsahuje dva body (u,v), (w,z), které jsou spojeny dvěmi různými cestami. (Případ, kdy množina M neobsahuje žádné dva různé body spojeny cestou, nemusíme řešit, neboť je zřejmé, že pak nemůže obsahovat ani cykl.) Nechť tedy

$$L^{(1)} = \{(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}), \ldots, (x_n^{(1)}, y_n^{(1)})\},$$

kde $(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}) = (u, v)$, $(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) = (w, z)$ je jedna cesta, a

$$L^{(2)} = \{(x_1^{(2)}, y_1^{(2)}), \ldots, (x_m^{(2)}, y_m^{(2)})\},$$

kde $(x_1^{(2)}, y_1^{(2)}) = (u, v)$, $(x_m^{(2)}, y_m^{(2)}) = (w, z)$ je druhá cesta. Zvolme

$$r = \max\{i; (x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \in L^{(2)} \ a \ (x_i^{(1)}, y_i^{(1)}) \neq (w, z)\}$$

a s takové, že

$$(x_s^{(2)}, y_s^{(2)}) = (x_r^{(1)}, y_r^{(1)}).$$

Je zřejmé, že existuje právě jedno takové r a s. Definujme si množinu

$$C = \{(x_r^{(1)}, y_r^{(1)}), (x_{r+1}^{(1)}, y_{r+1}^{(1)}), ..., (x_n^{(1)}, y_n^{(1)}), (x_{m-1}^{(2)}, y_{m-1}^{(2)}), (x_{m-2}^{(2)}, y_{m-2}^{(2)}), ..., (x_{s+1}^{(2)}, y_{s+1}^{(2)})\}.$$

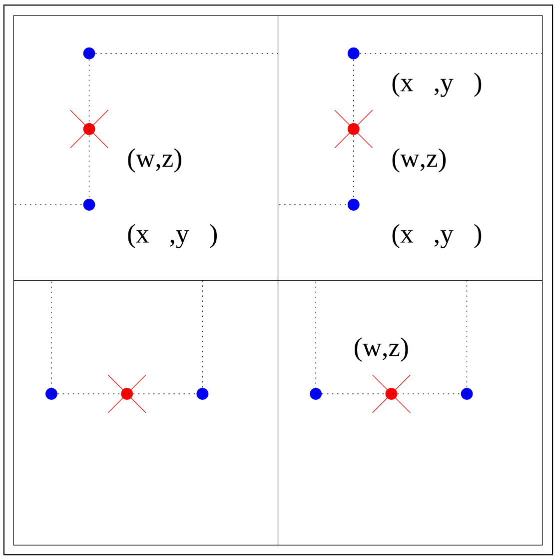
Nyní musíme rozlišit několik možností a vytvořit z množiny C cykl.

1. $x_{n-1}^{(1)} = w = x_{m-1}^{(2)}$ a zároveň
   $y_{n-1}^{(1)} < z < y_{m-1}^{(2)}$ nebo $y_{m-1}^{(2)} < z < y_{n-1}^{(1)}$

   nebo

   $y_{n-1}^{(1)} = z = y_{m-1}^{(2)}$ a zároveň
   $x_{n-1}^{(1)} < w < x_{m-1}^{(2)}$ nebo $x_{m-1}^{(2)} < w < x_{n-1}^{(1)}$.

   To znamená, že se obě cesty blíží k bodu (w, z) po stejné přímce kolmé na jednu z os, ale každý z jiné strany. Tuto situaci popisuje obrázek 2.2. V tomto případě si definujme množinu C_1 následovně:
   $C_1 = C \setminus \{(w, z)\}$.



Obrázek 1.2:

2. $x_{n-1}^{(1)} = w = x_{m-1}^{(2)}$ a zároveň
$y_{n-1}^{(1)} < y_{m-1}^{(2)} < v$ nebo $z < y_{m-1}^{(2)} < y_{n-1}^{(1)}$

   nebo

   $y_{n-1}^{(1)} = z = y_{m-1}^{(2)}$ a zároveň
   $x_{n-1}^{(1)} < x_{m-1}^{(2)} < w$ nebo $w < x_{m-1}^{(2)} < x_{n-1}^{(1)}$

   To znamená, že se obě cesty blíží k bodu (w, z) po stejné přímce kolmé na jednu z os a ze stejné strany. V tomto případě si definujme množinu C_1 následovně:
   $C_1 = C \setminus \{(x_{m-1}^{(2)}, (y_{m-1}^{(2)})\}$

3. $x_{n-1}^{(1)} = w = x_{m-1}^{(2)}$ a zároveň
$y_{m-1}^{(2)} < y_{n-1}^{(1)} < z$ nebo $z < y_{n-1}^{(1)} < y_{m-1}^{(2)}$

   nebo

   $y_{n-1}^{(1)} = z = y_{m-1}^{(2)}$ a zároveň
   $x_{m-1}^{(2)} < x_{n-1}^{(1)} < w$ nebo $w < x_{n-1}^{(1)} < x_{m-1}^{(2)}$

   Tento případ je obdobný jako předcházející. Množinu C_1 definujme:
   $C_1 = C \setminus \{(x_{n-1}^{(1)}, (y_{n-1}^{(1)})\}$

4. Pokud nenastane ani jedna z předchozích možností, pak C_1 položme rovno C

To jsme vyřešili problém týkající se napojení cest v bodě (w, z). Další bod, který může dělat problémy, je bod $(x_r^{(1)}, y_r^{(1)})$. Rozdělíme si tedy situaci zase do několika možností.

