

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Tomáš Petr

Výpočetní aspekty hodnocení finančních instrumentů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, Csc.
Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Děkuji tímto vedoucímu diplomové práce Doc. RNDr. Janu Hurtovi, Csc., za poskytnutí konzultací a rad týkajících se této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne ..

Tomáš Petr

Název práce: Výpočetní aspekty hodnocení finančních instrumentů

Autor: Tomáš Petr

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, Csc.

e-mail vedoucího: *hurt@karlin.mff.cuni.cz*

Abstrakt: Tato práce pojednává o možnostech ohodnocení finančních derivátů. Jsou zde vysvětleny zejména matematické postupy používané k modelování vývoje náhodných veličin představujících vývoj cen podkladových aktiv těchto derivátů a úrokových měr. Na základě tohoto vývoje je pak odvozeno ocenění různých finančních derivátů, zejména opcí, za použití rizikově neutrální pravděpodobnosti míry. Jsou zde uvedeny nejen analytické postupy ocenění, zejména postupy navazující na Blackův-Scholesův vzorec pro ocenění evropských call a put opcí, ale také různé simulační a numerické metody pro oceňování a modelování průběhu cen a úrokových měr na základě jejich předpokládaného rozdělení. Krátce jsou zmíněny i modely ARCH a GARCH pro odhadování parametrů vývoje úrokových měr a indexů. V závěru jsou pak uvedené postupy srovnány použitím na příkladu skutečných dat. Jsou porovnány zejména různé postupy pro ocenění nejběžnějších typů opcí – analytický postup (je-li k dispozici), simulace ceny podkladového aktiva konstrukcí binomického stromového modelu, simulace jednotlivých trajektorií metodou Monte Carlo. Klíčová slova: oceňování, finanční deriváty, opce, simulace

Title: Computational Aspects of Financial Instruments Pricing

Author: Tomáš Petr

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, Csc.

Supervisor's e-mail address: *hurt@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract: This work deals with the possibilities of financial derivatives pricing. Explained are especially mathematical approaches used for modelling the development of random variables, which represent the evolution of underlying securities and interest rates. Based on this representation is then derived the pricing of various financial derivatives, mainly options, using the risk-neutral probability measure. Both the analytical pricing methods, especially those extending the Black-Scholes formula for European call and put options pricing, and the numerical and simulation pricing methods for modelling prices and interest rates based on assumptions about their distribution are involved. Mentioned are also ARCH and GARCH models for estimation of interest rates and indices distribution parameters. At the end of the work are these methods compared by application on an example of market data. Compared are various models to price the most usual types of options – analytical pricing (if available), underlying security price simulation by construction of binomial tree model, simulation of particular trajectories by Monte Carlo method.

Keywords: pricing, financial derivatives, options, simulation

Obsah

1	Úvod	6
2	Základní finanční instrumenty	7
2.1	Dluhopisy	7
2.2	Akcie	8
2.3	Finanční deriváty	8
2.4	Opce	9
3	Oceňování odvozených finančních instrumentů	11
3.1	Itôova formule	11
3.2	Oceňování dluhopisů	14
3.3	Vašíčkův model	14
3.4	Mertonův model	17
3.5	Hullův-Whiteův model	18
3.6	Model Ho-Lee	18
3.7	Oceňování opcí	19
3.8	Blackova-Scholesova formule	20
3.9	Citlivost modelu na změnu parametrů	24
3.10	Určení volatility	27
3.11	Opce na akcii vyplácející dividendu	27
3.12	Další typy opcí	28
3.13	Řešení Blackovy-Scholesovy parciální diferenciální rovnice	29
3.14	Bariérová opce	31
3.15	Opce závislé na celém průběhu ceny aktiva	32
3.16	Americká opce	34
3.17	Měnové opce	35
3.18	Opce na futures	36
3.19	Opce na dluhopis	37
4	Simulační a numerické techniky	40
4.1	Binomický model	40
4.2	Model Black-Derman-Toy	42
4.3	Metoda konečných diferencí	43
4.4	Oceňování metodou Monte Carlo	46
4.5	Ocenění opce metodou Monte Carlo	46
4.6	Využití Markovova řetězce v metodách Monte Carlo	49
4.7	Konstrukce podmíněného rozdělení	50
4.8	Metoda přidávání dat	52
4.9	Modely typu ARCH a GARCH	53
4.10	Definice modelu ARCH	54
4.11	Model ARCH(1)	55

4.12	Definice zobecněného modelu GARCH	56
4.13	Odhady parametrů modelu GARCH	57
5	Numerické uplatnění	59
5.1	Vstupní data	59
5.2	Blackův-Scholesův vzorec	62
5.3	Uplatnění metody Monte Carlo	65
5.4	Ocenění s použitím binomických stromů	72
5.5	Bariérové opce	76
5.6	Metoda konečných diferencí – americká opce	79
6	Závěr	82
7	Literatura	83

1 Úvod

Základním úkolem matematiky při aplikaci ve financích je najít vhodné modely pro vývoj cen produktů vyskytujících se na finančních trzích. Tato práce je zaměřena zejména na možné postupy ohodnocení finančních derivátů. Cena těchto odvozených finančních nástrojů závisí na vývoji ceny příslušného podkladového aktiva nebo aktiv. Na ceně podkladového aktiva závisí finanční toky, které poplynou z držení daného derivátu, takže diskontovanou střední hodnotu všech těchto peněžních toků pak lze užít k určení současné hodnoty derivátu.

Pro takový výpočet je potřeba znát pravděpodobnostní rozdělení budoucích cen podkladových aktiv. Zpravidla se o náhodném procesu ceny podkladového aktiva předpokládá, že se vyvíjí podle nějakého rozdělení odvozeného od normálního. Při oceňovacích výpočtech, které jsou uvedeny v první části práce, je pak nutné použít takové matematické nástroje, jakými jsou výpočty stochastických diferenciálů. Použité matematické nástroje jsou shrnuty na začátku této první části.

Dále je pak pozornost věnována vývoji úrokových měr a cen dluhopisů a oceňování různých typů opcí. Uvedené postupy pro ocenění opcí zpravidla používají různá rozšíření základního Blackova-Scholesova modelu pro nalezení ceny evropské put a call opce. Vychází se zejména z předpokladu, že investoři se chovají neutrálně k riziku, a že tedy lze při oceňování pracovat s rizikově neutrálními pravděpodobnostními rozděleními. Pak je zejména u jednodušších typů opcí možné nalézt vzorec přímo udávající cenu opce v závislosti na momentálních cenách podkladových aktiv, volatilitě těchto cen a bezrizikové úrokové míře.

Ne vždy je ale možné najít explicitní analytické řešení oceňovacích výpočtů. Ve složitějších případech je pak nutné hledat ocenění pomocí různých numerických a simulačních metod. Některé takové postupy jsou uvedeny ve druhé části práce. Je možné hledat numerické řešení analyticky formulované oceňovací úlohy, jak je tomu například při hledání řešení diferenciální rovnice pro cenu finančního nástroje metodou konečných diferencí. Další možností je na základě předpokládaného rozdělení cen podkladových aktiv simulovat možný budoucí vývoj těchto cen a na základě těchto simulací zkonstruovat odhad ceny uvažovaného derivátu. Střední hodnota budoucích peněžních toků se pak vlastně přibližuje průměrem z hodnot získaných v každé nasimulované trajektorii, kde jako váhy při počítání průměru jsou použity pravděpodobnosti, že daná trajektorie nastane.

Na konci práce jsou některé z probraných oceňovacích postupů pro srovnání použity na příkladu skutečných dat. Jsou porovnány zejména různé postupy pro ocenění nejběžnějších typů opcí – analytický postup (je-li k dispozici), simulace ceny podkladového aktiva konstrukcí binomického stromového modelu, simulace jednotlivých trajektorií metodou Monte Carlo.

2 Základní finanční instrumenty

Různé finanční nástroje slouží k uskutečňování různých ekonomických aktivit, správně vlastních fondů nebo naopak získávání peněz pro investice formou půjček, dluhopisů a dalších nástrojů, sestavování zajištěného portfolia, nebo naopak pokusům o zisk prostřednictvím spekulací na budoucí vývoj cen těchto nástrojů, a podobně. Mezi nejčastější druhy finančních nástrojů patří bankovní účty, hypotéky, leasingy, pojištění a jiné finanční služby, dluhopisy, pokladniční poukázky, akcie a různé finanční deriváty.

2.1 Dluhopisy

Dluhopis je cenný papír, jehož vydáním si emitent opatřuje úvěrový kapitál a na oplátku poskytuje kupujícímu, tedy věřiteli, výnos v dohodnuté formě a výši. Na rozdíl od například klasických úvěrů je ovšem s dluhopisy možno obchodovat na sekundárních trzích cenných papírů. Dluhopisy jsou obvykle vydávány na delší období (např. 5 až 30 let) bankami, vládami či centrálními bankami, nebo velkými společnostmi.

Dluhopisům v portfoliu investora se obvykle přisuzuje vyšší výnos než bankovním vkladům a nižší, než je výnos z investování do akcií. Tedy riziko z takové investice se ve většině případů považuje za nižší než u akcií, zejména proto, že výplata úroků není tolik závislá na hospodaření emitenta jako v případě akciových dividend. Za téměř bezrizikové se považují státní dluhopisy garantované vládou, které se často ve finančních modelech berou jako ideálně bezrizikové a používají se ke konstrukci bezrizikových výnosových křivek. Likvidita dluhopisů je spíše nadprůměrná, a proto se také často používají pro dosažení shody s investičními záměry.

Mezi nejdůležitější druhy dluhopisů patří:

- *Kuponové dluhopisy s pevným kuponem.* U kuponového dluhopisu jsou hlavními charakteristikami nominální hodnota, výše kuponu a doba do splatnosti. Držitel tohoto cenného papíru v pravidelných intervalech na koncích jednotlivých kuponových období obdrží pevné splátky označované jako kupony a nakonec k datu splatnosti dostane poslední kupon spolu s výplatou celé nominální hodnoty. Výše kuponu se zpravidla vyjadřuje pomocí kuponové sazby, tedy jako procentuální podíl kuponu vůči nominální hodnotě.
- *Bez kuponové dluhopisy.* U tohoto dluhopisu se nevyplácí kuponové platby, takže výnos je zajištěn pouze tím, že je dluhopis prodáván za cenu nižší než na konci vyplácená nominální hodnota. K těmto dluhopisům patří krátkodobé pokladniční poukázky a dlouhodobější dluhopisy s nulovým kuponem. Právě státní pokladniční poukázky patří k nejlíkvinnějším nástrojům a navíc nesou jen malé investiční riziko.
- *Svolatelné dluhopisy.* Svolatelný dluhopis se liší od běžného kuponového dluhopisu tím, že jeho upisovatel má právo dluhopis svolat, tedy předčasně ukončit vyplácení kuponů a vyplatit nominální hodnotu dříve než v okamžik splatnosti. Předčasné svolání dluhopisu je pro upisovatele výhodné v případě, že úrokové sazby poklesly a nyní

by bylo možné získat stejné finanční prostředky vydáním dluhopisu s nižším kuponem. Držitel dluhopisu obvykle v okamžiku svolání dluhopisu získá jako vyrovnání zvláštní prémii, jejíž hodnota je určena již na počátku při vydání dluhopisu a obvykle klesá s časem do splatnosti.

- *Dluhopisy s pohyblivým kuponem a indexované dluhopisy.* Tyto dluhopisy vyplácejí kupony, jejichž výše závisí na aktuální úrovni určité referenční úrokové sazby nebo referenčního indexu.
- *Věčné dluhopisy.* Dluhopis nemá stanovenou dobu splatnosti, takže se kupony vyplácejí po neomezeně dlouhou dobu.

2.2 Akcie

Akcie jsou obchodovatelné cenné papíry, které vyjadřují podíl na základním jmění vydávající společnosti. Kupující tak může získat podíl na řízení společnosti a na jejím zisku. Podíl na zisku představuje výplata dividend. Pro vydávající společnost představují akcie způsob získání základního jmění pro podnikání. Oproti dluhopisům není výnos předem určen, takže dokonce i v období, kdy je společnost zisková, výplata dividend a jejich výše závisí na rozhodnutí společnosti.

Hodnotu akcie představuje jednak její nominální hodnota, která určuje, jaký podíl na základním jmění představuje držení jedné akcie, a dále její tržní cena, za kterou se s akcií obchoduje na trhu.

2.3 Finanční deriváty

Finanční deriváty jsou odvozené finanční nástroje, tedy takové, jejichž hodnota závisí na hodnotě jiných (podkladových) instrumentů. Takový derivát zpravidla zajišťuje prodávajícímu či kupujícímu právo či povinnost prodat či koupit stanovená podkladová aktiva, a to v určeném období a za stanovených podmínek a dohodnutou cenu. Díky tomu lze obchodovat s tržním rizikem, které je díky derivátům odděleno od jemu podléhajících aktiv. Toho lze využít jak k zajišťovacím obchodům za účelem snížení rizika v portfoliu, tak naopak i ke spekulativním obchodům, k jejichž zahájení stačí řádově nižší částky, než při obdobných obchodech přímo s podkladovým aktivem.

Podle druhu podkladového aktiva lze deriváty rozdělit na komoditní, úrokové (podkladovým aktivem je úvěr, dluhopis, apod.), měnové, akciové a deriváty na vývoj indexu.

K nejpoužívanějším typům finančních derivátů patří:

- *Forwardy.* Forward je individuálně sjednaný termínový obchod. Obě smluvní strany se dohodnou na nákupu či prodeji podkladového aktiva v daný čas za sjednanou cenu. Sjednáním pevné ceny je kupující chráněn proti jejímu budoucímu růstu a prodávající proti jejímu poklesu. To sebou nese jednak riziko (pro jednu stranu) nepříznivého vývoje ceny, navíc ale také riziko, že druhá strana nebude chtít splnit své závazky.

Proto jsou tyto obchody zpravidla uzavírány jen mezi úzkým okruhem důvěryhodných partnerů s vysokými ratingy a ukazateli spolehlivosti.

- *Futures*. Tento druh kontraktu se stejně jako forward týká předem sjednaného nákupu či prodeje bazického instrumentu, ale liší se tím, že futures je standardizovaný kontrakt (je jednotně dáno požadované množství, druh, popř. kvalita podkladového aktiva, datum dodání apod.), takže ho lze uzavřít na termínových burzách a navíc je možné i v průběhu trvání kontrakt na burze odprodat třetí straně.

Tyto obchody jsou uzavírány přes prostředníka (clearing house) a přes něj je také průběžně zúčtováván zisk obou stran. Kvůli omezení rizika nesplacení musí obě strany na počátku složit určený zlomek (např. 5 až 10 procent) ceny aktiva a tato jistina je pak použita jako rezerva pro pravidelné zúčtovávání zisků a ztrát každé strany. Zúčtovává se obvykle každý den a pokud se rezerva jedné ze stran vyčerpá, musí tato strana složit novou jistinu.

- *Forward rate agreement*. Toto je příklad forwardu uzavřeného na vývoj úrokové míry. Kupující se zaváže platit pevnou úrokovou sazbu a proti tomu prodávající platí podle vývoje zvolené referenční sazby. Ve smlouvě jsou určena dvě časová období, po skončení prvního období se porovná momentální kurs referenční sazby s pevnou sazbou a vyplátí se diskontovaný rozdíl, který by vyplynul z uložení sjednané částky po dobu druhého období na účty úročené zmíněnými dvěma sazbami.
- *Swap*. Swap je individuální dohoda o budoucí směně plateb. Může jít o směnu úrokových plateb vztahujících se ke stejné částce, ale založených na odlišných úrokových mírách (*úrokový swap*), o směnu plateb vztahujících se k téže částce uložené ve dvou různých měnách (*měnový swap*), nebo o kombinaci obojího.

Dalším rozšířeným derivátem jsou opce.

2.4 Opce

Opce jsou opět dohodou o budoucím prodeji či nákupu podkladového aktiva. Oproti předchozím derivátům má ale jedna ze stran podle své vůle možnost, tedy nikoliv povinnost, uskutečnit sjednaný obchod.

Základní dělení opcí rozlišuje tzv. *call opce*, které dávají kupujícímu možnost koupit podkladové aktivum, a *put opce*, dávající kupujícímu možnost prodat sjednané aktivum emitentovi opce. Opci může kupující uplatnit k datu splatnosti, pak se jedná o *evropskou opci*, nebo kdykoliv do data splatnosti, v tom případě jde o *americkou opci*. Podle podkladového aktiva mohou být komoditní, úrokové, měnové a akciové opce, nebo opce na akciový index.

Z hlediska jejich konstrukce existuje dlouhá řada různých typů opcí, nejjednodušším případem je opce, jejíž vypořádací cena závisí pouze na rozdílu aktuální ceny podkladového aktiva v čase splatnosti a předem dohodnuté realizační ceny tohoto aktiva. Původní myšlenka je taková, že např. u call opce v případě, je-li aktuální konečná cena aktiva vyšší

než předem sjednaná, držitel opce uplatní své právo koupit od upisovatele opce podkladové aktivum za nižší cenu a na trhu ho pak prodá za cenu aktuální, čímž dosáhne zisku. V praxi se ale obvykle pouze přímo vyrovná zisk a ztráta obou zúčastněných stran bez dalších obchodů s podkladovým aktivem. V následujícím textu bude zpravidla u těchto opcí S_t označovat cenu podkladového aktiva v čase t , T čas splatnosti, K dohodnutou kupní cenu aktiva a C_t nebo P_t cenu samotné put nebo call opce. Pro základní typ opce tedy je vypořádací cena call opce $C_T = (S_T - K)^+$ a cena put opce $P_T = (K - S_T)^+$. K dalším jednodušším typům patří např. opce typu *cap*, jejíž kupující v případě, že hodnota referenčního aktiva překročí sjednanou pevnou sazbu, obdrží výnos odpovídající rozdílu těchto dvou hodnot. Opakem je opce *floor*, u níž se sleduje naopak pokles úrokové sazby pod danou mez. Kombinací obou předchozích je *collar* opce, u níž kupující získává rozdíl mezi referenční sazbou a horní či dolní pevnou sazbou, pokud referenční sazba vystoupí z jejich rozmezí.

Složitější jsou takové opce, jejichž hodnota závisí nejen na ceně podkladového aktiva v čase splatnosti, ale i na vývoji této ceny před časem splatnosti. Takové typy opcí jsou obvykle označovány jako *exotické opce*. Mezi ně patří např.:

- *Binární, neboli digitální opce*, u které její držitel získá konstantní částku, kdykoliv cena podkladového aktiva překročí směrem nahoru či dolů vymezené hranice.
- *Bariérová opce* je taková opce, jejíž konečná výplata závisí na tom, zda cena podkladového aktiva v průběhu trvání kontraktu překročí vymezené hranice. Patří sem opce *up-and-in*, u kterých výplata proběhne jen tehdy, pokud je alespoň v jednom okamžiku před splatností cena podkladového aktiva vyšší než daná mez, *down-and-in*, u kterých musí být mez překročena směrem dolů, a podobně opce *up-and-out* a *down-and-out*, u kterých naopak nesmí být daná mez v příslušném směru překročena.
- *Složená opce* je taková opce, u které je podkladovým aktivem opět opce.
- *Volitelná opce* je podobně jako v předchozím případě opce na opci, navíc má ale kupující právo si vybrat, zda si koupí put či call opci. Držitel opce tedy v čase splatnosti T_1 může za sjednanou cenu K_1 koupit call či put opci s vypořádací cenou K_2 a časem splatnosti $T_2 > T_1$.
- *Asijská opce* je závislá na průměru ceny podkladového aktiva od počátku do času splatnosti. Výplata pak závisí na rozdílu tohoto průměru a aktuální ceny v čase splatnosti. Průměr se počítá z ceny určené v pravidelných časových intervalech nebo ze spojitého vyjádření ceny, může jít o průměr aritmetický nebo geometrický. V případě velkých výkyvů v ceně podkladového aktiva bývá Asijská opce levnější, než srovnatelná opce s pevně danou konečnou kupní cenou aktiva.
- *Lookback option* – tato opce vyplácí rozdíl mezi aktuální cenou aktiva a maximem nebo minimem ceny stanoveným za určité dané časové rozmezí před dobou splatnosti.

Podobně lze vymýšlet stále nové opce, záleží jen na tom, zda se pro novou opci najde kupující.

3 Oceňování odvozených finančních instrumentů

V této části uvedeme analytické oceňovací postupy pro nalezení ceny některých obvyklých finančních derivátů, zejména opcí. Nejprve si ale v následující kapitole uvedeme nejdůležitější matematické nástroje, které budou použity v dalších výpočtech.

3.1 Itôova formule

Při počítání s veličinami představujícími ve finanční matematice spojitý vývoj cen, úrokových měr nebo indexů se obvykle dostaneme k reprezentaci vývoje pomocí nějaké obdoby Brownova pohybu a při výpočtu se pak dostaneme k použití nějaké formy Itôova procesu. Vlastnosti takového procesu dovolují analyticky vyjádřit jeho průběh, přitom je ale třída takovýchto procesů dostatečně široká na to, aby dokázala dobře popsat chování velké části v čase se spojitě vyvíjejících veličin nejen z finanční oblasti. Některé vlastnosti Itôova nebo Wienerova procesu později použijeme např. při odvození vývoje cen některých finančních derivátů, proto nyní shrneme popis a vybrané vlastnosti této skupiny náhodných procesů v několika definicích a tvrzeních.

Při odvozování vztahů pro nalezení ceny finančních nástrojů v čase t budeme vždy vycházet z informací o všech použitých veličinách dostupných v tomto čase t . Pro formální označení je vhodné použít filtraci $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, kde pro každé $t \geq s \geq 0$ jsou $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_s$ σ -algebry takové, že $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Tyto σ -algebry \mathcal{F}_t představují naši informaci o průběhu náhodných jevů do času t , takže je-li $\{X_t, t \geq 0\}$ náhodný proces, u něhož známe průběh jeho stavů do času t , platí pro σ -algebru generovanou veličinami $\{X_s, t \geq s \geq 0\}$

$$\sigma(\{X_s, t \geq s \geq 0\}) \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Také obvyklým způsobem definujeme L^2 jako prostor náhodných veličin splňujících $E X^2 < \infty$ a dále v označíme $\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, pokud pro veličiny $X_n, X \in L^2$ platí $E(X_n - X)^2 \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$.

Následující definice uvedeme v obdobném tvaru, jako je uvádí [10]. Důkazy některých zde nedokázaných tvrzení lze najít např. v [7] a [1].

Definice 3.1 *Náhodný proces $W_t, t \in \langle 0, \infty \rangle$, se nazývá Wienerův proces vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pokud*

1. $P(W_0 = 0) = 1$ a W_t je konstantní za podmínky \mathcal{F}_t (W_t je \mathcal{F}_t -měřitelná veličina),
2. $W_t, t \geq 0$ má spojitě trajektorie,
3. pro $t \geq s \geq 0$ je $W_t - W_s$ náhodná veličina nezávislá na \mathcal{F}_s s rozdělením $N(0, (t - s))$.

Definice 3.2 *Nechť $\{X_t, t \in \langle a, b \rangle\}$ je náhodný proces, $E X_t = 0, E X_t^2 < \infty$, pak pro každé dělení $\{\Delta_n, n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že $\Delta_n = \{t_{1,n}, \dots, t_{n,n}\}, a = t_{1,n} \leq \dots \leq t_{n,n} = b$ a $\max_{i \leq n} \{t_{i+1,n} - t_{i,n}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, definujeme*

$$I_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_{t_{i,n}}(t_{i+1,n} - t_{i,n}).$$

Pokud pro libovolné dělení Δ_n splňující uvedené podmínky má I_n limitu v L^2 pro $n \rightarrow \infty$, označíme tuto limitu jako integrál procesu X_t podle času t ,

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b X_t dt .$$

Nechť $\{X_t, t \in \langle a, b \rangle\}$ je náhodný proces splňující podmínky z definice (3.2), ale místo nulové střední hodnoty má $E X_t = \mu_t$, kde μ_t je funkce proměnné $t \in \langle a, b \rangle$. Pak definujeme

$$\int_a^b X_t dt = \int_a^b (X_t - \mu_t) dt + \int_a^b \mu_t dt ,$$

pokud integrály napravo existují.

