Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Pavel Charamza

Zobecnění Markowitzova modelu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie
Studijní plán: Ekonometrie

Na totmo místě bych rád poděkoval RNDr. Ing. Milošovi Kopovi za pomoc při vedení této práce a za poskytnutí přístupu k potřebnému softwaru.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 16.4.2006

Pavel Charamza

Obsah

Název práce: Zobecnění Markowitzova modelu
Autor: Pavel Charamza
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa
e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: Tato práce se zabývá problematikou optimálního výběru portfolia z hlediska střední hodnoty a rozptylu konečného majetku investora. Vychází z práce Harryho S. Markowitze a mnoha jiných autorů. Uvádíme modely pro jedno časové období společně s jejich analytickým řešením. Je ukázána ekvivalence mezi těmito modely. Zavádíme modely pro více časových období. Odvozujeme analytické řešení pro modely s více časovými obdobími. Dokazujeme ekvivalenci modelů pro více časových období. Do základních modelů přidáváme bezrizikové aktivum. Poukazujeme na některé nedostatky základních modelů a konstruujeme nový model, který odstraňuje některé výhrady, jako např. nepřítomnost transakčních nákladů a povolení prodejů na krátko. Na konkrétních datech s pomocí scénářů nacházíme optimální řešení tohoto nového modelu. Zkoumáme vliv transakčních nákladů na množství reinvestic. Také se zabýváme závislostí rizika na minimálním požadovaném výnosu.
Klíčová slova: Markowitzův model, multiperiodický model výběru portfolia, analytické řešení, transakční náklady, prodej na krátko

Title: Generalization of Markowitz Model
Author: Pavel Charamza
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: This thesis deals with portfolio selection with respect to expected value and variance of final wealth of the investor. It is based on work of Harry S. Markowitz and many other authors. Single period models with their solutions are presented. Equivalency of these models is shown. Multiperiod portfolio selection models are introduced. We derive analytical solution for optimal portfolio policy. Equivalency of multiperiod models is proved. Riskless asset is added to our models. Limitations of basic models are shown and new model is constructed. This new model includes transaction costs and does not allow short sales. On real data, using scenario approach, optimal solution for this new model is calculated. A transaction costs effect and dependence of risk on minimal required wealth is examined.
Keywords: Markowitz model, multiperiod portfolio selection, analytical solution, transaction costs, short sales

Úvod

V 50. letech minulého století Harry S. Markowitz navrhl rozdělit investici mezi několik aktiv, tedy diverzifikovat portfolio. Základem moderní teorie portfolia se stal Markowitzův článek „Portfolio Selection", který se v roce 1952 objevil v časopise *Journal of Finance*. O třicet osm let později obdržel spolu s Mertonemem H. Millerem a Williamem Sharpem Nobelovu cenu za ekonomii, „za průkopnickou práci v oblasti ekonomie financí a financí korporací."

Investice do aktiva nemusí být z hlediska výnosu vždy úspěšná. Může se dokonce stát, že se nám z celé investice nevrátí vůbec nic. Každá investice pro svého investora představuje určité riziko ze ztráty peněz. Investor by rád investoval tak, aby mohl očekávat co největší zisk a zároveň podstupoval co nejmenší riziko.

Problematice správného rozložení investic se věnuje mnoho článků. Shrnutí nejdůležitějších výsledků obsahuje například Steinbach [10]. Ve velké části literatury však autoři odvozují výsledky za použití nerealistických předpokladů. Mimo jiné ve svých modelech povolují prodeje na krátko a předpokládají nekonečnou dělitelnost aktiv. Dále je také většina modelů zkonstruována pouze pro investici v horizontu jednoho časového období. Tedy neberou v úvahu možnost reinvestování.

V roce 2000 bylo v Li a Ng [8] odvozeno analytické řešení multiperiodického problému. Ani v tomto článku však nebyly brány v potaz transakční náklady, nebo zákaz prodejů na krátko.

Cílem této práce je vytvořit multiperiodický model, který vezme v úvahu zákonem zakázané prodeje na krátko a transakční náklady. Tedy odstraní nedostatky, které byly vytýkány modelům většiny ostatních autorů. Nalezneme optimální řešení tohoto nového modelu.

V první kapitole této práce popíšeme jednoperiodické modely. Odvodíme řešení těchto modelů pro portfolia složená pouze z rizikových aktiv a také s jedním bezrizikovým aktivem. Ve druhé kapitole odvodíme analytický výsledek pro základní multiperiodický model. Tento model bude stále předpokládat povolení prodejů na krátko a nebude brát v úvahu transakční náklady. Ve třetí kapitole vytvoříme nový model, který již bude z hlediska předpokladů velmi realistický. Pro tento model spočteme na konkrétních datech optimální řešení s využitím scénářového přístupu. Ve čtvrté kapitole připomeneme základní výsledek nelineárního programování, který využijeme pro řešení některých úloh v naší práci. Tuto práci uzavře kapitola pátá krátkým shrnutím.

Kapitola 1

Markowitzův model pro jedno časové období

Tato kapitola popisuje známé výsledky Markowitzova modelu pro jedno časové období. Při psaní této kapitoly jsme vycházeli především z Steinbach [10]. Navíc je zde přidán jeden model a některé poznatky jsou dokázány odlišným způsobem.

Úvodem vypíšeme několik základních požadavků ohledně trhu a chování investorů, které využijeme při konstrukci modelů a při odvozování jejich řešení:

(1) Investoři se rozhodují pouze na základě znalosti střední hodnoty a rozptylové matice výnosů.

(2) Investoři si mezi portfolii se stejným rizikem vyberou takové, které má největší střední hodnotu výnosu.

(3) Investoři si mezi portfolii se stejnou střední hodnotou výnosu vyberou takové, které má nejnižší riziko.

(4) Aktiva jsou nekonečně dělitelná.

(5) Investiční horizont je jedno časové období.

(6) Nejsou žádné transakční náklady ani daně.

(7) Existuje právě jedna bezriziková úroková míra a všichni investoři si mohou půjčit nebo mohou půjčovat libovolné množství peněz za tuto úrokovou míru.

(8) Všechna uvažovaná aktiva jsou likvidní.

(9) Jsou povoleny prodeje na krátko.

(10) Žádný investor nemůže ovlivnit výnosy svojí investicí.

(11) Všechny nezbytné informace jsou k dispozici všem investorům ve stejný čas.

1.1 *Značení*

Kvůli sjednocení značení v jednotlivých kapitolách budeme horním indexem značit složky vektoru.

V celé naší práci budou všechny vektory sloupcové. Označme $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ vektor samých jedniček. Dále budeme předpokládat existenci všech zavedených momentů.

Uvažujme investici do n aktiv na určité časové období. Označme si u^i váhu kapitálu investovaného do i-tého aktiva, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektor portfolia a $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ náhodný vektor výnosů aktiv. V celé této kapitole bude platit $\sum_{i=1}^n u^i = 1$. Předpokládejme, že $\mathbf{e}$ je náhodný vektor se střední hodnotou $\overline{\mathbf{e}} := \mathrm{E}[\mathbf{e}]$ a rozptylovou maticí

$$\mathbf{V} := \mathrm{E}[(\mathbf{e}-\overline{\mathbf{e}})(\mathbf{e}-\overline{\mathbf{e}})'] = \mathrm{E}[\mathbf{e}\mathbf{e}'] - \overline{\mathbf{e}\mathbf{e}}'.$$

Výběr konkrétního portfolia určuje rozdělení celkového výnosu $w = \mathbf{e}'\mathbf{u}$. Středním výnosem portfolia budeme rozumět střední hodnotu jeho celkového výnosu,

$$\rho(\mathbf{u}) := \mathrm{E}[\mathbf{e}'\mathbf{u}] = \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u}.$$

Rizikem portfolia nazveme rozptyl jeho celkového výnosu,

$$R(\mathbf{u}) := \mathrm{var}(\mathbf{e}'\mathbf{u}) = \mathrm{E}[(\mathbf{e}'\mathbf{u} - \mathrm{E}[\mathbf{e}'\mathbf{u}])^2] = \mathrm{E}[(\mathbf{u}'\mathbf{e} - \mathbf{u}'\overline{\mathbf{e}})(\mathbf{e}'\mathbf{u} - \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u})] =$$
$$= \mathrm{E}[\mathbf{u}'(\mathbf{e}-\overline{\mathbf{e}})(\mathbf{e}-\overline{\mathbf{e}})'\mathbf{u}] = \mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u}.$$

Investor se snaží nakoupit aktiva tak, aby maximalizoval svůj výnos a zároveň minimalizoval riziko. To popisuje následující definice.

Definice 1.1.1. *Portfolio s váhami $\mathbf{u}^*$ je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistují jiné váhy $\mathbf{u}$ splňující podmínku $\sum_{\nu=1}^n u^\nu = 1$, pro které je*

$$\rho(\mathbf{u}) \geq \rho(\mathbf{u}^*) \text{ a současně } R(\mathbf{u}) \leq R(\mathbf{u}^*)$$

a alespoň jedna z nerovností je ostrá.

Podle kapitoly II.3 Vícekriteriální optimalizace v Dupačová, Hurt, Štěpán [4] můžeme eficientní portfolio najít např. řešením optimalizačních úloh závisejících na parametrech:

Úloha 1.1.2.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \quad & \frac{1}{2}R(\mathbf{u}) \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1 \\ & \rho(\mathbf{u}) \geq \rho, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde parametrem je nastavená minimální hodnota ρ požadované výnosnosti portfolia.

Úloha 1.1.3.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}} \quad & \rho(\mathbf{u}) \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1 \\ & R(\mathbf{u}) \leq \sigma, \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde σ je maximální hladina rizika, které je investor ochoten podstoupit.

Úloha 1.1.4.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}} \quad & \kappa\rho(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}R(\mathbf{u}) \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde $\kappa > 0$ je parametr modelující investorův vztah k riziku.

1.2 *Pouze riziková aktiva*

V této kapitole se budeme zabývat případem, kdy jsou všechna aktiva riziková, tj. všechny výnosy jsou nekonstatní náhodné veličiny. Navíc předpokládáme, že platí
(A1) Rozptylová matice výnosu je pozitivně definitní, $\mathbf{V} > 0$.
(A2) $\overline{\mathbf{e}}$ a $\mathbf{1}$ jsou lineárně nezávislé.

Z teoretického hlediska je zajímavé řešit úlohu, ve které budeme minimalizovat riziko bez ohledu na zisk, tedy

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{u}} & \frac{1}{2}R(\mathbf{u}) \\ z.p. & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1. \end{array} \tag{1.4}$$

Využijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je ve tvaru

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{1}'\mathbf{u} - 1).$$

Zderivováním dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} L = \mathbf{V}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{1} &= 0 \\ \mathbf{u} &= -\lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vzhledem k podmínce úlohy (1.4) máme

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'\mathbf{u} &= -\lambda\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \\ 1 &= -\lambda\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \\ \lambda &= -\frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Z (1.5) a (1.6) dostáváme jako řešení úlohy (1.4) vektor

$$\mathbf{u}_G = \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}}.$$

Protože investoři volí pouze eficientní portfolia a tedy se zvětšujícím se očekávaným výnosem roste riziko, můžeme jako minimální očekávaný výnos označit

$$\rho_{min} = \rho(\mathbf{u}_G).$$

S tímto výsledkem upravíme úlohu 1.1.2 takto

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{u}} & \frac{1}{2}R(\mathbf{u}) \\ z.p. & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1 \\ & \rho(\mathbf{u}) \geq \rho > \rho_{min}. \end{array}$$

Tuto úlohu vyřešíme s pomocí věty 4.0.1. Protože užitková funkce je konvexní, jsou nutné podmínky, které nám udává věta 4.0.1 zároveň postačující. Lagrangeova funkce vypadá v tomto případě takto

$$L(\mathbf{u}, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} + \mu_1(1 - \mathbf{1}'\mathbf{u}) + \mu_2(\rho - \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u}).$$

Zderivováním a úpravou dostáváme

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} L = \mathbf{V}\mathbf{u} - \mu_1 \mathbf{1} - \mu_2 \overline{\mathbf{e}} &= 0 \\ \mathbf{u} &= \mu_1 \mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} + \mu_2 \mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Podle věty 4.0.1 (*ii*) máme

$$\mu_2 \geq 0,\ \mu_2(\rho - \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u}) = 0.$$

Nejprve se zabývejme případem, kdy $\mu_2 = 0$. Pak ze (1.7) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mu_1 \mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \\ 1 &= \mu_1 \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \\ \mu_1 &= \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že $\mathbf{u} = \mathbf{u}_G$ a tedy $\rho(\mathbf{u}) = \rho_{min}$, což je spor se zadáním úlohy. Musí tedy být $\mu_2 > 0$ a

$$\rho(\mathbf{u}) = \rho. \tag{1.8}$$

Úlohu 1.1.2 můžeme tedy ekvivalentně zapisovat ve tvaru

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \quad & \frac{1}{2}R(\mathbf{u}) \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1 \\ & \rho(\mathbf{u}) = \rho. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Podobně lze ukázat, že úlohu 1.1.3 můžeme zapisovat ve tvaru

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}} \quad & \rho(\mathbf{u}) \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} = 1 \\ & R(\mathbf{u}) = \sigma. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Nyní můžeme dořešit úlohu 1.1.2, kterou již máme částečně vyřešenou. S využitím vztahů (1.7), (1.8) a $\mathbf{1}'\mathbf{u} = 1$ dostáváme soustavu rovnic

$$1 = \mu_1 \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} + \mu_2 \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}} \tag{1.11}$$

$$\rho = \mu_1 \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} + \mu_2 \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}}. \tag{1.12}$$

Zavedeme značení

$$\alpha = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}, \tag{1.13}$$

$$\beta = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}}, \tag{1.14}$$

$$\gamma = \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}}. \tag{1.15}$$

Podle Steinbach [10] je $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$. Řešením soustavy rovnic (1.11) a (1.12) dostáváme

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\rho\beta - \gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma}, \\ \mu_2 &= \frac{\rho\alpha - \beta}{\alpha\gamma - \beta^2}. \end{aligned}$$

Dosazením μ_1 a μ_2 do (1.7) získáme vektor $\mathbf{u}$, který je optimálním řešením úlohy 1.1.2

$$\mathbf{u} = \frac{\rho\beta - \gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} + \frac{\rho\alpha - \beta}{\alpha\gamma - \beta^2}\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}}.$$

Zajímavý výsledek týkající se portfolií minimalizujících riziko ukazuje následující věta.