1. $x_r^{(1)} = x_{r+1}^{(1)} = x_{s+1}^{(2)}$ a zároveň
$y_r^{(1)} < y_{r+1}^{(1)} < y_{s+1}^{(2)}$ nebo $y_{s+1}^{(2)} < y_{r+1}^{(1)} < y_r^{(1)}$

   nebo

   $y_r^{(1)} = y_{r+1}^{(1)} = y_{s+1}^{(2)}$ a zároveň
   $x_r^{(1)} < x_{r+1}^{(1)} < x_{s+1}^{(2)}$ nebo $x_{s+1}^{(2)} < x_{r+1}^{(1)} < x_r^{(1)}$,

   pak $C_2 = C_1 \setminus \{(x_{r+1}^{(1)}, (y_{r+1}^{(1)})\}$

2. $x_r^{(1)} = x_{r+1}^{(1)} = x_{s+1}^{(2)}$ a zároveň
$y_r^{(1)} < y_{s+1}^{(2)} < y_{r+1}^{(1)}$ nebo $y_{r+1}^{(1)} < y_{s+1}^{(2)} < y_r^{(1)}$

   nebo

   $y_r^{(1)} = y_{r+1}$

Kapitola 2

Marginálový problém pro nespočetné množiny

V této kapitole si ukážeme, že ne všechna tvrzení uvedená v předchozí kapitole se dají zobecnit i na nespočetné prostory. V celé kapitole budeme uvažovat, že prostory X, Y jsou Polské prostory. Připomeňme si některé důležité poznatky z teorie míry.

Nejdříve Lebesgův rozklad konečné míry μ vzhledem ke konečné míře ν. Tedy

$$\mu = \mu^a + \mu^s,$$

kde míra μ^a je absolutně spojitá vzhledem k ν ($\mu^a \ll \nu$) a míry μ^s a ν jsou singulární ($\mu^s \perp \nu$). Podle Lebesguovy věty o rozkladu (např. [13, strana 120]) tento rozklad existuje a je určen jednoznačně.

Radon-Nikodýmova věta (např.[13, strana 121]) říká, že pokud máme konečné míry μ a ν, $\mu \ll \nu$, pak existuje konečná funkce f, pro kterou platí

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

Tato Funkce se nazývá Radon-Nikodýmova derivace míry μ vzhledem k míře ν a značí se $\frac{d\mu}{d\nu}$.

V minulé kapitole jsme používali výraz nosič míry. Pro tuto kapitolu si zaveďme výraz podpůrná množina míry P. Tedy množina A je podpůrná množina míry P, pokud platí $P(A) = 1$.

Připomeňme si také, co máme dokázano i pro nespočetné prostory.

(a) Množina marginální jednoznačnosti neobsahuje cykl.

(b) Pokud množina neobsahuje cykl, lze ji rozložit na sjednocení grafu a inverzního grafu aperiodických funkcí. A obráceně, sjednocení grafu a inverzního grafu dvou aperiodických funkcí neobsahuje cykl.

V nespočetném prostoru již ale nemůžeme říct, že každá množina M neobsahující cykl je množinou marginální jednoznačnosti (viz. příklad 2.1). Z tohoto příkladu je také vidět, že pokud již máme nějakou simpliciální míru, nemůžeme o jejím nosiči říct, že je to množina marginální jednoznačnosti.

Vyslovme si zde dvě důležité věty o podpůrné množině simpliciální míry.

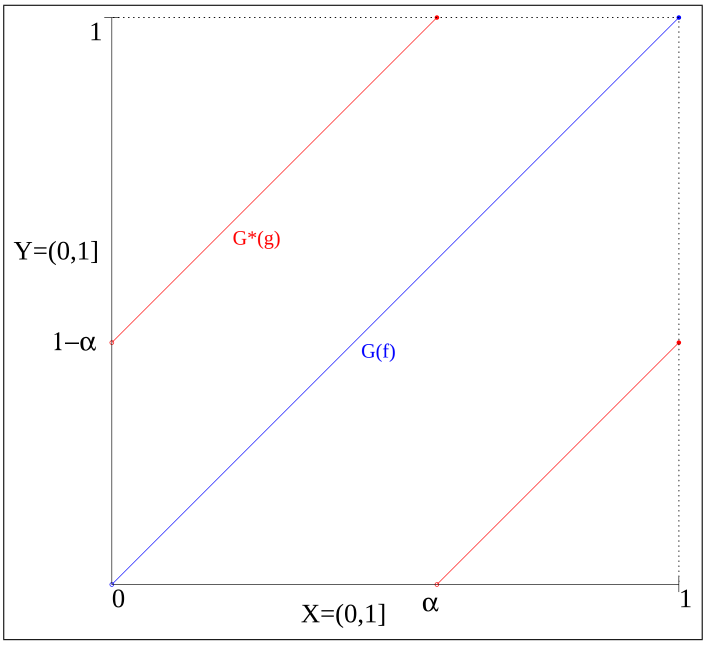
Věta 2.1: *Pro libovolnou simpliciální míru existuje podpůrná množina M, která je borelovská a neobsahuje cykl.*

Důkaz: Toto tvrzení je dokázano například v článku [7].

Věta 2.2: *Pro libovolnou simpliciální míru existuje podpůrná množina D, která může být vyjádřena jako sjednocení nejvýše spočetně mnoha množin marginální jednoznačnosti D_i takových, že $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$.*

Důkaz: Tuto větu lze najít v [1].

Příklad 2.1: Tento příklad lze taktéž nalézt v [1]. Nechť $X = Y = (0, 1]$ a funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ jsou dány předpisem $f(x) = x$ a $g(y) = (y + \alpha) \mod 1$, kde α je iracionální číslo z intervalu $(0, 1)$.