Pro použití v následující definici stochastického integrálu označíme jako jednoduchý proces na intervalu $\langle a, b \rangle$ proces $f(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, pokud existuje dělení $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že platí $f(t) = c_i$ pro $t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle$, kde c_i jsou \mathcal{F}_{t_i} -měřitelné veličiny.

Dále označíme $\mathcal{L}^2(\langle a, b \rangle, \mathcal{F})$ prostor všech náhodných procesů $f(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, mající normu $(E \int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2} < \infty$, pro které platí, že $f(t)$ je \mathcal{F}_t -měřitelná veličina pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Bude-li zřejmé o jaký interval $\langle a, b \rangle$ se jedná, zkrátíme značení na $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$. Lze ukázat, že na tomto prostoru tvoří jednoduché procesy hustou podmnožinu tohoto prostoru (vzhledem k této normě).

Definice 3.3 Stochastický integrál. *Nechť f je jednoduchý proces v intervalu $\langle a, b \rangle$, nechť W_t je Wienerův proces vzhledem k \mathcal{F} , pak definujeme*

$$\int_a^b f(t) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \in L^2 .$$

Protože na prostoru $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ tvoří jednoduché procesy hustou podmnožinu tohoto prostoru, můžeme najít pro $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ posloupnost jednoduchých procesů $f_n \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ takových, že $E \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0$ a definovat integrál f jako limitu v L^2

$$\int_a^b f(t) dW_t = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dW_t .$$

Dá se ukázat, že limita v definici existuje nezávisle na volbě posloupnosti f_n a integrál je tedy dobře definován. Z definice a rozdělení Wienerova procesu navíc plyne následující:

$$E \int_a^b f(t) dW_t = 0, \quad E \left(\int_a^b f(t) dW_t \right)^2 = \int_a^b E f(t)^2 dt .$$

Tyto dva vztahy platí zřejmě pro jednoduché procesy a limitně tedy pro jakékoliv procesy z $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$.

Protože přírůstky Wienerova procesu mají normální rozdělení a lineární kombinace normálně rozdělených veličin má opět normální rozdělení, má normální rozdělení i stochastický integrál deterministické jednoduché funkce. Limitně má tedy normální rozdělení i $\int_a^b f(t)dW_t$, kde f je nenáhodná funkce (kde za normální rozdělení s rozptylem nula připustíme i např. rozdělení konstanty).

Někdy může být vhodné definovat stochastický integrál obecněji než v definici 3.3, např. s využitím konvergence v pravděpodobnosti namísto konvergence v L^2 . Tuto definici lze také nalézt např. v [10] nebo [7].

Definice 3.4 *Mějme náhodný proces X_t , $t \in \langle 0, \infty \rangle$ definovaný vztahem*

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s,$$

kde X_0 je \mathcal{F}_0 -měřitelná náhodná veličina, $a, b \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ jsou náhodné procesy. Pak X_t nazýváme Itôův proces. Vztah (1) píšeme také ve tvaru

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$$

a dX_t nazýváme stochastický diferenciál X_t .

Věta 3.1 Itôova formule. *Nechť X_t^i , $i = 1 \dots m$, $t \in \langle 0, T \rangle$, jsou Itôovy procesy splňující $dX^i = a^i dt + b^i dW^i$, kde W^i jsou nezávislé Wienerovy procesy a nechť $f : \langle 0, T \rangle \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Pak $Y_t = f(t, X_t^1, \dots, X_t^m)$ je Itôův proces a platí*

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^i + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_t^i dX_t^j \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle,$$

kde při výpočtu $dX_t^i dX_t^j$ lze dosadit $(dt)^2 = 0$, $dt dW^i = 0$, $(dW^i)^2 = dt$, $dW^i dW^j = 0$ při $i \neq j$.

Náznak důkazu: Při označení $\Delta W_{ti/n} = W_{t(i+1)/n} - W_{ti/n}$ plyne z normálního rozdělení přírůstků Wienerova procesu $E(\Delta W_{1/n})^2 = 1/n$, $E(\Delta W_{1/n}^2 - 1/n)^2 = 2/n^2$. Pak máme pro dva nezávislé Wienerovy procesy W^k, W^l ,

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_{ti/n}^k \Delta W_{ti/n}^l\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} E(\Delta W_{ti/n}^k)^2 (\Delta W_{ti/n}^l)^2 = n \left(\frac{t}{n}\right)^2 \rightarrow 0, \quad k \neq l,$$

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta(W_{ti/n}^k)^2 - t\right)^2 = \frac{2t^2}{n^2} \rightarrow 0,$$

takže vychází

$$\int_0^t dW_s^k dW_s^l ds = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_{ti/n}^k \Delta W_{ti/n}^l = t \delta_{k,l} = \delta_{k,l} \int_0^t ds.$$

Můžeme tedy psát $(dW^k)^2 = dt$, $dW^k dW^l = 0$ a stejně se ukáže $dt dW = 0$.

Představme si $Y_t = f(t, X_t)$, $dX_t = a dt + b dW_t$, kde a, b jsou konstanty, f je dvakrát spojitě diferencovatelná. Do Taylorova rozvoje $f(t, x(t))$ dosadíme $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)$ a dostaneme

$$\begin{aligned} & f(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) - f(t, x(t)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Dosadíme-li nyní $X_{t+\Delta t} - X_t$ místo Δx , tak při $\Delta t \rightarrow 0$ (a tedy vynulování členů $\mathcal{O}(\Delta t^2)$) dojdeme k vyjádření dY_t :

$$dY_t = \frac{df}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial x} (a dt + b dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 dt,$$

což je v souladu s uvedenou větou.

3.2 Oceňování dluhopisů

Uvažujme kuponový dluhopis v čase t s okamžikem splatnosti T , který zaručuje v časech $t \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ jistou výplatu kuponu ve výši c_i , $i = 1, \dots, n$ a v čase T navíc vyplatí jistinu ve výši N . Označíme-li $P(t, s)$ současnou hodnotu výplaty 1 v čase $s \geq t$, dostaneme současnou hodnotu PV ceny tohoto dluhopisu ve tvaru

$$PV = \sum_{i=1}^n P(t, t_i) c_i + P(t, T) N.$$

Pro takové vyjádření potřebujeme znát funkci $P(t, \cdot)$, kterou můžeme označit jako výnosovou křivku uvedeného dluhopisu. Místo samotné úrokové míry do času s , která je zde představována jako $P(t, s)^{-1}$, je často jednodušší ve výpočtech použít její intenzitu. Označme

$$R(t, s) = -\frac{\log P(t, s)}{s - t}, \quad \lim_{s \rightarrow t+} R(t, s) = -\frac{\partial}{\partial t} \log P(t, s) = \rho_s,$$

v případě, že uvedená limita existuje. Pak $R(t, s)$ představuje intenzitu výnosu bezkuponového dluhopisu, který v čase s vyplatí nominální hodnotu 1, a ρ_s je okamžitá intenzita úrokové míry v čase s . K jejímu modelování se obvykle užívá nějaký model, ve kterém je tato intenzita vyjádřena jako vhodný Gaussovský proces. Některé takové modely nyní uvedeme v obdobném vyjádření, v jakém jsou zavedeny v [10] nebo [8].

3.3 Vašíčkův model

Tento model je jedním z nejstarších modelů užívaných pro proces intenzity úrokové míry. Její vývoj je v tomto modelu popsán stochastickou diferenciální rovnicí

$$(2) \quad d\rho_t = a(b - \rho_t)dt + \sigma dW_t,$$

kde a, b, σ jsou kladné konstanty a W_t je Wienerův proces, a nějakou počáteční hodnotou této intenzity úrokové míry v čase 0 ρ_0 .

Z tohoto vyjádření je mimo jiné vidět charakteristické chování Vašíčkova modelu: známe-li hodnotu ρ_t v čase t , pak v čase $t + \Delta t$ lze při dostatečně malém Δt psát $\rho_{t+\Delta t} = \rho_t - (\rho_t - b)a\Delta t + \varepsilon$, kde ε je náhodná odchylka se střední hodnotou 0 nezávislejší na rozdílu $\rho_t - b$. Vývoj $\rho_{t+\Delta t}$ tedy až na náhodnou odchylku směřuje od ρ_t k b . Tudíž čím víc se intenzita ρ_t vzdálí od b , tím více roste pravděpodobnost, že se v dalším čase bude opět vyvíjet směrem k tomuto středu b .

Někdy se průběh intenzity vyjadřuje vzhledem k rizikově neutrální pravděpodobnostní míře, kterou zavedeme při oceňování opcí v kapitole (3.8). Potom při ocenění rizika λ definovaném podobně jako v kapitole (3.8) a při označení $\widetilde{W}_t = W_t + \lambda t$, $\widetilde{b} = b - \sigma\lambda/a$ je

$$d\rho_t = a(b - \rho_t)dt + \sigma dW_t = a(\widetilde{b} - \rho_t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t.$$

Z rovnice (2) můžeme najít přímé vyjádření ρ_t : označíme-li pro jednodušší zápis $\alpha = ab$, pak při známém ρ_0 můžeme upravovat

$$d(e^{at}\rho_t) = e^{at}d\rho_t + ae^{at}\rho_t dt = e^{at}(\alpha - a\rho_t)dt + e^{at}\sigma dW_t + ae^{at}\rho_t dt = e^{at}(\alpha dt + \sigma dW_t)$$

a po integraci

$$(3) \quad \begin{aligned} e^{at}\rho_t - \rho_0 &= \int_0^t e^{as}\alpha ds + \int_0^t e^{as}\sigma dW_s, \\ \rho_t &= \frac{\alpha}{a} + e^{-at}\left(\rho_0 - \frac{\alpha}{a}\right) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \end{aligned}$$

Odtud mimo jiné vidíme, že pro střední hodnotu a rozptyl intenzity úrokové míry platí

$$\mathbb{E}\rho_t = \frac{\alpha}{a} + e^{-at}\left(\rho_0 - \frac{\alpha}{a}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{a} = b,$$

$$\text{Var}(\rho_t) = \sigma^2 \int_0^t (e^{-a(t-s)})^2 ds = \sigma^2 \frac{1}{2a}(1 - e^{-2at}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2a},$$

takže parametr b představuje i dlouhodobou střední hodnotu procesu ρ_t .

Zavedme referenční aktivum s cenou $B_t = e^{\int_0^t \rho_s ds}$. Tato veličina pak udává, jakou hodnotu bude mít v čase t účet úročený v okamžiku s s intenzitou úroku ρ_s , pokud jeho hodnota v čase 0 byla rovna 1. Chceme-li mít naopak v čase $t < T$ takové množství tohoto aktiva, aby v čase T byla jeho hodnota 1, musí toto množství být B_t/B_T . Potom tedy můžeme psát

$$P(t, T) = \mathbb{E}\left(\frac{B_t}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T \rho_s ds} \mid \mathcal{F}_t).$$

Z vlastností Wienerova procesu a vyjádření intenzity ρ v rovnici (3) vidíme, že za podmínky daného ρ_t už je ρ_u , $u > t$, nezávislé na všech ρ_v , $v < t$, tedy že mají markovskou vlastnost. Proto je v čase t cena bezkuponového dluhopisu vyplácejícího v čase T nominální hodnotu 1 rovna

$$P(t, T) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T \rho_s ds} \mid \rho_t).$$

Nyní vypočítáme s pomocí (3) integrál $\int_t^T \rho_s ds$ za podmínky daného ρ_t :

$$\int_t^T \rho_s ds = \frac{\alpha}{a}(T-t) + \left(\rho_t - \frac{\alpha}{a}\right) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u ds, \quad \text{kde}$$

$$\int_t^T \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u ds = \int_t^T \int_u^T e^{-a(s-u)} ds dW_u = \frac{1}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)}) dW_u.$$

Jak bylo uvedeno již v komentáři u definice (3.3), protože přírůstky Wienerova procesu mají normální rozdělení, má normální rozdělení i stochastický integrál nenáhodné funkce $1 - e^{-a(T-u)}$, takže i $\int_t^T \rho_s ds$ má normální rozdělení. Jeho střední hodnota je

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T \rho_s ds \mid \rho_t\right) = \frac{\alpha}{a}(T-t) + \frac{1}{a}\left(\rho_t - \frac{\alpha}{a}\right)(1 - e^{-a(T-t)}) = m(\rho_t, T-t)$$

a rozptyl opět s pomocí vlastností stochastického integrálu

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\int_t^T \rho_s ds \mid \rho_t\right) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du = \\ (4) \quad &= \frac{\sigma^2}{2a^3} (4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} + 2a(T-t) - 3) = v(T-t). \end{aligned}$$

Takže $P(t, T)$ je střední hodnota logaritnicko-normálního rozdělení a platí

$$P(t, T) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T \rho_s ds} \mid \rho_t) = e^{-m(\rho_t, T-t) + \frac{1}{2}v(T-t)}.$$

Můžeme použít také trochu jiné značení – mějme

$$\tau = (T-t), \quad B(\tau) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau}), \quad A(\tau) = (\tau - B(\tau))\frac{\alpha}{a} - \frac{1}{2}v(\tau),$$

a označme $\tilde{P}(\rho_t, \tau) = P(t, t+\tau)$ cenu dluhopisu vyplácející za čas τ hodnotu 1 v závislosti na intenzitě úrokové míry ρ_t v okamžiku t . Protože platí $-m(\rho_t, \tau) + \frac{1}{2}v(\tau) = -A(\tau) - B(\tau)\rho_t$, je

$$(5) \quad \tilde{P}(\rho_t, \tau) = e^{-A(\tau) - B(\tau)\rho_t}.$$

Dokud ještě neznáme hodnotu ρ_t , je $\tilde{P}(\rho_t, T-t)$ opět náhodný proces určující cenu jednotkového bezkuponového dluhopisu s časem splatnosti T v závislosti na čase t . Předpokládejme, že jsme v čase 0, tedy že ρ_0 je pevné. Za této podmínky má ρ_t podle (3) normální rozdělení a $\tilde{P}(\rho_t, T-t)$ logaritnicko-normální. Je vidět, že pro $t \rightarrow T$ se $A(T-t)$ a $B(T-t)$ blíží k nule, rozdělení ρ_t se blíží k rozdělení ρ_T a tedy $\tilde{P}(\rho_t, T-t) \rightarrow 1$ a $\text{Var} \tilde{P}(\rho_t, T-t) \rightarrow 0$.

Stejně můžeme označit

$$\tilde{R}(\rho_t, \tau) = \frac{1}{\tau} \log\left(\frac{1}{\tilde{P}(\rho_t, \tau)}\right) = \frac{1}{\tau}(A(\tau) + B(\tau)\rho_t),$$

jako intenzitu výnosu za dobu τ při okamžité intenzitě úrokové míry ρ_t . Intenzita výnosu za čas τ je tedy opět při normálním rozdělení ρ_t normálně rozdělená. Z toho mimo jiné plyne, že jak okamžitá intenzita výnosu ρ_t , tak i $\tilde{R}(\rho_t, \tau)$ mohou nabývat v tomto modelu i záporných hodnot. Dále platí pro $\tau \rightarrow 0$ $\tilde{R}(\rho_t, \tau) \rightarrow \rho_t$, pro $\tau \rightarrow \infty$ $\tilde{R}(\rho_t, \tau) \rightarrow \frac{\alpha}{a} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$.

Zobecněním Vašíčkova modelu se dostáváme k modelu typu

$$d\rho_t = a(t)(b(t) - \rho_t)dt + \sigma(t)dW_t.$$

Do skupiny takovýchto modelů pak náležejí např. také Mertonův model, modely Hull-White a Ho-Lee, jejichž vyjádření intenzity úrokové míry nyní uvedeme.

3.4 Mertonův model

Oproti Vašíčkovu modelu tento model nepředpokládá, že by se intenzita ρ_t měla pohybovat s největší pravděpodobností vždy směrem k danému středu b . Vývoj ρ_t je popsán rovnicí

$$d\rho_t = \alpha dt + \sigma dW_t,$$

kde α, σ jsou kladné konstanty. Můžeme také ekvivalentně psát pro $T > t$

$$\rho_T = \rho_t + \alpha(T - t) + \sigma(W_T - W_t).$$

Stejným postupem jako ve Vašíčkově modelu dostáváme za podmínky daného ρ_t

$$\int_t^T \rho_s ds = \int_t^T (\rho_t + \alpha(s - t) + \sigma(W_s - W_t)) ds = \rho_t(T - t) + \frac{1}{2}\alpha(T - t)^2 + \sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds,$$

rozepíšeme poslední integrál jako

$$\begin{aligned} \int_t^T (W_s - W_t) ds &= \int_0^T W_s ds - \int_0^t W_s ds - (T - t)W_t = \\ &= \int_0^T (T - s) dW_s - \int_0^t (t - s) dW_s - (T - t)W_t \end{aligned}$$

a vidíme, že je

$$E\left(\int_t^T \rho_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \rho_t(T - t) + \frac{1}{2}\alpha(T - t)^2 = m(\rho_t, T - t),$$

$$\text{Var}\left(\int_t^T \rho_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \sigma^2 \int_t^T (T - s)^2 ds = \frac{\sigma^2}{3}(T - t)^3 = v(T - t)$$

a opět

$$P(t, T) = e^{-m(\rho_t, T-t) + \frac{1}{2}v(T-t)} = e^{-A(T-t) - (T-t)\rho_t},$$

kde $A(\tau) = \frac{1}{2}\alpha\tau - \frac{\sigma^2}{6}\tau^3$. Opět $P(t, T) \rightarrow 1$ při $t \rightarrow T$. Vyjádříme-li jako ve Vašíčkově modelu intenzitu výnosu za čas τ

$$\tilde{R}(\rho_t, \tau) = -\frac{1}{\tau} \log P(t, t + \tau) = \frac{1}{\tau} A(\tau) + \rho_t,$$

vidíme, že pro dané ρ_t je $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{R}(\rho_t, \tau) = \rho_t$, ale $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{R}(\rho_t, \tau) = -\infty$. Při dlouhém čase do splatnosti budou tedy vycházet intenzity záporné.

3.5 Hullův-Whiteův model

Vývoj ρ_t popíšeme diferenciální rovnicí

$$d\rho_t = (\alpha(t) - a\rho_t)dt + \sigma dW_t,$$

kde $\alpha \in L^1$ je deterministická funkce a $a \neq 0$, $\sigma > 0$ jsou konstanty. Jako ve Vašíčkově modelu můžeme využít vyjádření $d(e^{at}\rho_t)$ k integrování rovnice do tvaru (při $T > t$)

$$\rho_T = e^{-aT} \left(e^{aT}\rho_t + \int_t^T e^{as}\alpha(s)ds + \sigma \int_t^T e^{as}dW_s \right).$$

Integrál $\int_t^T \rho_s ds$ má tvar opět velmi podobný uvedenému integrálu z Vašíčkova modelu, jeho podmíněný rozptyl $v(T-t)$ je stejný jako v rovnici (4), ale $\alpha(t)$ je tentokrát závislé na čase, takže podmíněná střední hodnota tohoto integrálu vychází

$$m(\rho_t, t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})\rho_t + \int_t^T e^{-as} \int_t^s e^{au}\alpha(u)du ds.$$

Toto dosadíme do vyjádření $P(t, T) = \exp(-m(\rho_t, T, t) + \frac{1}{2}v(T-t))$.

Označíme-li dále

$$B(T-t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}), \quad A(t, T) = \int_t^T e^{-as} \int_t^s e^{au}\alpha(u)du ds - \frac{1}{2}v(T-t),$$

dostaneme vyjádření $\tilde{R}(\rho_t, t, T)$ intenzity úrokové míry od času t do T

$$\tilde{R}(\rho_t, t, T) = \frac{1}{T-t}(A(t, T) + B(T-t)\rho_t).$$

Známe-li z pozorovaných výnosových křivek intenzity výnosu $\tilde{R}(\rho_t, t, T)$, vývoj ρ_t a odhad parametrů a , σ , můžeme z této rovnice získat vyjádření $A(t, T)$ jako funkce T . Pokud lze toto vyjádření získané z odhadu dvakrát podle T derivovat, můžeme vyjít z předchozí definice $A(t, T)$ a dostat jejím dvojnásobným zderivováním odhad pro $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = a \frac{\partial}{\partial T} A(t, T) + \frac{\partial^2}{\partial T^2} A(t, T) + \frac{\sigma^2}{a}(e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}).$$

3.6 Model Ho-Lee

V tomto modelu je vývoj intenzity úrokové míry zadán diferenciální rovnicí tvaru

$$d\rho_t = \alpha(t)dt + \sigma dW_t,$$

odkud postupně dostáváme

$$\rho_T = \rho_t + \int_t^T \alpha(s)ds + \sigma(W_T - W_t),$$

$$m(\rho_t, T, t) = (T - t)\rho_t + \int_t^T \int_t^s \alpha(u) du ds, \quad v(T - t) = \int_t^T \sigma^2 (T - s)^2 ds = \frac{\sigma^2}{3} (T - t)^3.$$

Z těchto vztahů lze opět získat vyjádření ceny bezkuponového bezrizikového dluhopisu splatného v čase T jako $P(t, T) = \exp(-m(\rho_t, T, t) + \frac{1}{2}v(T - t))$.

Lze také vyjádřit $\tilde{R}(\rho_t, t, T)$ ve tvaru

$$\tilde{R}(\rho_t, t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T \int_t^s \alpha(u) du ds - \frac{\sigma^2}{6} (T - t)^2 + \rho_t.$$

Pokud tuto rovnici dvakrát zderivujeme podle T při ρ_t a t pevném, získáme vyjádření $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = 2 \frac{\partial}{\partial T} \tilde{R}(\rho_t, t, T) + (T - t) \frac{\partial^2}{\partial T^2} \tilde{R}(\rho_t, t, T) + \sigma^2 (T - t).$$

Opět pokud známe z pozorovaných výnosových křivek intenzity výnosu $\tilde{R}(\rho_t, t, T)$ a pokud toto vyjádření lze podle T dvakrát derivovat, lze ho použít ke konstrukci $\alpha(t)$.

3.7 Oceňování opcí

Modely pro oceňování opcí budeme odvozovat za předpokladu, že na trhu neexistují arbitrážní příležitosti. Arbitráží se rozumí situace, kdy je stejné aktivum prodáváno na dvou různých trzích ve stejný okamžik za různé ceny, nebo situace, kdy je možné s nulovou vstupní investicí získat s kladnou pravděpodobností budoucí zisk, zatímco pravděpodobnost ztráty je nulová. Existence arbitráže na trhu by tedy umožňovala uskutečňovat zisky bez dalších nákladů a bez rizika ztráty.

Dále budeme předpokládat, že investoři se chovají rizikově neutrálně. Je-li rizikově neutrální výnosová míra r , pak si investor cení jistého vlastnictví hodnoty 1 v čase t stejně, jako si cení vlastnictví hodnoty $(1 + r)^{-t}$ nyní v čase 0. Navíc se ale při nejistém výnosu rizikově neutrální investor zajímá pouze o střední hodnotu budoucího výnosu (diskontovaného výnosovou mírou r) a nikoliv o její riziko (směrodatnou odchylku výnosu).

Kromě r pro výnosovou míru budeme dále také používat označení ρ pro příslušnou úrokovou intenzitu, tedy $(1 + r) = e^\rho$.

O všech použitých finančních aktivech budeme také předpokládat, že jsou neomezeně dělitelná a na trhu lze kdykoliv koupit nebo prodat libovolně malé či velké množství aktiva, dále že obchodování na trhu probíhá spojitě. Při oceňování nebudeme uvažovat transakční náklady, daně a jiné poplatky či náklady spojené s pořízením či držetím aktiva.

Budeme zkoumat cenu evropské call a put opce (po řadě c_t, p_t) v závislosti na ceně podkladového aktiva S_t a dohodnuté konečné kupní ceně podkladového aktiva K . Nejprve budeme předpokládat, že z podkladového aktiva neplynou žádné závazky, jako např. výplata dividend u akcie, či kuponů u dluhopisu.