Věta 1.2.1. *Nechť $\mathbf{u}_a$ a $\mathbf{u}_b$ jsou dvě optimální řešení úlohy 1.1.2 s požadovanými výnosy ρ_a a ρ_b, $\rho_a \neq \rho_b$. Potom každé portfolio $\mathbf{u}_c$, které je řešením úlohy 1.1.2 s nějakým parametrem ρ, lze zapsat ve tvaru $\mathbf{u}_c = \alpha\mathbf{u}_a + (1-\alpha)\mathbf{u}_b$ pro nějaké α. Pro každé portfolio ve tvaru $\mathbf{u}_c = \alpha\mathbf{u}_a + (1-\alpha)\mathbf{u}_b$ existuje ρ tak, že $\mathbf{u}_c$ řeší úlohu 1.1.2 s parametrem ρ.*

Důkaz. Důkaz je uveden v Dupačová, Hurt, Štěpán [4]. □

Nyní vyřešíme úlohu 1.1.3. Využijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce vypadá takto

$$L(\mathbf{u}, \lambda_1, \lambda_2) = \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + \lambda_1(\mathbf{1}'\mathbf{u} - 1) + \lambda_2(\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} - \sigma).$$

Zderivujeme Lagrangeovu funkci a gradient položíme rovný nulovému vektoru

$$\nabla_{\mathbf{u}} L = \overline{\mathbf{e}} + \lambda_1\mathbf{1} + 2\lambda_2\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Pro $\lambda_2 = 0$ dostáváme porušení předpokladu (A2), pokud $\lambda_2 \neq 0$,

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\lambda_2}\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}. \tag{1.16}$$

S využitím podmínek úlohy 1.1.3 ve tvaru (1.10) dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{2\lambda_2}\beta - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\alpha \\ \sigma &= \frac{1}{4\lambda_2^2}\gamma + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2^2}\beta + \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}\alpha. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy získáme hodnoty parametrů λ_1 a λ_2

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha\sigma - 1}} \tag{1.17}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{4(\alpha\sigma - 1)}}. \tag{1.18}$$

Aby byla hodnota pod odmocninou kladná, je potřeba volit parametr σ úlohy 1.1.3 ostře menší než $\frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}}$. Pokud (1.17) a (1.18) dosadíme do (1.16) dostaneme eficientní portfolio pro úlohu 1.1.3.

$$\mathbf{u} = -\sqrt{\frac{\alpha\sigma - 1}{\alpha\gamma - \beta^2}}\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha\sigma - 1}{\alpha\gamma - \beta^2}} + \frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}.$$

A nakonec vyřešíme úlohu 1.1.4. Opět použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je ve tvaru

$$L(\mathbf{u},\nu) = \kappa\overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} + \nu(\mathbf{1}'\mathbf{u} - 1).$$

Zderivováním dostáváme

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}}L(\mathbf{u},\nu) = \kappa\overline{\mathbf{e}} - \mathbf{V}\mathbf{u} + \nu\mathbf{1} &= 0 \\ \mathbf{u} &= \kappa\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}} + \nu\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Z podmínek úlohy 1.1.4 máme

$$\begin{aligned} 1 &= \kappa\beta + \nu\alpha \\ \nu &= \frac{1-\kappa\beta}{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Dosazením (1.20) do (1.19) dostáváme vektor $\mathbf{u}$, který řeší úlohu 1.1.4.

$$\mathbf{u} = \kappa\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{e}} + \frac{1-\kappa\beta}{\alpha}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}.$$

1.3 *Bezrizikové aktivum*

Nyní uvažujme investici do n rizikových aktiv a navíc přidáme bezrizikové aktivum x_c s deterministickým výnosem e_c. Portfolio tedy je $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ u_c \end{pmatrix}$ a $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}$, $\overline{\mathbf{e}}$, $\mathbf{V}$ se týkají pouze rizikových aktiv.

Opět uvedeme nezbytné předpoklady:
(A1) $\mathbf{V} > 0$.
(A2) $\overline{\mathbf{e}}$ a $\mathbf{1}$ jsou lineárně nezávislé.

Jakákoli kovariance mezi rizikovým a bezrizikovým aktivem je z definice nulová, takže riziko a střední výnos jsou $R(\mathbf{u}, u_c) = \mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u}$ a $\rho(\mathbf{u}, u_c) = \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + e_c u_c$. Tři základní úlohy se nám tedy změní následovně:

Úloha 1.3.1.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u},u_c} \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ u_c \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ u_c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c = 1 \\ & \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + e_c u_c = \rho, \end{aligned}$$

kde ρ je minimální střední výnos, kterého chce investor dosáhnout.

Úloha 1.3.2.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u},u_c} \quad & \rho(\mathbf{u}) + u_c e_c \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c = 1 \\ & \mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} = \sigma, \end{aligned} \tag{1.21}$$

kde σ je maximální hladina rizika, které je investor ochoten podstoupit.

Úloha 1.3.3.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u},u_c} \quad & \kappa(\rho(\mathbf{u}) + u_c e_c) - \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} \\ z.p. \quad & \mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c = 1, \end{aligned} \tag{1.22}$$

kde $\kappa > 0$ je parametr modelující investorův vztah k riziku.

Vyřešíme úlohu 1.3.1 pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeovu funkci máme ve tvaru

$$L(\mathbf{u}, u_c, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} + \mu_1(\mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c - 1) + \mu_2(\overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + e_c u_c - \rho).$$

Nejprve si vyjádříme μ_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_c} = \mu_1 + \mu_2 e_c &= 0 \\ \mu_1 &= -\mu_2 e_c. \end{aligned}$$

Dosadíme do

$$\nabla_{\mathbf{u}} L = \mathbf{V}\mathbf{u} + \mu_1 \mathbf{1} + \mu_2 \overline{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{u} - \mu_2 e_c \mathbf{1} + \mu_2 \overline{\mathbf{e}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= \mu_2 \mathbf{V}^{-1}(e_c \mathbf{1} - \overline{\mathbf{e}}). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Z podmínky $\mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c = 1$ dopočítáme u_c,

$$\begin{aligned} \mu_2 \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}(e_c \mathbf{1} - \overline{\mathbf{e}}) + u_c &= 1 \\ u_c &= 1 - \mu_2(e_c \alpha - \beta), \end{aligned} \tag{1.24}$$

kde α a β jsou definovány vztahy (1.13) a (1.14). A nakonec z podmínky $\overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + e_c u_c = \rho$ dopočítáme μ_2,

$$\begin{aligned} \rho &= \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + e_c u_c \\ \rho &= \mu_2(e_c \beta - \gamma) - \mu_2({e_c}^2 \alpha - e_c \beta) + e_c \\ \mu_2 &= \frac{\rho - e_c}{2 e_c \beta - \gamma - {e_c}^2 \alpha}, \end{aligned}$$

kde α, β a γ jsou definovány vztahy (1.13), (1.14) a (1.15). Dosazením μ_2 do (1.23) a do (1.24) dostaneme eficientní portfolio pro úlohu 1.3.1:

$$\mathbf{u} = \frac{\rho - e_c}{2 e_c \beta - \gamma - {e_c}^2 \alpha} \mathbf{V}^{-1}(e_c \mathbf{1} - \overline{\mathbf{e}}), \tag{1.25}$$

$$u_c = 1 - \frac{\rho - e_c}{2 e_c \beta - \gamma - {e_c}^2 \alpha}(e_c \alpha - \beta). \tag{1.26}$$

Podobně jako u úloh s pouze rizikovými aktivy lze i pro případ bezrizikového aktiva ukázat, že libovolné portfolio minimalizující riziko lze složit ze dvou různých portfolií. Přesněji tuto situaci popisuje následující definice a věta.

Definice 1.3.4. *Definujme si* $\tilde{\mathbf{u}}^1 := (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *portfolio sestávající pouze z bezrizikového aktiva. Dále si definujme*

$$\mathbf{u}^{tg} := \frac{\mathbf{V}^{-1}(e_c\mathbf{1} - \overline{\mathbf{e}})}{e_c\alpha - \beta}$$

tangenciální portfolio.

Budeme značit $\tilde{\mathbf{u}}^2 := ((\mathbf{u}^{tg})', 0)' \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Věta 1.3.5. *Každé portfolio* $\tilde{\mathbf{u}}^* = ((\mathbf{u}^*)', u_c^*)'$ *řešící úlohu 1.3.1 s nějakým parametrem* ρ *můžeme psát ve tvaru*

$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \delta\tilde{\mathbf{u}}^1 + (1 - \delta)\tilde{\mathbf{u}}^2,$$

kde

$$\delta = \delta(\rho) = 1 - \frac{(\rho - e_c)(e_c\alpha - \beta)}{2e_c\beta - \gamma - {e_c}^2\alpha}.$$

Důkaz. Dosadíme za $\tilde{\mathbf{u}}^1$ a $\tilde{\mathbf{u}}^2$ a dostaneme řešení úlohy 1.3.1, jak je vyjádřeno ve vzorcích (1.25) a (1.26). □

1.4 *Ekvivalence úloh*

V této kapitole ukážeme, jakým způsobem na sobě závisí řešení úloh 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3. Ukážeme také způsob, jakým můžeme získat řešení úloh 1.3.2 a 1.3.3, i přesto, že nejsou v předchozí kapitole podrobně odvozeny.

Napíšeme si nutné podmínky pro řešení jednotlivých úloh. Protože uvažujeme úlohy konvexního programování, jsou to i podmínky postačující. Nejprve tedy pro úlohu 1.3.1

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{u} + \mu_1\mathbf{1} + \mu_2\overline{\mathbf{e}} &= \mathbf{0}, \\ \mu_1 + \mu_2 e_c &= 0, \\ \mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c &= 1, \\ \overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u} + e_c u_c &= \rho. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pro úlohu 1.3.2 ve formě minimalizace jsou nutné podmínky

$$\begin{aligned} -\overline{\mathbf{e}} + \lambda_1\mathbf{1} + 2\lambda_2\mathbf{V}\mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ -e_c + \lambda_1 &= 0, \\ \mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c &= 1, \\ \mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{u} &= \sigma. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Pro úlohu 1.3.3 ve formě minimalizace jsou nutné podmínky

$$\begin{aligned} -\kappa\overline{\mathbf{e}} + \mathbf{V}\mathbf{u} + \nu\mathbf{1} &= \mathbf{0}, \\ -\kappa e_c + \nu &= 0, \\ \mathbf{1}'\mathbf{u} + u_c &= 1. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Je vidět, že nutné podmínky jednotlivých úloh jsou si vzájemně velmi podobné. Pro speciální volby parametrů budou dokonce ekvivalentní. Jak bylo ukázáno v předchozí podkapitole, existuje právě jedno řešení splňující nutné podmínky (1.27). Pokud jsou tedy podmínky (1.27), (1.28) a (1.29) skutečně ekvivalentní, jsou jejich řešení zároveň optimální řešení úloh 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3.

Přesné volby parametrů popisují následující odstavce.

Pokud máme optimální řešení $\mathbf{u}^*$, u_c^* úlohy 1.3.1, musíme zvolit parametr σ v úloze 1.3.2 roven $(\mathbf{u}^*)'\mathbf{V}\mathbf{u}^*$, tj.

$$\sigma = \left(\frac{\rho - e_c}{2e_c\beta - \gamma - {e_c}^2\alpha}\right)^2 (e_c\mathbf{1}' - \overline{\mathbf{e}}')\mathbf{V}^{-1}(e_c\mathbf{1} - \overline{\mathbf{e}}),$$

aby $\mathbf{u}^*$, u_c^* bylo i optimálním řešením úlohy 1.3.2. Hodnoty Lagrangeových multiplikátorů pro úlohu 1.3.2 potom budou $\lambda_1 = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$ a $\lambda_2 = -\frac{1}{2\mu_2}$.

Analogicky, pokud máme optimální řešení $\mathbf{u}^*$ úlohy 1.3.2, musíme zvolit prametr ρ v úloze 1.3.1 roven $\overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u}^* + e_c u_c^*$, aby $\mathbf{u}^*$, u_c^* bylo i optimálním řešením úlohy 1.3.1. Hodnoty Lagrangeových multiplikátorů pro úlohu 1.3.1 potom budou $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ a $\mu_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}$.

Pokud máme optimální řešení $\mathbf{u}^*$, u_c^* úlohy 1.3.1, musíme zvolit prametr κ v úloze 1.3.3 roven $-\mu_2$, aby $\mathbf{u}^*$, u_c^* bylo i optimálním řešením úlohy 1.3.3. Hodnota Lagrangeova multiplikátoru pro úlohu 1.3.3 potom bude $\nu = \mu_1$.

Pokud máme optimální řešení $\mathbf{u}^*$, u_c^* úlohy 1.3.3, musíme zvolit prametr ρ v úloze 1.3.1 roven $\overline{\mathbf{e}}'\mathbf{u}^* + e_c u_c^*$, aby $\mathbf{u}^*$, u_c^* bylo i optimálním řešením úlohy 1.3.1. Hodnoty Lagrangeových multiplikátorů pro úlohu 1.3.1 potom budou $\mu_1 = \nu$ a $\mu_2 = -\kappa$.

Pokud máme optimální řešení $\mathbf{u}^*$, u_c^* úlohy 1.3.2, musíme zvolit prametr κ v úloze 1.3.3 roven $\frac{1}{2\lambda_2}$, aby $\mathbf{u}^*$, u_c^* bylo i optimálním řešením úlohy 1.3.3. Hodnota Lagrangeova multiplikátoru pro úlohu 1.3.3 potom bude $\nu = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$.

Pokud máme optimální řešení $\mathbf{u}^*$, u_c^* úlohy 1.3.3, musíme zvolit prametr σ v úloze 1.3.2 roven $(\mathbf{u}^*)'\mathbf{V}\mathbf{u}^*$, aby $\mathbf{u}^*$, u_c^* bylo i optimálním řešením úlohy 1.3.2. Hodnoty Lagrangeových multiplikátorů pro úlohu 1.3.2 potom budou $\lambda_2 = \frac{1}{2\kappa}$ a $\lambda_1 = \frac{\nu}{\kappa}$.

Kapitola 2

Markowitzův model pro více časových období

V této kapitole zobecníme modely z předchozí kapitoly. Vytvoříme modely pro více časových období a odvodíme optimální investiční strategie, kterými by se měl investor řídit.

Tato kapitola vychází ze článku Li a Ng [8], proto značení přizpůsobujeme právě tomuto článku.

2.1 *Značení*

Uvažujme $n+1$ rizikových aktiv s náhodnými výnosy. Investiční strategie začíná v čase 0 s počátečním majetkem x_0. V čase 0 investor rozdělí svůj majetek mezi $n+1$ aktiv. Na začátku každého z následujících $T-1$ časových období může obměnit své portfolio. Míru výnosnosti rizikových aktiv v časovém období t budeme značit vektorem $\mathbf{e}_t = [e_t^0, e_t^1, ..., e_t^n]'$, kde e_t^i je náhodná míra výnosnosti pro aktivum i v časovém období t. Přesněji $e_t^i = \frac{r_{t+1}^i}{r_t^i}$, kde r_t^i je cena aktiva i v čase t.

Budeme předpokládat, že vektory $\mathbf{e}_t$, $t = 0, 1, ..., T-1$ jsou nezávislé, tj. pro každé $i, j = 0, ..., n$ a pro každé $t, \tau = 0, ..., T-1$; $t \neq \tau$ jsou náhodné veličiny e_t^i a e_τ^j nezávislé. Tento předpoklad je poměrně silný a v praxi nemusí být splnitelný, avšak je nezbytný pro odvození výsledků této kapitoly.

Dále předpokládáme, že vektory výnosů mají známou střední hodnotu $\mathrm{E}[\mathbf{e}_t] = (\mathrm{E}[e_t^0], \mathrm{E}[e_t^1], ..., \mathrm{E}[e_t^n])'$ a známou kovarianční matici $\mathrm{Var}(\mathbf{e}_t)$.