Obrázek 2.1: Množina M

Tyto funkce jsou aperiodické, neboť

$$(f \circ g)^n = (x + n\alpha) \mod 1 = x$$

právě tehdy, když $n*\alpha$ je celé číslo. To je ale ve sporu s $\alpha \in \mathbb{I}$. Množina $M = G(f) \cup G^*(g)$ tedy neobsahuje cykl. Přesto to není množina marginální jednoznačnosti. Nechť P_f je rovnoměrná míra na $G(f)$ a P_g je rovnoměrná míra na $G^*(g)$. Tyto míry mají oba marginály rovny λ (Lebesgueově míře).

Nyní si ukažme, že pravděpodobnostní míra P definována na množině M následovně je simpliciální.

$$(P|G(f))_x = m = (P|G^*(g))_x, \text{ kde } \frac{dm}{d\lambda} = x.$$

Nechť tedy Q je libovolná pravděpodobnostní míra se stejnými marginály jako míra P. Označme si $D_f(x)$ a $D_g(x)$ hustoty měr $(Q|G(f))_x$ a $(Q|G^*(g))_x$ vzhledem k Lebesgueově míře λ. Pokud ukážeme, že $P = Q$, pak jistě P musí být simpliciální mírou. K tomu potřebujeme ukázat $D_f(x) = D_g(x) = x$ $\lambda-$skoro všude. Z vlastnosti $Marg(P) = Marg(Q)$ víme, že

$$D_f(x) + D_g(x) = 2x \quad a \quad D_f(y) + D_g(g(y)) = y + g(y) \quad \lambda - s.v.$$

Tyto rovnosti ukazují, že funkce $G_f(x) - x$ a $D_g(x) - x$ jsou g-invariantní funkce, neboť

$$D_g(x) - x = x - D_f(x) = D_g(g(x)) - g(x)$$

$$D_f(g(x)) - g(x) = g(x) - D_g(g(x)) = D_f(x) - x,$$

a tudíž musí být konstantní, neboť jsou měřitelné vzhledem k σ-algebře g-invariantních množin a Lebesguova míra je g-ergodická. Nechť $G_f(x) - x = c$ a $D_g(x) - x = d$, pak musí platit, že $c = -d$. Možnost $c < 0$ nemůže nastat, neboť podle rekurentní věty [4, strana 26], která říká, že pro $\lambda - s.v.$ $x \in (0, 1]$ je posloupnost

$$D_f(g^n(x)) = c + g^n(x) \text{ hustá v intervalu } (c, 1 + c],$$

což je ale ve sporu s tím, že D_f je hustota, a tudíž $\lambda - s.v.$ nezáporná. Stejně tak d nemůže být záporné. Ukázali jsme, že $D_f(x) = x$ a $D_g(x) = x$ $\lambda - s.v.$, tedy $P = Q$. Libovolná míra na množině M se stejnými marginály jako míra P je rovna $P - s.v.$, a tak ji nelze zapsat jako konvexní kombinaci dvou různých měr, tedy míra P je simpliciální míra. $\triangle$

2.1 Množiny marginální jednoznačnosti

Nicméně je zřejmé, že každá pravděpodobnostní míra na množině marginální jednoznačnosti je simpliciální. Pokud tedy najdeme podmínku ukazující, že nějaká množina je množina marginální jednoznačnosti, máme i postačující (nikoliv však nutnou, jak ukazuje příklad 2.1) podmínku pro simpliciální míru. Tuto podmínku uvedl Štěpán v [14]. Nejdříve si uveďme jedno lemma (viz. také [14])

Věta 2.3: *Nechť $D = G(f) \cup G^*(g)$, kde $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ jsou borelovské funkce. Označme $r : X \to X$ složení $f \circ g$ a množinu všech r-invariantních měr na $X \setminus F(r)$, kde $F(r)$ je množina pevných bodů funkce r, označme $I(f,g)$. Potom pro libovolnou zobecněnou míru $N \in M_0(D)$ platí, že míra $n := (N|G(f) \setminus G^*(g))$ je r-invariantní míra z $I(f,g)$.Navíc $N = 0$ právě tehdy, pokud $n = 0$.*

Důkaz: Tvrzení, že $n(F(r)) = 0$, plyne z definice míry n. Nyní musíme ukázat, že míra n je r-invariantní, tedy $r \circ n = n$.

$$f \circ n = (N|G(f) \setminus G^*(g))_y = (-N|G^*(g))_y,$$

$$r \circ n = g \circ (-N|G^*(g))_y = (-N|G^*(g))_x = (N|G(f) \setminus G^*(g))_x = n.$$

Zbývá ukázat, že $N = 0 \iff n = 0$. Implikace $N = 0 \Rightarrow n = 0$ je zřejmá. Pokud $n = 0$, pak tedy $N|G(f) \setminus G^*(g) = 0$, a tudíž i $N|G^*(g) = 0$.

□

Věta 2.4: *Nechť $D = G(f) \cup G^*(g); f, g$ Borelovské funkce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) D je množina marginální jednoznačnosti

(b) množina $M_0(D)$ obsahuje pouze triviální míru

(c) jediná zobecněná r-invariantní míra p na X taková, že $p(F(r)) = 0$, je triviální míra

(d) neexistuje pravděpodobnostní r-invariantní míra P na X taková, že $P(F(r)) = 0$

(e) neexistuje pravděpodobnostní r-ergodická míra P_r na X taková, že $P_r(F(r)) = 0$

Důkaz:
(2) $\Rightarrow$(1) Pokud existují dvě různé pravděpodobnostní míry na D se stejnými marginály, pak jejich rozdíl je konečná zobecněná míra s nulovými marginály. Tedy pokud existuje pouze triviální zobecněná míra s nulovými marginály, musí být množina D množina marginální jednoznačnosti.
(1) $\Rightarrow$(2) Nechť D je množina marginální jednoznačnosti a zároveň N je zobecněná konečná míra na D s nulovými marginály. Pak jistě $N^+(D) = N^-(D)$ a navíc mají tyto míry stejné marginály a jsou to singulární, tedy různé, míry. Pak dvojice měr $\frac{N^+}{N^+(D)}$ a $\frac{N^-}{N^-(D)}$ jsou různé pravěpodobnostní míry na D, které mají stejné marginály.
(2) $\iff$ (3) Plyne z předchozí věty.
(3) $\Rightarrow$ (4) Plyne z tvrzení, že pokud n je $r-$invariantní míra, pak i míry n^+ a n^- jsou $r-$invariantní a tudíž míry $\frac{n^+}{n^+(X)}$ a $\frac{n^-}{n^-(X)}$ jsou r-invariantní a pravděpodobnostní.
(4) $\iff$ (5) plyne z tvrzení, že množina všech r-invariantních měr na dané množině prázdná právě tehdy, pokud je prázdná množina všech r-ergodických měr na dané množině.