Nejprve určíme vztah mezi cenou evropské call opce a put opce. Představme si, že máme v portfoliu podkladové aktivum, koupíme put opci na toto aktivum a prodáme call opci na toto aktivum, obě opce budou mít stejnou dobu splatnosti T a budou uzavřeny na

konečnou realizační cenu K . Hodnota portfolia v čase $t \leq T$ je potom $\Pi_t = S_t + p_t - c_t$. V čase T tedy dostáváme vztah

$$\Pi_T = S_T + (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+.$$

Pokud bude $S_T \leq K$, dostáváme $\Pi_T = S_T + K - S_T - 0 = K$, pro $S_T \geq K$ dostáváme $\Pi_T = S_T + 0 - (S_T - K) = K$. Portfolio je tedy bezrizikové a jeho cena v čase T bude vždy K . Je-li bezriziková úroková intenzita ρ , pak cena takového bezrizikového portfolia je v čase $t \leq T$ rovna $\Pi_t = Ke^{-\rho(T-t)}$. Dostáváme tak vztah zvaný *put-call parita*:

$$(6) \quad S_t + p_t = Ke^{-\rho(T-t)} + c_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

3.8 Blackova-Scholesova formule

Opět budeme uvažovat evropskou call opci na akcii neposkytující výplaty dividend. Za cenu samotné opce na rizikově neutrálním trhu lze brát současnou hodnotu středního výnosu z držení této opce, kde současná hodnota se bere vůči bezrizikové výnosové míře r , tedy

$$c_t = e^{-\rho(T-t)} \mathbb{E}((S_T - K)^+ | S_t).$$

Předpokládáme, že relativní přírůstky ceny podkladového aktiva jsou u stejného aktiva na stejně dlouhých časových intervalech stále stejně rozdělené, tedy že $S_{t_1+\Delta t_1}/S_{t_1}$ a $S_{t_2+\Delta t_2}/S_{t_2}$ mají při $\Delta t_1 = \Delta t_2$ stejné rozdělení. Navíc předpokládáme, že na nepřekrývajících se intervalech $\langle t_1, t_1 + \Delta t_1 \rangle$ a $\langle t_2, t_2 + \Delta t_2 \rangle$ jsou tyto relativní přírůstky nezávislé.

Pro jednodušší zápis nahradíme nyní počáteční čas t časem 0. Pokud označíme $\log S_t = B_t$, pak pro libovolná $\Delta t_1 = \Delta t_2$ jsou na nepřekrývajících se intervalech $B_{t_1+\Delta t_1} - B_{t_1}$ a $B_{t_2+\Delta t_2} - B_{t_2}$ nezávislé a stejně rozdělené a B_t má tedy vlastnosti časově homogenního procesu náhodné procházky s nezávislými přírůstky. Budeme předpokládat, že je to navíc gaussovský proces, tedy že $B_t - B_0$ má rozdělení $N(\mu t, \sigma^2 t)$ pro nějaké konstanty $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$.

S_t má potom logaritmiccko-normální rozdělení a pro jeho střední hodnotu platí

$$\mathbb{E}(S_t | S_0) = \mathbb{E}(e^{B_t - B_0} S_0 | S_0) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^x e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = S_0 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Odvození ceny opce provedeme s použitím pravděpodobnostní míry Q takové, aby pro střední hodnotu podkladového aktiva platilo

$$(7) \quad \mathbb{E}_Q(S_t | S_0) = (1 + r)^t S_0,$$

takže střední hodnota podkladového aktiva v čase t z hlediska rizikově neutrálního investora odpovídá ceně v čase 0 úročené bezrizikovou úrokovou mírou r . Tento přechod k ocenění s použitím bezrizikové pravděpodobnostní míry lze vysvětlovat např. tak, že intenzita výnosové míry samotného podkladového aktiva ($\mu + \frac{1}{2}\sigma^2$) by neměla ovlivnit nynější cenu opce. V závislosti na růstu ceny podkladového aktiva se totiž bude vyvíjet i samotná

cena opce a současnou cenu opce v rizikově neutrálním světě musíme získat zdiskontováním její budoucí hodnoty právě pomocí výnosové míry této opce.

B_t se obvykle vyjadřuje ve tvaru $B_t - B_0 = \mu t + \sigma W_t$, kde W_t je Wienerův proces (vzhledem k $\{\mathcal{F}_t\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_u, t \geq u \geq 0\})$), $W_t \sim N(0, t)$ a $B_0 = \log S_0$ je v čase 0 již známé. Ekvivalentně můžeme psát $dB_t = \mu dt + \sigma dW_t$. Cenu podkladového aktiva pak můžeme převést do tvaru

$$(8) \quad S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} = S_0 e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \widetilde{W}_t},$$

kde jsme označili

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \lambda ds + W_t, \quad \lambda = \frac{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - \rho)}{\sigma}.$$

Koeficient λ se vzhledem ke svému vyjádření obvykle označuje jako cena rizika. Veškerá odvození provedeme za předpokladu, že μ a tedy i λ jsou konstanty. Např. v [10] je ale odvození provedeno i pro obecnější případ, kdy $\lambda \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ je náhodný proces. Pokud nalezneme pravděpodobnostní míru Q takovou, aby při tomto rozdělení byl \widetilde{W}_t Wienerův proces (tedy aby při daném W_0 bylo $\widetilde{W}_t \sim N(0, t)$, místo $\widetilde{W}_t \sim N(\lambda t, t)$, jak to platí při původním rozdělení pravděpodobnosti s mírou P), je toto Q hledanou pravděpodobnostní mírou splňující (7). K nalezení vhodného Q použijeme obdobný postup, jako v [11] a [8].

Položíme-li $\zeta_T = e^{-1/2\lambda^2 T - \lambda W_T}$ a definujeme-li $Q(A) = \int_A \zeta_T dP$ pro každé $A \in \mathcal{F}_T$, pak Q zřejmě splňuje vlastnosti míry na σ -algebře \mathcal{F}_T . Navíc $Q(\Omega) = E \zeta_T = 1$, takže Q je pravděpodobnostní míra. Dále můžeme při $0 \leq t \leq T$ označit

$$\zeta_t = E(\zeta_T | \mathcal{F}_t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T - \lambda W_t} E(e^{-\lambda(W_T - W_t)} | \mathcal{F}_t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t - \lambda W_t}.$$

Je-li $A \in \mathcal{F}_s$ pro nějaké $0 \leq s \leq T$ a χ_A je indikátor tohoto jevu A , pak platí $Q(A) = E \chi_A \zeta_T = E E(\chi_A \zeta_T | \mathcal{F}_s) = E \chi_A \zeta_s = \int_A \zeta_s dP$, takže zatímco ζ_T je vlastně Radonovou-Nikodymovou derivací Q vůči P , ζ_s je Radonovou-Nikodymovou derivací míry Q zúžené na \mathcal{F}_s . Protože je $\zeta_s > 0$, lze ekvivalentně psát i $P(A) = \int_A \frac{1}{\zeta_s} \zeta_s dP = \int_A \frac{1}{\zeta_s} dQ$. Tudíž je-li $0 \leq s \leq t \leq T$, A libovolný jev takový, že $A \in \mathcal{F}_s$, a X_t je \mathcal{F}_t -měřitelná náhodná veličina, pak platí

$$\int_A E(X_t \zeta_t | \mathcal{F}_s) \frac{1}{\zeta_s} dQ = \int_A E(X_t \zeta_t | \mathcal{F}_s) dP = \int_A X_t \zeta_t dP = \int_A X_t dQ,$$

z čehož plyne

$$(9) \quad E_Q(X_t | \mathcal{F}_s) = E\left(X_t \frac{\zeta_t}{\zeta_s} \middle| \mathcal{F}_s\right).$$

Pro proces \widetilde{W}_t díky jeho konstrukci a vlastnostem W_t platí, že má spojité trajektorie, $P(\widetilde{W}_0 = 0) = 1$, \widetilde{W}_t je \mathcal{F}_t -měřitelná veličina a při $0 \leq s \leq t$ je $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ nezávislé na \mathcal{F}_s . Dále při pravděpodobnostní míře P platí $\widetilde{W}_t \sim N(\lambda t, t)$, takže při $0 \leq t \leq T$ díky právě ukázaným vlastnostem ζ_t je

$$Q(\widetilde{W}_t \leq w) = \int_{\{\widetilde{W}_t \leq w\}} \zeta_t dP =$$

$$= \int_{-\infty}^w e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t - \lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}} dx = \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

takže \widetilde{W}_t má při pravděpodobnostní míře Q normální rozdělení $N(0, t)$. Stejným způsobem se při $0 \leq s \leq t \leq T$ pomocí (9) ukazuje, že i $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ má za podmínky \mathcal{F}_s rozdělení $N(0, s - t)$ a \widetilde{W}_t je při použití pravděpodobnostní míry Q opravdu Wienerův proces.

S použitím pravděpodobnostní míry Q je

$$(10) \quad S_t = S_0 e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \widetilde{W}_t}, \text{ čili } dS_t = \rho S_t dt + S_t \sigma d\widetilde{W}_t.$$

Díky tomu také pro $0 \leq u < t$ při Q platí $S_t = S_u e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-u) + \sigma(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_u)}$, takže při daném S_u již S_t nezávisí na S_v pro jakékoliv $v < u$. Potom je jedno, zda pro libovolnou \mathcal{F}_t -měřitelnou náhodnou veličinu X píšeme $E(X | \mathcal{F}_u)$, nebo $E(X | S_u)$. Nyní tedy již můžeme odvodit následující formuli:

Věta 3.2 Blackova-Scholesova formule. *Nechť S_t je cena podkladového aktiva v čase t vyvíjející se jako logaritmicko-normální proces daný vztahem (8). Je-li ρ intenzita bezrizikové úrokové míry, pak v čase t je spravedlivá cena c_t evropské call opce s realizační cenou K a dobou splatnosti $T > t$ na rizikově neutrálním trhu rovna*

$$(11) \quad c_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-\rho(T-t)} \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (\rho + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\log(S_t/K) + (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Důkaz. Pro jednodušší zápis provedeme odvození pro počáteční čas 0 a dobu do splatnosti t . Při použití pravděpodobnostní míry Q je rozdělení $B_t - B_0 = \mu t + \sigma W_t = \mu t + \sigma(\widetilde{W}_t - \lambda t) \sim N(\rho t - \frac{1}{2}\sigma^2 t, \sigma^2 t)$. Rozdělení veličiny $X_t = (B_t - B_0) - \rho t$ je pak $N(-\frac{1}{2}\sigma^2 t, \sigma^2 t)$ a pro $S_0 = s$ můžeme vypočítat spravedlivou cenu call opce v čase 0 jako

$$\begin{aligned} c_0 &= e^{-\rho t} E((S_t - K)^+ | S_0) = e^{-\rho t} \int_{-\infty}^{\infty} (s e^{\rho t + x} - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (s e^x - e^{-\rho t} K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = \\ &= s \int_{\log(K/s) - \rho t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x - \frac{1}{2}\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2 t}} dx - e^{-\rho t} K \int_{\log(K/s) - \rho t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = \\ &= s \left(1 - \Phi\left(\frac{\log(K/s) - \rho t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) - e^{-\rho t} K \left(1 - \Phi\left(\frac{\log(K/s) - \rho t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right). \end{aligned}$$

Výsledkem je díky $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ Blackova-Scholesova formule pro cenu call opce. Označíme-li obecněji současnost t (místo 0) a čas splatnosti opce T (tedy doba do splatnosti je $T - t$), získáme výše uvedenou formuli. \square

S pomocí vztahu mezi put a call opcí (6) a z $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ dostáváme i rovnici pro cenu put opce:

$$(12) \quad p_t = Ke^{-\rho(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1).$$

V případě oceňování obecnější opce, jejíž výplata závisí na ceně podkladového aktiva v čase splatnosti, budeme opět vycházet ze vztahu mezi S_t a B_t . Pro

$$S_t = S_0e^{\mu t + \sigma W_t}$$

pak pomocí Itôovy formule vychází

$$dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + S_t\sigma dW_t.$$

Mějme opci představující závazek v čase T vyplatit částku $f(S_T)$ závislou na ceně podkladové akcie S_T . Označíme cenu této opce v čase t jako

$$V(t, s) = e^{-\rho(T-t)}\mathbb{E}_Q(f(S_T) | S_t = s).$$

Cenu opce pak lze s použitím (10) stanovit buď analytickým, nebo často také numerickým výpočtem uvedené střední hodnoty, tedy integrálu

$$V(t, s) = e^{-\rho(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(se^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + x})h(x)dx,$$

kde $h(x)$ je hustota normálního rozdělení $N(0, \sigma^2(T-t))$, nebo po dosazení $y = s \exp((\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + x)$

$$\begin{aligned} V(t, s) &= e^{-\rho(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}y} \exp\left(-\frac{(\log(y/s) - (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dy = \\ &= e^{-\rho(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y)dy, \end{aligned}$$

kde $g(y)$ je hustota logaritnicko-normálního rozdělení S_T při $S_t = s$.

Předpokládejme, že oceňovací funkce f je taková, aby V vyjádřená z předchozích rovnic jako funkce $t \in (0, T)$, $s > 0$ existovala a bylo dvakrát spojitě diferencovatelné. Např. v [10] je jako postačitelná podmínka uvedeno, že musí existovat nějaké konstanty $a, K, C > 0$ takové, že $a < 1/2T$ a

$$|f(se^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma x})| < Ce^{ax^2} \quad \forall |x| > K; \quad \int_{-K}^K f(x)dx < \infty.$$

Pak lze odvodit následující vztah:

Věta 3.3 Blackova-Scholesova parciální diferenciální rovnice. *Nechť S_t opět značí cenu podkladového aktiva v čase t vyvíjející se jako logaritmicko-normální proces daný vztahem (8) a ρ intenzitu bezrizikové úrokové míry. Nechť $V(t, S_t)$ je cena v čase t opce, jejíž výplatní funkce v čase $T > t$ je $f(S_T) = V(T, S_T)$ a necht' je $V(t, s)$, $t \in (0, T)$, $s > 0$, dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Potom platí*

$$(13) \quad \rho V = \frac{\partial V}{\partial t} + \rho s \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} .$$

Důkaz. S pomocí vztahu (10) můžeme uplatnit na $V(t, S_t)$ Itôovu formuli a můžeme také odvodit při $S_t = s$ následující rovnosti:

$$e^{-\rho T} f(S_T) - e^{-\rho t} V(t, s) = \int_t^T d(e^{-\rho u} V(u, S_u)) = \\ \int_t^T e^{-\rho u} \left(-\rho V + \frac{\partial V}{\partial u} + \rho S_u \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right) du + \int_t^T e^{-\rho u} \sigma S_u \frac{\partial V}{\partial s} d\widetilde{W}_u .$$

Aplikujeme-li na tento vztah střední hodnotu při Q a za podmínky $S_t = s$, na levé straně dostáváme

$$\mathbb{E}_Q(e^{-\rho T} f(S_T) - e^{-\rho t} V(t, s) \mid S_t = s) = e^{-\rho T} \mathbb{E}_Q(f(S_T) \mid S_t = s) - e^{-\rho t} V(t, s) = 0 .$$

Z definice stochastického integrálu (3.3) také víme, že jeho střední hodnota je rovna nule. Tedy i druhý integrál na pravé straně má střední hodnotu rovnu nule (přírůstky \widetilde{W}_u , $u > t$, nezávisí na S_t , takže i střední hodnota za podmínky $S_t = s$ je rovna nule). Dostáváme

$$\int_t^T e^{-\rho u} \mathbb{E}_Q \left(-\rho V + \frac{\partial V}{\partial u} + \rho S_u \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \mid S_t = s \right) du = 0$$

a po zderivování v bodě t dostaneme vztah (13). □

Spolu s počáteční podmínkou $V(T, s) = f(s)$ tato diferenciální rovnice opět určuje $V(t, s)$ jako ocenění opce, jejíž výplatní hodnota $f(S_T)$ závisí na konečné ceně podkladového aktiva S_T .

3.9 Citlivost modelu na změnu parametrů

Máme-li Blackův-Scholesův vzorec udávající cenu opce v závislosti na parametrech S_t , K , r , σ , $T - t$, může nás také zajímat, jak se změní takto vypočítaná cena opce při změně některého ze vstupních parametrů. Pro derivace ceny opce podle jednotlivých proměnných se vžil jednotné označování pomocí písmen řecké abecedy, jak je vidět ve výkladu tohoto tématu např. v [1] či [9].

- Závislost na podkladové ceně: je-li V cena opce v čase t vypočítaná z Blackova-Scholesova vzorce, pak písmenem Δ označujeme

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t} .$$

V případě evropské call opce zderivováním (11) dostaneme $\Delta_c = \Phi(d_1)$, obdobně pro put opci s pomocí vztahu (6) $\Delta_p = \Delta_c - 1 = -\Phi(-d_1)$. Vidíme, že je vždy $\Delta_c > 0$ a cena call opce je rostoucí funkcí S_t , naopak $\Delta_p < 0$ a cena put opce je klesající funkcí S_t .

- Druhá derivace podle podkladové ceny se označuje Γ :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}.$$

Pro evropskou put i call opci dostáváme $\Gamma = \varphi(d_1)/(S_t \sigma \sqrt{T-t}) > 0$, kde φ je hustota standardizovaného normálního rozdělení, cena put i call opce jsou tedy konvexní funkce.

- Závislost na čase určuje Θ :

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t},$$

pro evropskou call opci

$$\Theta_c = -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{T-t}}\varphi(d_1) - K\rho e^{-\rho(T-t)}\Phi(d_2) < 0,$$

takže s t blížícím se k T a tedy klesajícím rizikem cena call opce klesá. Znaménko derivace ceny put opce $\Theta_p = \Theta_c + K\rho e^{-\rho(T-t)}$ se nedá bez znalosti jednotlivých parametrů obecně určit.

- Závislost na intenzitě bezrizikové míry ρ :

$$P = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho},$$

pro evropskou put a call opci je postupně

$$P_c = K(T-t)e^{-\rho(T-t)}\Phi(d_2) > 0,$$

$$P_p = -K(T-t)e^{-\rho(T-t)}\Phi(-d_2) < 0.$$

Při vyšší úrokové míře je vyšší i střední očekávaná hodnota ceny aktiva v čase splatnosti a tedy i cena call opce s výplatou $(S_T - K)^+$. U put opce je tomu naopak.

- Pro citlivost na změnu volatility se užívá znak zvaný vega:

$$\Upsilon = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma},$$

u evropské put i call opce $\Upsilon = S_t \sqrt{T-t} \varphi(d_1) > 0$.

- Citlivost na změnu cílové ceny: u evropské call opce $\frac{\partial^2 c_t}{\partial K} = -e^{-\rho(T-t)}\Phi(d_2) > 0$ a u put opce $\frac{\partial^2 p_t}{\partial K} = e^{-\rho(T-t)}\Phi(-d_2) < 0$.
- Kromě Δ se jako ukazatel citlivosti na změnu ceny podkladového aktiva užívá elasticita η ,

$$\eta = \frac{\partial V}{\partial S_t} \frac{S_t}{V_t} = \Delta \frac{S_t}{V_t},$$

kteřá místo změny absolutní hodnoty měří spíše procentuální změnu ceny opce, tedy změnu ceny v poměru k její dosavadní velikosti. Takto definovaná elasticita pak dovoluje lépe poměřovat změnu hodnoty opcí s rozdílnou cenou.

Například parametr Δ lze využít k vytvoření portfolia s konstantní hodnotou při tzv. Δ -zajišťování. Vytvoříme-li portfolio skládající se v každém okamžiku t z jedné akcie s cenou S_t a prodaných call opcí na tuto akcii v ceně c_t a množství $\Delta_c(t)$, dostáváme cenu portfolia

$$\Pi_t = S_t - \Delta_c(t)^{-1} c_t, \quad \frac{\partial \Pi_t}{\partial S_t} = 0$$

a tedy při daném množství opcí $\Delta_c(t)$ v intervalu $\langle t, t + dt \rangle$ se hodnota celého portfolia při (malých) změnách S_t nemění. Protože se ale potřebné vyrovnávací množství opce $\Delta_c(t)$ v čase mění, je třeba v závislosti na těchto změnách často nakupovat či prodávat určité množství opcí. To ale může být v praxi problematické kvůli nenulovým transakčním nákladům.

Někdy se tyto derivace užívají také k přibližnému vyjádření ceny opce. Je-li skutečný vzorec pro cenu opce pro použití ve výpočtu příliš složitý, je možné ho nahradit vhodným Taylorovým rozvojem, tedy např.

$$V_{t+\tau} = V_t + \Delta(t) (S_{t+\tau} - S_t) + \frac{1}{2} \Gamma(t) (S_{t+\tau} - S_t)^2 + \Theta(t) \tau.$$

Taylorův rozvoj se ale nedá příliš úspěšně použít v případě, že se parametry Δ a Γ prudce mění. K takovým výrazným změnám v reakci na malé změny S_t ale může snadno dojít v případě, že máme např. evropskou call opci, čas je blízký času splatnosti a S_t se pohybuje okolo K . Podíváme-li se na chování Δ pro $t \rightarrow T$ a $S_t \doteq K$, vidíme

$$\begin{aligned} \forall t < T \quad S_t > K &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow T} \Delta(t) = \Phi(\infty) = 1, \\ \forall t < T \quad S_t = K &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow T} \Delta(t) = \Phi(0) = \frac{1}{2}, \\ \forall t < T \quad S_t < K &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow T} \Delta(t) = \Phi(-\infty) = 0. \end{aligned}$$

Pokud do Taylorova rozvoje zahrneme i parametr Γ , můžeme pozorovat stejné výkyvy i u tohoto parametru, který je derivací Δ .

3.10 Určení volatility

Při odvozování vzorce pro nalezení ceny opce jsou jako vstupní parametry užívány počáteční hodnota podkladového aktiva S_t , čas do splatnosti $T - t$, bezriziková úroková míra r a volatilita ceny podkladového aktiva σ . Narozdíl od ostatních parametrů volatilitu σ přímo neznáme a musíme použít její odhad.

V našem zápisu představuje tato volatilita rozptyl $\text{Var}(\log(S_{t+1}/S_t))$, $t = 1, \dots, T - 1$, tedy rozptyl veličin $B_{t+1} - B_t$, což jsou pro různá t nezávislé veličiny (absolutní hodnota takto vyjádřeného σ je závislá na zvolené velikosti jednotky času). Jedna možnost, jak získat odhad volatility, se nabízí z tohoto vyjádření – známe-li průběh ceny podkladového aktiva v okamžicích $1, \dots, t$, použijeme výběrový odhad rozptylu $\log(S_{\tau+1}/S_\tau)$, $\tau = 1, \dots, t - 1$. Takto získaný odhad se označuje jako historická volatilita.

Druhá možnost je využít toho, že v čase t kromě ceny podkladového aktiva S_t známe i tržní cenu opce V_t^M . Za předpokladu, že na ideálním trhu je toto spravedlivá cena opce, a že i s pomocí Blackova-Scholesova vzorce by se vypočítala spravedlivá cena opce, musí být

$$V_t^M = BS(S_t, K, \sigma, T, t, r),$$

kde BS je Blackův-Scholesův vzorec v závislosti na daných známých parametrech a jedné proměnné σ . Nalezneme-li řešení $\hat{\sigma}$ této rovnice, dostáváme odhad σ pro použití v dalších výpočtech. Toto řešení se nazývá implikovaná volatilita.

V praxi je ale obvykle nutné k vyřešení této rovnice použít numerické metody. Často přitom není jasné, kolik různých řešení existuje, u nalezených řešení je pak nutné zkontrolovat, zda dávají dobrý smysl nejen jako matematické řešení, ale i jako finanční parametr.

Navíc se v praxi ukazuje, že velikost volatility se s časem mění. K odhadu budoucího vývoje volatility lze na základě dosavadních pozorování použít např. modely typu GARCH. Do Blackova-Scholesova vzorce, který předpokládá konstantní volatilitu, by tedy bylo možné dosadit např. průměr odhadu volatility za období do splatnosti opce. Je také možné nahradit předpoklad konstantní volatility Blackově-Scholesově modelem předpokladem, že i volatilita je s časem se měnící náhodný proces, ovšem takové složené modely jsou pak jen obtížně řešitelné.