Víme, že $\mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t'] = \mathrm{Var}(\mathbf{e}_t) + \mathrm{E}\mathbf{e}_t\mathrm{E}\mathbf{e}_t'$. Nadále v této kapitole budeme předpokládat, že matice $\mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t']$ je pozitivně definitní pro všechna časová období, tedy

$$\mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t'] = \begin{pmatrix} \mathrm{E}[e_t^0]^2 & \mathrm{E}[e_t^0 e_t^1] & \dots & \mathrm{E}[e_t^0 e_t^n] \\ \mathrm{E}[e_t^1 e_t^0] & \mathrm{E}[e_t^1]^2 & \dots & \mathrm{E}[e_t^1 e_t^n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}[e_t^n e_t^0] & \mathrm{E}[e_t^n e_t^1] & \dots & \mathrm{E}[e_t^n]^2 \end{pmatrix} > 0,\ t = 0, 1, ..., T-1.$$

Dále si zavedeme značení $\mathbf{p}_t = ((e_t^1 - e_t^0), (e_t^2 - e_t^0), ..., (e_t^n - e_t^0))'$, $t = 0, 1, ..., T-1$ pro vektor výnosů jednotlivých aktiv nad nultým aktivem.

Majetek investora na začátku časového období t budeme značit x_t a u_t^i, $i = 1, 2, ..., n$ bude částka investovaná do i-tého rizikového aktiva na začátku časového období t. Částka investovaná do nultého aktiva je rovna

$$u_t^0 = x_t - \sum_{i=1}^{n} u_t^i. \tag{2.1}$$

Vektor $\mathbf{u}_t = (u_t^1, u_t^2, ..., u_t^n)'$ nám tedy společně s x_t určuje jakým způsobem bude v časovém období t investováno. V čase $t+1$ prodáme všechny akcie a získáme majetek x_{t+1}, tedy $x_{t+1} = \sum_{i=0}^{n} e_t^i u_t^i$, což nám společně s podmínkou (2.1) dává $x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t$. A opět celý majetek x_{t+1} rozdělíme mezi jednotlivá aktiva.

Písmenem $\pi = \{\pi_0, ..., \pi_{T-1}\}$ budeme značit množinu rozhodnutí, která v každém časovém období, kromě posledního, danému majetku x_t přiřadí vektor $\mathbf{u}_t$, tedy $\pi_t(x_t) = u_t$, $t = 0, ..., T-1$. Tuto množinu budeme nazývat investiční strategií.

Pokud π^* je optimálním řešením nějaké maximalizační úlohy, budeme říkat, že π^* maximalizuje tuto úlohu.

Investor hledá investiční strategii π^* takovou, že střední hodnota konečného majetku investora $\mathrm{E}[x_T]$ je maximální, zatímco rozptyl konečného majetku (riziko) $\mathrm{var}(x_T)$ pro tuto strategii není větší než předem zvolená hladina rizika, nebo rozptyl konečného majetku je minimální, zatímco střední hodnota konečného majetku není menší než předem zvolená hladina. Tomuto odpovídá následující definice.

Definice 2.1.1. *Investiční strategie $\pi^* = \{\pi_0^*, ..., \pi_{T-1}^*\}$, pro kterou dostáváme majetek v posledním časovém období x_T^*, je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistuje jiná investiční strategie π s konečným majetkem x_T, pro kterou platí*

$$\mathrm{E}x_T \geq \mathrm{E}x_T^* \text{ a současně } \mathrm{var}(x_T) \leq \mathrm{var}(x_T^*)$$

a alespoň jedna z nerovností je ostrá.

Písmenem $\mathbf{u}_t^* = \pi_t^*(x_t)$ budeme značit optimální rozhodnutí v čase t. $\mathbf{u}_t^*$ zřejmě závisí na x_t.

V celé kapitole budeme prázdný součin pokládat rovný jedné, tj.

$$\prod_{i \in \emptyset} f(i) = 1.$$

2.2 Základní modely

2.2.1 Typy úloh

Eficientní investiční strategii je možné získat vyřešením jedné z následujících úloh.

Úloha 2.2.1.

$$\begin{array}{ll} \max & \mathrm{E}x_T \\ z.p. & \mathrm{var}(x_T) \leq \sigma \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t, \; t = 0, 1, ..., T-1, \end{array}$$

kde $\sigma > 0$ je námi zvolený parametr určující maximální hranici rizika, které je investor ochotný podstoupit.

Úloha 2.2.2.

$$\begin{array}{ll} \min & \mathrm{var}(x_T) \\ z.p. & \mathrm{E}x_T \geq \rho \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, ..., T-1, \end{array}$$

kde $\rho > 0$ je parametr určující minimální výnos, kterého chce investor dosáhnout.

Pokud je investor schopen určit závislost střední hodnoty a rozptylu majetku v posledním období, je možné eficientní strategii získat řešením úlohy 2.2.3

Úloha 2.2.3.

$$\begin{array}{ll} \max & \mathrm{E}x_T - \omega \mathrm{var}(x_T) \\ z.p. & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, ..., T-1, \end{array}$$

kde $\omega > 0$ je parametr určující vztah mezi střední hodnotou a rozptylem majetku v posledním období.

Úlohy 2.2.1 a 2.2.2 je možné dále zjednodušit a sice odstraněním nerovností v jejich podmínkách, jak bude ukázáno v následující kapitole.

2.2.2 *Vztahy mezi základními úlohami*

V této kapitole si ukážeme jaký je vztah mezi řešeními základních úloh 2.2.1, 2.2.2 a 2.2.3. Odvodíme, jaké podmínky musí být splněny, aby tyto úlohy byly z hlediska řešení ekvivalentní. Pro odvození vztahů řešení jednotlivých úloh, podobně jako v kapitole 1, si budeme muset vyjádřit nutné a postačující podmínky úloh 2.2.1, 2.2.2 a 2.2.3.

Nejprve si postupným dosazováním dynamické podmínky $x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t$, $t = 0, 1, ..., T-1$ vyjádříme x_T jako

$$\begin{aligned} x_T &= e_{T-1}^0 x_{T-1} + \mathbf{p}_{T-1}' \mathbf{u}_{T-1} = \\ &= e_{T-1}^0 e_{T-2}^0 x_{T-2} + e_{T-1}^0 \mathbf{p}_{T-2}' \mathbf{u}_{T-2} + \mathbf{p}_{T-1}' \mathbf{u}_{T-1} = \\ &\vdots \\ &= x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) + \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} e_k^0 \right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Označme si

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{p}_t \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} e_k^0 \right),\ t = 0, ..., T-1, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0', \mathbf{q}_1', ..., \mathbf{q}_{T-1}')', \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0', \mathbf{u}_1', ..., \mathbf{u}_{T-1}')'. \tag{2.5}$$

Kovariance náhodné veličiny a náhodného vektoru pro nás bude sloupcový vektor kovariancí mezi náhodnou veličinou a jednotlivými složkami náhodného vektoru, tj.

$$\operatorname{cov}(a, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(a, b_1) \\ \operatorname{cov}(a, b_2) \\ \vdots \\ \operatorname{cov}(a, b_n) \end{pmatrix}.$$

Pro střední hodnotu a rozptyl finálního majetku dostáváme

$$\mathrm{E}x_T = x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathrm{E}[e_k^0] \right) + \mathbf{u}'\mathrm{E}[\mathbf{q}], \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(x_T) &= \operatorname{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) + \mathbf{u}'\mathbf{q} \right) = \\ &= \operatorname{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) \right) + \mathbf{u}'\operatorname{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \\ &\quad + 2\left(\operatorname{cov}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) \right)' \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nutné a postačující podmínky pro optimální řešení úlohy 2.2.1

S využitím (2.6) a (2.7) můžeme úlohu 2.2.1 přepsat

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{E}[\mathbf{q}']\mathbf{u} \\ z.p. \quad & \operatorname{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) \right) + \mathbf{u}'\operatorname{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\operatorname{cov}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) \right)' \mathbf{u} \le \sigma. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Zabývejme se případem, kdy podmínka v úloze (2.8) obsahuje ostrou nerovnost. Tedy řešíme úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{E}[\mathbf{q}']\mathbf{u} \\ z.p. \quad & \operatorname{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) \right) + \mathbf{u}'\operatorname{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\operatorname{cov}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) \right)' \mathbf{u} < \sigma. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Množina přípustných řešení pro tuto úlohu je otevřená. Navíc platí

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathrm{E}[\mathbf{q}']\mathbf{u} = \mathrm{E}[\mathbf{q}] \neq \mathbf{0}, \ \forall \mathbf{u}.$$

Tedy úloha (2.9) nemá optimální řešení a při hledání optimálních řešení úlohy (2.8) se stačí omezit na množinu $\mathbf{u}$ splňujících

$$\operatorname{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) \right) + \mathbf{u}'\operatorname{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\operatorname{cov}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) \right)' \mathbf{u} = \sigma.$$

Budeme tedy řešit úlohu

$$\begin{array}{ll} \max & \mathrm{E}[\mathbf{q}']\mathbf{u} \\ z.p. & \mathrm{var}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right)\right) + \mathbf{u}'\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right)\right)'\mathbf{u} = \sigma. \end{array} \tag{2.10}$$

Tuto úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \mu) \;=\; & \mathrm{E}[\mathbf{q}']\mathbf{u} + \mu\sigma - \mu\mathrm{var}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right)\right) - \\ & -\mu\mathbf{u}'\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mu 2\left(\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right)\right)'\mathbf{u} \end{aligned}$$

Nutné podmínky pro optimální řešení úlohy (2.10) a tedy i úlohy 2.2.1 jsou

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}[\mathbf{q}] - 2\mu\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} - 2\mu\left(\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right)\right) = \mathbf{0}, \\ & \mathrm{var}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right)\right) + \mathbf{u}'\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right)\right)'\mathbf{u} = \sigma. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Protože je užitková funkce lineární, jedná se zároveň i o podmínky postačující.

Nutné a postačující podmínky pro optimální řešení úlohy 2.2.2

Nejprve řešme úlohu

$$\begin{array}{ll} \min & \mathrm{var}(x_T) \\ z.p. & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t'\mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, ..., T-1. \end{array} \tag{2.12}$$

Po dosazení dynamické podmínky dostáváme s pomocí (2.7) úlohu

$$\min \quad \mathrm{var}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right)\right) + \mathbf{u}'\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right)\right)'\mathbf{u}.$$

Abychom dostali nutné podmínky optimality, zderivujeme užitkovou funkci podle $\mathbf{u}$ a diferenciál položíme rovný nulovému vektoru

$$2\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right) \;=\; \mathbf{0}. \tag{2.13}$$

Protože užitková funkce je konvexní, jedná se zároveň o podmínky postačující.

Protože investor volí pouze eficientní portfolia a tedy se zmenšujícím se rizikem klesá finální majetek, můžeme očekávaný finální majetek pro optimální řešení úlohy (2.12) označit ρ_{min}. S tímto výsledkem si upravíme úlohu 2.2.2

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{var}(x_T) \\ z.p. \quad & \mathrm{E}x_T \geq \rho > \rho_{min} \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, ..., T-1. \end{aligned}$$

S využitím (2.6) a (2.7) tuto úlohu můžeme přepsat takto

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) \right) + \mathbf{u}' \mathrm{var}(\mathbf{q}) \mathbf{u} + 2 \left(\mathrm{cov} \left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) \right)' \mathbf{u} \\ z.p. \quad & x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathrm{E}[e_k^0] \right) + \mathbf{u}' \mathrm{E}[\mathbf{q}] \geq \rho > \rho_{min}. \end{aligned}$$

Lagrangeova funkce pro tuto úlohu je

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \lambda) \;=\; & -\mathrm{var}\left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right) \right) - \mathbf{u}' \mathrm{var}(\mathbf{q}) \mathbf{u} - 2 \left(\mathrm{cov} \left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) \right)' \mathbf{u} + \\ & + \lambda \left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathrm{E}[e_k^0] \right) + \mathbf{u}' \mathrm{E}[\mathbf{q}] - \rho \right). \end{aligned}$$

Podle věty 4.0.1 jsou nutné podmínky pro optimální řešení

$$x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathrm{E}[e_k^0] \right) + \mathbf{u}' \mathrm{E}[\mathbf{q}] \;\geq\; \rho$$

$$\lambda \geq 0,\ \lambda \left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathrm{E}[e_k^0] \right) + \mathbf{u}' \mathrm{E}[\mathbf{q}] - \rho \right) \;=\; 0 \tag{2.14}$$

$$-2\mathrm{cov} \left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) - 2\mathrm{var}(\mathbf{q}) \mathbf{u} + \lambda \mathrm{E}[\mathbf{q}] \;=\; \mathbf{0}. \tag{2.15}$$

Nechť je nejprve λ v podmínce (2.14) rovno nule. Potom je podmínka (2.15) shodná s podmínkou (2.13). A tedy $\mathrm{E}x_T = \rho_{min}$, což je spor se zadáním úlohy. Musí tedy být $\lambda > 0$. Potom ale nutné podmínky pro optimální řešení úlohy 2.2.2 jsou

$$2\mathrm{cov} \left(x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0 \right), \mathbf{q} \right) + 2\mathrm{var}(\mathbf{q}) \mathbf{u} - \lambda \mathrm{E}[\mathbf{q}] \;=\; \mathbf{0}$$

$$x_0 \left(\prod_{k=0}^{T-1} \mathrm{E}[e_k^0] \right) + \mathbf{u}' \mathrm{E}[\mathbf{q}] \;=\; \rho. \tag{2.16}$$

Protože je užitková funkce konvexní, jedná se zároveň i o podmínky postačující.

Nutné a postačující podmínky pro optimální řešení úlohy 2.2.3

S využitím vztahů (2.6) a (2.7) si přepíšeme úlohu 2.2.3.

$$\max \quad \mathrm{E}[\mathbf{q}']\mathbf{u} - \omega\left(\mathbf{u}'\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} + 2\left(\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right)\right)'\mathbf{u}\right) \tag{2.17}$$

Zderivujeme užitkovou funkci podle $\mathbf{u}$, gradient položíme roven nulovému vektoru a dostaneme nutné podmínky pro optimální řešení úlohy 2.2.3

$$\mathrm{E}[\mathbf{q}] - 2\omega\mathrm{var}(\mathbf{q})\mathbf{u} - 2\omega\mathrm{cov}\left(x_0\left(\prod_{k=0}^{T-1} e_k^0\right), \mathbf{q}\right) = \mathbf{0}. \tag{2.18}$$

Protože je užitková funkce konkávní, jedná se zároveň i o podmínky postačující.

Vztah úloh 2.2.1 a 2.2.2

Předpokládejme že máme optimální řešení úlohy 2.2.1. Označme si jej $\mathbf{u}^*$. Dále si označme ρ^* střední hodnotu finálního majetku x_T, pokud jsme prováděli investice $\mathbf{u}^*$. $\mathbf{u}^*$ splňuje podmínky (2.11). Pokud tedy zvolíme parametr ρ v úloze 2.2.2 roven ρ^*, bude $\mathbf{u}^*$ splňovat podmínky (2.16) s Lagrangeovým multiplikátorem v podmínkách (2.16) $\lambda = -\frac{1}{\mu}$.

Nechť nyní naopak $\mathbf{u}^*$ je optimálním řešením úlohy 2.2.2. Označme si σ^* hodnotu rozptylu finálního majetku x_T, pokud jsme investovali $\mathbf{u}^*$. Pokud si zvolíme parametr σ z úlohy 2.2.1 roven σ^*, je $\mathbf{u}^*$ optimálním řešením úlohy 2.2.1. Odpovídající Lagrangeův multiplikátor μ z podmínek (2.11) bude roven $-\frac{1}{\lambda}$.