□

Důsledek: *Nechť D je množina, kterou lze zapsat jako sjednocení grafu a inverzního grafu dvou měřitelných aperiodických funkcí. Potom D je množina marginální jednoznačnosti, právě když platí*

$$p(x \in X : g(f(x)) = x) = 1$$

pro všechny pravděpodobnostní r-invariantní míry.

Důkaz: Pokud existuje nějaká pravděpodobnostní $r-$invariantní míra p, pro kterou neplatí

$$p(x \in X : g(f(x)) = x) = 1,$$

pak míra p' definována $p' = p$ na $X \setminus F(r)$ a $p' = 0$ na $F(r)$ je nenulová $r-$invariantní míra na $X \setminus F(r)$, neboť

$$\begin{aligned} p'(A) &= p'(A \cap (X - F(r))) = p(A \cap (X - F(r))) = r \circ p(A \cap (X - F(r))) \\ &= p(r(A) \cap (X \setminus F(r))) = p(r(A)) \end{aligned}$$

a míra $\frac{p'}{p'(X)}$ je r-invariantní pravděpodobnostní míra. □

Příklad 2.2: [Hairpin set] Nechť $f, g : [0,1] \to [0,1]$ jsou měřitelné neklesající funkce takové, že

$$f(0) = g(0) = 0$$
$$f(1) = g(1) = 1$$
$$g(f(x)) < x \quad \forall x \in (0,1)$$

Množina $D = G(f) \cup G^*(g)$ na obrázku 3.2 se nazýva hairpin.

Ukážeme si, že tato množina je množina marginální jednoznačnosti, a tudíž každá míra na ní definována je simpliciální. Pokud by nebyla, znamenalo by to podle věty 2.4, že existuje nějaká r-ergodická míra P na (0,1). Podle Birkhoffovy ergodické věty (např. [13, strana 395]) tedy platí skoro jistě

$$\int_0^1 y dP(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r^i(x),$$

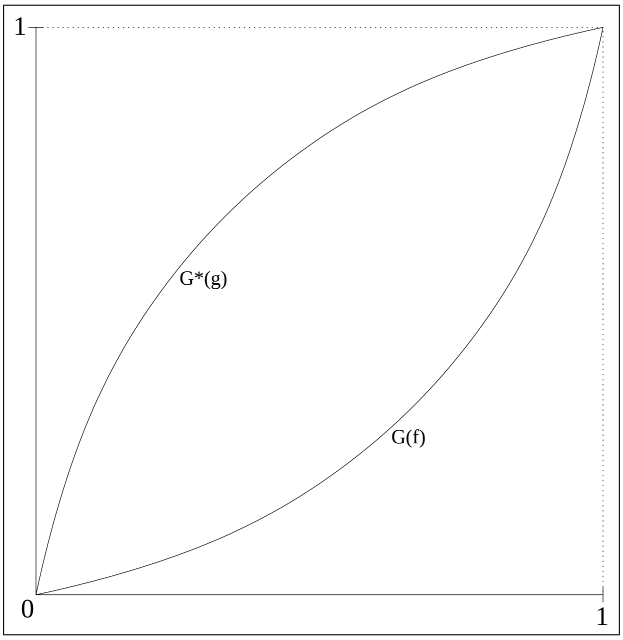
ale víme, že $r(x) < x \quad \forall x \in (0,1)$, tedy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r^i(x) < x \quad \forall x \in (0,1).$$

$$\int_0^1 y dP(y) < x \text{ s.j. na } (0,1).$$

Taková pravděpodobnostní míra e, pro kterou by toto platilo a přitom existovala množina $A \subset (0,1)$, $e(A) = 1$, však neexistuje. Tedy tato množina je množina marginální jednoznačnosti. Měrami, které mají za nosič takovéto množiny, se zabývají publikace [5] a [12], odkud je také tento příklad.

△



Obrázek 2.2: „Hairpin set“

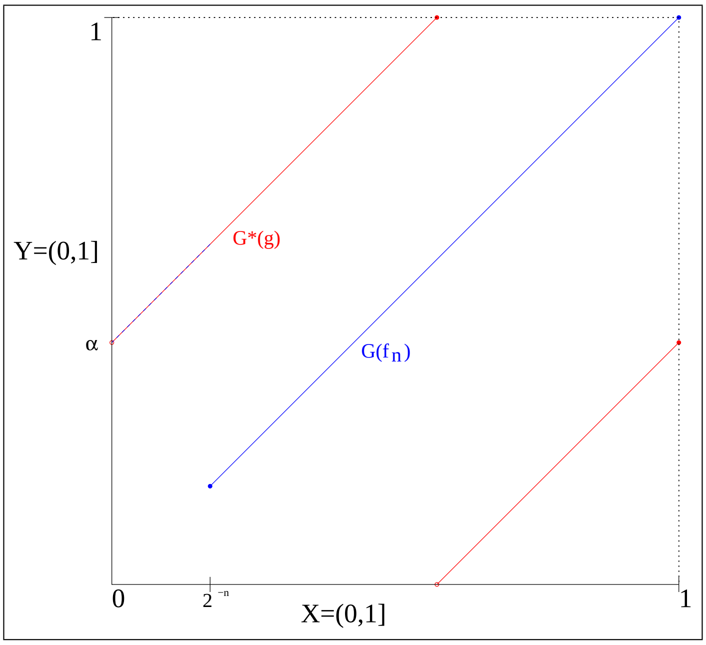
Příklad 2.3: Vraťme se k příkladu 2.1. Ukázali jsme si, že množina M z tohoto příkladu není množina marginální jednoznačnosti. Nyní si ale ukážeme, že existuje rostoucí posloupnost množin M_n, které již jsou množinami marginální jednoznačnosti a jejich sjednocení je množina M. Množiny M_n definujme následovně.