3.11 Opce na akcii vyplácející dividendu

Nejprve budeme předpokládat, že akcie mající v čase t cenu S_t vyplácí spojitě dividendu s intenzitou q , tedy že v intervalu $\langle t, t + dt \rangle$ pro $dt \rightarrow 0$ je vyplacena dividendu $qS_t dt$. Představíme si, že máme teoretické portfolio tvořené v čase 0 jedním kusem akcie a každou výplatu dividendy použijeme k dalšímu nákupu určitého (zlomkového) množství této akcie. Označíme-li hodnotu tohoto portfolio \tilde{S}_t , dostáváme

$$\tilde{S}_t = S_t e^{qt} = S_0 e^{(\mu+q)t + \sigma W_t}.$$

Při rizikově neutrálním oceňování opět musí pro rizikově neutrální střední hodnotu tohoto portfolio platit $E_Q(\tilde{S}_t | S_0) = e^{\rho t} S_0$. Obdobně jako u akcie bez dividendy je $\lambda = (\mu + q +$

$\frac{1}{2}\sigma^2 - \rho)/\sigma$ a po přechodu od vyjádření \tilde{S}_t pomocí W_t k vyjádření pomocí \tilde{W}_t , který je představován záměnou $\mu t + qt$ za $\rho t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= S_0 e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}, \\ (14) \quad S_t &= S_0 e^{(\rho - q - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t}. \end{aligned}$$

Hodnotu call opce na akcii s cenou S_t a intenzitou vyplácení dividendy q při bezrizikové úrokové míře s intenzitou ρ lze tedy počítat stejně jako u call opce na akcii nevyplácející dividendu, jejíž cena je rovná S_t při intenzitě úrokové míry $\rho - q$. Dosazením $\rho - q$ za ρ do (11) dostaneme:

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-\rho(T-t)} \left(S_t e^{(\rho-q)(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right), \quad \text{kde} \\ d_{1,2} &= \frac{\log(S_t/K) + (\rho - q \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

K výplatě dividend ale dochází v praxi v diskrétních časových okamžicích. Můžeme si opět představit celkovou hodnotu stejně zkonstruovaného portfolia \tilde{S}_t . Pokud jsou časy výplaty dividendy předem známy a víme, že je-li čas výplaty t , bude výplata rovna qS_t , dostaneme pro cenu podkladové akcie a hodnotu tohoto portfolia vztah

$$S_t = (1 - q)^{n(t)} \tilde{S}_t,$$

kde $n(t)$ je počet výplat dividendy do času t . Pro hodnotu portfolia tedy podobně jako při spojitě výplatě dividend platí

$$\tilde{S}_t = (1 - q)^{-n(t)} S_t = (1 - q)^{-n(t)} S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} = S_0 e^{\tilde{\mu} t + \sigma W_t} = S_0 e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t},$$

takže jediný rozdíl oproti spojitě výplatě je, že místo $(\mu + q)$ máme $\tilde{\mu} = \mu - \log(1 - q) \frac{n(t)}{t}$. Můžeme tedy použít obdobný postup jako u spojitě výplaty dividend a získat tak vyjádření pro cenu opce.

3.12 Další typy opcí

Nejjednodušší opcí na akcii (či jiné podobné podkladové aktivum) je opce, která vyplácí částku 1, pokud je cena akcie v čase splatnosti S_T větší nežli zvolená hranice K , a nevyplácí nic v opačném případě. Pro cenu V této opce pak platí $V_T = \chi(S_T > K)$, kde $\chi(A)$ je indikátor daného stavu A . V čase $t < T$ pak při známém S_t a při S_T vyjádřeném za použití rizikově neutrální pravděpodobnostní míry z (10) dostáváme

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-\rho(T-t)} \mathbf{E}_Q(\chi(S_T > K) | S_t) = e^{-\rho(T-t)} Q(S_T > K | S_t) = \\ &= e^{-\rho(T-t)} (1 - \Phi(-d_2)) = e^{-\rho(T-t)} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

kde parametr d_2 je definován jako v rovnici pro cenu put opce (11).

Podobně by bylo možné sestavit opci, která v čase T vyplatí hodnotu S_T jen za podmínky, že $S_T > K$. Cena opce v čase splatnosti pak je $V_T = S_T \chi(S_T > K)$ a před časem splatnosti

$$V_t = e^{-\rho(T-t)} \mathbb{E}_Q (S_T \chi(S_T > K) | S_t) = S_t \int_{\log(K/S_t) - \rho(T-t)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\frac{(x - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} dx = S_t \Phi(d_1).$$

Cena běžné evropské opce by se tedy dala odvodit také jako hodnota portfolia skládajícího se z jedné koupené opce s výplatou $S_T \chi(S_T > K)$ a K prodaných opcí s výplatou $\chi(S_T > K)$.

Při hledání ceny složitějších opcí ale budeme spíše vycházet z obecné rovnice (13), místo aby se vždy znovu konstruovalo vhodné vyjádření ceny opce z podkladové ceny takovým způsobem jako v předchozích dvou příkladech.

3.13 Řešení Blackovy-Scholesovy parciální diferenciální rovnice

Pokud lze analyticky vyjádřit cenu složitějších modelů opcí, zpravidla se při odvozování vychází z diferenciální rovnice (13) po zadání vhodných počátečních podmínek. Označíme opět $V(t, S_t)$ cenu opce v okamžiku t při ceně podkladového aktiva $S_t > 0$. Na S nyní nebudeme chvíli pohlížet jako na náhodnou veličinu, ale jako na proměnnou funkce $V(t, S)$ a nalezneme některá řešení uvedené diferenciální rovnice. Pro zjednodušení zápisu použijeme několik substitucí proměnných. Při označení $S = K e^x$ je

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial S} S, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 + \frac{\partial V}{\partial S} S,$$

tedy při dosazení do (13)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho V = 0.$$

Dále označíme $k = 2\rho/\sigma^2$ a $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$. Takže

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

(jde pouze o parciální derivaci podle druhé proměnné $\frac{\partial V}{\partial t}$, nikoliv o $\frac{dV}{dt}$, takže toto platí nezávisle na tom, zda samotné S a tedy také x je funkcí času t) a po dosazení do předchozí rovnice a po vydělení obou stran $\frac{1}{2}\sigma^2$ vyjde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - kV + (k-1) \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \tau}.$$

Můžeme také psát

$$(15) \quad V(t, S) = C e^{g(\tau, x)} u(\tau, x),$$

kde $g(\tau, x) = -\frac{1}{2}(k-1)x - (\frac{1}{4}(k-1)^2 + k)\tau$ a $C > 0$ je konstanta. Funkce Ce^g je kladná, takže $u = V/(Ce^g)$ a tímto přeznačením nedojde k újmě na obecnosti.

Jednotlivé derivace jsou pak

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(k-1)V + Ce^g \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial V}{\partial \tau} &= -\left(\frac{1}{4}(k-1)^2 + k\right)V + Ce^g \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad \text{a} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{4}(k-1)V - \frac{1}{2}(k-1)Ce^g \frac{\partial u}{\partial x} + Ce^g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(k-1)Ce^g \frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}$$

Po dosazení do diferenciální rovnice nám tedy zůstane jen

$$(16) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

čímž jsme převedli Blackovu-Scholesovu diferenciální rovnici na obecnější diferenciální rovnici. Uplatnění diferenciálních rovnic tohoto tvaru je známo zejména v souvislosti s fyzikálními výpočty vývoje rozložení teploty v prostoru. Díky jejímu významu bylo nalezeno mnoho řešení této rovnice, z nichž některá lze upravit i pro použití při oceňování odvozených finančních nástrojů.

Snadno se ověří, že jedním řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$G(\tau, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\tau\pi}}.$$

Mějme funkci u zadánu diferenciální rovnicí (16) platící pro všechna $\tau > 0$, $-\infty < x < \infty$ a počáteční podmínkou $u(0, y) = f(y)$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Protože je uvedena funkce G řešením diferenciální rovnice, je řešením i funkce

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, x-y)f(y)dy.$$

Funkce f bude při návratu k proměnným S , t udávat oceňovací funkci $V(T, S_T)$ opce v čase splatnosti T v závislosti na ceně S_T a my při oceňování Blackovým-Scholesovým vzorcem předpokládáme, že existuje střední hodnota $E(V(T, S_T) | S_t)$ pro všechna $t < T$, $S_t \in \mathbb{R}$ a že $x = \log(S_t/K)$ má normální rozdělení. Na funkci $G(\tau, x-y)$ lze pohlížet jako na hustotu normálního rozdělení $N(x, 2\tau)$, takže uvedený integrál je skutečně konečný a tato definice u je v pořádku. Navíc $\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, x-y)dy = 1$, takže dostáváme

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(\tau, x) - f(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, x-y)(f(y) - f(x))dy = (f(x) - f(x)) = 0$$

a funkce u skutečně splňuje zadané počáteční podmínky.

Tím jsme vlastně opět odvodili např. vyjádření ceny evropské call opce: stačí při označení $S_T = Ke^y$ a vztahu (15) položit

$$f(y) = u(0, y) = V(S_T, T) e^{\frac{1}{2}(k-1)y} = (Ke^y - K)^+ e^{\frac{1}{2}(k-1)y}.$$

Pak už jen ve vyjádření $u(\tau, x)$ provedeme substituci zpět k původním proměnným t , S a dostaneme opět Blackův-Scholesův vzorec (11).

3.14 Bariérová opce

My si postup uvedený v předchozí kapitole upravíme pro odvození ceny bariérové opce. Mějme funkci u zadánu opět rovnicí (16) a počáteční podmínkou $u(0, y) = f(y)$, ale s omezením, že proměnná x může nabývat jen hodnot z $\langle a, \infty \rangle$ pro nějakou konstantu $a \in \mathbb{R}$. Navíc při dosažení této bariéry platí $u(\tau, a) = 0$.

Řešení u můžeme najít obměnou předchozího postupu: položíme

$$G_a(\tau, x, y) = G(\tau, x - y) - G(\tau, x - (2a - y)).$$

Pak G_a opět stejně jako G splňuje vztah (16). Navíc

$$G_a(\tau, a, y) = G(\tau, a - y) - G(\tau, a - (2a - y)) = G(a - y, \tau) - G(y - a, \tau) = 0.$$

Tudíž pokud položíme

$$(17) \quad u(\tau, x) = \int_a^\infty G_a(\tau, x, y) f(y) dy \quad \forall x \geq a,$$

je u opět řešením diferenciální rovnice (16) a $u(\tau, a) = 0$ pro všechna $\tau > 0$. Podíváme-li se na limitu tohoto výrazu pro $\tau \rightarrow 0$, podobně jako v předchozím případě platí

$$\int_{-\infty}^\infty G_a(\tau, x, y) f(y) dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{4\tau\pi}} \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(y-(2a-x))^2}{4\tau}} \right) f(y) dy \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f(x) + f(2a - x),$$

ale při integrování v mezích $\langle a, \infty \rangle$ při $x > a$ je $2a - x < a$ a druhý člen je tedy při τ dostatečně blízkém nule mimo tyto meze. Takže skutečně dostáváme

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(\tau, x) = f(x).$$

Bariérová opce s výplatní funkcí $P(S_T) = V(T, S_T)$ se od evropské opce se stejnou výplatní funkcí liší tím, že cena podkladového aktiva S_t před dobou splatnosti nesmí překročit určenou bariéru, jinak nedojde k žádné výplatě. Například u opce typu *down-and-out* nesmí cena poklesnout pod danou dolní hranici H . Při oceňování nás tedy zajímají pouze trajektorie podkladové ceny splňující $S_t \geq H, \forall t \in (0, T)$, protože jen u těch může být výplata opce nenulová. Zároveň musí cena opce opět splňovat Blackovu-Scholesovu diferenciální rovnici.

Nejprve oceníme *down-and-out* opci, u níž $K > H$. Řešíme úlohu nalezení oceňovací funkce V při $S_t \geq H$, $V(t, H) = 0$, $V(T, S_T) = P(S_T)$, tedy označíme-li $a = \log(H/K)$, hledáme u za podmínek $x \geq a$, $u(\tau, a) = 0$, $u(0, y) = f(y) = P(K e^y) e^{\frac{1}{2}(k-1)y}$ splňující (16). S pomocí (15) dosadíme do (17) a po doplnění exponentů na čtverec, tedy při dosazení

$$-\frac{1}{2}(k-1)x - \left(\frac{1}{4}(k-1)^2 + k \right) \tau - \frac{(x-y)^2}{4\tau} + \frac{1}{2}(k-1)y = -k\tau - \frac{(x-y+(k-1)\tau)^2}{4\tau},$$

$$-\frac{1}{2}(k-1)x - \left(\frac{1}{4}(k-1)^2 + k \right) \tau - \frac{(x-(2a-y))^2}{4\tau} + \frac{1}{2}(k-1)y =$$

$$= -k\tau + (a-x)(k-1) - \frac{(2a-x-y+(k-1)\tau)^2}{4\tau},$$

vychází vyjádření V jako

$$V(S, t) = e^{-k\tau} \int_a^\infty \frac{P(K e^y) e^{-\frac{(x-y+(k-1)\tau)^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} dy - \\ - e^{-k\tau+(a-x)(k-1)} \int_a^\infty \frac{P(K e^y) e^{-\frac{(2a-x-y+(k-1)\tau)^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} dy.$$

Nyní už stačí opět přejít od vyjádření pomocí x, τ k vyjádření pomocí S, t . Oba integrály se pak dopočítají podobně jako v (11). Vlastně stačí spočítat jen první integrál a druhý se pak získá záměnou x za $2a-x$ a vynásobením celého členu $e^{(a-x)(k-1)}$. Při proměnných S, t tedy zaměníme $\log(S/H)$ za $2\log(H/K) - \log(S/K) = \log(H^2/KS)$, čili S za H^2/S , a pak násobíme $(H/S)^{2r/\sigma^2-1}$. Takže např. při výplatní funkci $P(S_T) = (S_T - K)^+$ je nakonec oceňovací funkce *down-and-out call* opce rovna

$$V(S, t) = S \Phi(d_1) - K e^{-\rho(T-t)} \Phi(d_2) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\rho}{\sigma^2}-1} \left(\frac{H^2}{S} \Phi(y_1) - K e^{-\rho(T-t)} \Phi(y_2)\right),$$

kde d_1, d_2 mají význam jako v ocenění evropské opce (11) a

$$y_1 = \frac{\log\left(\frac{H^2}{KS}\right) + \left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad y_2 = y_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Opce typu *down-and-in* naopak může mít nenulovou hodnotu pouze tehdy, když se cena S_t v nějakém čase $t < T$ dostane pod dolní hranici H . Z toho plyne, že je-li V_{do} ocenění *down-and-out* opce, V_{di} ocenění *down-and-in* opce a c ocenění evropské opce se stejnými parametry, pak musí platit

$$V_{di} = c - V_{do}.$$

Obměnou uvedených postupů lze získat také vyjádření ceny *up-and-out*, *up-and-in* call opcí a příslušných put opcí jak pro případy $K > H$, tak pro $K < H$. Výsledky lze nalézt např. v [6].

3.15 Opce závislé na celém průběhu ceny aktiva

Složitějšími postupy založenými na hledání vhodného řešení obecné rovnice (16) je pak možné ocenit např. opce, jejichž cena závisí na dosaženém maximu nebo geometrickém průměru cen podkladového aktiva za určité období. Některé tyto úlohy je možné vyřešit zavedením dodatečného parametru

$$J_n = \left(\int_0^t f(S_u, u)^n du \right)^{\frac{1}{n}},$$

protože při $n = 1$, $f(S, u) = \log(S)$ představuje J_n spojitě počítaný geometrický průměr cen podkladového aktiva, při $f(S, u) = S$ a $n \rightarrow \infty$ představuje J_n dosažené maximum podkladové ceny v časovém intervalu $(0, T)$. Pak tedy hledáme oceňovací funkci $V(t, S_t, J_n)$ řešící za vhodných počátečních podmínek Blackovu-Scholesovu diferenciální rovnici rozšířenou tak, aby platila i pro V závislé na parametru J_n .

Analytické ocenění asijských opcí je tedy známo pro opce závislé na geometrickém průměru podkladových cen. V praxi se ale nejčastěji objevují asijské opce závislé na aritmetickém průměru cen a tento průměr je počítán jen z m hodnot ceny v diskrétních časových okamžicích t_i , $t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$. Představme si, že chceme v čase 0 ocenit takovou opci (platí $t_i > 0$). Rozdělení průměru $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{t_i}$ se pak přibližuje logaritmicko-normálním rozdělením se stejným prvním a druhým momentem, jako má skutečné rozdělení \bar{S} . Platí (opět za předpokladu rizikově neutrálního oceňování)

$$\mathbb{E} \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e^{\rho t_i + \frac{1}{2} \sigma^2 t_i} S_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E} S_{t_i},$$

dále, označíme-li \widetilde{W}_t Wienerův proces při bezrizikové pravděpodobnostní míře, pak při $t_i \leq t_j$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_{t_i} S_{t_j} &= \mathbb{E} e^{\rho t_i + \sigma \widetilde{W}_{t_i}} e^{\rho t_j + \sigma \widetilde{W}_{t_j}} = \\ &= \mathbb{E} e^{\rho t_i + \rho t_j + 2\sigma \widetilde{W}_{t_i}} e^{\sigma \widetilde{W}_{(t_j - t_i)}} = e^{\rho t_i + \rho t_j + 2\sigma^2 t_i} e^{\frac{1}{2} \sigma^2 (t_j - t_i)}, \end{aligned}$$

takže druhý moment je při $t_i \leq t_j$

$$\mathbb{E} \bar{S}^2 = \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=1}^m (\mathbb{E} S_{t_i})^2 e^{\sigma^2 t_i} + 2 \sum_{t_i < t_j} \mathbb{E} S_{t_i} \mathbb{E} S_{t_j} e^{\sigma^2 t_i} \right),$$

kde střední hodnoty jsou počítány na základě informací dostupných v čase 0.

Chceme-li přiblížit rozdělení \bar{S} logaritmicko-normálním rozdělením \hat{S} se shodným rozptylem a střední hodnotou, budeme předpokládat, že (přibližně) platí $\bar{S} \doteq \hat{S} = e^{\hat{\rho}T + \hat{\sigma}\sqrt{T}X}$, kde X má standardizované normální rozdělení a $\hat{\rho}$, $\hat{\sigma}$ jsou vhodné konstanty. Tyto konstanty se získají z rovnic

$$\mathbb{E} \bar{S} = e^{\hat{\rho}T + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 T}, \quad \mathbb{E} \bar{S}^2 = e^{2\hat{\rho}T + 2\hat{\sigma}^2 T}.$$

Můžeme také označit $\hat{S}_0 = e^{\hat{\rho}T - \rho T + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 T}$ a přepsat vyjádření \hat{S} do tvaru

$$\hat{S} = \hat{S}_0 e^{(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2)T + \hat{\sigma} \widetilde{W}_T},$$

což odpovídá vyjádření ceny akcie v čase T s počáteční cenou v čase 0 rovnou \hat{S}_0 v rovnici (10). Ocenění pak lze provést jako u běžné evropské opce na podkladové aktivum s počáteční cenou \hat{S}_0 a volatilitou $\hat{\sigma}$.

Při oceňování této asijské opce s oceňovací funkcí $f(\bar{S})$ v čase $t > 0$, tedy v okamžiku, kdy už známe průměr \bar{S}_n z cen v časech $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$, ale ještě neznáme průměr $\bar{S}_{(m-n)}$ z $(m-n)$ budoucích hodnot, lze vyjádřit toto ocenění jako

$$f\left(\frac{\bar{S}_n n + \bar{S}_{(m-n)}(m-n)}{m}\right) = g(\bar{S}_{(m-n)})$$

a provést ocenění jako u asijské opce emitované v čase t s dobou splatnosti $T-t$, průměrem počítaným z $m-n$ cen a oceňovací funkcí g .

3.16 Americká opce

Takováto opce dovoluje oproti evropské opci předčasné uplatnění. S její pomocí lze tedy při uplatnění až v době splatnosti dosáhnout stejného zisku jako s obdobnou evropskou opcí, ale někdy může být výhodnější uplatnit opci před dosažením času splatnosti, což u evropské opce nelze. Cena americké opce by tedy měla být větší nebo rovna ceně evropské opce. Navíc pro cenu americké call opce C_t nebo put opce P_t musí platit

$$C_t \geq (S_t - K)^+, \quad P_t \geq (K - S_t)^+$$

jinak by nákup a okamžité uplatnění této opce přineslo okamžitý jistý zisk, který je v rozporu s předpokladem neexistence arbitráže.

U americké call opce na akcii nevyplácející dividendy se navíc uvádí, že její cena by se neměla příliš lišit od ceny obdobné evropské call opce. Je-li C_t cena americké call opce v čase t s dobou splatnosti $T > t$, c_t cena evropské call a p_t cena evropské put opce, platí díky put-call paritě (6)

$$c_t = S_t + p_t - Ke^{-\rho(T-t)}, \quad p_t \geq 0$$

odkud

$$C_t \geq c_t \geq S_t - Ke^{-\rho(T-t)} > S_t - K$$

Cena americké opce je tedy podle tohoto zdůvodnění vyšší než částka $S_t - K$ získaná jejím okamžitým uplatněním, takže je výhodnější uplatnit opci až v čase splatnosti, nebo ji v čase t prodat, nežli ji uplatnit v čase t .

Naopak u americké call opce na akcii vyplácející v časech $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ dividendu D_1, D_2, \dots, D_n , může být výhodnější uplatnit opci předčasně. Označme $D_{(t)}$ současnou hodnotu v čase t všech dividend vyplacených od t do T . Představíme-li si portfolio s cenou Π_t skládající se z evropské opce s cenou c_t a částky $D_{(t)} + Ke^{-\rho(T-t)}$ na účtě úročeném bezrizikovou úrokovou mírou a druhé portfolio tvořené podkladovou akcií a z ní plynoucími dividendami, v čase splatnosti pro jejich hodnotu platí

$$\Pi_T = (S_t - Ke^{-\rho(T-t)})^+ + D_{(t)}e^{\rho(T-t)} + K \geq S_t + D_{(t)}e^{\rho(T-t)},$$

takže i v čase t musí platit $\Pi_t = c_t + D_{(t)} + Ke^{-\rho(T-t)} \geq S_t$.

Pro cenu americké opce C_{t_n} v čase výplaty poslední dividendy D_n tedy platí

$$(18) \quad C_{t_n} \geq c_{t_n} \geq S_{t_n} - D_{(t_n)} - Ke^{-\rho(T-t_n)} \geq S_{t_n} - D_n - Ke^{-\rho(T-t_n)}.$$

Je-li

$$S_{t_n} - D_n - Ke^{-\rho(T-t_n)} \geq S_{t_n} - K,$$

neboli

$$D_n \leq K(1 - e^{-\rho(T-t_n)}),$$

není výhodné opci v okamžiku t_n uplatnit. V opačném případě lze ukázat (viz např. [6]), že při dostatečně vysoké ceně S_{t_n} je výhodnější opci uplatnit a získat tak $S_{t_n} - K$ těsně předtím, než se cena opce sníží o dividendu.

V čase t_{n-1} jsme v obdobné situaci: podobně jako v (18) je

$$C_{t_{n-1}} \geq S_{t_{n-1}} - D_{n-1} - Ke^{-\rho(t_n-t_{n-1})},$$

takže opci není výhodné uplatnit při

$$S_{t_{n-1}} - D_{n-1} - Ke^{-\rho(t_n-t_{n-1})} \geq S_{t_{n-1}} - K$$

a může to být výhodné v opačném případě. Stejně lze postupovat i v časech t_i , $1 \leq i < n-1$ a vždy tedy posuzovat, zda (při označení $t = t_0$)

$$D_i \geq K(1 - e^{-\rho(t_i-t_{i-1})}).$$

To nastane, je-li dividendy D_i poměrně velká oproti bezrizikové výnosové míře.