Vztah úloh 2.2.1 a 2.2.3

Mějme $\mathbf{u}^*$ optimální řešení úlohy 2.2.1. Z postačujících podmínek úloh 2.2.1 a 2.2.3 je vidět, že pokud zvolíme parametr ω z úlohy 2.2.3 roven Lagrangeovu multiplikátoru μ z podmínek (2.11), bude $\mathbf{u}^*$ optimálním řešením úlohy 2.2.3.

Pokud máme optimální řešení úlohy 2.2.3 $\mathbf{u}^*$, stačí v úloze 2.2.1 zvolit parametr σ rovný rozptylu optimálního finálního majetku z úlohy 2.2.3, aby $\mathbf{u}^*$ bylo zároveň i optimálním řešením úlohy 2.2.1. Lagrangeův multiplikátor μ z podmínek (2.11) bude v tomto případě roven parametru ω z úlohy 2.2.3.

Vztah úloh 2.2.2 a 2.2.3

Nechť $\mathbf{u}^*$ je optimálním řešením úlohy 2.2.2. Opět je vidět, že pokud parametr ω v úloze 2.2.3 vezmeme roven $-\frac{1}{\lambda}$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor v podmínkách (2.16), bude $\mathbf{u}^*$ optimálním řešením úlohy 2.2.3.

Pokud máme optimální řešení úlohy 2.2.3 $\mathbf{u}^*$, stačí v úloze 2.2.2 zvolit parametr ρ rovný střední hodnotě optimálního finálního majetku z úlohy 2.2.3, aby $\mathbf{u}^*$ bylo zároveň i optimálním řešením úlohy 2.2.2. Lagrangeův multiplikátor λ z podmínek (2.16) bude v tomto případě roven $-\frac{1}{\omega}$, kde ω je parametr z úlohy 2.2.3.

2.3 Řešení základních modelů

2.3.1 Pomocná úloha

Podle Li a Ng [8] nebo podle Leippold, Trojani a Vanini [7] je obtížné řešit úlohy 2.2.1, 2.2.2 a 2.2.3, protože jsou neseparabilní ve smyslu dynamického programování.

Budeme se zabývat řešením úlohy 2.2.3. Řešení úloh 2.2.1 a 2.2.2 získáme na základě vztahů mezi těmito úlohami.

Nyní přejdeme od obtížně řešitelné úlohy 2.2.3 k úloze, která je separabilní. Ukážeme také jakým způsobem je možné optimální řešení této nové úlohy převést na řešení úlohy původní.

Symbolem $\Phi(\omega)$ budeme značit množinu optimálních řešení úlohy 2.2.3 v závislosti na parametru ω, tedy

$$\Phi(\omega) = \{\pi;\ \pi \text{ maximalizuje úlohu 2.2.3 s parametrem } \omega\}.$$

Označíme a upravíme si užitkovou funkci úlohy 2.2.3

$$\begin{aligned}\tilde{U}\left(\mathrm{E}\left[x_T^2\right], \mathrm{E}\left[x_T\right]\right) &= \mathrm{E}\left[x_T\right] - \omega \mathrm{var}(x_T) \\ &= -\omega \mathrm{E}\left[x_T^2\right] + \left[\omega(\mathrm{E}[x_T])^2 + \mathrm{E}[x_T]\right].\end{aligned}$$

Protože $\omega > 0$, $\tilde{U}$ je konvexní funkcí $\mathrm{E}[x_T^2]$ a $\mathrm{E}[x_T]$. Navíc platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2], \mathrm{E}[x_T])}{\partial \mathrm{E}[x_T]} &= 1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T] \\ \frac{\partial \tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2], \mathrm{E}[x_T])}{\partial \mathrm{E}[x_T^2]} &= -\omega.\end{aligned}$$

Nyní zkonstruujeme pomocnou úlohu.

Úloha 2.3.1.

$$\begin{aligned}\max \quad & \mathrm{E}[-\omega x_T^2 + \lambda x_T] \\ z.p. \quad & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, ..., T-1,\end{aligned}$$

kde $\omega > 0$ a $\lambda > 0$ jsou parametry.

Důležitým faktem je, že úloha 2.3.1 je separabilní ve smyslu dynamického programování a užitková funkce má kvadratickou formu, zatímco dynamická podmínka je lineární. Definujme si $\Theta(\lambda, \omega)$ jako množinu optimálních řešení úlohy 2.3.1, tedy

$$\Theta(\lambda, \omega) = \{\pi;\ \pi \text{ maximalizuje úlohu 2.3.1 s parametry } \lambda \text{ a } \omega\}.$$

Střední hodnotu konečného majetku, pokud jsme se řídili investiční strategií π, budeme značit $\mathrm{E}[x_T|\pi]$.

Nyní si uvedeme dvě věty, které určují vztah řešení úloh 2.2.3 a 2.3.1.

Věta 2.3.2. *Pro libovolné $\pi^* \in \Phi(\omega)$ je $\pi^* \in \Theta(1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*], \omega)$.*

Důkaz. Důkaz podle Li a Ng [8]:

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že platí

$$\pi^* \in \Phi(\omega), \tag{2.19}$$
$$\pi^* \notin \Theta(1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*], \omega). \tag{2.20}$$

Z (2.20) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \exists \pi \quad & -\omega \mathrm{E}[x_T^2|\pi] + (1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*])\mathrm{E}[x_T|\pi] > \\ & > -\omega \mathrm{E}[x_T^2|\pi^*] + (1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*])\mathrm{E}[x_T|\pi^*]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dále z (2.19) a z faktu, že $\tilde{U}$ je konvexní funkcí $\mathrm{E}[x_T^2]$ a $\mathrm{E}[x_T]$, dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2|\pi], \mathrm{E}[x_T|\pi]) \geq\ & \tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2|\pi^*], \mathrm{E}[x_T|\pi^*]) + \\ & +[-\omega, 1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*]] \begin{bmatrix} \mathrm{E}[x_T^2|\pi] \\ \mathrm{E}[x_T|\pi] \end{bmatrix} - \\ & -[-\omega, 1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*]] \begin{bmatrix} \mathrm{E}[x_T^2|\pi^*] \\ \mathrm{E}[x_T|\pi^*] \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

kde pravá strana nerovnosti je podle kapitoly 2.1 v Zajíček [12] tečná nadrovina k funkci $\tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2|\pi], \mathrm{E}[x_T|\pi])$ v bodě $[\mathrm{E}[x_T^2|\pi^*], \mathrm{E}[x_T|\pi^*]]$. Po sečtení nerovností (2.21) a (2.22) dostáváme

$$\tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2|\pi], \mathrm{E}[x_T|\pi]) > \tilde{U}(\mathrm{E}[x_T^2|\pi^*], \mathrm{E}[x_T|\pi^*]),$$

což je spor s (2.19). □

Věta 2.3.3. *Předpokládejme, že $\pi^* \in \Theta(\lambda^*, \omega)$. Potom platí $\pi^* \in \Phi(\omega) \Rightarrow \lambda^* = 1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T|\pi^*]$.*

Důkaz. Důkaz je uveden v Li a Ng [8]. □

2.3.2 *Řešení pomocné úlohy*

Úloha 2.3.1 závisí na dvou parametrech ω a λ. Je možné tuto úlohu zjednodušit na úlohu závislou pouze na jednom parametru vydělením užitkové funkce parametrem ω, který je podle předpokladů nenulový. Stačí nám proto nalézt řešení pro následující úlohu.

Úloha 2.3.4.

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{E}[-x_T^2 + \gamma x_T] \\ z.p. \quad & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, ..., T-1, \end{aligned}$$

kde $\gamma = \frac{\lambda}{\omega}$ je parametr, jehož správnou volbou můžeme získat řešení tří základních úloh.

Jedná se o multiperiodickou úlohu stochastického programování. Tento typ úloh se dá řešit např. dynamickým programováním, použitím Bellmanova principu, viz White [11]. Tedy předpokládáme, že již známe všechny události, které se odehrály před počátkem časového období $T-1$, a že jsme se řídili optimální investiční strategií tak, jak nám určil tento model. Je tedy potřeba spočítat investiční strategii pro období $T-1$, tedy vyřešit optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{E}[-x_T^2 + \gamma x_T] = f(\mathbf{u}_{T-1}) \\ z.p. \quad & x_T = e_{T-1}^0 x_{T-1} + \mathbf{p}_{T-1}' \mathbf{u}_{T-1}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pro určení optimální investiční strategie v časovém období τ předpokládáme, že známe všechny události, které se odehrály před počátkem časového období τ, a že jsme se řídili optimální investiční strategií tak, jak nám určil tento model. Navíc již známe optimální investiční strategii pro časová období $\tau+1, \tau+2, ..., T-1$, tedy $\mathbf{u}_{\tau+1}^*, ..., \mathbf{u}_{T-1}^*$. Pro získání $\mathbf{u}_\tau^*$ je tedy potřeba vyřešit úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{E}[-x_T^2 + \gamma x_T] \\ z.p. \quad & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t' \mathbf{u}_t^*, \ t = \tau+1, ..., T-1, \\ & x_{\tau+1} = e_\tau^0 x_\tau + \mathbf{p}_\tau' \mathbf{u}_\tau. \end{aligned}$$

Pro řešení této úlohy je potřeba dokázat následující vlastnosti.

Lemma 2.3.5. *Nechť* $\mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t'] > 0,\ t = 0, 1, ..., T-1$. *Potom platí*

$$\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'] > 0,\ t = 0, 1, ..., T-1$$

a

$$\mathrm{E}[e_t^0]^2 - \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t] > 0,\ t = 0, 1, ..., T-1.$$

Důkaz. Tento důkaz vychází z Li a Ng [8]. Protože matice $\mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t']$ je pozitivně definitní, je i matice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}[e_t^0]^2 & \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'] \\ \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t] & \mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t'] \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

pro libovolné $t = 0, 1, ..., T-1$. Podle důsledku 13.17 v Bican [3] je matice $\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t']$ je pozitivně definitní.

Navíc platí

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}[e_t^0]^2 & \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'] \\ \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t] & \mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'] \end{vmatrix} > 0 \text{ a } |\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t']| > 0.$$

Z rozkladu determinantu podle věty A.4 v Anděl [1] dostáváme

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}[e_t^0]^2 & \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'] \\ \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t] & \mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'] \end{vmatrix} = |\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t']||\mathrm{E}[e_t^0]^2 - \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t]| > 0,$$

$t = 0, 1, ..., T-1$. A tedy

$$\mathrm{E}[e_t^0]^2 - \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t] > 0,\ t = 0, 1, ..., T-1.$$

□

Dále si, pro větší přehlednost odvozování a výsledných vzorců zavedeme následující značení

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_t &= (\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t],\ t = 0, 1, ..., T-1 &(2.24)\\
A_t^1 &= \mathrm{E}[e_t^0] - \mathrm{E}[\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t],\ t = 0, 1, ..., T-1 &(2.25)\\
A_t^2 &= \mathrm{E}[e_t^0]^2 - \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t],\ t = 0, 1, ..., T-1 &(2.26)\\
\mathbf{v}_t &= \frac{\gamma}{2}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t],\ t = 0, 1, ..., T-2 &(2.27)\\
\mathbf{v}_{T-1} &= \frac{\gamma}{2}(\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}]. &(2.28)
\end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme úlohu pro časové období $T-1$. Do užitkové funkce dosadíme podmínku (2.23). Dostáváme tedy funkci

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}_{T-1}) = \ &\mathrm{E}[-(e_{T-1}^0)^2x_{T-1}^2 - 2e_{T-1}^0x_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'\mathbf{u}_{T-1} - \\
&-\mathbf{u}_{T-1}'\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'\mathbf{u}_{T-1} + \gamma e_{T-1}^0x_{T-1} + \gamma\mathbf{p}_{T-1}'\mathbf{u}_{T-1}],
\end{aligned}$$

kterou musíme maximalizovat vzhledem k $\mathbf{u}_{T-1}$. Nejprve si tedy funkci f upravíme

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}_{T-1}) = \ &-\mathrm{E}[e_{T-1}^0]^2x_{T-1}^2 - 2x_{T-1}\mathrm{E}[e_{T-1}^0\mathbf{p}_{T-1}']\mathbf{u}_{T-1} - \\
&-\mathbf{u}_{T-1}'\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}']\mathbf{u}_{T-1} + \gamma\mathrm{E}[e_{T-1}^0]x_{T-1} + \gamma\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}']\mathbf{u}_{T-1}.
\end{aligned}$$

A nyní ji zderivujeme podle $\mathbf{u}_{T-1}$.

$$\nabla_{\mathbf{u}_{T-1}}f(\mathbf{u}_{T-1}) = -2x_{T-1}\mathrm{E}[e_{T-1}^0\mathbf{p}_{T-1}] - 2\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}']\mathbf{u}_{T-1} + \gamma\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}].$$

Tento gradient položíme rovný nulovému vektoru a snadnými úpravami s využitím lemmatu 2.3.5 dostaneme jaké je optimální množství peněz pro investici do jednotlivých aktiv v časovém období $T-1$:

$$\mathbf{u}_{T-1}^* = -\mathbf{k}_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{v}_{T-1}, \qquad (2.29)$$

kde $\mathbf{k}_{T-1}$ je definováno ve vzorci (2.24) a $\mathbf{v}_{T-1}$ ve vzorci (2.28).

Vzorec (2.29) nám ukazuje jaké je optimální rozhodnutí v čase $T-1$, tedy poslední rozhodnutí, jaké musí investor udělat. Jak budou vypadat optimální rozhodnutí v ostatních časových obdobích, tj. $t = 0, 1, ..., T-2$ nám ukáže následující věta.

Věta 2.3.6. *Nechť jsme se do časového období t řídili optimální investiční strategií a na počátku časového období t máme majetek x_t. Pak pro získání optimálního rozhodnutí $\mathbf{u}_t^*$ stačí řešit úlohu*

$$\max \quad -\mathrm{E}[(x_te_t^0 + \mathbf{p}_t'\mathbf{u}_t)^2]\prod_{k=t+1}^{T-1}A_k^2 + \gamma\mathrm{E}[x_te_t^0 + \mathbf{p}_t'\mathbf{u}_t]\prod_{k=t+1}^{T-1}A_k^1 \qquad (2.30)$$

a optimálním rozhodnutím je

$$\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{k}_tx_t + \mathbf{v}_t,\ t = 0, 1, ..., T-2. \qquad (2.31)$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Nejprve tedy pro $t = T-2$.