$$
\begin{aligned}
M_n = G(f_n) \cup G^*(g) \text{ kde } f_n(x) &= f(x), \quad x \in [2^{-n}, 1] \\
f_n(x) &= g^{-1}(x), \quad x \in (0, 2^{-n})
\end{aligned}
$$

Podle věty 2.4, pokud množina M_n není množina marginální jednoznačnosti, existuje zobecněná míra N s nulovými marginály taková, že $n := (N|G(f_n)\setminus G^*(g))_x$ je r_n-invariantní míra, a tudíž míra n^+ je také r_n-invariantní. To ale znamená, že na intervalu $[2^{-n}, 1]$ je míra n^+ invariatní vůči posunutí o iracionální číslo, tedy rovnoměrná na tomto intervalu. Je zřejmé, že míra n^+ je nulová na intervalu $(1-\alpha, 1-\alpha+2^{-n})$, a tudíž nemůže být rovnoměrná nenulová.

$\triangle$

Nyní tedy máme nutnou a postačující podmínku pro množiny typu $D = G(f) \cup G^*(g)$; f, g borelovské
Dále máme, že množina marginální jednoznačnosti je pouze množina bez cyklu, kterou lze rozložit na $D = G(f) \cup G^*(g)$. Otázka je, jestli lze každou měřitelnou množinu tvaru $D = G(f) \cup G^*(g)$ napsat jako sjednocení grafu a inverzního grafu dvou měřitelných funkcí. Ukážeme si, že nelze.



Obrázek 2.3: Množina M_n

Množina B z obrázku 3.4 je množina s dvojprvkovými řezy, a tudíž podle Königovy věty ji lze rozložit na dvě bijekce. Tyto bijekce ale nelze sestrojit měřitelné, jak dokazuje Laczkovich [8] ve větě 1.

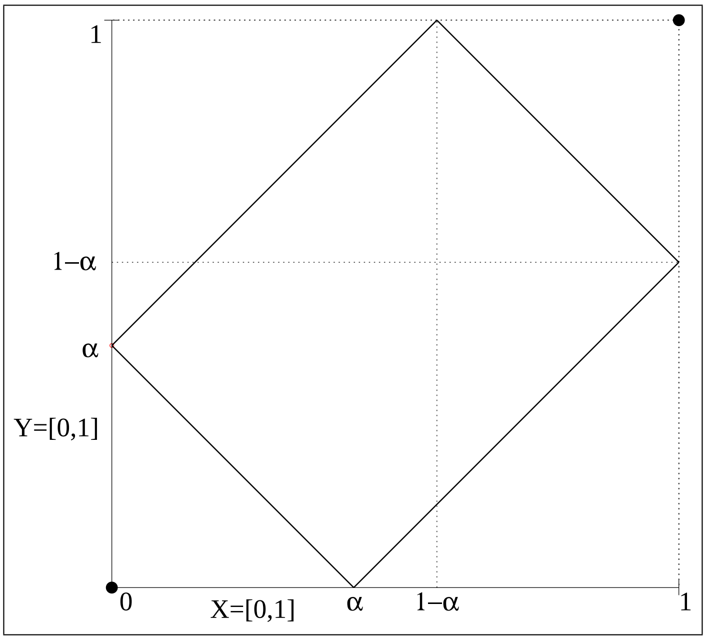
Další protipříklad plyne například z Losertovy věty [10, strana 392].

Věta 2.5: *[Losertova věta] Existuje simpliciální pravděpodobnostní míra P na $[0,1]^2$ s marginálami rovnými Lebesguově míře taková, že nejmenší uzavřená množina míry 1 je $[0,1]^2$ a graf, případně inverzní graf, libovolné měřitelné funkce je míry nula.*

Důsledek: *Protože se jedná o simpliciální míru, lze najít dvě aperiodické funkce tak, že množina $G(f) \cup G^*(g)$ je míry jedna. Tyto funkce musí tedy být neměřitelné, množiny $G(f)$ a $G^*(g)$ jsou neměřitelné množiny, ale jejich sjednocení již je měřitelná množina (věta 2.1). Z věty 2.2 plyne existence množiny marginální jednoznačnosti, která má nenulovou míru vzhledem k míře P. Ani tuto množinu nelze zapsat jako sjednocení grafu a inverzního grafu dvou měřitelných funkcí*

Až do této doby jsme předpokládali, že definiční obor funkce f je celý prostor X a definiční obor funkce g celý prostor Y. Otázka je, jestli můžeme naše tvrzení zobecnit i na takové funkce, jejichž definiční obory nejsou celé prostory. Uveďme si zde výsledek z [15].