Předchozí vztahy lze použít k přibližnému výpočtu ceny americké call opce: spočítáme ceny evropských call opcí s časy splatností t_1, t_2, \dots, t_n, T a jejich maximum budeme považovat za cenu americké opce s časem splatnosti T . Někdy se také používá jen maximum z ceny evropských opcí se splatností t_n, T , ale protože většina opcí má splatnost kratší než rok a dividendy se většinou vyplácí půlročně, není pak mezi těmito dvěma postupy rozdíl.

3.17 Měnové opce

Jako podkladové aktivum je u měnových opcí použit měnový kurz, tedy částka S v domácí měně, za kterou lze nakoupit jednotku cizí měny. Je-li měnová opce konstruována např. jako evropská call opce, zaručuje svému držiteli při kurzu S_T v čase splatnosti T výplatu $(S_T - K)^+$.

Toho může držitel opce využít k omezení svého měnového rizika, pokud ví, že v čase T bude muset uhradit částku 1 v cizí měně. Pokud měnový kurz v čase T překročí dané K , tak uplatněním opce její držitel získá jednotku cizí měny za cenu K , takže je zajištěn proti nežádoucímu růstu kurzu, zatímco při poklesu kurzu pod K je pro něj platba jednotky v cizí měně stále stejně výhodná, jako bez této opce. Podobně se může investor očekávající příjem platby 1 v cizí měně zajistit proti nežádoucímu poklesu kurzu koupí put opce na tento měnový kurz.

Při oceňování opce se opět předpokládá, že měnový kurz S_t v čase t má za podmínky známého S_0 logaritnicko-normální rozdíl dané rovnicí $dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma d\widetilde{W}_t$, kde \widetilde{W}_t je Wienerův proces při pravděpodobnostní míře Q a μ, σ jsou vhodné konstanty. Je-li ρ

intenzita domácí bezrizikové úrokové míry, ρ_f intenzita bezrizikové úrokové míry v cizí měně, pak při rizikově neutrálním oceňování pro vývoj úrokové míry platí

$$E(S_t | S_0) = S_0 e^{(\rho - \rho_f)t}.$$

Kdyby totiž platilo např. $E(S_t | S_0) > S_0 e^{(\rho - \rho_f)t}$, bylo by možné si v čase 0 půjčit částku $S_0 e^{-\rho_f t}$ při intenzitě úroku ρ , nakoupit množství $e^{-\rho_f t}$ jednotek cizí měny za S_0 a uložit ho na účet v cizí měně úročený s intenzitou ρ_f , v čase t , kdy na něm bude částka 1 v cizí měně, účet opět zrušit a splatit dluh. Tím by se v čase t získala částka $S_t - S_0 e^{-\rho_f t} e^{\rho t}$, takže současná střední hodnota této investice by v čase 0 byla $E(S_t | S_0) e^{-\rho t} - S_0 e^{-\rho_f t} > 0$, což odporuje předpokladu neexistence arbitráže. Obdobně lze vyloučit i možnost $E(S_t | S_0) < S_0 e^{(\rho - \rho_f)t}$.

Vývoj měnového kurzu je tedy dán rovnicí

$$dS_t = (\rho - \rho_f) S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t,$$

což odpovídá rovnici (14) pro vývoj ceny akcie vyplácející spojitě dividendu s intenzitou $q = \rho_f$. Proto i cena opce vyjde ve stejném tvaru jako cena opce na akcii vyplácející dividendu, tedy pro evropskou call a put opci

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-\rho(T-t)} \left(S_t e^{(\rho - \rho_f)(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right), \\ p_t &= e^{-\rho(T-t)} \left(K \Phi(-d_2) - S_t e^{(\rho - \rho_f)(T-t)} \Phi(d_2) \right), \\ d_{1,2} &= \frac{\log(S_t/K) + (\rho - \rho_f \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

3.18 Opce na futures

K podobnému postupu ocenění se dostaneme i u opce na futures. Takovýto typ opce je složeným derivátem, u kterého výplatní cena opce závisí na sazbě podkladového nástroje futures. Futures představuje dohodu o koupi daného podkladového aktiva v čase T_f za předem danou cenu F_t smluvenou v čase $t < T_f$. Na počátku si smluvní strany uzavírající futures nevyměňují žádné platby, takže je-li S_t cena podkladového aktiva v čase t , pak pro spravedlivě určenou výplatní hodnotu futures F_t musí na rizikově neutrálním trhu s bezrizikovou úrokovou mírou s intenzitou ρ platit

$$F_t = E(S_{T_f} | S_t) = S_t e^{\rho(T_f - t)}.$$

Při $0 < t < T_f$ tedy s využitím vztahu (10) pro hodnoty futures s časem splatnosti T_f platí

$$F_t = S_t e^{\rho(T_f - t)} = S_0 e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widetilde{W}_t} e^{\rho(T_f - t)} = F_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\widetilde{W}_t}.$$

Stejně jako rozdělení ceny samotného podkladového aktiva S_t je tedy i rozdělení hodnoty futures F_t při známém F_0 logaritmicko-normální. K ocenění je tedy opět možné použít

stejný model jako u měnové opce, do kterého je místo ρ_f třeba dosadit ρ . Cena evropské call (a put) opce s časem splatnosti $T \leq T_f$ a výplatou $(F_T - K)^+$ (nebo $(K - F_T)^+$ u put opce) pak vychází

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-\rho(T-t)} \left(F_t \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right), \\ p_t &= e^{-\rho(T-t)} \left(K \Phi(-d_2) - F_t \Phi(d_2) \right), \\ d_{1,2} &= \frac{\log(F_t/K) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Tento model je obvykle (viz. např. [6]) označován jako Blackův model.

U opce na podkladové aktivum, jakým je např. akcie, se výplatní hodnota opce odvíjí od samotné ceny tohoto aktiva, zatímco u opce na futures se nejedná přímo o cenu samotného aktiva, ale jde spíše jen o její přírůstky. U opce na futures lze tedy dosáhnout stejného zisku (či ztráty) manipulací s řádově nižšími částkami.

3.19 Opce na dluhopis

Budeme zkoumat ocenění opce, jejíž výplatní hodnota v čase splatnosti T závisí pouze na ceně podkladového dluhopisu v tomto čase T , tedy např. evropské call či put opce na tento dluhopis. Nejprve se podíváme na ocenění bezkuponového dluhopisu, který zaručuje v čase $T_d > T$ výplatu nominální hodnoty N .

Pro popis vývoje úrokové míry, na níž hodnota dluhopisu závisí, použijeme Vašíčkův model z kap. (3.3), viz též např. [10], s parametry a, b, σ a použijeme také značení zavedené v této kapitole, navíc označíme $T_d - T = \tau$ a současný čas jako 0. Cena bezkuponového dluhopisu v čase T je potom $N\tilde{P}(\rho_T, \tau)$, takže vidíme, že cena opce bude záviset nejen na úrokové míře od času 0 do času T (kterou v čase 0 již známe), ale narozdíl od předchozích typů opcí také na úrokové míře od času T do času T_d , kterou ještě neznáme (je to náhodná veličina vyvíjející se podle Vašíčkova modelu).

Z rovnice (3) vidíme, že okamžitá intenzita úrokové míry ρ_T má za podmínky známého ρ_0 normální rozdělení. Z rovnice (5) pak vychází

$$(19) \quad \tilde{P}(\rho_T, \tau) = \mathbb{E}(e^{-\int_T^{T+\tau} \rho_s ds} | \rho_T) = e^{-A(\tau) - B(\tau)\rho_T} = e^{\mu + \sigma_P X},$$

kde X má normální rozdělení $N(0, 1)$, $\mu = -A(\tau) - B(\tau)\mathbb{E}(\rho_T | \rho_0)$ a

$$(20) \quad \sigma_P = B(\tau) \text{Var}(\rho_T | \rho_0) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau})\sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}.$$

Dále lze pro $\tilde{P}(\rho_0, T + \tau)$ odvodit

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\rho_0, T + \tau) &= \mathbb{E}(e^{-\int_0^{T+\tau} \rho_s ds} | \rho_0) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(e^{-\int_0^T \rho_s ds - \int_T^{T+\tau} \rho_s ds} | \rho_T) \Big| \rho_0\right) = \\ &= \mathbb{E}(\tilde{P}(\rho_T, \tau)e^{-\int_0^T \rho_s ds} | \rho_0) = \mathbb{E}(\tilde{P}(\rho_T, \tau) | \rho_0)\tilde{P}(\rho_0, T). \end{aligned}$$

Tento vztah vlastně říká jen to, že diskontování přes časový interval $\langle 0, T + \tau \rangle$ musí odpovídat diskontování přes intervaly $\langle T, T + \tau \rangle$ a pak $\langle 0, T \rangle$. S pomocí tohoto vztahu a rovnice (19) pak můžeme získat pro μ vyjádření

$$\mu + \frac{1}{2}\sigma_P^2 = \log E(\tilde{P}(\rho_T, \tau) | \rho_0) = \log \frac{\tilde{P}(\rho_0, T + \tau)}{\tilde{P}(\rho_0, T)}.$$

Veličiny $\tilde{P}(\rho_0, T + \tau)$ (diskontní sazba na dobu $T + \tau$) a $\tilde{P}(\rho_0, T)$ (sazba na dobu T) jsou v čase 0 již známy.

Úlohu ocenění opce na dluhopis lze nyní již dopočítat obdobně, jako odvození Blackova-Scholesova vzorce v kapitole (3.8). Jako v kapitole (3.3) označíme $P(s, t) = \tilde{P}(\rho_s, t - s)$ pro libovolná $t > s > 0$ a dále označíme $S_T = N\tilde{P}(\rho_T, \tau)$, $S_0 = N\tilde{P}(\rho_0, T + \tau) = NP(0, T + \tau)$, pak při pevném ρ_0 platí

$$S_T = S_0 e^{-\log P(0, T) - \frac{1}{2}\sigma_P^2 + \sigma_P X}, \quad E S_T = \frac{1}{P(0, T)} S_0.$$

Výsledek se od Blackova-Scholesova vzorce liší pouze tím, že místo ρT , $\sigma\sqrt{T}$ (ve významu, který mají parametry ρ , σ v Blackově-Scholesově vzorci) se dosadí $-\log P(0, T)$, σ_P .

Pokud tedy opět označíme současný čas obecněji jako t , pak při známých $P(t, T)$ a $P(t, T_d)$ dostáváme např. cenu evropské put a call opce se splatností v čase $T > t$ na bezkuponový dluhopis splatný v čase $T_d = T + \tau$ jako

$$c_t = NP(t, T_d)\Phi(x_1) - KP(t, T)\Phi(x_2),$$

$$p_t = KP(t, T)\Phi(-x_2) - NP(t, T_d)\Phi(-x_1),$$

kde

$$x_{1,2} = \frac{1}{\sigma_P} \log \frac{NP(t, T_d)}{KP(t, T)} \pm \frac{1}{2}\sigma_P,$$

σ_P je zadáno pomocí (20) jako

$$\sigma_P = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T_d - T)})\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T - t)}}{2a}}$$

a parametry a, b, σ Vašíčkova modelu se odhadnou z dosavadního vývoje úrokových měř.

Rozšířením tohoto modelu můžeme ocenit i některé opce na dluhopis vyplácející kupony. Uvažujme např. v čase t evropskou call opci, jejíž výplata v čase $T > t$ závisí na hodnotě kuponového dluhopisu v čase T . Tento dluhopis v čase $T_d > T$ vyplatí jistinu N a v časech T_i , $i = 1, \dots, n$, $T < T_1 < T_2 < \dots < T_n = T_d$, zaručuje výplatu kuponu ve výši c_i . Výplatní hodnota této opce pak je

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i \tilde{P}(\rho_T, T_i - T) + N\tilde{P}(\rho_T, T_d - T) - K \right)^+.$$

Z rovnice (19) je $\tilde{P}(\rho, \tau)$ pro libovolné $\tau > 0$ klesající funkcí proměnné ρ (při vyšší momentální intenzitě úroku ρ bude současná hodnota vlastnictví 1 za čas τ nižší), $\tilde{P}(\infty, \tau) = 0$, $\tilde{P}(-\infty, \tau) = \infty$. Proto lze pro $K > 0$ najít jediné takové $\rho_{(K)}$, aby platilo

$$\sum_{i=1}^n c_i \tilde{P}(\rho_{(K)}, T_i - T) + N \tilde{P}(\rho_{(K)}, T_d - T) = K$$

. Navíc pak $\tilde{P}(\rho_T, \tau) > \tilde{P}(\rho_{(K)}, \tau)$ pro libovolné τ platí právě tehdy, když $\rho_T < \rho_{(K)}$. Výplatní funkci lze proto psát jako

$$\sum_{i=1}^n c_i (\tilde{P}(\rho_T, T_i - T) - \tilde{P}(\rho_{(K)}, T_i - T))^+ + N (\tilde{P}(\rho_T, T_d - T) - \tilde{P}(\rho_{(K)}, T_d - T))^+,$$

což představuje součet výplatních funkcí call opcí na bezkuponové dluhopisy s časy splatnosti T_i a jistinami c_i a N a realizačními cenami $\tilde{P}(\rho_{(K)}, T_i - T)$, které už umíme podle předchozího výkladu ocenit.

Stejným rozkladem na součet opcí na bezkuponové dluhopisy lze ocenit i evropskou put opci na kuponový dluhopis.

Podobně jako za předpokladu, že úroková míra se vyvíjí podle Vašíčkova modelu, lze postupovat i při oceňování opcí na dluhopisy za předpokladu, že lze tuto úrokovou míru popsat některým z dalších modelů uvedených v kap. (3.3). Výsledky pro některé modely jsou uvedeny např. v [6].

4 Simulační a numerické techniky

Často není možné u složitějšího finančního nástroje najít jeho spravedlivou cenu přesným výpočtem, nebo je provádění takového výpočtu v praxi příliš náročné. Pak je možné zkusit úlohu vyřešit pomocí přibližných numerických metod, nebo pomocí odhadu na základě simulací vývoje sledovaných veličin.

4.1 Binomický model

Oceňování pomocí scénářů vývoje uijeme při oceňování opcí, pokud kvůli složitosti úlohy (např. oceňování některých exotických nebo amerických opcí) nelze použít přímé výpočty založené na předpokládaném spojitém rozdělení podkladového aktiva, tak jako např. při odvození Blackovy-Scholesovy formule. Pak může být užitečné zkonstruovat na základě znalostí o vývoji ceny podkladového aktiva různé scénáře vývoje této ceny. Umíme-li určit pravděpodobnost výskytu každého scénáře a cenu opce v případě, že nastane takový scénář, lze za spravedlivou cenu opce považovat střední hodnotu její ceny přes všechny možné scénáře.

Zpravidla nespočetné množství všech různých teoretických vývojových scénářů v časovém intervalu (t, T) ale musíme přiblížit konstrukcí konečného množství scénářů a jim příslušné hodnoty zkoumaných náhodných veličin pro každý scénář vyčíslit v několika časových okamžicích $t \leq t_1 < t_2 \dots < t_n \leq T$. Volbou počtu scénářů a počtu bodů, kde budou tyto scénáře vyčísleny, tedy musíme dosáhnout určitého kompromisu mezi přesností aproximace a rozsáhlostí úlohy, kterou pak budeme muset počítat.

Od předpokladu spojitého vývoje podkladové ceny přejdeme k předpokladu, že cena podkladového aktiva opce se mění jen v diskrétních, od sebe stejně vzdálených časových okamžicích $t, t + \Delta t, \dots, t + n\Delta t$. Označíme S_t cenu podkladového aktiva a V_t cenu opce v čase t , ρ je intenzita bezrizikové úrokové míry. Potom obecný stromový model stupně k vychází ze vztahu

$$V_t(S) = e^{-\rho\Delta t} \sum_{i=1}^k w_i V_{t+\Delta t}(S u_i),$$

kde w_i jsou váhy, typicky pravděpodobnosti, že se cena podkladového aktiva změní za čas Δt z S na $S u_i$.

Pro $k = 2$ dostáváme binomický model:

$$V_t(S) = e^{-\rho\Delta t} (q V_{t+\Delta t}(S u) + (1 - q) V_{t+\Delta t}(S d)).$$

V tomto modelu může cena podkladového aktiva z hodnoty S za čas Δt pouze vzrůst na hodnotu uS nebo poklesnout na hodnotu dS . Přitom $P(S_{t+1} = uS_t | S_t) = q$ a $P(S_{t+1} = dS_t | S_t) = (1 - q)$.

Pokud nás v čase t zajímá cena opce s dobou splatnosti T , můžeme časový interval rozdělit na n časových úseků délky Δt a počítat cenu opce v čase t jako zdiskontovanou střední hodnotu ze všech možných hodnot ceny opce v čase T , neboli jako střední hodnotu

přes všechny možné kombinace n pohybů podkladové ceny nahoru a dolů:

$$(21) \quad V_t(S) = e^{-\rho(T-t)} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} V_T(u^i d^{n-i} S),$$

kde $V_T(S)$ je částka, kterou vlastník opce získá v čase T , pokud podkladová cena v čase T bude $S_T = S$. Takže např. pro evropskou call opci bude $V_T(S) = (S - K)^+$.

Tento model závisí na parametrech q , u , d . Při volbě těchto parametrů se zpravidla nejprve předpokládá, že tak jako při odvození Blackovy-Scholesovy rovnice v kap. (3.8) je třeba počítat s takovým pravděpodobnostním rozdělením Q , které odpovídá oceňování v rizikově neutrálním světě. Za těchto podmínek dostáváme pro bezrizikovou úrokovou míru $(1+r) = e^\rho$ a pravděpodobnost q tento vztah:

$$(22) \quad quS_t + (1-q)dS_t = E_Q(S_{t+\Delta t} | S_t) = (1+r)^{\Delta t} S_t$$

a tedy

$$q = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{u - d}.$$

Pokud v rizikově neutrálním ocenění evropské call opce označíme jako a nejmenší index i takový, že $u^i d^{n-i} S - K > 0$, pak můžeme vztah (21) přepsat do tvaru

$$V_t(S) = S B(a, n, q') - Kr^{-n} B(a, n, q),$$

kde

$$B(a, n, q) = \sum_{i=a}^n \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \quad \text{a} \quad q' = q \frac{u}{r}, \quad (1-q') = (1-q) \frac{d}{r}.$$

Tento vztah je obdobou Blackovy-Scholesovy formule pro binomické rozdělení.

Pro úplné určení parametrů q , u , d se nejčastěji užívají volby $u = 1/d$ nebo $q = 1/2$. Poslední volný parametr se pak určí např. tak, aby rozptyl použitého binomického rozdělení byl v souladu s pozorovanou volatilitou skutečných dat. Opět za použití rizikově neutrálního pravděpodobnostního rozdělení dostáváme:

$$\begin{aligned} qu^2 S_t^2 + (1-q)d^2 S_t^2 &= E_Q(S_{t+\Delta t}^2 | S_t) = \\ &= S_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2(\rho\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = S_t^2 e^{2\rho\Delta t + \sigma^2\Delta t}. \end{aligned}$$

Zvolíme-li $q = 1/2$, pak z předchozího vztahu a z (22) dostaneme pro u , d rovnice

$$\begin{aligned} u + d &= 2e^{\rho\Delta t}, \\ u^2 + d^2 &= 2e^{2(\rho+\sigma^2)\Delta t}, \end{aligned}$$

a tedy řešení ve tvaru

$$(23) \quad u = e^{\rho\Delta t} (1 + \sqrt{e^{\Delta t\sigma^2} - 1}) \quad \text{a} \quad d = e^{\rho\Delta t} (1 - \sqrt{e^{\Delta t\sigma^2} - 1}).$$

Tento přístup bývá označován jmény autorů Jarrow-Rude.

Protože $1 + \sqrt{e^x - 1}$, $1 - \sqrt{e^x - 1}$ se dá psát jako $1 + \sqrt{x} + \mathcal{O}(x)^{3/2}$ a $1 - \sqrt{x} + \mathcal{O}(x)^{3/2}$ a protože funkce $e^{\sqrt{x}-x/2}$ a $e^{-\sqrt{x}-x/2}$ mají také Taylorův rozvoj roven $1 \pm \sqrt{x} + \mathcal{O}[x]^{3/2}$, lze u , d přibližně vyjádřit jako

$$u = e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Tento tvar samozřejmě není přesným řešením výše uvedených rovnic, na druhou stranu ale nehrozí, že by d mohlo vyjít záporné. Navíc je možné tento tvar odůvodnit ještě jedním způsobem: protože za předpokladu rizikově neutrálního ocenění platí

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\widetilde{W}_{\Delta t}},$$

je možné přiblížit náhodnou veličinu $\widetilde{W}_{\Delta t}$ pro účely sestavení binomického modelu veličinou nabývající pouze hodnoty $\pm\Delta t$ s pravděpodobnostmi $1/2$ a dostaneme stejné hodnoty u , d .

Pokud si místo $q = 1/2$ zvolíme u a d tak, aby $u = 1/d$, získáme pro q a u rovnice

$$\begin{aligned} qu + (1 - q)\frac{1}{u} &= e^{\rho\Delta t}, \\ qu^2 + (1 - q)\frac{1}{u^2} &= e^{(2\rho + \sigma^2)\Delta t}, \end{aligned}$$

odkud

$$u^2 - (e^{-\rho\Delta t} + e^{(\rho + \sigma^2)\Delta t})u + 1 = 0$$

a řešení je

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \left(e^{-\rho\Delta t} + e^{(\rho + \sigma^2)\Delta t} \pm \sqrt{(e^{-\rho\Delta t} - e^{(\rho + \sigma^2)\Delta t})^2 - 4} \right).$$

Můžeme dát $u = u_1$, $d = u_2$ a $q = (e^{\rho\Delta t} - d)/(u - d)$, nebo můžeme opět vyjádření $u_{1,2}$ nejprve převést do jednoduššího přibližného tvaru, v tomto případě tedy

$$(24) \quad u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\Delta t}\sigma + \frac{\Delta t\sigma^2}{2},$$

což také odpovídá rozvoji funkcí $e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Tento model je označován jako typ Cox-Ross-Rubinstein.

4.2 Model Black-Derman-Toy

Tento model je další možností, jak oceňovat opce pomocí generace různých scénářů pro vývoj podkladových cen. Jeho použití je nejobvyklejší při oceňování opcí, jejichž výplata závisí na vývoji nějaké úrokové míry, jako jsou například opce na úrokové dluhopisy. Tento model vychází z předpokladu, že krátkodobé úrokové míry $r(t)$ mají logaritmicke-normální rozdělení a rozptyl jejich logaritmu závisí pouze na čase. Normální rozdělení $\log r(t)$ se přiblíží pomocí binomického rozdělení v t vybraných časových okamžicích.

V každém okamžiku $t \leq T$ budeme předpokládat, že do času $t + 1$ může úroková míra vzrůst či poklesnout s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Přitom pokud v čase $t + 1$ vzroste a v čase $t + 2$ poklesne, nebo pokud nejprve poklesne a pak vzroste, musíme se ze stejné hodnoty v čase t dostat opět na stejnou hodnotu v čase $t + 2$. Vyjdeme-li z jedné hodnoty v čase $t = 0$, můžeme se v každém čase $t \leq T$ dostat do celkem $t + 1$ možných hodnot. Existuje celkem 2^T možných kombinací T pohybů nahoru a dolů a tedy 2^T možných scénářů vývoje v časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$.

Každý z takovýchto scénářů s může být reprezentován vektorem $\omega^s = (\omega_1^s, \omega_2^s, \dots, \omega_T^s)^\top$, kde $\omega_t^s = 1$ pokud v čase t ve scénáři s dojde k pohybu směrem nahoru a $\omega_t^s = 0$ při pohybu dolů. Pravděpodobnost každého ze scénářů je díky jeho konstrukci 2^{-T} .

Velikost jednotlivých pohybů nahoru a dolů se určí tak, aby pro velikost r_t^s úrokové míry vyvíjející se podle scénáře s v čase t platilo:

$$r_t^s = r_{t0} k_t^{i_t(s)}, \quad i_t(s) = \sum_{\tau=1}^t \omega_\tau^s,$$

kde r_{t0} je základní (nejnižší možná ze všech scénářů) hodnota úrokové míry v čase t a k_t jsou koeficienty udávající rozptyl v čase t . Tyto koeficienty r_{t0} a k_t se odhadují na základě křivek výnosů a volatilit dluhopisu jako funkcí času do splatnosti.