Předpokládáme tedy, že jsme se řídili optimální investiční strategií až do časového období $T-2$, známe x_{T-2} a také známe optimální rozhodnutí $\mathbf{u}^*_{T-1}$. Máme řešit úlohu

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathrm{E}[-x_T^2 + \gamma x_T] && (2.32)\\
z.p. \quad & x_T = e^0_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{p}'_{T-1}\mathbf{u}^*_{T-1} && (2.33)\\
& x_{T-1} = e^0_{T-2}x_{T-2} + \mathbf{p}'_{T-2}\mathbf{u}_{T-2}. && (2.34)
\end{aligned}
$$

Do užitkové funkce (2.32) dosadíme první podmínku (2.33).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[-x_T^2 + \gamma x_T] &= \\
= \mathrm{E}[-(e^0_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{p}'_{T-1}\mathbf{u}^*_{T-1})^2 &+ \gamma(e^0_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{p}'_{T-1}\mathbf{u}^*_{T-1})] = \\
= \mathrm{E}[-(e^0_{T-1})^2x^2_{T-1} - 2e^0_{T-1}x_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}\mathbf{u}^*_{T-1} &- (\mathbf{p}'_{T-1}\mathbf{u}^*_{T-1})^2 + \\
+\gamma e^0_{T-1}x_{T-1} + \gamma\mathbf{p}'_{T-1}\mathbf{u}^*_{T-1}]
\end{aligned}
$$

Dále podle vzorce (2.29) dosadíme za $\mathbf{u}^*_{T-1}$ a s využitím nezávislosti e^i_t a e^i_τ máme

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[-(e^0_{T-1})^2x^2_{T-1} - 2e^0_{T-1}x_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}(-\mathbf{k}_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{v}_{T-1}) - \\
&-(\mathbf{p}'_{T-1}(-\mathbf{k}_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{v}_{T-1}))^2 + \gamma e^0_{T-1}x_{T-1} + \\
&+\gamma\mathbf{p}'_{T-1}(-\mathbf{k}_{T-1}x_{T-1} + \mathbf{v}_{T-1})] = \\
&= -\mathrm{E}[x_{T-1}]^2\mathrm{E}[e^0_{T-1}]^2 + 2\mathrm{E}[x_{T-1}]^2\mathrm{E}[e^0_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{k}_{T-1} - \\
&-2\mathrm{E}[x_{T-1}]\mathrm{E}[e^0_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{v}_{T-1} - \mathrm{E}[x_{T-1}]^2\mathbf{k}'_{T-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{k}_{T-1} + \\
&+2\mathrm{E}[x_{T-1}]\mathbf{k}'_{T-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{v}_{T-1} - \mathbf{v}'_{T-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{v}_{T-1} + \\
&+\mathrm{E}[x_{T-1}]\gamma\mathrm{E}[e^0_{T-1}] - \mathrm{E}[x_{T-1}]\gamma\mathrm{E}[\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{k}_{T-1} + \gamma\mathrm{E}[\mathbf{p}'_{T-1}]\mathbf{v}_{T-1} = \\
&= -\mathrm{E}[x_{T-1}]^2A^2_{T-1} + \mathrm{E}[x_{T-1}]\gamma A^1_{T-1} + konst.
\end{aligned}
$$

Nakonec ještě dosadíme za x_{T-1} podle podmínky (2.34) a dostáváme

$$
-\mathrm{E}[e^0_{T-2}x_{T-2} + \mathbf{p}'_{T-2}\mathbf{u}_{T-2}]^2A^2_{T-1} + \gamma\mathrm{E}[e^0_{T-2}x_{T-2} + \mathbf{p}'_{T-2}\mathbf{u}_{T-2}]A^1_{T-1} + konst. \tag{2.35}
$$

Vzhledem k tomu, že konstanta nemá žádný vliv na optimální rozhodnutí, dostáváme přesně optimalizační úlohu ze zadání věty.

Nyní si užitkovou funkci (2.35) upravíme na tvar

$$
\begin{aligned}
&(-x^2_{T-2}\mathrm{E}[e^0_{T-2}]^2 - 2x_{T-2}\mathrm{E}[e^0_{T-2}\mathbf{p}'_{T-2}]\mathbf{u}_{T-2} - \mathbf{u}'_{T-2}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-2}\mathbf{p}'_{T-2}]\mathbf{u}_{T-2})A^2_{T-1} + \\
&+\gamma(x_{T-2}\mathrm{E}[e^0_{T-2}] + \mathrm{E}[\mathbf{p}'_{T-2}]\mathbf{u}_{T-2})A^1_{T-1},
\end{aligned}
$$

který zderivujeme podle $\mathbf{u}_{T-2}$ a gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}_{T-2}} = -2x_{T-2}\mathrm{E}[e^0_{T-2}\mathbf{p}_{T-2}]A^2_{T-1} &- 2\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-2}\mathbf{p}'_{T-2}]\mathbf{u}_{T-2}A^2_{T-1} + \\
&+\gamma\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-2}]A^1_{T-1} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

A nyní již jednoduchými úpravami získáme optimální rozhodnutí pro časové období $T-2$ ve tvaru

$$\mathbf{u}^*_{T-2} = -\mathbf{k}_{T-2}x_{T-2} + \mathbf{v}_{T-2}.$$

Nyní dokážeme indukční krok. Předpokládáme, že optimalizační úloha pro časové období $t+1$ je tvaru:

$$\max -\mathrm{E}[(x_{t+1}e^0_{t+1} + \mathbf{p}'_{t+1}\mathbf{u}_{t+1})^2] \prod_{k=t+2}^{T-1} A^2_k + \gamma \mathrm{E}[x_{t+1}e^0_{t+1} + \mathbf{p}'_{t+1}\mathbf{u}_{t+1}] \prod_{k=t+2}^{T-1} A^1_k$$

Do užitkové funkce dosadíme za $\mathbf{u}_{t+1} := \mathbf{u}^*_{t+1}$ podle vzorce (2.31) a dostaneme

$$(-\mathrm{E}[x_{t+1}]^2\mathrm{E}[e^0_{t+1}]^2 + 2\mathrm{E}[x_{t+1}]^2\mathrm{E}[e^0_{t+1}\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{k}_{t+1} - 2\mathrm{E}[x_{t+1}]\mathrm{E}[e^0_{t+1}\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{v}_{t+1} -$$

$$-\mathrm{E}[x_{t+1}]^2\mathbf{k}'_{t+1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{t+1}\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{k}_{t+1} + 2\mathrm{E}[x_{t+1}]\mathbf{k}'_{t+1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{t+1}\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{v}_{t+1} -$$

$$-\mathbf{v}'_{t+1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{t+1}\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{v}_{t+1}) \prod_{k=t+2}^{T-1} A^2_k + \gamma(\mathrm{E}[x_{t+1}]\mathrm{E}[e^0_{t+1}] - \mathrm{E}[x_{t+1}]\mathrm{E}[\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{k}_{t+1} +$$

$$+\mathrm{E}[\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{v}_{t+1}) \prod_{k=t+2}^{T-1} A^1_k = (-\mathrm{E}[x_{t+1}]^2 A^2_{t+1} - \mathbf{v}'_{t+1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{t+1}\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{v}_{t+1}) \prod_{k=t+2}^{T-1} A^2_k +$$

$$+\gamma(\mathrm{E}[x_{t+1}]A^1_{t+1} + \mathrm{E}[\mathbf{p}'_{t+1}]\mathbf{v}_{t+1}) \prod_{k=t+2}^{T-1} A^1_k.$$

Nyní za x_{t+1} dosadíme $x_t e^0_t + \mathbf{p}'_t\mathbf{u}_t$ a dostaneme užitkovou funkci ve tvaru

$$-\mathrm{E}[x_t e^0_t + \mathbf{p}'_t\mathbf{u}_t]^2 \prod_{k=t+1}^{T-1} A^2_k + \gamma\mathrm{E}[x_t e^0_t + \mathbf{p}'_t\mathbf{u}_t] \prod_{k=t+1}^{T-1} A^1_k + konst,$$

kde *konst* opět nezávisí na $\mathbf{u}_t$ a tedy ji pro účely určení optimálního rozhodnutí můžeme vynechat.

Nyní získáme optimální rozhodnutí řešením optimalizační úlohy (2.30). Nejprve si upravíme užitkovou funkci na tvar

$$(-x_t^2\mathrm{E}[e^0_t]^2 - 2x_t\mathrm{E}[e^0_t\mathbf{p}'_t]\mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}'_t]\mathbf{u}_t) \prod_{k=t+1}^{T-1} A^2_k + \gamma(x_t\mathrm{E}[e^0_t] + \mathrm{E}[\mathbf{p}'_t]\mathbf{u}_t) \prod_{k=t+1}^{T-1} A^1_k,$$

který zderivujeme podle $\mathbf{u}_t$ a gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$\nabla_{\mathbf{u}_t} = -2x_t\mathrm{E}[e^0_t\mathbf{p}_t] \prod_{k=t+1}^{T-1} A^2_k - 2\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}'_t]\mathbf{u}_t \prod_{k=t+1}^{T-1} A^2_k + \gamma\mathrm{E}[\mathbf{p}_t] \prod_{k=t+1}^{T-1} A^1_k = \mathbf{0}$$

A nyní již jednoduchými úpravami získáme optimální rozhodnutí pro časové období t ve tvaru

$$\mathbf{u}^*_t = -\mathbf{k}_t x_t + \mathbf{v}_t,$$

což jsme chtěli dokázat.

□

2.3.3 Odvození optimálních řešení základních modelů na základě pomocné úlohy

V této části ukážeme jakým způsobem lze získat z řešení pomocné úlohy 2.3.4 řešení úloh základních 2.2.1, 2.2.2 a 2.2.3.

Za tímto účelem si zavedeme značení, které zjednoduší následující výpočty:

$$\begin{aligned} B_t &= \mathrm{E}[\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t], && (2.36)\\ \mu &= \prod_{t=0}^{T-1} A_k^1, && (2.37)\\ \nu &= \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-1} B_t \left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{(A_k^1)^2}{A_k^2}\right), && (2.38)\\ \tau &= \prod_{t=0}^{T-1} A_k^2. && (2.39)\end{aligned}$$

Dále si zavedeme označení $x_t(\gamma)$ pro hodnotu majetku v čase t, pokud jsme se až do času t řídili optimální investiční strategií tak, jak nám ji určila úloha 2.3.4.

Nejprve vypočteme $\mathrm{E}[x_T(\gamma)]$ a $\mathrm{E}[x_T(\gamma)]^2$ pro optimální řešení úlohy 2.3.4.

Optimální řešení

$$\mathbf{u}_t^* = -\mathbf{k}_t x_t + \mathbf{v}_t$$

dosadíme do podmínky

$$x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{p}_t'\mathbf{u}_t$$

a dostaneme

$$x_{t+1}(\gamma) = (e_t^0 - \mathbf{p}_t'\mathbf{k}_t)x_t(\gamma) + \frac{\gamma}{2}\mathbf{p}_t'\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t]. \tag{2.40}$$

Z (2.40) máme

$$\mathrm{E}[x_{t+1}(\gamma)] = A_t^1\mathrm{E}[x_t(\gamma)] + \frac{\gamma}{2}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)B_t. \tag{2.41}$$

A nyní již z rekurzivního vzorce (2.41) spočítáme $\mathrm{E}[x_T(\gamma)]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[x_T(\gamma)] &= A_{T-1}^1\mathrm{E}[x_{T-1}(\gamma)] + \frac{\gamma}{2}B_{T-1}\\ &= A_{T-1}^1A_{T-2}^1\mathrm{E}[x_{T-2}(\gamma)] + \frac{\gamma}{2}\left(\prod_{k=T-1}^{T-1}\frac{(A_k^1)^2}{A_k^2}\right)B_{T-2} + \frac{\gamma}{2}B_{T-1}\\ &\;\vdots\\ &= \prod_{t=0}^{T-1}A_t^1x_0 + \frac{\gamma}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{(A_k^1)^2}{A_k^2}\right)B_t\\ &= \mu x_0 + \gamma\nu. && (2.42)\end{aligned}$$

Obě strany rovnosti (2.40) umocníme

$$\begin{aligned} x_{t+1}^2(\gamma) &= ((e_t^0)^2 - 2e_t^0\mathbf{p}_t'\mathbf{k}_t + \mathbf{k}_t'\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'\mathbf{k}_t)x_t^2(\gamma) + \\ &\quad +2(e_t^0 - \mathbf{p}_t'\mathbf{k}_t)x_t(\gamma)\mathbf{p}_t'\mathbf{v}_t(\gamma) + \mathbf{v}_t(\gamma)'\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'\mathbf{v}_t(\gamma). \end{aligned}$$

Spočteme střední hodnotu $x_{t+1}^2(\gamma)$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x_{t+1}(\gamma)]^2 &= (\mathrm{E}[e_t^0]^2 - 2\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t']\mathbf{k}_t + \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t']\mathbf{k}_t)x_t^2(\gamma) + \\ &\quad +(\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t']\mathbf{v}_t - \mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t']\mathbf{v}_t)\mathrm{E}[x_t(\gamma)] + \\ &\quad +\frac{\gamma^2}{4}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)\mathrm{E}[\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t] \\ &= A_t^2\mathrm{E}[x_t(\gamma)]^2 + \frac{\gamma^2}{4}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)^2 B_t. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Z rekurzivního vzorce (2.43) spočteme $\mathrm{E}[x_T(\gamma)]^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x_T(\gamma)]^2 &= A_{T-1}^2\mathrm{E}[x_{T-1}(\gamma)]^2 + \frac{\gamma^2}{2}B_{T-1} \\ &= A_{T-1}^2A_{T-2}^2\mathrm{E}[x_{T-2}(\gamma)]^2 + \frac{\gamma^2}{2}\left(\prod_{k=T-1}^{T-1}\frac{(A_k^1)^2}{A_k^2}\right)B_{T-2} + \frac{\gamma}{2}B_{T-1} \\ &\;\;\vdots \\ &= \prod_{t=0}^{T-1}A_t^2x_0^2 + \frac{\gamma^2}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{(A_k^1)^2}{A_k^2}\right)B_t \\ &= \tau x_0^2 + \frac{\nu}{2}\gamma^2. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Ze vztahů (2.42) a (2.44) vypočítáme $\mathrm{var}(x_T(\gamma))$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(x_T(\gamma)) &= \mathrm{E}[x_T(\gamma)]^2 - (\mathrm{E}[x_T(\gamma)])^2 = \\ &= \tau x_0^2 + \frac{\nu}{2}\gamma^2 - \mu^2x_0^2 - 2\mu\nu x_0\gamma - \nu^2\gamma^2 = \\ &= \frac{\nu}{2}(1-2\nu)\left(\gamma^2 - \frac{4\mu x_0\gamma}{1-2\nu} + \frac{4\mu^2x_0^2}{(1-2\nu)^2}\right) - \\ &\quad -\left(\frac{2\mu^2\nu}{1-2\nu} - \tau + \mu^2\right)x_0^2 = \\ &= \frac{\nu}{2}(1-2\nu)\left(\gamma - \frac{2\mu x_0}{1-2\nu}\right)^2 - \left(\frac{2\mu^2\nu}{1-2\nu} - \tau + \mu^2\right)x_0^2. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Zajímavým výsledkem této části je, že střední hodnota konečného majetku je lineární v γ a rozptyl je kvadratickou funkcí γ.

Řešení úlohy 2.2.3

Zvolme si parametr $\omega > 0$ libovolný, ale pevný. Označme si π^* optimální investiční strategii pro úlohu 2.3.1 s parametry ω a $\lambda^* = 1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T(\gamma)|\pi^*]$.

Podle věty 2.3.2 je množina optimálních řešení úlohy 2.2.3 s parametrem ω podmnožinou všech optimálních řešení úlohy 2.3.1 s parametry ω a λ^*. To znamená, že se při hledání optimálních řešení úlohy 2.2.3 stačí omezit na množinu optimálních řešení úlohy 2.3.1 s parametrem

$$\lambda^* = 1 + 2\omega \mathrm{E}[x_T(\gamma)|\pi^*]. \tag{2.46}$$

Protože však množina $\Theta(\lambda^*, \omega)$ má podle (2.31) jednoznačné řešení a je zřejmé, že $\Phi(\omega)$ je neprázdná, je toto řešení zároveň i optimálním řešením úlohy 2.2.3.