Uvažujme funkci $f : D(f) \to Y$ a funkci $g : D(g) \to X$ a množiny $A(f) = X \setminus D(f)$ a $A(g) = Y \setminus D(g)$, množina $D = G(f) \cup G^*(g)$ borelovská množina. Rozšiřme si prostor X na prostor $X_0 = X \cup A(g)$ a prostor Y na $Y_0 = Y \cup A(f)$. Nyní uvažujme funkce f_0 a g_0 (viz. obr. 3.5) definované



Obrázek 2.4: Laczkovichův obdélník

$$f_0(x) = f(x) \text{ pro } x \in D(f) \text{ a } f_0(x) = x \text{ pro } x \in A(f) \cup A(g)$$
$$g_0(y) = g(y) \text{ pro } y \in D(g) \text{ a } g_0(y) = y \text{ pro } y \in A(f) \cup A(g)$$

a množinu $D_0 = G(f_0) \cup G^*(g_0)$.

Věta 2.6:

(a) Množina D_0 je množina marginální jednoznačnosti právě tehdy, když D je množina marginální jednoznačnosti.

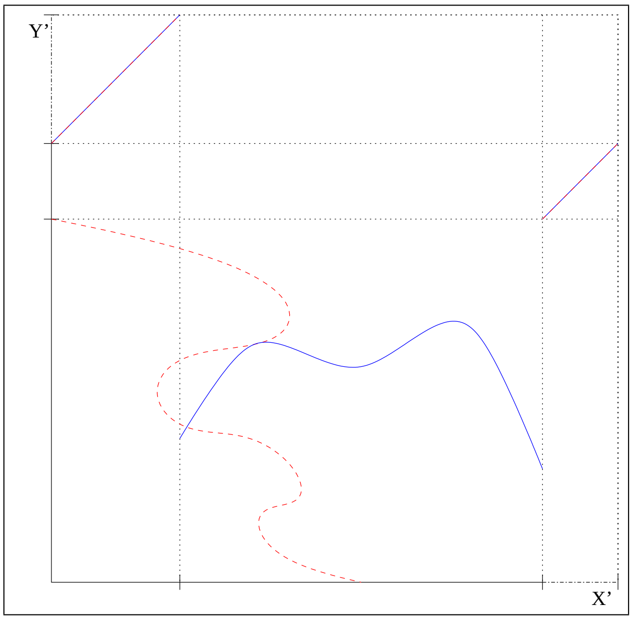
(b) Libovolný cyklus v množině D_0 leží v množině D.

(c) $M_0(D_0) = M_0(D)$, tedy pro libovolnou míru $N_0 \in M_0(D_0)$ platí: $|N_0||(D_0 \setminus D) = 0$

Důkaz:

(1) Pokud množina D je množina marginální jednoznačnosti, jediná zobecněná míra s nulovými marginály na D je triviální míra. Pokud by zároveň existovala nějaká netriviální míra s nulovými marginály na množině D_0, pak musí být na množině $D_0 \setminus D$ nulová, jak je vidět z obrázku 3.5, tudíž taková míra neexistuje a množina D_0 je množina marginální jednoznačnosti. Zároveň je vidět, že platí i tvrzení (3). Pokud je množina D_0 množina marginální jednoznačnosti, pak i její podmnožina D je množina marginální jednoznačnosti.

(2) Nechť L je cyklus v D_0 a $(u, v) \in L \cup (D_0 \setminus D)$. Potom mohou nastat 2 možnosti:



Obrázek 2.5: Množina D_0

(a) (u,v) leží na diagonále čtverce $A(f) \times A(f)$, vzhledem k tomu, že bod (u,v) náleží do cyklu L, musí existovat dvojice bodů (x,y) a (w,z) takové, že $x = u$, $v \neq y$, $v = z$ a $u \neq w$. Ale takový bod (w,z) neexistuje

(b) Situace, kdy bod (u,v) leží na diagonále čtverce $A(g) \times A(g)$ se vyřeší podobně.

2.2 Simpliciální míry

V této části se zaměříme na nutnou a postačující podmínku pro simpliciální míry.

Věta 2.7: *Pravděpodobnostní míra P s marginálami rovnými Lebesguově míře je simpliciální pravě tehdy, pokud množina*

$$L = \{f + g : f : X \to \mathbb{R}, g : Y \to \mathbb{R}, f \in L_1(\lambda), g \in L_1(\lambda)\}$$

je hustá množina v $L_1(P)$.

Poznámka: *Tuto větu lze rozšířit i na míry, které nemají za marginály Lebesguovu míru, ale libovolnou pravděpodobnostní míru. Tedy pravděpodobnostní míra P s marginálami P_X a P_Y je simpliciální právě tehdy, pokud množina*

$$L = \{f + g : f : X \to \mathbb{R}, g : Y \to \mathbb{R}, f \in L_1(P_X), g \in L_1(P_Y)\}$$

je hustá množina v $L_1(P)$.
Tuto větu vyslovil a dokázal Douglas v článku [3].

Než si ukážeme důkaz této věty, dokážeme si ještě pomocné lemma.

Lemma 2.1: *Pravděpodobnostní míra P je simpliciální právě tehdy, pokud neexistuje nenulová zobecněná míra ν s nulovými marginálami taková, že $|\nu(A)| \leq P(A)$ pro libovolnou měřitelnou množinu A.*

Důkaz: Předpokládejme, že P je simpliciální, a přesto existuje míra ν splňující výše uvedené podmínky. Pak ale

$$P = \frac{(P+\nu) + (P-\nu)}{2},$$

kde $(P+\nu)$ a $(P-\nu)$ jsou zřejmě různé pravděpodobnostní míry se stejnými marginálami jako P a tudíž je to spor s tím, že míra P je simpliciální.