Chceme-li nakonec získat cenu opce na podkladové aktivum, jehož cena se vyvíjí s úrokovou mírou $r(t)$, a je-li dána cena opce v čase T v případě vývoje úrokové míry podle scénáře ω^s jako $V_T(\omega^s)$, pak současná hodnota opce při diskontování bezrizikovou úrokovou mírou ρ v čase 0 je

$$V_0 = e^{-\rho T} \sum_{s=1}^{2^T} 2^{-T} V_T(\omega^s).$$

Pokud např. jde o evropskou call opci, bude při počáteční ceně podkladového aktiva S_0 a při vývoji odpovídajícím scénáři ω^s v čase T vyjádření její ceny

$$V_T(\omega^s) = (S_0(1 + r_{T0} k_T^{i_T(s)}) - K)^+.$$

Díky tomu, že pro každý scénář ω^s známe nejen konečnou hodnotu úrokové míry $r(T)$, ale i její vývoj před časem T , lze takovýto postup použít i u opcí závislých na celém průběhu ceny podkladového aktiva.

4.3 Metoda konečných diferencí

Úlohu nalezení ceny opce $V(t, S_t)$ v čase t při ceně podkladového aktiva S_t lze převést na úlohu nalezení řešení Blackovy-Scholesovy diferenciální rovnice (13) s vhodnými počátečními podmínkami. Jednou z možností jak postupovat v případě, že nalezení analytického řešení je příliš složité, je diferenciální rovnici nahradit rovnicemi diferenčními.

Označíme jako čas 0 současnost, T čas splatnosti opce a místo se spojitým vývojem v čase budeme počítat jen s vývojem v N diskretních okamžicích $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$, kde

$\Delta t = T/N$. Stejně tak i možný vývoj ceny S přiblížíme M hodnotami $0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{\max}$, kde $\Delta S = S_{\max}/M$. Maximální hodnota S_{\max} je zvolena tak, aby se cena opce v libovolném čase při podkladové ceně S_{\max} dala snadno odhadnout. Např. při oceňování put opce se volí S_{\max} tak, aby cena této put opce při podkladové ceně vyšší než S_{\max} již byla zanedbatelná, u evropské call opce lze zase cenu určit z *put-call parity* a zmíněné nulovosti ceny put opce. Přesná velikost S_{\max} je zároveň zvolena tak, aby současná cena byla jedním z násobků $j\Delta S$, $0 \leq j \leq M$.

Pro každé $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ a $j \in \{0, 1, \dots, M\}$ pak ještě označíme cenu opce $V_{i,j} = V(i\Delta t, j\Delta S)$. Pak můžeme zkonstruovat přiblížení jednotlivých parciálních derivací v bodech $j\Delta t, i\Delta S$ jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &\doteq \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}, & \frac{\partial V}{\partial S} &\doteq \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &\doteq \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S^2} - \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta S^2}.\end{aligned}$$

Vzhledem k logaritmicko-normálnímu rozdělení S_t je ale přirozenější přejít k proměnným $B_t = \log S_t$. Kromě $B_{\max} = \log S_{\max}$ zvolíme ještě B_{\min} tak, aby šlo cenu opce při podkladové ceně $e^{B_{\min}}$ snadno odhadnout, obvykle se zvolí B_{\min} tak malé, aby $e^{B_{\min}} \doteq 0$. Pak počítáme hodnotu opce pro B_t nabývající hodnot $B_{\min}, B_{\min} + \Delta B, B_{\min} + 2\Delta B, \dots, B_{\max}$, kde $\Delta B = (B_{\max} - B_{\min})/M$. B_{\min}, B_{\max} jsou zároveň voleny tak, aby pro nějaké j bylo $e^{j\Delta B + B_{\min}}$ rovno současné ceně aktiva. Opět označíme $V_{i,j} = V(i\Delta t, B_{\min} + j\Delta B)$.

Z rovnice (13) pak odvodíme obdobnou diferenciální rovnici při proměnné B – stačí dosadit

$$\frac{\partial V}{\partial B} = \frac{\partial V}{\partial S} e^B, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} e^{2B} + \frac{\partial V}{\partial S} e^B,$$

a dostaneme

$$(25) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial V}{\partial B} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} = rV.$$

Parciální derivace v bodech $i\Delta t, B_{\min} + j\Delta B$ pak přiblížíme např. pomocí

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &\doteq \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}, & \frac{\partial V}{\partial B} &\doteq \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta B}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} &\doteq \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta B^2} - \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta B^2}.\end{aligned}$$

Uvedený tvar odhadu $\frac{\partial V}{\partial B}$ je symetričtější než výše uvedený tvar pro $\frac{\partial V}{\partial S}$.

Dosazením těchto přiblížení do (25) vzniknou pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ a $j \in \{1, \dots, M-1\}$ diferenční rovnice

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + \left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta B} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta B^2} = \rho V_{i,j}.$$

Pokud provedeme přeznačení pomocí

$$(26) \quad a = \frac{\Delta t}{2\Delta B} \left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta B^2} \sigma^2,$$

$$(27) \quad b = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta B^2} \sigma^2 + \rho \Delta t,$$

$$(28) \quad c = -\frac{\Delta t}{2\Delta B} \left(\rho - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta B^2} \sigma^2,$$

dostaneme se ke tvaru

$$(29) \quad V_{i+1,j} = aV_{i,j-1} + bV_{i,j} + cV_{i,j+1},$$

což nám dává $(N-1) \times (M-2)$ rovnic pro $N \times M$ neznámých $V_{i,j}$.

Kromě rovnic (29) máme v závislosti na typu opce ještě další okrajové podmínky: vezmeme-li jako příklad americkou put opci, díky volbě B_{\max} je $V_{i,M} = 0$ pro všechna $0 \leq i \leq N$, hodnoty $V_{N,j}$, $0 \leq j \leq M$ představují výplatní hodnoty $(K - e^{j\Delta B + B_{\min}})^+$ a $V_{i,0}$, $0 \leq i \leq N$ je ocenění v bodě s podkladovou cenou 0, je tedy rovno K .

Nyní už lze dosadit do (29) při $i = N-1$, získat řešení tvaru $V_{N-1,j}$, ta pak dosadit do rovnic při $i = N-2$, získat $V_{N-2,j}$, a tak dále až k $V_{0,j}$, kde pro j takové, že $e^{j\Delta B + B_{\min}}$ je současná cena podkladového aktiva, je $V_{0,j}$ hledaná cena opce.

Někdy je výhodnější použít při řešení diferenciální rovnice (25) ještě jiná přiblížení. Dosadíme-li

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &\doteq \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}, & \frac{\partial V}{\partial B} &\doteq \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta B}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} &\doteq \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j}}{\Delta B^2} - \frac{V_{i+1,j} - V_{i+1,j-1}}{\Delta B^2}, \end{aligned}$$

vyjde nám diferenční rovnice

$$(30) \quad V_{i,j} = aV_{i+1,j-1} + bV_{i+1,j} + cV_{i+1,j+1},$$

kde parametry a , b , c mají tentokrát význam

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1 + \rho \Delta t} \left(-\frac{\Delta t}{2\Delta B} \left(\rho - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta B^2} \sigma^2 \right), \\ b &= \frac{1}{1 + \rho \Delta t} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta B^2} \sigma^2 \right), \\ c &= \frac{1}{1 + \rho \Delta t} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta B} \left(\rho - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta B^2} \sigma^2 \right). \end{aligned}$$

Oproti (29) je nyní $V_{i,j}$ přímo vyjádřeno z hodnot v časovém kroku $i+1$, a protože při hledání řešení se postupuje od známých hodnot v časovém kroku N postupně přes $N-1, N-2, \dots, 1, 0$, je výpočet podle tohoto algoritmu jednodušší – není třeba v každém kroku řešit lineární rovnici, jako v předchozím modelu.

Parametry a , b , c v tomto modelu vlastně představují pravděpodobnosti, že z hodnoty $V_{i,j}$ v čase i se v dalším časovém kroku přejde do některé z hodnot $V_{i+1,j-1}$, $V_{i+1,j}$, $V_{i+1,j+1}$. Není ale zaručeno, že a , b , c budou vycházet nezáporné. Např. v [6] se tedy ukazuje, že tento model je obecně méně robustní, než předchozí model daný vztahem (29).

4.4 Oceňování metodou Monte Carlo

Podobně jako při vyčíslování hodnoty opce pomocí konstrukce binomického nebo jiného stromového modelu vyjadřujícího možný vývoj ceny podkladového aktiva v diskrétních časových okamžicích budeme i v této kapitole zkoumat možné scénáře vývoje. Při konstrukci těchto scénářů budeme ale místo z pevně daných parametrů vycházet z vhodných náhodných parametrů, jejichž hodnotu budeme umět nasimulovat generátorem pseudonáhodných čísel.

Důvodem pro používání náhodných veličin ve výpočetních algoritmech je předpoklad, že výsledek získaný výpočtem uplatněným na náhodný výběr z množiny všech vstupů dokáže reprezentovat teoretický výsledek pro celou množinu vstupů.

Tento předpoklad je základem výpočetních metod typu Monte Carlo, což je vlastně odvětví experimentální matematiky, ve kterém se konstruuje výpočet na základě umělých náhodných výběrů. Přiblížení hledaného výsledku vhodnou náhodnou veličinou tedy může dávat nepřesný a při opakování výpočtu pokaždé odlišný výsledek, ale pravděpodobnost výrazné chyby lze (zpravidla dostatečnou velikostí výběru) omezit. Přesnost výsledku pak lze považovat také za náhodnou veličinu, jejíž rozptyl závisí zejména na zmíněné velikosti náhodného výběru vstupů.

Při použití metody Monte Carlo se počítaná úloha nejprve převede do tvaru, ve kterém se vlastně jedná o výpočet integrálu typu

$$\int_{\langle 0,1 \rangle^d} f(x) dx .$$

Místo přesného analytického výpočtu ale vyčíslíme hodnoty $f(x)$ při opakovaném dosazení nezávislých stejně a rovnoměrně rozdělených náhodných vektorů $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, X_i \in \langle 0, 1 \rangle^d$ za x .

Aritmetický průměr $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ lze pro dostatečně velké n brát za odhad střední hodnoty $E f(X_i)$ a tedy za odhad hodnoty výše uvedeného integrálu. To lze tvrdit díky silnému zákonu velkých čísel, podle kterého se takovýto odhad pro n jdoucí do nekonečna limitně blíží střední hodnotě (skoro jistě). Pravděpodobnost, že odchylka odhadu od skutečného teoretického výsledku překročí zvolené $\varepsilon > 0$ je (za předpokladu konečného rozptylu $f(X)$) omezená a s rostoucím n klesá k nule.

4.5 Ocenění opce metodou Monte Carlo

Mějme úlohu ocenění opce s jedním podkladovým aktivem. Na tomto příkladě můžeme začít s používáním simulační metody Monte Carlo a postupně výpočet zobecnit i pro další druhy opcí. Označíme S_t cenu podkladového aktiva v čase t , čas splatnosti T , pro vývoj ceny podkladového aktiva opět použijeme stejný model jako v (10) s volatilitou σ a intenzitou bezrizikové úrokové míry ρ . Výplatní funkci opce v čase T při ceně podkladového aktiva $S_T = s$ označíme $V_T(s)$. S ní pak vyjádříme cenu opce $V(t, S_t)$, tedy současnou střední hodnotu výplaty této opce v čase $t < T$ při znalosti ceny S_t :

$$V(t, S_t) = e^{\rho(T-t)} \mathbf{E}(V_T(S_T) | S_t) = \int_0^\infty V_T(S_T) g(s | S_t, \rho, \sigma, T-t) ds,$$

kde hustota $g(s | S_t, \rho, \sigma, T-t)$ udává rozdělení S_T v závislosti na současné ceně S_t .

Je-li S náhodná veličina s hustotou $g(s)$, X náhodná veličina s hustotou $h(x)$ a mezi těmito veličinami existuje vztah $f(X) = S$, $f \geq 0$, a existuje inverzní funkce f^{-1} , pak podle pravidla pro transformaci náhodných veličin platí $h(x) = g(f(x))f'(x)$. Potřebujeme-li spočítat integrál $\int V_T(s)g(s)ds = \int V_T(f(x))g(f(x))f'(x)dx$, dostaneme díky vztahu hustot $\int V_T(f(x))h(x)dx$.

Z kapitoly (3.8) víme, že s použitím rizikově neutrální pravděpodobnostní míry je při $\rho = \log(1+r)$

$$S_T = S_t e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma \widetilde{W}_{T-t}}$$

a že $\widetilde{W}_{T-t} = (T-t)N$, kde N má distribuční funkci standardizovaného normálního rozdělení Φ . Pokud má X rovnoměrné rozdělení na $\langle 0, 1 \rangle$, pak $h(x) = 1$ a $P(\Phi^{-1}(X) < s) = P(X < \Phi(s)) = \Phi(s) = P(N < s)$, takže $\Phi^{-1}(X)$ má stejné rozdělení jako N .

Rovnoměrné rozdělení na $\langle 0, 1 \rangle$ je tedy možné převést na rozdělení náhodné veličiny S_T při pevném S_t pomocí

$$S_T = f(X, S_t, \rho, \sigma, T-t) = S_t e^{(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \Phi^{-1}(X)}.$$

S použitím těchto vztahů lze převést vzorec pro současnou střední hodnotu opce do tvaru

$$V(t, S_t) = \int_0^\infty V_T(S_T) g(s | S_t, \rho, \sigma, T-t) ds = \int_{(0,1)} V_T(f(x, S_t, \rho, \sigma, T-t)) dx.$$

Hodnotu integrálu teď lze vyčíslit přímým použitím metody Monte Carlo. Stačí nasimulovat řadu nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením X_1, X_2, \dots, X_n , dosadit hodnoty do funkce $f(x, S_t, \rho, \sigma, T-t)$ a získat tak simulaci n nezávislých hodnot veličin $S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^n$. Z nich se spočítají hodnoty výplatní funkce $V_T(S_T^1), V_T(S_T^2), \dots, V_T(S_T^n)$ a hledaná hodnota integrálu se dá přiblížit pomocí odhadu

$$\widehat{V}(t, S_t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_T(S_T^i).$$

Předpokládáme, že $S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^n$ je nezávislý náhodný výběr z rozdělení, které má hustotu $g(s | S_t, \rho, \sigma, T-t)$. Na základě tohoto předpokladu lze spočítat střední hodnotu odhadu

$$\mathbf{E} \widehat{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty V_T(s^i) g(s^i | S_t, \rho, \sigma, T-t) ds^i = e^{\rho(T-t)} \mathbf{E}(V_T(S_T) | S_t).$$

Střední hodnota odhadu odpovídá teoretické hodnotě integrálu.

Za předpokladu, že rozptyl $\text{Var}(V_T(S_T))$ je konečný, lze díky nezávislosti $S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^n$ vyjádřit rozptyl odhadu jako

$$\text{Var}(\widehat{V}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(V_T(S_T^i)) = \frac{1}{n} \text{Var}(V_T(S_T)).$$

V obecném případě bývá přesný výpočet $\text{Var}(V_T(S_T))$ obtížný, nebo dokonce nemožný. Proto se může přesná hodnota nahradit výběrovým odhadem

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_T(S_T^i) - \widehat{V})^2.$$

S pomocí rozptylu odhadu je možné vyjádřit i odhad chyby plynoucí z použití náhodných metod. Jako první přiblížení se dá použít Čebyševova nerovnost pro \widehat{V}

$$P(|\widehat{V} - \mathbb{E}\widehat{V}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{1}{n} \text{Var}(V_T(S_T))}{\varepsilon^2}.$$

Přesněji lze chybu vyjádřit s použitím centrální limitní věty. Podle ní rozdělení \widehat{V} konverguje pro $n \rightarrow \infty$ k normálnímu rozdělení. (Např. v [4] se uvádí hodnota $n > 1000$ jako dostatečná pro odhad chyby s použitím přiblížení normálním rozdělením.) Pomocí centrální limitní věty lze vyjádřit

$$N = \left| \frac{\widehat{V} - \mathbb{E}\widehat{V}}{\sigma_{\widehat{V}}} \right| \approx N(0, 1),$$

kde

$$\sigma_{\widehat{V}} = \sqrt{\frac{\text{Var}(V_T(S_T))}{n}},$$

a tedy je-li $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantil normálního rozdělení, je $|N| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ s pravděpodobností $1 - \alpha$. Takže \widehat{V} leží s pravděpodobností $1 - \alpha$ v intervalu spolehlivosti $(\mathbb{E}\widehat{V} - \sigma_{\widehat{V}}u_{1-\alpha/2}, \mathbb{E}\widehat{V} + \sigma_{\widehat{V}}u_{1-\alpha/2})$ a jak je vidět z vyjádření $\sigma_{\widehat{V}}$, šířka tohoto intervalu se zužuje rychlostí $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ pro $n \rightarrow \infty$.

Pokud přejdeme od jednorozměrného případu k vícerozměrnému, změní se v závislosti na zadání $\text{Var}(V_T(S_T))$, ale i pak platí, že $\sigma_{\widehat{V}}$ je $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ pro $n \rightarrow \infty$. Díky tomu lze výpočet metodou Monte Carlo použít např. i v případě opcí závislejších na větším množství podkladových aktiv, aniž by složitost výpočtu neúměrně vzrostla. Další výhodou je, že lze velikost odchylky $\sigma_{\widehat{V}}$ snadno odhadnout pomocí $\widehat{\sigma}_{V_T}/\sqrt{n}$.

Hlavní rozdíl mezi jednorozměrným a drozměrným případem tedy je, že při modelování $S_T = (S_{T,1}, S_{T,2}, \dots, S_{T,d})$ se vychází z drozměrného náhodného výběru z rovnoměrného rozdělení, počátečního vektoru cen podkladových aktiv S_t a z matice kovariancí těchto cen Σ . V některých případech se pak může stát poměrně složitým vyčíslování funkce $V_T(f(x, S_t, \rho, \Sigma, T - t))$, které musíme provádět mnohokrát (n krát).

Jednou z možností, jak výpočet urychlit, je převést tuto funkci do vhodnějšího tvaru. Toho se dá dosáhnout mimo jiné nahrazením výrazu $\Phi^{-1}(X)$, kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení a X výběr z rovnoměrného rozdělení, vhodnějším a rychlejším modelováním náhodného výběru z normálního rozdělení. Příklad takového modelování je uveden v kapitole 5.3.

V případě, že výplatní cena opce závisí kromě konečné ceny podkladového aktiva S_T také na vývoji ceny S_u , $u \in (t, T)$, se místo modelování S_T s pomocí známé S_t namodeluje celý řetězec hodnot S_{t_i} , $t < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$ a tyto hodnoty se dosadí do výplatní funkce. Výplatní funkce může záviset na podkladové ceně v několika daných časových okamžicích t_1, t_2, \dots, t_m , nebo na spojitém průběhu ceny S_u v celém intervalu (t, T) . Příkladem takové závislosti je opce, jejíž výplatní funkce závisí na dosaženém maximu, minimu nebo průměrné hodnotě podkladové ceny S_u v daném intervalu. Průběh takové ceny S_u se pak obvykle přiblíží vypočtením ceny S_{t_i} v několika bodech t_i pro dostatečně velké m .

4.6 Využití Markovova řetězce v metodách Monte Carlo

Při použití metody Monte Carlo zpravidla potřebujeme nasimulovat velké množství náhodných veličin s požadovaným rozdělením. Zejména u jednodušších rozdělení se obvykle použije přímočará metoda, kdy se vytvoří náhodná veličina X představující výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a dosadí se do $Y = F^{-1}(X)$, kde F je distribuční funkce požadovaného rozdělení. Veličina Y pak má toto rozdělení s distribuční funkcí F .

V některých situacích může být vhodnější použít přiblížení náhodné veličiny Y pomocí řady snadněji modelovatelných veličin Y_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, o kterých víme, že konvergují k veličině Y . Nyní ukážeme jeden možný postup konstrukce vhodně rozdělených veličin Y_n ze známé, ale pro přímý výpočet složité hustoty f veličiny Y s využitím vlastností podmíněného rozdělení a Markovova řetězce.

Předpokládejme, že chceme modelovat náhodný výběr z rozdělení (X_1, X_2) s hustotou $f(x_1, x_2)$. Pokud známe hustotu f a umíme ji vyjádřit ve vhodném tvaru, můžeme ji přímo využít pro modelování. V praxi se ale může vyskytnout situace, že místo f samotné známe podmíněné a marginální hustoty např. ve tvaru

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 | x_2)f(x_2).$$

Teoreticky je díky tomuto vztahu sdružená hustota f přesně určena, ale v praxi mohou být funkce $f(x_1 | x_2)$, $f(x_2)$ pro výpočet nesrovnatelně jednodušší. V některých případech má i hustota, která se nedá analyticky vyjádřit v uzavřeném tvaru, velmi jednoduché podmíněné hustoty jednotlivých složek. Můžeme tedy nejprve modelovat výběr z rozdělení X_2 a pak z podmíněného rozdělení X_1 při daném X_2 .

Uvedený způsob modelování výběru z rozdělení náhodných veličin lze použít např. při modelování Markovského procesu. Mějme takový homogenní Markovský proces $\{\theta^n\}_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, $\theta^n \in S \subseteq \mathbb{R}^d$ určený počátečním stavem θ^0 a pravděpodobnostmi přechodu z x do y $p(x, y)$. Postupně pak lze pro každé n modelovat veličinu θ^n z rozdělení s hustotou $p(\theta^n, \cdot)$ a dostaneme požadovaný řetězec. Existuje-li pro tento Markovský řetězec limitní

stacionární rozdělení s hustotou f , tedy platí

$$f(y) = \int_{x \in S} p(x, y) f(x) dx,$$

a má-li θ^n pro nějaké n rozdělení s touto hustotou f , pak také θ^m pro jakékoliv $m > n$ má stejné rozdělení.

Protože je f hustota limitního rozdělení, můžeme říci, že po dosažení dostatečně velkého počtu n počátečních iterací už lze θ^n považovat bez ohledu na počáteční stav za výběr z rozdělení s hustotou f . Tím pádem je ale i každé další θ^m pro $m > n$ výběrem ze stejného rozdělení. Této vlastnosti lze využít nejen při modelování Markovských řetězců jako takových, ale i v situaci, kdy potřebujeme právě opakovaný výběr z rozdělení s danou hustotou f .

Potřebujeme-li nasimulovat m krát výběr z rozdělení s hustotou f , pro kterou umíme zkonstruovat příslušné pravděpodobnosti přechodu $p(x, y)$, máme tedy několik možností. Můžeme vytvořit m nezávislých Markovských řetězců, které dokonvergují s požadovanou přesností k stacionárnímu rozdělení po n krocích, a z každého řetězce vzít poslední hodnotu. Nevýhodou tohoto postupu je nutnost vytvořit celkem $m \times n$ jednotlivých simulací.

Další možností je tedy použít jeden Markovský řetězec a přímo využít jeho stacionaritu, tedy to, že i v kroku $n + 1, n + 2, \dots, n + m$ dostáváme požadované rozdělení. V praxi ale téměř vždy potřebujeme m nezávislých veličin a po sobě jdoucí stavy Markovova řetězce obecně nezávislé nejsou.

Je možné zkusit obměny obou uvedených postupů, např. vybírat každou k tou iteraci, nebo vzít $l < m$ nezávislých řetězců a z každého z nich m/l po sobě jdoucích hodnot, nebo zkombinovat obojí. V obecném případě bývá ale výhodnější si ponechat všechny nasimulované hodnoty a s nimi, pokud je to možné, pracovat, než se některých už získaných hodnot zbavovat.

4.7 Konstrukce podmíněného rozdělení

Když chceme použít modelování pomocí Markovského řetězce k simulaci náhodného výběru z rozdělení se známou hustotou f , potřebujeme nejprve znát pravděpodobnosti přechodu $p(x, y)$ určující vhodný Markovský řetězec s limitním rozdělením daným hustotou f .

K získání vhodných pravděpodobností $p(x, y)$ lze použít několik metod. Následující postup, označovaný v [3] jako Metropolisův-Hastingsův algoritmus, využívá vlastností pravděpodobností přechodu reverzibilního Markovského řetězce.