Jednoduchými úpravami (2.46) dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^*}{\omega} &= \frac{1}{\omega} + 2\mathrm{E}[x_T(\gamma)] \\
\gamma &= \frac{1}{\omega} + 2\mu x_0 + 2\nu\gamma \\
\gamma &= \frac{1}{\omega(1-2\nu)} + \frac{2\mu x_0}{1-2\nu}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Pokud dosadíme γ z rovnosti (2.47) do vzorce (2.31) a (2.29), dostaneme eficientní investiční strategii pro úlohu 2.2.3 s parametrem ω

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_t &= -(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[e_t^0\mathbf{p}_t]x_t + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega(1-2\nu)} + \frac{2\mu x_0}{1-2\nu}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t], \\
&\quad t = 0, 1, \dots, T-2, \\
\mathbf{u}_{T-1} &= -(\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'])^{-1}\mathrm{E}[e_{T-1}^0\mathbf{p}_{T-1}]x_{T-1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega(1-2\nu)} + \frac{2\mu x_0}{1-2\nu}\right)(\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}].
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Pro střední hodnotu a rozptyl majetku v posledním časovém období pro tuto investiční strategii platí

$$\mathrm{E}[x_T(\omega)] = \mu x_0 + \frac{\nu}{\omega(1-2\nu)} + \frac{2\mu\nu x_0}{1-2\nu} \tag{2.49}$$

$$\mathrm{var}(x_T(\omega)) = \frac{\nu}{2\omega^2(1-2\nu)} - \left(\frac{2\mu^2\nu}{1-2\nu} - \tau + \mu^2\right)x_0^2. \tag{2.50}$$

Řešení úlohy 2.2.1

Ze vztahu úloh 2.2.1 a 2.2.3 víme, že pokud máme eficientní investiční strategii úlohy 2.2.3, musí být $\sigma = \mathrm{var}(x_T(\gamma))$ ze vzorce (2.50), aby ona strategie byla zároveň eficientní i pro úlohu 2.2.1. Tedy

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\nu}{2\omega^2(1-2\nu)} - \left(\frac{2\mu^2\nu}{1-2\nu} - \tau + \mu^2\right)x_0^2 \\
\omega^2\left(1 + \frac{\left(\frac{2\mu^2\nu}{1-2\nu} - \tau + \mu^2\right)x_0^2}{\sigma}\right) &= \frac{\nu}{2(1-2\nu)\sigma} \\
\omega &= \sqrt{\frac{\nu}{2(1-2\nu)(\sigma + \left(\frac{2\mu^2\nu}{1-2\nu} - \tau + \mu^2\right)x_0^2)}}. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Pokud ω ze vztahu (2.51) dosadíme do vzorců (2.48), získáme eficientní investiční strategii pro úlohu 2.2.1 s parametrem σ.

Řešení úlohy 2.2.2

Ze vztahu úloh 2.2.2 a 2.2.3 víme, že pokud máme eficientní investiční strategii úlohy 2.2.3, musí být $\rho = \mathrm{E}[x_T(\omega)]$ ze vzorce (2.49), aby ona strategie byla zároveň eficientní i pro úlohu 2.2.2. Tedy

$$
\begin{aligned}
\rho &= \mu x_0 + \frac{\nu}{\omega(1-2\nu)} + \frac{2\mu\nu x_0}{1-2\nu} \\
\omega\left(1 - \frac{\mu x_0}{\rho} - \frac{2\mu\nu x_0}{1-2\nu}\right) &= \frac{\nu}{\rho(1-2\nu)} \\
\omega &= \frac{\nu}{(1-2\nu)\rho - (1-2\nu)\mu x_0 - 2\mu\nu x_0}. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Pokud ω ze vztahu (2.52) dosadíme do vzorců (2.48), získáme eficientní investiční strategii pro úlohu 2.2.2 s parametrem ρ.

2.4 *Bezrizikové aktivum*

V této podkapitole budeme navíc přepokládat, že nulté aktivum je bezrizikové. Tedy výnos nultého aktiva v čase t je $e_t^0 = s_t$, kde s_t je předem známá konstanta. Navíc platí $\mathrm{cov}(e_t^0, e_t^i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$; $t = 0, 1, ..., T-1$. Stále musíme předpokládat $\mathrm{E}[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t'] > 0$.

Značení (2.24)-(2.26) se změní následovně

$$\mathbf{k}_t = s_t(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t], \; t = 0, 1, ..., T-1 \qquad (2.53)$$

$$A_t^1 = s_t(1 - \mathrm{E}[\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t]), \; t = 0, 1, ..., T-1 \qquad (2.54)$$

$$A_t^2 = s_t^2(1 - \mathrm{E}[\mathbf{p}_t'](\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t]), \; t = 0, 1, ..., T-1. \qquad (2.55)$$

Všechna ostatní značení zůstávají zachována. Eficientní investiční strategie pro všechny multiperidocké úlohy, tj. úlohy 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 a 2.3.1 lze získat nahrazením konstant a konstantního vektoru (2.24),(2.25) a (2.26) ve finálních vzorcích konstantami a konstantním vektorem (2.53),(2.54) a (2.55).

Eficientní investiční strategie pro úlohu 2.3.1 s bezrizikovým aktivem je tedy

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_t &= -s_t(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t]x_t + \frac{\gamma}{2}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{1}{s_k}\right)(\mathrm{E}[\mathbf{p}_t\mathbf{p}_t'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_t],\\
& \quad t = 0, 1, ..., T-2,\\
\mathbf{u}_{T-1} &= -s_{T-1}(\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}]x_{T-1} + \\
& \quad +\frac{\gamma}{2}(\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}\mathbf{p}_{T-1}'])^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{p}_{T-1}].
\end{aligned}$$

Eficientní řešení úloh 2.2.1, 2.2.2 a 2.2.3 můžeme získat dosazením za γ (resp. ω) podle vzorců (2.47),(2.51) a (2.52).

Kapitola 3

Multiperiodický model optimalizace portfolia

V této kapitole se pokusíme odstranit některé nedostatky, které obsahuje úloha 2.2.2 z předchozí kapitoly. Jedná se o prodeje na krátko a transakční náklady. Zformulujeme nový model a spočteme pro něj optimální investiční strategii.

3.1 *Konstrukce modelu*

V předchozí kapitole jsme odvodili analytické řešení pro úlohu 2.2.2. Tuto úlohu si pro potřeby této kapitoly přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{var}(x_T) \\ z.p. \quad & \mathrm{E}x_T \geq \rho \\ & x_{t+1} = \sum_{i=0}^{n} e_t^i u_t^i, \ t = 0, 1, ..., T-1, \\ & x_t = \sum_{i=0}^{n} u_t^i, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $\rho > 0$ je parametr určující minimální hodnotu konečného majetku, kterého chce investor dosáhnout. Tato úloha má několik nedostatků, které omezují její použití v praxi.

Jedním z nich je povolení tzv. prodeje na krátko. To znamená, že investor může prodávat aktiva, která nevlastní. Tuto výtku můžeme odstranit přidáním podmínky nezápornosti pro proměnné u_t^i. Tedy

$$u_t^i \geq 0, \quad t = 0, ..., T-1, \ i = 0, ..., n. \tag{3.2}$$

Dále v úloze 2.2.2 nejsou zahrnuty transakční náklady. Investor musí za každý nákup, nebo prodej aktiv zaplatit určitá procenta zprostředkovateli transakce. Toto lze vyřešit přidáním transakčních nákladů

$$c \sum_{i=0}^{n} |u_t^i - e_{t-1}^i u_{t-1}^i| \tag{3.3}$$

do podmínky na rozdělení peněz (3.1). Číslo v absolutní hodnotě nám určuje, za jakou částku nakoupíme (prodáme) i-té aktivum v čase t. Konstanta c určuje, kolik musí investor zprostředkovateli zaplatit.

Tato podmínka je díky absolutní hodnotě nehladká. Později by se ukázalo, že nehladkost v podmínkách by vedla k přílišné výpočetní náročnosti, proto absolutní hodnotu odstraníme již nyní. Absolutní hodnotě se můžeme vyhnout, přidáním nových nezáporných proměnných, b_t^i nákup aktiva i v čase t a s_t^i prodej aktiva i v čase t. Tyto proměnné navíc musí splňovat podmínku

$$u_t^i = e_{t-1}^i u_{t-1}^i + b_t^i - s_t^i,\ t = 1, ..., T-1,\ i = 0, ..., n. \tag{3.4}$$

Podmínka (3.1) bude tedy s využitím těchto nových proměnných vypadat takto

$$x_t = \sum_{i=0}^{n} u_t^i + c\sum_{i=0}^{n}(b_t^i + s_t^i). \tag{3.5}$$

Úloha 2.2.2 se nám tedy přidáním podmínek (3.5),(3.4),(3.2) a s podmínkou nezápornosti pro proměnné b_t^i a s_t^i změní následovně.

Úloha 3.1.1.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathrm{var}(x_T) \\
z.p. \quad & \mathrm{E}x_T \geq \rho \\
& x_{t+1} = \sum_{i=0}^{n} e_t^i u_t^i,\ t = 1, ..., T-1 \\
& x_0 = (1+c)\sum_{i=0}^{n} u_0^i \\
& x_t = \sum_{i=0}^{n} u_t^i + c\sum_{i=0}^{n}(b_t^i + s_t^i),\ t = 1, ..., T-1 \\
& u_t^i = u_{t-1}^i + b_t^i - s_t^i,\ t = 1, ..., T-1,\ i = 0, ..., n \\
& b_t^i s_t^i = 0,\ t = 0, ..., T-1,\ i = 0, ..., n \\
& b_t^i \geq 0,\ t = 0, ..., T-1,\ i = 0, ..., n \\
& s_t^i \geq 0,\ t = 0, ..., T-1,\ i = 0, ..., n \\
& u_t^i \geq 0,\ t = 0, ..., T-1,\ i = 0, ..., n.
\end{aligned}$$

Najít řešení této úlohy analytickou cestou je příliš obtížné. I kdybychom si, podobně jako ve druhé kapitole, sestrojili pomocnou úlohu, tak se nové podmínky ukáží jako příliš komplikující. Například jednotlivé proměnné mohou být v různých časových obdobích rovny nule. Tato možnost vede k velikým komplikacím ve výpočtech a vyjádření výsledků, i kdybychom řešili pouze dvouperiodický model.

Pro řešení úlohy 3.1.1 proto použijeme scénářový přístup a s využitím softwaru GAMS najdeme optimální řešení této úlohy.

3.2 *Scénářový přístup*

Předpokládejme, že rozdělení všech výnosů $\mathbf{e}_t$, $t = 0, ..., T-1$ je dáno scénářovým stromem. Každý vektor $\mathbf{e}_t$ má konečně mnoho realizací $\mathbf{e}_{t,s}$ s pravděpodobnostmi $p_s >$

0, $s \in S_t$, kde S_t je množina všech uzlů příslušících času t. Označme si $V := \bigcup_{t=0}^{T} S_t$ množinu všech uzlů. Množinu listů označme $S := S_T$. Dále budeme značit $0 \in S_0$ kořen scénářového stromu, $s \in S_t$ aktuální uzel a $\tau(s) \in S_{t-1}$ jeho předchůdce.

Podobně jako v předchozích částech budeme pro jednoduchost značit $\mathbf{e}_s$ vektor výnosů příslušících uzlu $s \in S_t$, $t = 0, ..., T-1$. V podstatě se jedná o jednotlivé realizace vektoru $\mathbf{e}_{t-1}$. Vektor $\mathbf{e}_s$ již je deterministický. Vektory $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{b}_s$ a $\mathbf{s}_s$ jsou rozhodnutí, jaká investor udělá v uzlu $s \in S_t$, $t = 0, ..., T-1$. Proměnná x_s je hodnota majetku, který má investor v uzlu $s \in S_t$, $t = 0, ..., T$.

Očekávaný finální majetek tedy bude

$$\mathrm{E}x_T = \sum_{s \in S} p_s x_s$$

a rozptyl finálního majetku bude

$$\mathrm{var}(x_T) = \sum_{s \in S} p_s (x_s)^2 - \left(\sum_{s \in S} p_s x_s \right)^2.$$

Úloha 3.1.1 přepsaná do scénářového tvaru tedy bude vypadat následovně.

Úloha 3.2.1.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{s \in S} p_s (x_s)^2 - \left(\sum_{s \in S} p_s x_s \right)^2 \\
z.p. \quad & \sum_{s \in S} p_s x_s \geq \rho && (3.6) \\
& x_s = \sum_{i=0}^{n} e_s^i u_{\tau(s)}^i, \ s \in V \setminus \{0\} && (3.7) \\
& x_0 = (1+c) \sum_{i=0}^{n} u_0^i && (3.8) \\
& x_s = \sum_{i=0}^{n} u_s^i + c \sum_{i=0}^{n} (b_s^i + s_s^i), \ s \in S_t, \ t = 1, ..., T-1 && (3.9) \\
& u_s^i = e_s^i u_{\tau(s)}^i + b_s^i - s_s^i, \ s \in S_t, \ t = 1, ..., T-1, \ i = 0, ..., n && (3.10) \\
& b_s^i s_s^i = 0, \ s \in V \setminus \{S, 0\}, \ i = 0, ..., n && (3.11) \\
& b_s^i \geq 0, \ s \in V \setminus \{S, 0\}, \ i = 0, ..., n \\
& s_s^i \geq 0, \ s \in V \setminus \{S, 0\}, \ i = 0, ..., n \\
& u_s^i \geq 0, \ s \in V \setminus S, \ i = 0, ..., n.
\end{aligned}$$

Podmínka (3.6) určuje minimální požadovanou výši střední hodnoty konečného majetku. Rovnost (3.7) udává, jaké množství peněz máme v uzlu s potenciálně k dispozici. Rozdělení peněz mezi jednotlivá aktiva ve všech uzlech kromě listů je určeno podmínkami (3.8) a (3.9). Technická podmínka (3.10) je zde přítomna kvůli odstranění absolutní hodnoty u transakčních nákladů. Podmínka (3.11) nám zaručí, že dané aktivum budeme buď jenom prodávat, nebo kupovat.

3.3 *Výpočet*

Rozhodli jsme se určit investiční strategii investora, který nakupuje a prodává akcie přes společnost RM-SYSTÉM. Investor portfolio svých akcií obnovuje každý měsíc. K dispozici má 1000000 Kč. Rád by věděl, jak má v průběhu následujících 3 měsíců investovat, aby po uplynutí oněch 3 měsíců měl 1060000 Kč a riziko bylo co nejmenší.

3.3.1 *Data*

Na internetových stránkách společnosti RM-Systém (www.rm-system.cz) jsou k dispozici denní údaje o cenách akcií za období 1.2.2001 do 1.3.2006. Pro naši analýzu jsme vybrali akcie pěti velkých firem: Český Telecom, Komerční banka, ČKD Kutná Hora, Setuza a ČEZ. Vypsali jsme si měsíční ceny (62 pozorování pro každou společnost) těchto akcií, údaj máme vždy z prvního obchodovacího dne daného měsíce. Jako cenu akcie jsme brali závěrečný kurs v Kč.

Společnosti Český Telecom a ČEZ mají akcie o nominální hodnotě 100 Kč, Komerční banka má akcie o nominální hodnotě 500 Kč, ČKD Kutná Hora a Setuza mají akcie o nominální hodnotě 1000 Kč.