Nyní předpokládejme, že míra P není simplicální, a tudíž existují ruzné míry P_1 a P_2 takové, že

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

Tedy

$$P_1 = 2P - P_2 = P + (P - P_2),$$

kde $(P - P_2)$ je míra s nulovými marginálami a $|(P - P_2)(A)| \leq P(A)$, neboť P_1 a P_2 jsou pravděpodobnostní míry. $\square$

Důkaz věty 2.7: Pokud míra není simpliciální, máme podle předchozího lemmatu zobecněnou míru ν, pro kterou platí $|\nu(A)| \leq P(A)$ pro A měřitelnou, a proto, podle Radon-Nikodýmovy věty, existuje nenulová funkce $F(x,y)$ taková, že $|F(x,y)| \leq 1$, a tudíž $F \in L_1(P)$. Díky nulovosti marginálů míry ν dostaneme

$$\int_{I\times I} f(x)F(x,y)dP = 0$$

pro libovolnou funkci $f(x) \in L_1(\lambda)$

$$\int_{I\times I} g(y)F(x,y)dP = 0$$

pro libovolnou funkci $g(x) \in L_1(\lambda)$, a tudíž

$$\int_{I\times I} (f(x) + g(y))F(x,y)dP = 0.$$

$\square$

Lindenstrauss použil tuto větu, aby dokázal, že libovolná simpliciální dvojitě stochastická míra je singulární vzhledem k součinové míře $\lambda \times \lambda$ (článek [9]). Toto tvrzení ještě zobecnil na libovolnou spojitou simpliciální míru Štěpán v [14, Věta 3]. Tedy podobně jako věta **??** omezuje velikost množiny marginální jednoznačnosti (a tedy nosiče simpliciální míry) ve spočetném a konečném případě, můžeme vyslovit větu, která popisuje velikost těchto množin v nespočetném případě.

Věta 2.8: *Nechť μ je pravěpodobnostní míra na X a ν je pravděpodobnostní míra na Y, μ a ν spojité. Potom libovolná simpliciální míra s marginálami rovnými μ a ν je singulární vzhledem k součinové míře $\mu \times \nu$.*

Důkaz: Uvedeme si zde důkaz z [7]. Předpokládejme, že množina $\mu \times \nu(A) > 0$. Potom existují dva různé body x a x' takové, že $A^x \cap A^{x'}$ má kladnou míru ν. Vzhledem ke spojitosti míry ν tedy existují dva různé body $y, y' \in A^x \cap A^{x'}$. To ale znamená, že množina $L = \{(x, y), (x, y'), (x', y'), (x', y)\}$ je cyklus, který je obsažen v množině A. Ale protože existuje podpůrná borelovská množina simpliciální míry neobsahující cykl, musí mít tato množina míru nula vzhledem k součinové míře. $\square$

Důsledek: *Každá množina marginální jednoznačnosti je míry nula vzhledem k součinové míře dvou libovolných spojitých měr.*

Uveďme si zde ještě jedno lemma z [14].

Lemma 2.2: *Nechť $0 \leq n \leq m$ jsou konečné míry. Potom platí $n \leq m^a$, kde m^a značí absolutně spojitou část m vzhledem k n.*

Důkaz: Existuje množina B taková, že $n(B^c) = 0$ a $m^a(A) = m(A \cap M)$ pro všechny A měřitelné (např.[11, strana 45]). Tedy

$$n(A) = n(A \cap M) \leq m(A \cap M) = m^a(A).$$

$\square$

Uveďme si zde větu z [14]

Věta 2.9: *Míra P je simpliciální právě tehdy, když*

$$ess\ inf\ \frac{dP^a}{d|n|} = 0$$

pro libovolnou míru $n \in M_0(X \times Y)$, kde P^a je absolutně spojitá část míry P vzhledem k $|n|$.

Důkaz: Podle Radon-Nikodýmovy věty $\frac{dP^a}{d|n|}$ existuje. Nechť existuje podpůrná množina M míry P a podpůrná množina D míry $|n|$ taková, že $D \setminus M$ je nenulová množina vzhledem k míře $|n|$, pak jistě $\frac{dP'}{d|n|}$ je na této množině $|n| - s.j.$ nulová. Zajímají nás tedy takové míry n, pro které existuje podpůrná množina, která je podmnožina množiny M. Nechť

$$ess\ inf\ \frac{dP'}{d|n|} = \alpha > 0$$

pro nějakou takovou $n \in M_0(X \times Y)$. Definujme si míru

$$n' = \frac{n\alpha}{2}.$$

Tato míra má jistě nulové marginály a $|n'| < P$ a tudíž míry $P_1 = p + n'$ a $P_2 = p - n'$ jsou pravděpodobnostní míry se stejnými marginálami jako P a

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

To je ale spor s tím, že míra P je simpliciální.

Nyní předpokládejme, že platí

$$ess\ inf\ \frac{dP^a}{d|n|} = 0$$

pro všechny míry $n \in M_0(X \times Y)$ a přitom míru P lze napsat jako lineární kombinaci $P = 1/2(Q + R)$, kde Q a R jsou různé pravděpodobnostní míry na $X \times Y$ se stejnými marginálami jako P. Potom tedy zobecněná míra $n = P - Q$ je nenulová a má nulové marginály. Zřejme platí $|n| \leq 4P \Rightarrow |n| \leq 4P^a$ (lemma 2.2). Je zřejmé, že $\frac{d|n|}{d|n|} = 1$ $|n| - s.v.$, a tudíž $\frac{dP^a}{d\nu} \geq 1/4\ |n| - s.v.$. To je ale spor. $\square$

Věta 2.10: *Míra P definována na množině $D = G(f) \cup G^*(g)$, kde f, g jsou borelovské funkce, funkce f definována na X a g na Y, $G(f) \cup G^*(g) = \emptyset$ je simpliciální právě tehdy, pokud*

$$ess\ inf\ \frac{d(P|G(f))_x^a}{dp} = 0$$

nebo

$$ess\ inf\ \frac{d(P|G^*(g))_y^a}{df \circ p} = 0.$$

pro libovolnou $p \in I(f, g)$.