Definice 4.1 *Nechť $\{\theta^n\}_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, $\theta^n \in S \subseteq \mathbb{R}^d$ je homogenní Markovský řetězec s pravděpodobnostmi přechodu $p(x, y)$ a stacionárním rozdělením s hustotou f , pro které platí*

$$(31) \quad f(x)p(x, y) = f(y)p(y, x), \quad \forall x, y \in S.$$

Pak se tento Markovský řetězec označuje jako reverzibilní.

Pokud najdeme pro hustotu f pravděpodobnosti přechodu splňující (31), tak jsme našli požadovaný Markovský řetězec. Stačí totiž obě strany předchozího vztahu integrovat

$$\int_{x \in S} f(x)p(x, y)dx = \int_{x \in S} f(y)p(y, x)dx = f(y) \int_{x \in S} p(y, x)dx = f(y)$$

a je vidět, že f je stacionární hustotou řetězce daného pravděpodobnostmi $p(x, y)$.

Pro konstrukci pravděpodobností přechodu použijeme vztah

$$\begin{aligned} p(x, y) &= q(x, y)\alpha(x, y), \text{ pro } x \neq y \\ p(x, x) &= 1 - \int_S q(x, y)\alpha(x, y)dy \end{aligned}$$

pro (nějaké vhodné) pravděpodobnosti přechodu $q(x, y)$ a $\alpha(x, y)$ představující úpravu pro dosažení reverzibility. Pokud použijeme

$$\alpha(x, y) = \min\left\{1, \frac{f(y)q(y, x)}{f(x)q(x, y)}\right\}$$

dostáváme pro $x \neq y$

$$\begin{aligned} f(x)p(x, y) &= f(x)q(x, y) \min\left\{1, \frac{f(y)q(y, x)}{f(x)q(x, y)}\right\} = \min\{f(y)q(y, x), f(x)q(x, y)\} = \\ &= f(y)q(y, x) \min\left\{1, \frac{f(x)q(x, y)}{f(y)q(y, x)}\right\} = f(y)p(y, x) \end{aligned}$$

a protože $f(x)p(x, x) = f(x)p(x, x)$ je samozřejmé, dostáváme potřebný vztah (31) a pravděpodobnosti $p(x, y)$ lze opravdu použít pro konstrukci požadovaného řetězce.

V praxi pak můžeme postupovat takto:

1. Vybereme vhodný model pro $q(x, y)$ a nastavíme počáteční stav θ^0 a položíme $n = 0$.
2. Pro každý krok n pomocí θ^n získaného v předchozí iteraci nasimulujeme veličinu ϕ představující výběr z rozdělení s hustotou $q(\theta^n, \cdot)$. Pak nasimulujeme výběr z rozdělení dávajícího hodnotu ϕ s pravděpodobností $\alpha(\theta^n, \phi)$ a hodnotu θ^n jinak, takže s pravděpodobností $\alpha(\theta^n, \phi)$ přijmeme novou hodnotu, tedy dáme $\theta^{n+1} = \phi$, a s pravděpodobností $1 - \alpha(\theta^n, \phi)$ ponecháme původní hodnotu $\theta^{n+1} = \theta^n$.
3. Předchozí krok opakujeme, dokud nedosáhneme požadované konvergence.

Uvedeme jeden příklad možné volby q formující jednotlivé kroky řetězce: použijeme funkci q jejíž hodnota nezávislou na vstupní proměnné x , tedy $q(x, y) = q(y)$. Pak pro $w = f/q$ je $\alpha(x, y) = \min\{1, w(y)/w(x)\}$, proto je vhodné volit q velmi podobné f . Modelování výběru z f pomocí Markovského řetězce se užívá hlavně tehdy, když je funkce f příliš složitá pro přímou konstrukci výběru, q je v tomto případě jejím zjednodušeným přiblížením.

4.8 Metoda přidávání dat

Další možnou metodou konstrukce Markovova řetězce s požadovanou hustotou limitního rozdělení f je postupné přidávání dat. Nechť veličina $\theta = (\phi, \psi)$ má rozdělení s distribuční funkcí $f(x, y)$, kde ψ může představovat poslední data, která už máme k dispozici, a ϕ data, která chceme předpovídat. Pro podmíněná rozdělení potom platí vztah (zde veličina ϕ nabývá hodnoty x nebo z a ψ hodnoty y):

$$\begin{aligned} f_\phi(x) &= \int f_{\phi|\psi}(x|y)f_\psi(y)dy \\ f_\psi(y) &= \int f_{\psi|\phi}(y|z)f_\phi(z)dz. \end{aligned}$$

Dosažením druhé rovnice do první dostaneme

$$(32) \quad f_\phi(x) = \int f_{\phi|\psi}(x|y) \int f_{\psi|\phi}(y|z)f_\phi(z)dz dy = \int p(z, x)f_\phi(z)dz.$$

kde $p(z, x) = \int f_{\phi|\psi}(x|y)f_{\psi|\phi}(y|z)dy$. Funkce $p(z, x)$ pak splňuje požadované vlastnosti hledané pravděpodobnosti přechodu. V případě, že nebude prakticky možné tento integrál dostatečně jednoduše analyticky vyjádřit, může být vhodnější použít jeho přiblížení, obvykle opět metodou Monte Carlo.

Postup konstrukce Markovského řetězce majícího v každém kroku n hustotu $f^{(n)}$, která se limitně blíží k f , pak může vypadat takto:

1. V každém kroku n nejprve provedeme opakovaný výběr $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ z rozdělení s hustotou $f_\phi^{(n)}(x)$.
2. Dále provedeme výběr $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ z rozdělení s hustotou $f_\psi(y)$. Rozdělení dané $f_\psi(y)$ tu přiblížíme pomocí výběru ψ_i z $f_{\psi|\phi}(y|\phi_i)$ pro každé $i = 1, \dots, m$.
3. Hodnotu integrálu (32) přiblížíme metodou Monte Carlo a dostaneme

$$f_\phi^{(n+1)}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_{\phi|\psi}(x|\psi_i).$$

Pro dostatečně velké m takto získáme řetězec, který má (přibližně) požadované pravděpodobnosti přechodu $p(z, x)$.

Tato metoda se dá použít v případech, kdy konstrukce výběru z f by byla příliš složitá, ale výběr z podmíněných rozdělení $\mathcal{L}(\phi|\psi)$ a $\mathcal{L}(\psi|\phi)$ lze modelovat snadno. Celý postup je symetrický v ϕ a ψ , takže ho lze použít k modelování obou těchto veličin. Po dosažení konvergence totiž dostáváme v každém kroku výběr m veličin z rozdělení ϕ a m veličin z rozdělení ψ .

V případě $m = 1$ dostáváme základ tzv. Gibbsova algoritmu. Mějme opět limitní hustotu f , ke které hledáme příslušný Markovský řetězec tvaru $\theta^{(n)} = (\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \dots, \theta_d^{(n)})^\top$. Označme podmíněné hustoty $f_i(x_i) = f_{\{\theta_i|\theta_j, j \neq i\}}(x_i|x_j, j \neq i)$ pro $i = 1, \dots, d$. Algoritmus založený na těchto podmíněných hustotách pak vypadá následovně:

1. Nejprve dáme $n = 0$ a nastavíme $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})^\top$.
2. Získáme vždy následující hodnotu z té předchozí postupnou konstrukcí výběrů:

$$\begin{aligned}
 \theta_1^{(n+1)} &\sim f_1(x_1 | \theta_2^{(n)}, \dots, \theta_d^{(n)}) \\
 \theta_2^{(n+1)} &\sim f_2(x_2 | \theta_1^{(n+1)}, \theta_3^{(n)}, \dots, \theta_d^{(n)}) \\
 &\vdots \\
 \theta_d^{(n+1)} &\sim f_d(x_d | \theta_1^{(n+1)}, \dots, \theta_{d-1}^{(n+1)})
 \end{aligned}$$

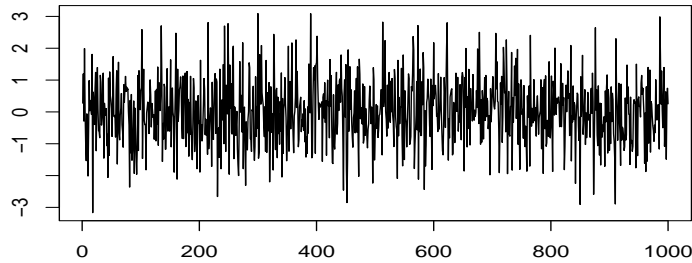
3. Celý postup se opět opakuje až do dosažení konvergence.

V tomto algoritmu se v každém kroku postupuje po indexech $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow d$. Po jednotlivých složkách je ale možné postupovat i v jiném pořadí, dokonce i v náhodném, pokud bude zaručeno, že při počtu opakování tohoto algoritmu jdoucím do nekonečna půjde i počet navštívení každé ze složek $1, \dots, d$ do nekonečna.

Více se lze o těchto metodách dočíst např. v [3].

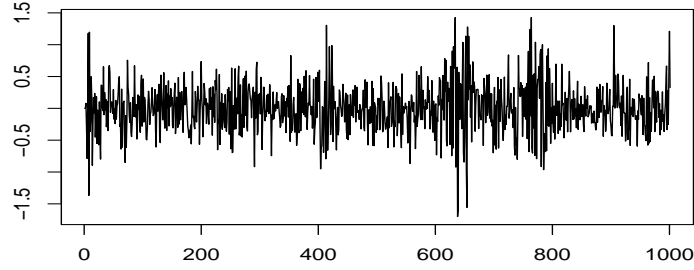
4.9 Modely typu ARCH a GARCH

Ve finanční matematice se lze velmi často setkat s časovými řadami, které vykazují závislost rozptylů pozorované veličiny v jednotlivých po sobě jdoucích obdobích. Takové vlastnosti jsou často typické pro časový vývoj přírůstků různých měnových kursů nebo finančních indexů, zejména pozorovaných v krátkých, například denních intervalech, u nichž krátce po velké změně kursu lze daleko spíše očekávat opět větší odchylky, zatímco po malých změnách naopak odchylky nižší. Pro modelování průběhu takových veličin tedy nelze s dostatečnou spolehlivostí použít jednoduché modely předpokládající nezávislost jednotlivých pozorování časové řady.



Obr. 1: Bílý šum

Mezi modely, které se snaží vysvětlit takovéto chování časových řad, patří modely ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*), tedy modely založené na autoregresní podmíněné proměnlivosti rozptylů, a jejich zobecnění GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*)



Obr. 2: Příklad procesu typu GARCH(1,1)

4.10 Definice modelu ARCH

Definice 4.2 ARCH. Proces ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, je proces typu ARCH(q), pokud pro podmíněnou střední hodnotu ε_t vzhledem k σ -algebře \mathcal{F}_{t-1} generované minulými stavy ε_s , $s < t$, platí

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

pro vhodné koeficienty $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_q \geq 0$ a podmíněný rozptyl σ_t^2 , který je dán jedním z následujících vztahů:

1. $\text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$ a navíc $Z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny (silná forma ARCH)
2. $\text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$ (polosilná forma ARCH)
3. $\mathcal{P}(\varepsilon_t^2 | 1, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots) = \sigma_t^2$, kde \mathcal{P} značí nejlepší lineární projekci ε_t^2 na prostor s bází $1, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2$ (slabá forma ARCH)

Podle definice tedy rozptyl závisí na předchozích odchytkách. Zároveň je z definice zřejmé, že každý proces odpovídající silné formě splňuje i definici pro polosilnou formu a každý polosilný ARCH proces je zároveň slabým ARCH procesem.

Základní vlastnosti ARCH procesu nyní ukážeme na několika větách.

Věta 4.1 Je-li proces ε_t (slabý) ARCH(q) proces a $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$, pak je proces ε_t zároveň bílý šum (ale obecně ne nezávislý).

Důkaz. $E\varepsilon_t = EE(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E0 = 0$; $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = EE(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} | \mathcal{F}_{t-1}) = E0 = 0$. \square

Pro (polo)silný ARCH proces ε_t a proces $Z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ zmíněný v definici platí: $E Z_t = 0$, $\text{Var}(Z_t) = 1$. Jsou-li Z_t nezávislé stejně rozdělené veličiny (silný ARCH), budou i centrální momenty ε_t vyšší než druhý moment nezávislé. Často se používá předpoklad, že Z_t mají normální rozdělení. Za tohoto předpokladu má i ε_t podmíněné normální rozdělení, $(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) \sim N(0, \sigma_t^2)$, takže je díky nekorelovanosti $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}$ polosilný model ekvivalentní silnému.

Věta 4.2 *Nepodmíněný rozptyl ARCH procesu.* Necht' ε_t je polosilná forma procesu typu ARCH(q) a $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$. Pak platí

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}$$

a $\alpha_1 + \dots + \alpha_q < 1$.

Důkaz. $\sigma^2 = \mathbb{E} \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E} \sigma_t^2 = \omega + \mathbb{E}(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2) = \omega + (\alpha_1 \sigma^2 + \dots + \alpha_q \sigma^2)$. Proto musí být $\alpha_1 + \dots + \alpha_q < 1$ a plyne odtud požadovaný vztah. \square

4.11 Model ARCH(1)

Pro jednoduchost nyní v následujících tvrzeních použijí místo obecného ARCH(q) pouze ARCH(1) model.

Věta 4.3 *Pro stacionární silný ARCH(1) proces ε_t se čtvrtým momentem $\mathbb{E} \varepsilon_t^4 = c < \infty$, pro který má proces Z_t rozdělení $N(0, 1)$, platí následující:*

$$\mathbb{E} \varepsilon_t^4 = \frac{3\omega^2}{(1 - \alpha)^2} \frac{1 - \alpha^2}{1 - 3\alpha^2}$$

a $3\alpha^2 < 1$. Špičatost ε_t je přitom větší nebo rovna třem.

Důkaz. $c = \mathbb{E} \varepsilon_t^4 = \mathbb{E} \mathbb{E}(\varepsilon_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \mathbb{E}(Z_t^4 | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(Z_t^4) \mathbb{E}((\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2)^2) = 3(\omega^2 + 2\omega\alpha \mathbb{E} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^2 \mathbb{E} \varepsilon_{t-1}^4)$. Po dosazení $\mathbb{E} \varepsilon_{t-1}^2 = \omega/(1 - \alpha)$ a $\mathbb{E} \varepsilon_{t-1}^4 = c$ plyne požadovaný vztah pro c a tedy pro $\mathbb{E} \varepsilon_t^4$. Navíc zřejmě musí být $3\alpha^2 < 1$.

Díky tomu tedy pro špičatost platí:

$$\text{Kurt}(\varepsilon_t) = \frac{\mathbb{E} \varepsilon_t^4}{(\mathbb{E} \varepsilon_t^2)^2} = 3 \frac{1 - \alpha^2}{1 - 3\alpha^2} \geq 3.$$

\square

Věta 4.4 *Necht' ε_t je stacionární silný ARCH(1) proces s konečným čtvrtým momentem $\mathbb{E} \varepsilon_t^4 = c < \infty$ a $Z_t \sim N(0, 1)$. Potom platí:*

1.

$$\varepsilon_t^2 = \omega \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \prod_{j=0}^k Z_{t-j}^2$$

(a tato suma konverguje v L^2),

2. $\eta_t = \sigma_t^2(Z_t^2 - 1)$ je bílý šum (nekorelovaný),

3. ε_t^2 je AR(1) proces, $\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t$.

Důkaz.

1. Z definice víme, že $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 Z_t^2$ a $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$. Jejich použitím dostaneme

$$\mathbf{E}[(\varepsilon_t^2 - \omega \sum_{k=0}^m \alpha^k \prod_{j=0}^k Z_{t-j}^2)^2] = \mathbf{E}[(\alpha Z_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 - \omega \sum_{k=1}^m \alpha^k \prod_{j=0}^k Z_{t-j}^2)^2]$$

a dále se stejným postupným dosazováním dostaneme až k

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(\alpha^{m+1} \varepsilon_{t-m-1}^2 \prod_{j=0}^m Z_{t-j}^2)^2] &= \alpha^{2(m+1)} 3^{m+1} \mathbf{E}(\varepsilon_{t-m-1}^4) \\ &= \alpha^{2(m+1)} 3^{m+1} c \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

To platí díky tomu, že Z_t jsou nezávislá s normálním rozdělením (špičatost je 3) a tomu, že kvůli $\mathbf{E} \varepsilon_t^4 < \infty$ musí být $3\alpha^2 < 1$.

2. $\mathbf{E} \eta_t = \mathbf{E} \sigma_t^2 (Z_t^2 - 1) = 0$
 $\text{Var}(\eta_t) = \mathbf{E}(\sigma_t^4) \mathbf{E}((Z_t^2 - 1)^2) = 2\mathbf{E}((\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2)^2) = 2(\omega^2 + 2\alpha\omega \mathbf{E} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^2 \mathbf{E} \varepsilon_{t-1}^4)$, ale (nepodmíněné) momenty ε_t nezávisí na t , a tedy i $\text{Var}(\eta_t)$ je konstantní.
 $\text{Cov}(\eta_t, \eta_{t+s}) = \mathbf{E}(\sigma_t^2 (Z_t^2 - 1) \sigma_{t+s}^2 (Z_{t+s}^2 - 1)) = \mathbf{E}(\sigma_t^2 (Z_t^2 - 1) \sigma_{t+s}^2) \mathbf{E}((Z_{t+s}^2 - 1)) = 0$ pro $s \neq 0$
3. Vlastnost AR(1) plyne přímo z $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 Z_t^2 = \sigma_t^2 + \sigma_t^2 (Z_t^2 - 1) = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t$.

□

4.12 Definice zobecněného modelu GARCH

Model GARCH vychází z modelu ARCH, do kterého je zahrnut autoregresní vliv předchozích rozptylů na ten následující.

Definice 4.3 GARCH. *Proces ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, je proces typu GARCH(p, q), pokud platí*

$$(33) \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_s, \forall s < t) = 0,$$

$$(34) \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

pro σ_t^2 dané jedním z následujících vztahů:

1. $\text{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$ a navíc $Z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny (silná forma GARCH)
2. $\text{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$ (polosilná forma GARCH)

3. $\mathcal{P}(\varepsilon_t^2 \mid 1, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots) = \sigma_t^2$, kde \mathcal{P} značí nejlepší lineární projekci (slabá forma GARCH)

Postačující (ale nikoliv nutnou) podmínkou, aby σ_t^2 bylo kladné skoro jistě, je $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ a $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$.

Věta 4.5 Nepodmíněný rozptyl GARCH procesu. Necht' ε_t je polosilná forma procesu typu GARCH(p, q) a $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$. Pak platí

$$(35) \quad \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}$$

pro $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$.

Důkaz. Jako ve větě (4.1) je ε_t bílý šum (obecně ne nezávislý) a jako ve větě (4.2) je při daných podmínkách $\sigma^2 = \text{E} \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma^2$. \square

Věta 4.6 Necht' ε_t je (polo)silný GARCH(p, q) proces s konečným čtvrtým momentem $\text{E} \varepsilon_t^4 = c < \infty$. Potom platí:

1. $\eta_t = \sigma_t^2(Z_t^2 - 1)$ je bílý šum (nekorelovaný),
2. ε_t^2 je ARMA(p, q) proces,

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t,$$

kde $m = \max(p, q)$, $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, pro $i > q$ dáme $\alpha_i = 0$ a pro $i > p$ $\beta_i = 0$.

Důkaz. Provede se podobně jako ve větě (4.4), pro důkaz, že $\text{Var}(\eta_t)$ nezávisí na t , se navíc ukáže, že $\text{E} \varepsilon_t^4$ stejně jako ve větě (4.3) nezávisí na t . \square

S pomocí této věty je vidět, že je-li ε_t proces typu GARCH, je ε_t^2 ARMA proces s chybou η_t . Má-li navíc polynom $1 - \beta_1 x - \dots - \beta_p x^p$ všechny kořeny mimo jednotkový kruh, je tento ARMA proces invertibilní do tvaru AR(∞), takže ε_t se dá zároveň napsat ve tvaru ARCH(∞).

4.13 Odhady parametrů modelu GARCH

Pro použití modelu GARCH(p, q) na reálných datech potřebujeme získat odhady parametrů ω , $\alpha_i = 0$, $i = 1 \dots q$ a $\beta_j = 0$, $j = 1 \dots p$ z dat. Zatímco náhodné veličiny ε_t můžeme přímo pozorovat, veličiny σ_t^2 neznáme, takže nelze parametry odhadnout přímo pouze ze vztahu (34) v definici procesu GARCH. Jednou možností, jak sestavit odhad, je využít převodu na ARMA model a parametry tohoto modelu odhadovat s pomocí výběru ε_t^2 a jeho výběrových autokorelací z Yuleových-Walkerových rovnic. Další možností je použít metodu maximální věrohodnosti na (34) a najít její řešení iteračním postupem.

Předpokládejme, že veličiny Z_t mají normální rozdělení. Potom podmíněná hustota ε_t je

$$f(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Z toho lze sestavit podmíněnou věrohodnostní funkci, která má při n dostupných pozorováních tvar

$$L(\omega, \alpha, \beta | \varepsilon_0) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_i^2}\right) \right)$$

Tuto podmíněnou věrohodnostní funkci použijeme místo nepodmíněné. Pro nepodmíněnou věrohodnostní funkci bychom museli znát ještě nepodmíněné rozdělení ε_0 , ale dá se předpokládat, že při velkém n nebude vliv počátečního rozdělení tolik významný. Takže po zlogaritmování a odstranění konstant hledáme maximum funkce

$$l(\omega, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left(-\log(\sigma_i^2) - \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} \right).$$

Kvůli neznámým σ_i^2 je ale nutné najít maximum této funkce iteračně. Pro jednoduchost dále použijí GARCH(1, 1). Pro každé $i = 1 \dots n$ známe ε_i . Pro začátek můžeme dát např. $\sigma_1^2 = \hat{\sigma}^2$, kde $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ je výběrový odhad rozptylu, $\sigma_2^2 = \varepsilon_1^2$ a pak s pomocí vztahu (34) určíme σ_i^2 , $i = 3 \dots n$, jako funkci proměnných (ω, α, β) . Pak dosadíme σ_i^2 a ε_i do $-\log(\sigma_i^2) - \varepsilon_i^2/(\sigma_i^2)$ a snažíme se najít (ω, α, β) maximalizující tento součet.

Můžeme také využít vztahu (35) a dosadit $\omega = \hat{\sigma}^2(1 - \alpha - \beta)$, takže pak zbývá najít maximum pouze pro proměnné (α, β) .

5 Numerické uplatnění

V této části se podíváme na použití některých oceňovacích výpočtů uvedených v předchozích kapitolách na příkladech konkrétních dat. Tam, kde je u daného finančního derivátu na základě údajů o minulém vývoji cen podkladových aktiv a dalších parametrů k dispozici analytické vyjádření pro hledanou cenu finančního derivátu, srovnáme s touto přesně určenou cenou výsledky přibližných a simulačních oceňovacích postupů. Simulačními metodami se pokusíme nalézt ocenění i u těch typů derivátů, u nichž není analytický oceňovací vzorec znám.

5.1 Vstupní data

Výsledky některých oceňovacích výpočtů pro nalezení cen call a put opcí se také pokusíme srovnat se skutečnými cenami dostupnými na trhu. Jak vstupní data, tak tržní ceny pro toto srovnání jsem získal z veřejně dostupných internetových stránek. Jako příklad call a put opcí jsem použil opce, u nichž byly podkladovým aktivem akcie společností Microsoft a Vodafone Group kotované na burzách Nasdaq a New York Stock Exchange. Vývoj cen akcií a opcí obchodovaných na velkých burzách se obecně díky větším objemům obchodů a větší likviditě více přibližuje ideálním teoretickým modelům, proto jsem vybral tento trh. Všechny opce byly amerického typu. K těmto akciím je (zejména v prvním případě) k dispozici řada opcí pro různé časy splatnosti a různé konečné realizační ceny. Navíc ceny obou těchto akcií si byly v posledním období blízké, což také umožňuje názornější srovnání.