Některé ze společností od roku 2001 vyplácely svým akcionářům dividendy. Dividenda ovlivňuje výši výnosů. Rozhodli jsme se připsat výši dividendy k ceně akcie a sice k prvnímu datu v naší časové řadě po datu rozhodnutí o vyplacení dividendy. Výši a data rozhodnutí o vyplácení dividend obsahují následující tabulky.

Datum	Výše dividendy (Kč)
15.6.2001	7.50
13.6.2003	57.50
24.6.2004	17

Tabulka 3.1: Dividendy Českého Telecomu

Datum	Výše dividendy (Kč)
26.6.2002	11.50
19.6.2003	40
17.6.2004	200
28.4.2005	100

Tabulka 3.2: Dividendy Komerční banky

Společnosti Setuza a ČKD Kutná Hora od roku 2001 žádné dividendy nevyplácely.

Máme tedy k dispozici časové řady cen akcií. Tyto řady přetransformujeme na časové řady výnosů podle vzorce

$$e_t = \frac{r_{t+1} + D_t}{r_t},$$

Datum	Výše dividendy (Kč)
19.6.2001	2
11.6.2002	2.50
17.6.2003	8
17.6.2004	9
20.6.2005	9

Tabulka 3.3: Dividendy ČEZ

kde e_t je výnos, r_t je cena akcie a D_t je výše dividendy, o jejíž výplatě bylo rozhodnuto mezi časy t a $t+1$.

3.3.2 *Nastavení parametrů*

Podle požadavků máme tedy určit investiční strategii na 3 časová období (měsíce), tedy $T = 3$. Na počátku má investor k dispozici 1000000 Kč, tedy $x_0 = 1000000$. Požadovaná výše finálního majetku je v tomto případě $\rho = 1060000$.

Pokud chce investor uskutečnit nákup nebo prodej přes RM-Systém, musí zaplatit fixní částku a také procenta z uskutečněného obchodu. Pro transakci do 1000000 Kč se transakční náklady pohybovaly kolem 3 %, proto v takovéto výši volíme transakční náklady v našich výpočtech. Dále v této kapitole budeme fixní částku zanedbávat.

Nutno dodat, že tato naše aproximace je velmi zjednodušující. Ve skutečnosti pro malé obchody fixní částka transakčních nákladů může být vyšší než samotná transakce. Potom jsou ovšem transakční náklady více než 100 %. Naopak při velikých nákupech mohou transakční náklady poklesnout i pod 1 %. Jako další vylepšení našeho modelu by tedy mohlo být lepší započítávání transakčních nákladů.

3.3.3 *Generování scénářů*

Rozhodli jsme se vytvořit scénářový strom pro 10, 20 a 30 větví v každém období. To znamená, že v každém časovém období, kromě posledního, vychází z jednoho uzlu 10, 20, nebo 30 větví, každá se stejnou pravděpodobností. V čase $t = 0$ máme jeden uzel 0. V čase $t = 1$ může nastat 10, resp. 20 a 30 různých situací. V čase $t = 2$ jich může nastat 100, resp. 400 a 900. V posledním časovém období $t = 3$ již neděláme žádná rozhodnutí a pouze pozorujeme vývoj cen akcií. Celkově bude 1000, resp. 8000 a 27000 scénářů. Jednotlivé scénářové stromy obsahují 1111, resp. 8421 a 27931 uzlů.

V našem scénářovém stromě jsou větve v různých časových obdobích nezávislé a navíc má každá větev stejnou pravděpodobnost. To mimo jiné znamená, že pravděpodobnost scénářů je rovna 0.001, resp. 0.000125 a $0.0000\overline{370}$.

Existuje mnoho způsobů jak generovat scénářové stromy. Více o této problematice je možné nalézt například v Dupačová, Hurt, Štěpán [4] nebo v Gülpinar, Rustem, Settergren [6]. My jsme se rozhodli využít programu, který napsali Michal Kaut a Diego Mathieu. Tento program využívá pro generování scénářů metodu shody momentů. Tj. generuje náhodné vektory tak, aby jejich střední hodnota, směrodatná odchylka, korelační matice, šikmost a špičatost odpovídaly požadovaným hodnotám. Tento program je volně dostupný na internetových stránkách www.work.michalkaut.net.

Jak vypadaly výběrové momenty pro výnosy našich pěti akcií ukazují tabulky 3.4 a 3.5.

Společnost	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Šikmost	Špičatost
Český Telecom	1.0057	0.11006	-0.044	3.359
ČEZ	1.0358	0.10048	0.221	3.060
ČKD	1.0485	0.14508	1.155	6.155
Komerční banka	1.0271	0.09327	0.853	4.512
Setuza	1.0160	0.13915	0.321	4.781

Tabulka 3.4: Výběrové momenty vstupních dat

	ČT	ČEZ	ČKD	KB	Setuza
Český Telecom	1.000	0.552	-0.134	0.517	0.013
ČEZ	0.552	1.000	-0.070	0.552	0.208
ČKD	-0.134	-0.070	1.000	0.062	0.088
Komerční banka	0.517	0.552	.062	1.000	.172
Setuza	0.013	0.208	0.088	0.172	1.000

Tabulka 3.5: Výběrové korelační matice vstupních dat

Výběrové momenty vygenerovaných scénářů se skutečně příliš nelišily od výběrových momentů vstupních dat. Například pro vygenerovaných 30 scénářů se výběrový průměr lišil o méně než 0.0001, směrodatná odchylka se lišila řádově v desetitisícinách, šikmost se lišila řádově v setinách a špičatost řádově v desetinách.

Soubory s vygenerovanými scénáři jsou přiloženy na CD. Jsou to *scenare10.txt*, *scenare20.txt* a *scenare30.txt*.

3.3.4 *Výsledky*

Výpočty jsme prováděli na počítači s procesorem Intel Pentium 4 2.66GHz a 1GB RAM. Použili jsme výpočetní program GAMS 22.0, balík Conopt. Zdrojové kódy programů pro GAMS se nacházejí na přiloženém CD.

Pro 10 scénářů výpočet trval 1 minutu, pro 20 scénářů 15 minut a pro 30 scénářů 3 hodiny.

Investiční strategie

Po provedení výpočtů jsme si nechali vypsat některé důležité informace do výstupního souboru. Máme tři tyto soubory. Pro 10 scénářů se soubor jmenuje *vysledek10scen.txt*, pro 20 scénářů *vysledek20scen.txt* a pro 30 scénářů *vysledek30scen.txt*. Tyto soubory se nácházejí na přiloženém CD.

V těchto souborech můžeme nalézt velikost transakčních nákladů, minimální požadovaný konečný majetek, celkovou částku utracenou za nákup, nebo prodej akcií ve všech uzlech v čase $t = 1$, celkovou částku utracenou za nákup, nebo prodej akcií ve všech uzlech v čase $t = 2$, riziko spojené s naší investicí, tj. výběrový rozptyl finálního majetku ze všech listů, výběrový průměr finálního majetku ze všech listů a také finální majetek v jednotlivých listech. Ale především tyto soubory obsahují optimální investiční strategie pro jednotlivé uzly.

Investiční příklad:

Nyní popíšeme jak v praxi postupovat při investování. Využijeme výsledek, který jsme dostali pro 30 scénářů. V čase $t = 0$ se řídíme investiční strategií, jak nám ji učuje bod 1, tedy zakoupíme akcie ČEZ v hodnotě 430000 Kč, akcie ČKD za 334000 Kč, akcie KB 184000 Kč a akcie Setuzy za 22000 Kč a žádné akcie ČT. Celkem tedy budeme mít akcie v hodnotě 970000 Kč. Zbylých 30000 Kč zaplatíme na poplatcích za nákup akcií. Nechť v následujícím měsíci byly výnosy akcií následující: ČT=0.95 ČEZ=1.00 ČKD=1.06 KB=0.90 a Setuza=1.40. Máme tedy akcie ČEZ v hodnotě 430000 Kč, akcie ČKD v hodnotě 354000 Kč, akcie KB v hodnotě 165000 Kč a akcie Setuzy v hodnotě 30000 Kč.

Podle souboru *scenare30.txt* nalezneme číslo nejbližšího scénáře (např. podle nejmenší čtvercové vzdálenosti), v našem případě se jedná o scénář 14. Nacházíme se tedy v uzlu číslo 15 (*číslo scénáře + uzel*). Pro tento uzel nám soubor *vysledek30scen.txt* říká, abychom v čase $t = 1$ měli akcie ČEZ v hodnotě 434000 Kč, akcie ČKD v hodnotě 360000 Kč, akcie KB v hodnotě 169000 Kč a akcie Setuzy v hodnotě 32000 Kč. Rozdíl hodnot v tomto a předchozím odstavci nám udává za kolik máme nakupovat, respektive prodávat jednotlivé druhy akcií. Z tabulek 3.4 a 3.5 je vidět, že akcie ČT jsou neatraktivní v drtivé většině scénářů.

Obdobně bychom postupovali i pro časové období $t = 2$. V čase $t = 3$ bychom jenom sečetli v jaké hodnotě máme všechny akcie, což bude náš konečný majetek.

Rozdělení konečného majetku

Tabulky 3.6 a 3.7 nám ukazují jak vypadají některé základní vlastnosti konečného majetku, který jsme obdrželi pro model se 30 scénáři.

Statistika	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Šikmost	Špičatost
Hodnota	1060000	106770.6	0.168	3.117

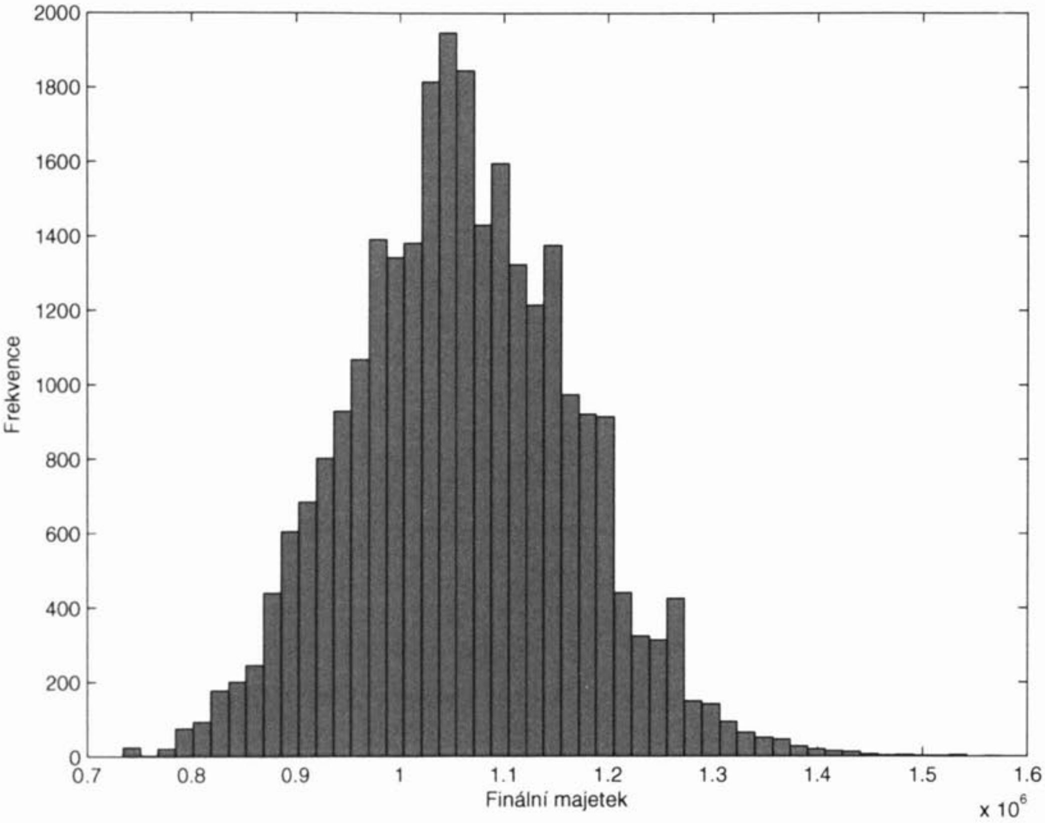
Tabulka 3.6: Výběrové momenty konečného majetku

Percentil	5	10	25	50	75	90	95
Hodnota	887200	922300	986700	1056000	1133000	1195000	1241000

Tabulka 3.7: Percentily konečného majetku

Na obrázku 3.1 je zobrazen histogram majetku v posledním období pro model se 30 scénáři.

Provedli jsme také Kolmogorovův-Smirnovův test na normalitu hodnot konečného majetku. Na hladině $\alpha = 0.05$ % zamítáme hypotézu, že hodnoty konečného majetku pocházejí z normálního rozdělení.



Obrázek 3.1: Histogram konečného majetku

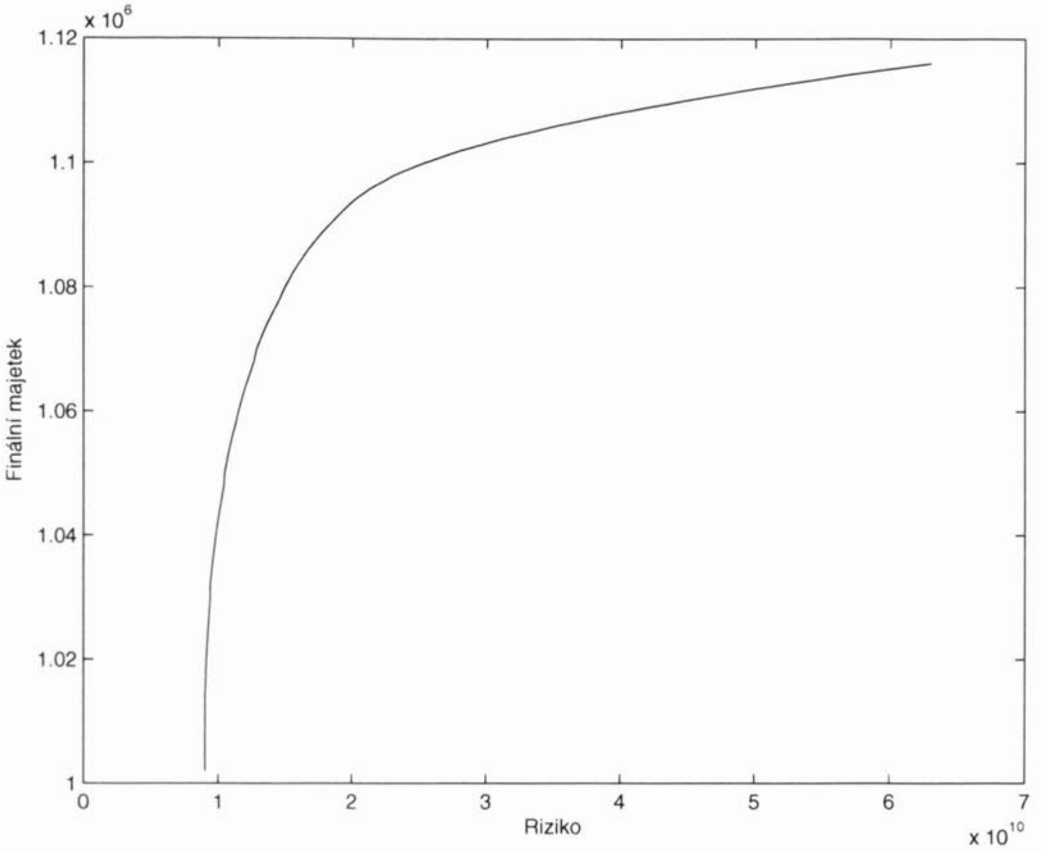
Konečný majetek a riziko

Zajímalo nás, jakým způsobem na sobě závisí minimální požadovaný konečný majetek a riziko. Kvůli časové náročnosti jsme tuto analýzu provedli pouze pro model s 1000 scénáři. Oproti modelu se třiceti scénáři by se však výsledek příliš nelišil.