Důkaz: Tato věta je např. v [14]. Definujme si $\overline{f}(x) = (x, f(x))$ a $\overline{g}(y) = (g(y), y)$ a zobrazení $T : I(r) \to M_0(D)$, kde $I(r)$ je množina r-invariantních měr následovně.

$$T(p) = \overline{f} \circ p - \overline{g} \circ f \circ p.$$

Přesvědčme se, že opravdu $T(p)$ je míra s nulovými marginálami. Díky r-invariantnosti p dostáváme:

$$(T(p))_X = (\overline{f} \circ p)_X - (\overline{g} \circ f \circ p)_X = p - p = 0.$$

Stačí tedy dopočítat druhou marginálu.

$$(T(p))_Y = (\overline{f} \circ p)_Y - (\overline{g} \circ f \circ p)_Y = f \circ p - f \circ p = 0.$$

Je zřejmé, že každé míře $N \in M_0(0)$ můžeme přiřadit r-invariantní míru $p = (N|G(f))_x$, $T(p) = N$. Tedy podle předchozí věty máme, že míra P je simpliciální právě tehdy, když

$$ess\ inf\ \frac{dP^a}{d|T(p)|} = 0$$

pro libovolnou míru $p \in I(r)$. Protože

$$T(p) = \overline{f} \circ p - \overline{g} \circ f \circ p,$$

kde $\overline{f} \circ p$ a $\overline{g} \circ f \circ p$ jsou singulární míry, musí platit

$$ess\ inf\ \frac{d(P|G(f))^a}{d(\overline{f} \circ p)} = 0$$

nebo

$$ess\ inf\ \frac{d(P|G^*(g))^a}{d(\overline{g} \circ f \circ p)} = 0.$$

Dále máme $(P|G(f)) = \overline{f} \circ ((P|G(f))_x)$ a $(P|G^*(g)) = \overline{g} \circ ((P|G^*(g))_y)$. Odtud dostáváme tvrzení věty.

□

Poznámka: *Podle této věty je ihned vidět, že míra P z příkladu 2.1 je simpliciální.*

Závěr

Shrňme si nyní stručně uvedené poznatky. Co se týče spočetných prostorů, nutná a postačující podmínka pro simpliciální míru je, že její nosič nesmí obsahovat cykl. Tato podmínka je ekvivalentní s tím, že nosič je množina marginální jednoznačnosti. Nutná a postačující podmínka pro množinu marginální jednoznačnosti je, že každá její konečná podmnožina je množina marginální jednoznačnosti.

Co se týče prostorů nespočetných, není již situace tak jednoduchá. Existují simpliciální míry takové, že žádná množina A s vlastností $P(A) = 1$ není množina marginální jednoznačnosti. V tomto případě se soustřeďme na množinu $M_0(X \times Y)$. Pokud

$$ess\ inf\ \frac{dP^a}{d|n|} = 0$$

pro libovolnou míru $n \in M_0(X \times Y)$,pak míra P je simpliciální. Můžeme také využít skutečnost, že pokud míra je simpliciální, existuje množina D taková, že $P(D) = 1$ a $D = G(f) \cup G^*(g)$, kde f, g jsou aperiodické funkce. Pokud jsou tyto funkce měřitelné, je míra P simpliciální, pokud

$$ess\ inf\ \frac{d(P|G(f))_x^a}{dp} = 0$$

nebo

$$ess\ inf\ \frac{d(P|G^*(g))_y^a}{df \circ p} = 0.$$

Literatura

[1] V. Beneš and J. Štěpán. The support of extremal probability measures with given marginals. In *M. L. Puri et al (eds), Mathematical statistics and probability theory, Vol. A*, pages 33–41. Reidel, Dordrecht, 1987.

[2] G. Birkhoff. *Lattice Theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, revised edition. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1948.

[3] R. G. Douglas. On extremal measures and subspace density. *Michigan Math. J.*, 11:243–246, 1964.

[4] P. R. Halmos. *Lectures on ergodic theory.* Publications of the Mathematical Society of Japan, no. 3. The Mathematical Society of Japan, 1956.

[5] A. Kaminski, H. Sherwood, and M. D. Taylor. Doubly stochastic measures, topologies, and laticework hairpins. *J. Math. Anal. Appl.*, 152:252–268, 1990.

[6] S. King and R. Shiflett. Doubly stochastic operators and the history of Birkhoff's problem 111. In *Stochastic processes and functional analysis*, volume 238 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 411–440. Dekker, New York, 2004.

[7] A. Kłopotowski, M. G. Nadkarni, H. Sarbadhikari, and S. M. Srivastava. Sets with doubleton sections, good sets and ergodic theory. *Fund. Math.*, 173(2):133–158, 2002.

[8] M. Laczkovich. Closed sets without measurable matching. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(3):894–896, 1988.

[9] J. Lindenstrauss. A remark on extreme doubly stochastic measures. *Amer. Math. Monthly*, 72:379–382, 1965.

[10] V. Losert. Counterexamples to some conjectures about doubly stochastic measures. *Pacific J. Math.*, 99(2):387–397, 1982.

[11] J. Malý, J. a Lukeš. *Míra a integrál.* Karolinum, Praha, 2002.

[12] H. Sherwood and M. D. Taylor. Doubly stochastic measures with hairpin support. *Probab. Theory Related Fields*, 78(4):617–626, 1988.

[13] J. Štěpán. *Teorie pravděpodobnosti-Matematické základy.* Academia, Praha, 1987.

[14] J. Štěpán. Simplicial measures and sets of uniqueness in the marginal problem. *Statist. Decisions*, 11(3):289–299, 1993.

[15] J. Štěpán. Extremal probability measures with given marginals. *Preprint*, 2006.

[16] V. Strassen. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Math. Statist*, 36:423–439, 1965.