Pokud jsme hranici pro minimální požadovaný konečný majetek nastavili pod 1010000, nebyl tento minimální majetek dosažen. Model nám určil stretegii, pro kterou byla střední hodnota konečného majetku rovna právě 1010000. Abychom dosáhli konečného majetku menšího než 1010000, museli bychom téměř vše investovat do akcií Českého Telecomu, které mají nejmenší měsíční výnosy. To by nám však příliš zvýšilo riziko investice. Nejnižší riziko, jakého jsme schopni s pomocí našeho modelu dosáhnout, je tedy zhruba 9 miliard. Očekávaný konečný majetek pro toto rizkio je 1010000.

Na druhou stranu maximální očekávaný konečný majetek, jakého jsme byli schopni s danými akciemi dosáhnout je 1117000. Riziko pro tuto hodnotu konečného majetku je 66 miliard.

Vztah mezi střední hodnotou konečného majetku a rizikem u eficientních portfolií ukazuje graf 3.2.



Obrázek 3.2: Závislost konečného majetku a rizika

Objem reinvestic v závislosti na transakčních nákladech

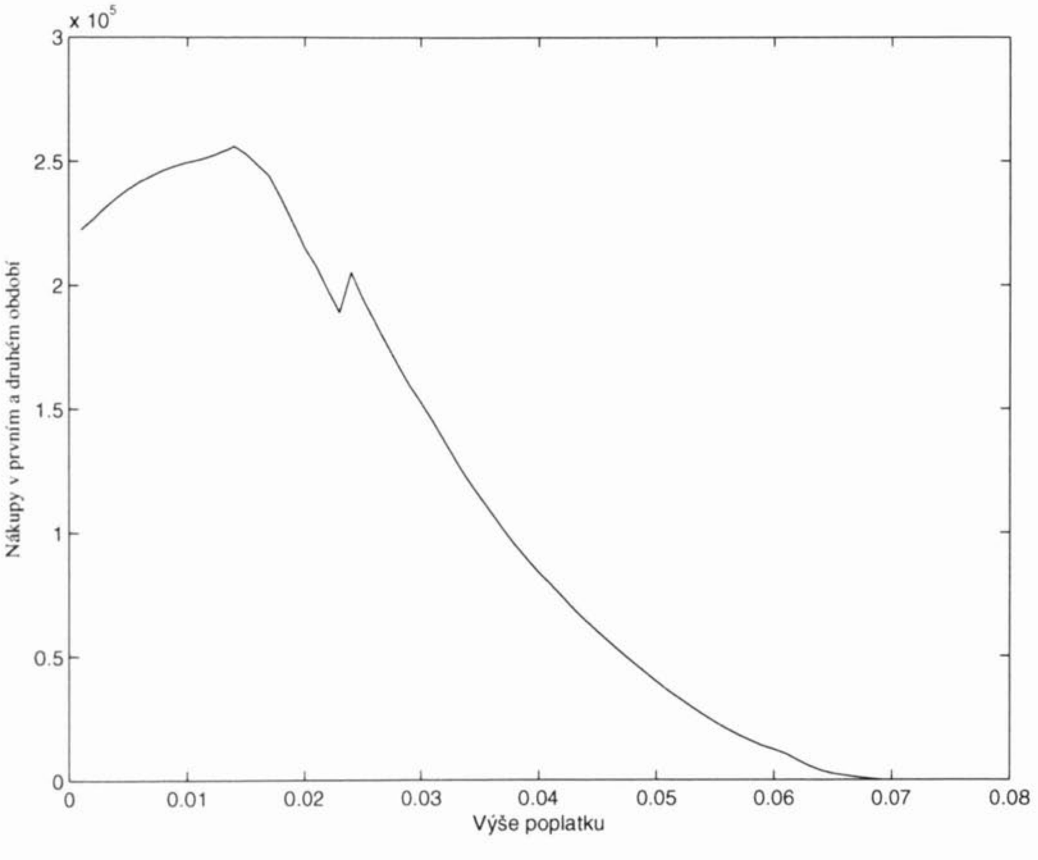
Podobně jako v předchozí kapitole jsme zkoumali vztah mezi výší transakčních nákladů a množstvím nově zakoupených akcií (v korunách). Opět jsme analýzu provedli pouze pro model s 1000 scénáři. Nechali jsme si nalézt optimální řešení našeho modelu, ve kterém jsme postupně měnili transakční náklady, vždy o jednu desetinu procenta. Výsledky jsou přiloženy na CD v souboru *transakcni naklady.txt*. Vztah mezi transakčními náklady a průměrnými nákupy v obdobích $t = 1$ a $t = 2$ ukazuje graf 3.3.

Pokud jsme volili transakční náklady do výše 1.5 % a hodnoty ostatních parametrů zůstaly zachovány, byl očekávaný výnos konečného majetku i pro minimální riziko vyšší než minimální požadovaná hodnota pro konečný majetek. Do této hodnoty transakčních nákladů spolu s transakčními náklady rostlo také množství nakupovaných akcií.

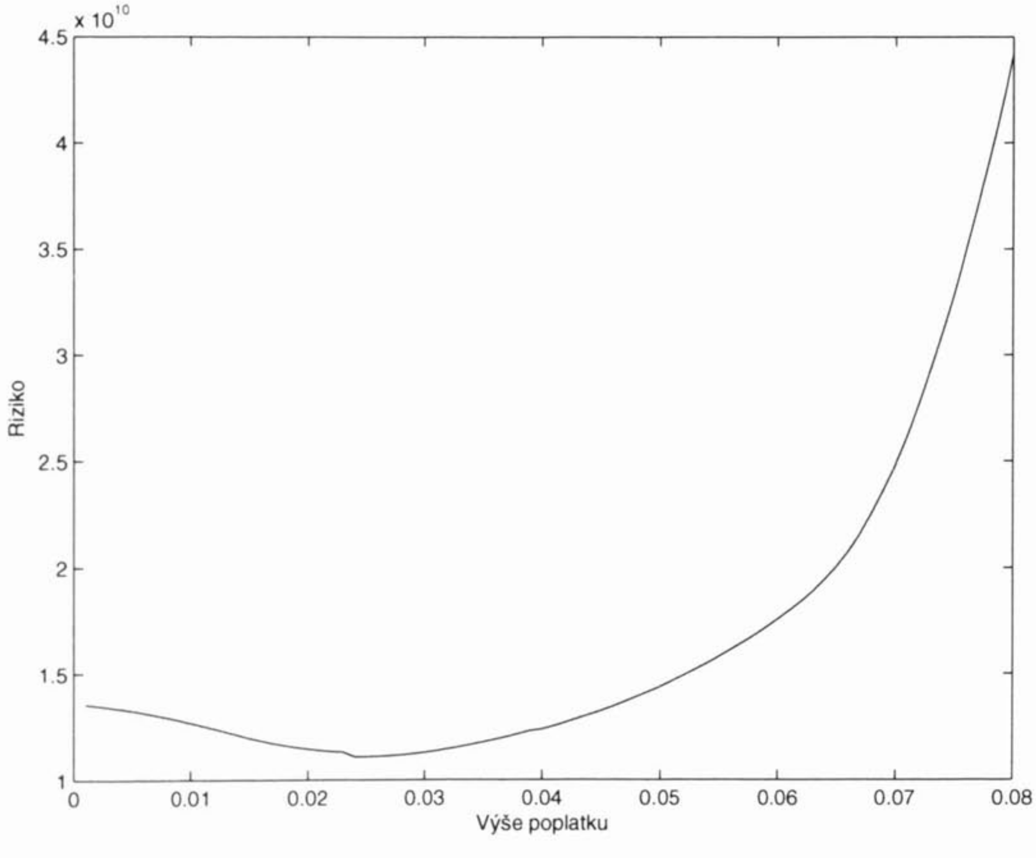
To může být způsobeno například tímto. Při nízkých transakčních nákladech si investor může koupit větší množství akcií než při transakčních nákladech vyšších. Tedy požadovaného konečného majetku dosáhne i s pomocí méně rizikových akcií. Při transakčních nákladech 0.1 % mu dostatečné množství akcií zaručí, že i při špatném vývoji cen akcií v prvních obdobích dosáhne požadovaného konečného majetku. Pokud jsou transakční náklady ve výši 1.5 %, investor již nemá dostatek akcií a při špatném vývoji událostí musí dokoupit nějaké rizikovější akcie s vyšším výnosem, aby dosáhl požadovaného konečného majetku.

Také jsme si všimli (viz graf 3.4), že až do výše 2.4 % transakčních nákladů klesá s roustoucími náklady riziko. To může být způsobeno například tím, že vyšší transakční náklady odčerpávají peníze, které bychom jinak museli ponechat v rizikových akciích. S roustoucími transakčními náklady však klesá množství akcií, které investor může mít na počátku k dispozici. Proto se musí více spoléhat na rizikovější akcie s vyšším výnosem. Proto od 2.4 % transakčních nákladů riziko roste.

Obecně by se dalo očekávat, že s rostoucími transakčními náklady bude klesat počet nově nakoupených akcií. Toto však ne vždy platí. Mohou nastat výjimky, kdy se mezi dvěmi sousedními hodnotami transakčních nákladů výrazněji změní investiční strategie. Tento jev v našem případě nastal mezi transakčními náklady ve výši 2.3 % a 2.4 %.



Obrázek 3.3: Průměrné množství zakoupených akcií v časech $t = 1$ a $t = 2$ na transakčních nákladech



Obrázek 3.4: Závislost rizika na transakčních nákladech

Kapitola 4

Pomocná tvrzení

Značení:
$f,\ h_j,\ g_k\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ diferencovatelné funkce, $j = 1,\dots,p;\ k = 1,\dots,m.$

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1,\dots,p; g_k(\mathbf{x}) \geq 0, k = 1,\dots,m\}$$

Lagrangeova funkce pro (NLP):

$$L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{m} u_k g_k(\mathbf{x})$$

Věta 4.0.1. *Nechť v* $\mathbf{x}^*$ *je lokální maximum* f *na* M. *Nechť pro*

$$B(\mathbf{x}^*) = \{k : g_k(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

je

$$Z^* = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^t\nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0\,\forall j;\ \mathbf{z}^t\nabla g_k(\mathbf{x}^*) \geq 0\,\forall k \in B(\mathbf{x}^*);$$
$$\mathbf{z}^t\nabla f(\mathbf{x}^*) \geq 0\} = \emptyset$$

Pak existuje $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ *tak, že pro* $(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{v}^*,\ \mathbf{u}^*)$ *platí tzv. lokální podmínky optimality (LPO):*

(i) $g_k(\mathbf{x}^*) \geq 0\,\forall k,\ h_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ j = 1,\dots,p,$

(ii) $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0},\ u_k^* g_k(\mathbf{x}^*) = 0,\ k = 1,\dots,m,$

(iii) $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*,\mathbf{v}^*,\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}.$

Důkaz. Viz kapitola 3.3.1 v Bertsekas [2] □

Kapitola 5

Závěr

V této práci jsme se zabývali analýzou portfolia akcií s ohledem na střední hodnotu a rozptyl konečného majetku. Odvodili jsme optimální investiční strategie, kterých by se měl investor držet, pokud chce maximalizovat svůj zisk a zároveň minimalizovat riziko.

V první kapitole jsme zformulovali tři základní modely pro jedno časové období. Do těchto modelů jsme přidali bezrizikové aktivum, za které můžeme pokládat například státní dluhopisy. Pro tyto modely jsme odvodili, jaké akcie a v jakém množství by měl investor nakoupit, aby jeho majetek po uplynutí jednoho období byl co největší a zároveň aby jeho investici provázelo co nejmenší riziko. Shrnuli jsme základní poznatky pro Markowitzův jednoperiodický model.

Ve druhé kapitole jsme zavedli tři modely pro investice na více časových období. S využitím pomocné úlohy jsme explicitně vyjádřili, jak vypadá optimální řešení těchto modelů v závislosti na očekávaných výnosech v jednotlivých časových období a dalších parametrech těchto modelů. Ukázali jsme, jaké podmínky musí být splněny, aby modely byly ekvivalentní a jakým způsobem spolu souvisí řešení jednotlivých modelů. V závěru druhé kapitoly je ukázáno, jak vypadá optimální investiční strategie v případě, že do našich modelů zařadíme jedno bezrizikové aktivum.

Ve třetí kapitole jsme se zabývali nedostatky modelů z předchozích kapitol. Vytvořili jsme model nový, který navíc obsahoval transakční náklady a také podmínku na nezápornost rozhodovací proměnné. Tedy tak, jak je to ve skutečnosti, nepřipouštěl prodeje na krátko. Řešení tohoto modelu analytickou cestou by bylo příliš komplikované, proto jsme se rozhodli vyřešit tuto úlohu numericky a sice s využitím scénářů. Jako investiční horizont jsme zvolili 3 časová období. Délka jednoho časového období byla 1 měsíc. Kvůli časové náročnosti hledání optimálního řešení, jsme použili pouze 27000 scénářů. Pro analýzu závislosti rizika na požadovaném výnosu a pro určení vztahu mezi množstvím reinvestic a transakčními náklady jsme použili pouze 1000 scénářů.

Při analýze závislosti výše konečného majetku na riziku investiční strategie jsme podle očekávání dospěli k parabolické křivce, která je známým výsledkem studií Markowitzova modelu pro jedno časové období. Vztah výše reinvestic a transakčních nákladů od určitého bodu také naplnil naše očekávání.

Literatura

[1] Anděl, J. (2005): Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha.

[2] Bertsekas, D. P. (1999): Nonlinear Programming. Athena Scientific, Belmont.

[3] Bican, L. (2000): Lineární algebra a geometrie. Academia, Praha.

[4] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J. (2002): Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] Frauendorfer, K., Siede, H. (2000): Portfolio selection using multistage stochastic programming. *Central European Jounal for Operations Research and Economics* **7**, 277-289.

[6] Gülpinar, N., Rustem, B., Settergren, R. (2004): Simulation and optimization approaches to scenario tree generation. *Journal of Economic Dynamics & Control* **28**, 1291-1315.

[7] Leippold, M., Trojani, F., Vanini, P. (2002): A Geometric Approach to Multiperiod Mean Variance Optimization of Assets and Liabilities. *International Center FAME*, Research Paper No. 48.

[8] Li ,D. and W.-L. Ng (2000): Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-Variance Formulation. *Mathematical Finance* **10**(3), 387-406.

[9] McCarl, B. A. (2006): GAMS User Guide: 2006. Texas A & M University.

[10] Steinbach, Marc C. (2001): Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis. *SIAM Review* **43**(1), 31-85.

[11] White, D. J. (1969): Dynamic Programming. Oliver & Boyd Ltd, Holden-day Inc., Edinburgh.

[12] Zajíček, L. (2003): Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník. Matfyzpress, Praha.