Údaje o minulém vývoji cen těchto akcií a tržní ceny opcí pochází z internetových stránek Yahoo Finance [13]. Ceny opcí odpovídají situaci 12. prosince 2005. Údaje o úrokových mírách pochází ze stránek British Bankers Association [14].

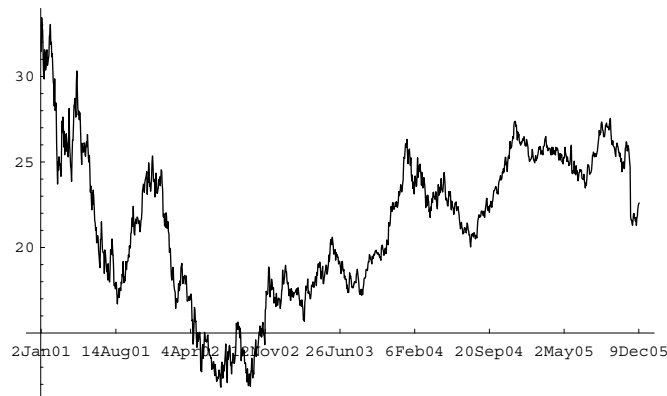
Pro provedení výpočtů jsem použil program *Mathematica*. Vstupy a výstupy jednotlivých výpočtů tedy budu uvádět v obdobném tvaru, v jakém je lze získat při použití tohoto programu.

Nejprve se podíváme na vývoj zvolených podkladových akcií. Veškeré ve výpočtech použité proměnné budou v názvu obsahovat zkratku *ms* v případě, že se týkají akcií společnosti Microsoft, a zkratku *vod*, jedná-li se o akcie společnosti Vodafone. Z výše uvedených zdrojů získané soubory *ms.txt* a *vod.txt* obsahují pro každý obchodní den v rozmezí od 2. 1. 2001 do 12. 11. 2005 informaci o počáteční, závěrečné, nejvyšší a nejnižší ceně dané akcie a o objemu obchodování za tento den. Použijeme pro každý den vždy závěrečnou cenu. Veškeré ceny jsou uváděny v amerických dolarech.

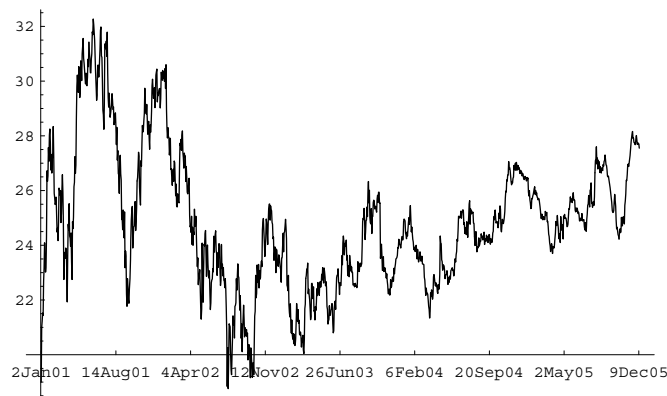
Vývoj těchto cen je vidět na obrázcích (3) a (4):

```
IN vodtxt=Import["h:\Mat\opce\vod\vod.txt", "Table"]//Transpose;
IN mstxt=Import["h:\Mat\opce\vod\ms.txt", "Table"]//Transpose;
IN ms=mstxt[[7]]//Reverse;
IN vod=vodtxt[[7]]//Reverse;
IN ListPlot[vod, PlotJoined->True, PlotRange->All,
  Ticks->{datum, Automatic}];
```

```
IN ListPlot[ms, PlotJoined->True, PlotRange->All,
  Ticks->{datum, Automatic}];
```



Obr. 3: Vývoj ceny akcie VOD



Obr. 4: Vývoj ceny akcie MS

```
IN {Mean[vod], Variance[vod]}
```

```
IN {Mean[ms], Variance[ms]}
```

```
OUT {21.3265, 18.9168}
```

```
OUT {24.8361, 6.32703}
```

My se podíváme spíše na vývoj logaritmů denních přírůstků těchto cen. Tyto logaritmické přírůstky označíme *prms* a *prvod*.

```
IN prvod=Log[Drop[vod,-1]/Drop[vod,1]];
```

```
IN prms=Log[Drop[ms,-1]/Drop[ms,1]];
```

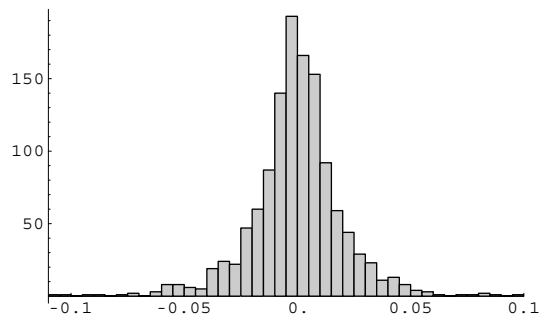
```
IN {Eprvod=Mean[prvod], Median[prvod], Varprvod=Variance[prvod],
  Skewness[prvod], Kurtosis[prvod],
  Correlation[Drop[prvod,-1], Drop[prvod,1]]}
```

```
IN {Eprms=Mean[prms], Median[prms], Variance[prms], Skewness[prms],
  Kurtosis[prms], Correlation[Drop[prms,-1], Drop[prms,1]]}
```

```
IN Histogram[prms]
```

```
OUT {0.000266276, 0., 0.000588767, -0.0791878, 6.95425, -0.0963188}
```

```
OUT {-0.000299407, 0., 0.000407992, -0.230434, 6.54561, -0.0785738}
```

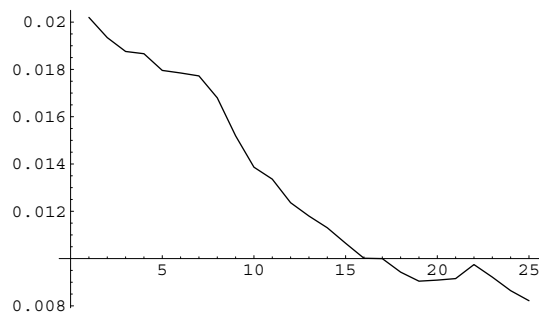


Obr. 5: Histogram logaritmů přírůstků MS

Při konstrukci Blackova-Scholesova vzorce se předpokládá, že logaritmické přírůstky ceny podkladového aktiva mají normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$ s konstantními parametry μ, σ . Zejména na delším časovém úseku (zde 4 roky) je ale vidět, že to v praxi neplatí. Empirické rozdělení je ve srovnání s normálním rozdělením špičatější.

Mají-li navíc na nějakém intervalu $\langle 0, T \rangle$ logaritmické přírůstky ceny akcie $B_t - B_{t-1}$, $t \in 1, 2, \dots, T$, rozdělení s konstantní volatilitou, pak by měly být přibližně konstantní i jejich směrodatné odchylky spočítané na různě dlouhých časových intervalech, tedy odchylky spočítané z dat na intervalech $\langle t, T \rangle$ pro různá $t < T$. To ale v praxi také neplatí:

```
IN ListPlot[Table[Sqrt[Variance[Drop[prvod, i * 50]]], {i, 0, 24}],  
PlotJoined->True]
```



Obr. 6: Směrodatná odchylka logaritmů přírůstků MS

Jako odhad historické volatility pro použití v následujících výpočtech použijeme směrodatnou odchylku spočítanou z logaritmických přírůstků cen za období posledních 317 dní, kdy už se směrodatné odchylky mění méně výrazně.

Na místo bezrizikové úrokové sazby ve výpočtech dosadíme sazbu LIBOR pro americký dolar. Protože odhad volatility byl počítán z denních přírůstků (ve dnech, kdy se na burzách obchoduje), je třeba i při počítání s úrokovou mírou používat jako časovou jednotku 1 (pracovní) den. Takže je-li např. sazba LIBOR na 1 měsíc rovna 4,340% a budeme počítat

s opcí se splatností za 29 dní, dosadíme do výpočtu za intenzitu úrokové míry hodnotu $r[29] = \text{Log}[1 + 4.340/100]/260$.

Při odkazování se na tržní ceny opcí použijeme funkci `Opvod[P_,T_,K_]`, jejíž hodnotou je tržní cena určená z dostupných dat na základě vstupních parametrů. Těmito vstupními parametry jsou `P`, které rozlišuje call opci (`P=0`) a put opci (`P=1`), `T`, udávající počet dní do splatnosti, a `K`, představující realizační cenu zvolené call či put opce.

Nakonec si ještě označíme poslední pozorované ceny jednotlivých akcií.

```
IN Svod=Last[vod]
```

```
OUT 26.1
```

```
IN Sms=Last[ms]
```

```
OUT 26.64
```

Pokud nebude řečeno jinak, budou v následujícím textu stále užívány nyní určené vstupní parametry (tzn. cena a volatilita) vztahující se k akcií `ms`, a dále výše určená úroková míra.

5.2 Blackův-Scholesův vzorec

Pro nalezení ceny evropských put a call opcí použijeme známá analytická vyjádření pomocí Blackova-Scholesova vzorce (11) a (12).

```
IN norm[x_]:=N[CDF[NormalDistribution[0,1],x]]
IN d1[S_,sigma_,K_,T_,r_]=(r*T+Log[S/K])/(sigma*Sqrt[T])+(sigma*Sqrt[T])/2;
IN d2[S_,sigma_,K_,T_,r_]=(r*T+Log[S/K])/(sigma*Sqrt[T])-(sigma*Sqrt[T])/2;
IN BSCall[S_,sigma_,K_,T_,r_]:= S*norm[d1[S,sigma,K,T,r]]-
  K*Exp[-r*T]* norm[d2[S,sigma,K,T,r]];
IN BSPut[S_,sigma_,K_,T_,r_]:= -S*norm[-d1[S,sigma,K,T,r]]+
  K*Exp[-r*T]* norm[- d2[S,sigma,K,T,r]];
```

Spočítáme pomocí tohoto vzorce ceny opcí z poslední známé ceny podkladového aktiva, historické volatilita a úrokové míry odpovídající sazbě LIBOR. Tyto ceny porovnáme se skutečnými cenami na trhu. Tržní ceny se týkají opcí amerického typu, takže zejména u put opcí by měly být o něco vyšší. Minimální možná cena jakékoliv opce byla na skutečném trhu stanovena na 0,05.

Příklad výpočtu u opce s 29 dny do splatnosti a různými realizačními cenami:

```
IN TT=29; Select[Map[{BSCall[Svod,Volprvod,#,11,r[TT]],Opvod[0,TT,#]}&,
  ceny],#1[[2]]>=0&]//MatrixForm
```

$$\text{OUT} \begin{pmatrix} 12.647 & 11.6 \\ 7.670 & 7.6 \\ 5.182 & 5.1 \\ 2.714 & 2.9 \\ 0.734 & 0.75 \\ 0.063 & 0.1 \\ 0.000 & 0.05 \\ 4.80 \times 10^{-8} & 0.15 \end{pmatrix}$$

V tabulce (1) je srovnání cen pro opce s 94 dny do splatnosti, v tabulce (2) pro opce, jimž zbývá 289 dní do splatnosti.

Tab. 1: **Opce na 94 dní.**

strike	VOD BS call	VOD trzní call	MS BS call	MS trzní call	VOD BS put	VOD trzní put	MS BS put	MS trzní put
5.	17.678	—	22.628	22.8	0.	—	0.	—
7.5	15.217	—	20.167	20.3	0.	—	0.	—
10.	12.756	—	17.706	18.1	$5.08 \cdot 10^{-12}$	—	0.	—
12.5	10.295	—	15.245	15.4	$2.63 \cdot 10^{-7}$	—	0.	—
15.	7.834	—	12.784	12.9	0.000	—	$1.36 \cdot 10^{-13}$	—
17.5	5.387	4.5	10.323	10.26	0.013	0.2	$1.43 \cdot 10^{-18}$	0.05
20.	3.095	3.2	7.863	7.8	0.182	0.3	0.000	0.05
22.5	1.361	1.5	5.406	5.5	0.909	1.1	0.004	0.1
25.	0.439	0.45	3.047	3.05	2.447	2.55	0.106	0.2
27.5	0.105	0.05	1.214	1.3	4.574	5.2	0.734	0.95
30.	0.019	0.05	0.304	0.35	6.949	7.6	2.285	2.5
32.5	0.002	—	0.047	0.1	9.394	10.8	4.488	4.7
35.	0.000	0.05	0.004	0.05	11.852	—	6.906	7.1
37.5	0.000	—	0.000	0.05	14.313	—	9.363	9.6
40.	$3.87 \cdot 10^{-6}$	—	0.000	—	16.773	—	11.824	12.1
42.5	$3.50 \cdot 10^{-7}$	—	$5.50 \cdot 10^{-7}$	—	19.234	—	14.284	14.6
45.	$2.98 \cdot 10^{-8}$	—	$1.62 \cdot 10^{-8}$	—	21.695	—	16.745	17.1

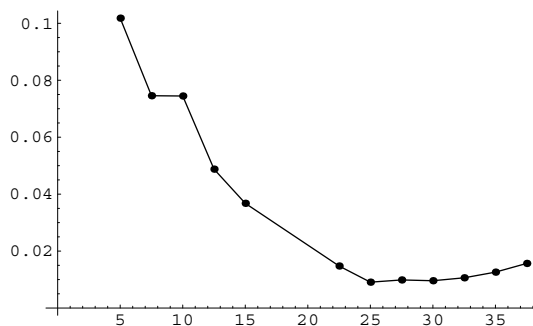
Máme-li teoreticky spočítané ceny opcí, můžeme srovnání s tržními cenami využít ke spočítání implikované volatility. Pokud by předpoklady použité v Blackově-Scholesově modelu byly dokonale splněny, měla by vycházet stejná implikovaná volatilita pro všechny doby splatnosti i všechny realizační ceny. To ale v praxi neplatí.

```
IN TT=94;
IN vybercen = Select[ceny, Opms[0, TT, #] >= 0 &];
IN volatilita = Select[Map[#,
  v /. FindRoot[ BSCall[Sms, v, #, TT, r[TT]] == Opms[0, TT, #], {v,
    .001, .3}, MaxIterations -> 100]} &, vybercen], #[[2]] != .001 &];
```

Tab. 2: Opce na 289 dní.

strike	VOD BS call	VOD trzni call	MS BS call	MS trzni call	VOD BS put	VOD trzni put	MS BS put	MS trzni put
12.	11.218	—	16.167	15.9	0.000	—	$2.01 \cdot 10^{-9}$	0.05
15.	8.397	7.7	13.321	—	0.025	0.2	$5.57 \cdot 10^{-6}$	—
17.	6.588	—	11.424	11.2	0.114	—	0.000	0.15
17.5	6.156	5.7	10.950	—	0.155	0.6	0.000	—
19.5	4.546	—	9.058	8.7	0.443	—	0.005	0.2
20.	4.180	3.4	8.587	—	0.551	1.05	0.008	—
22.	2.895	—	6.733	6.5	1.163	—	0.051	0.3
22.5	2.620	2.25	6.282	6.2	1.363	1.85	0.074	0.35
24.5	1.707	—	4.573	4.3	2.346	—	0.263	0.65
25.	1.522	1.25	4.178	3.9	2.636	3.4	0.342	0.7
27.	0.939	—	2.778	2.6	3.950	—	0.839	1.3
29.5	0.487	—	1.494	1.3	5.869	—	1.926	2.5
30.	0.424	0.33	1.300	1.1	6.281	7.4	2.207	2.8
32.	0.240	—	0.712	0.55	7.994	—	3.516	4.3
32.5	0.208	—	0.606	0.5	8.436	—	3.884	4.8
34.5	0.114	—	0.304	0.25	10.239	—	5.479	6.8
35.	0.098	0.15	0.253	—	10.697	12.7	5.902	—
37.	0.052	—	0.117	0.15	12.549	—	7.664	9.2


```
IN ListPlot[volatilita, PlotJoined -> True,
  DisplayFunction -> Identity]
```



Obr. 7: Implikovaná volatilita při různých realizačních cenách

Jak je vidět na obr. (7), při poklesu ceny K lze pozorovat zřetelný nárůst volatility. Jako zdůvodnění pro takovou závislost volatility na výplatní ceně K se nejčastěji uvádí reakce trhu na vývoj ceny podkladové akcie. Při výraznějším poklesu ceny akcie se tato akcie stává rizikovější, tedy volatilita vzroste, naopak při vyšších cenách akcie bude její volatilita spíše nižší.

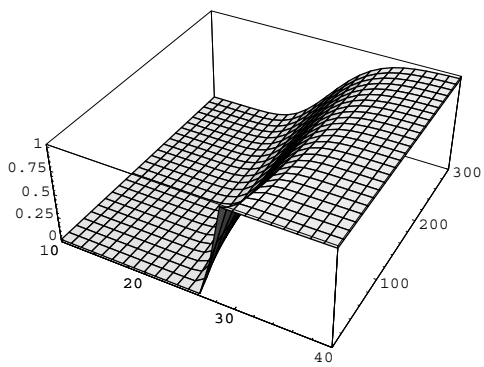
Toto pozorování také odpovídá zjištěnému empirickému rozdělení logaritmických přírůstků ceny akcie, viz obr. (5). Máme-li cenu akcie S_0 , call opci s výplatou $\max(S_t - K, 0)$, kde K je výrazně větší než S_0 , větší špičatost rozdělení přírůstků naznačuje, že při užití implikované distribuční funkce dostaneme nižší pravděpodobnost, že S_t překročí K , než by tomu bylo při konstantní volatilitě a normálním rozdělení logaritmů přírůstků. Cena opce oceněná s použitím tohoto implikovaného rozdělení bude tedy nižší, než teoreticky vypočítaná cena. Pokud je naopak K výrazně menší než S_0 , dostaneme při použití implikovaného rozdělení vyšší cenu opce. Blackův-Scholesův vzorec je rostoucí funkcí volatility, takže při vyšší ceně opce vyjde i vyšší implikovaná volatilita.

V kapitole (3.9) byly shrnuty i závislosti (teoretické) ceny opce na ostatních parametrech. S konkrétními daty je možné ilustrovat tyto vlastnosti i na grafu. Následující grafy ukazují derivace ceny opce podle jednotlivých parametrů při různých cenách podkladové akcie (od 10 do 40) a různých časech do splatnosti (od 0 do 300 dní). Grafy (8) až (13) se týkají call opce, grafy (14) až (16) se týkají ceny put opce.

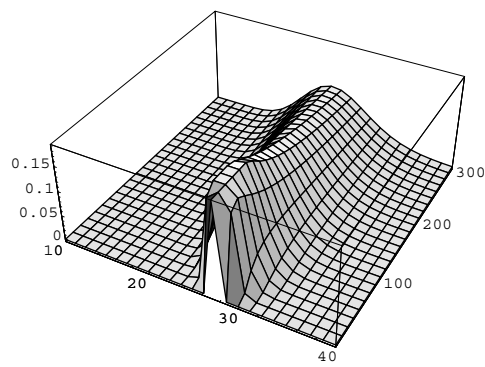
5.3 Uplatnění metody Monte Carlo

Předpokladu, že logaritmy přírůstků podkladové ceny mají normální rozdělení, můžeme podle kap. (4.4) využít k namodelování vývoje této ceny a na jejím základě odhadnout spravedlivou cenu opce.

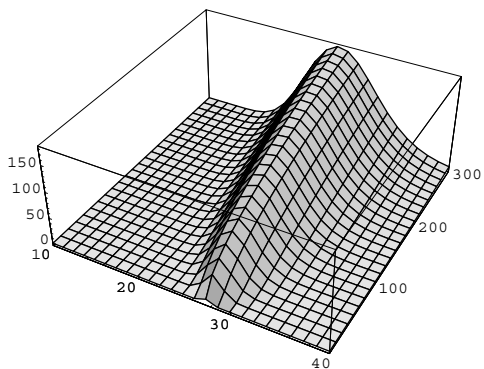
Použití metody Monte Carlo může být užitečné zejména v případech, kdy se ohodnocení opce nedá získat analyticky metodami, např. pokud cena opce závisí nejen na konečné hodnotě, ale i na průběhu ceny podkladového aktiva, a pokud závisí na větším množství aktiv.



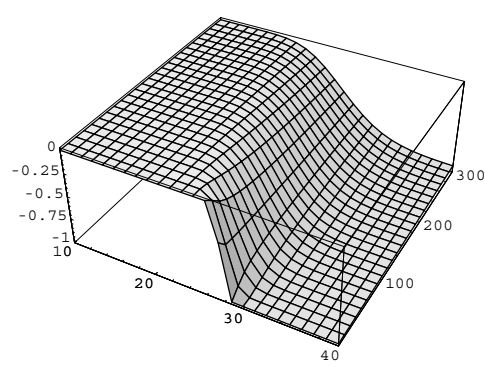
Obr. 8: Derivace podle podkladové ceny



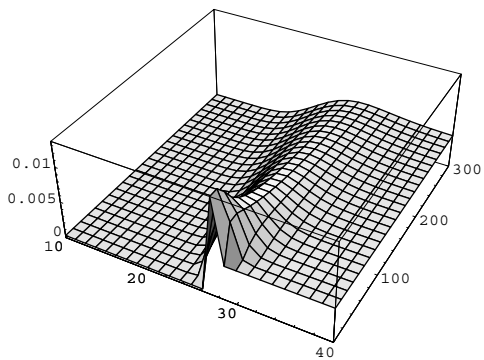
Obr. 9: Druhá derivace podle podkladové ceny



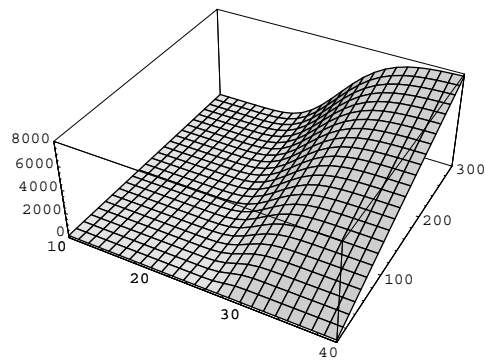
Obr. 10: Derivace podle volatility



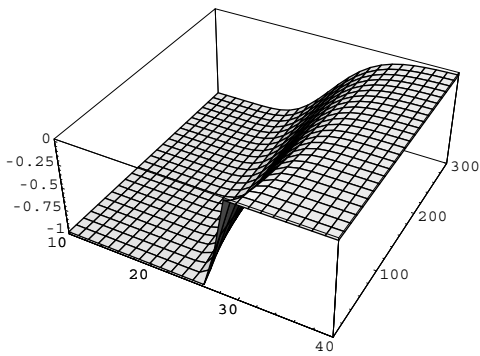
Obr. 11: Derivace podle realizační ceny



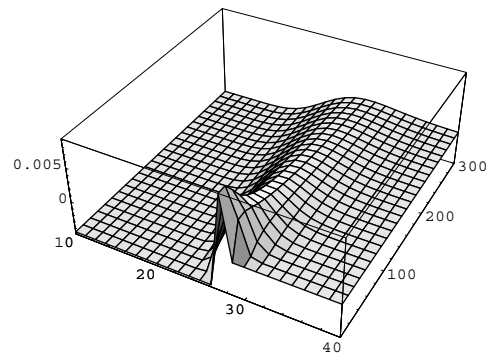
Obr. 12: Derivace podle času



Obr. 13: Derivace podle intenzity úrokové míry



Obr. 14: Derivace podle podkladové ceny



Obr. 15: Derivace podle času

Pro modelování ceny podkladového aktiva potřebujeme nejprve vhodný generátor normálně rozdělených náhodných veličin. Program *Mathematica* nabízí funkci `Random[]`, která generuje pseudonáhodná čísla z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Ke konstrukci normálního rozdělení můžeme použít toto rovnoměrné rozdělení, nebo připravené statistické knihovny, které nabízí i funkce jako `Random[NormalDistribution[mu, sigma]]`.

Nejprve jsem pro srovnání vyzkoušel vlastní implementaci obdobně, jak je uvedena v [12]. Teoreticky nejpřímochařejším způsobem modelování spojitého rozdělení Y s distribuční funkcí F z rovnoměrného rozdělení X je výpočet $Y = F^{-1}(X)$. My ale budeme potřebovat velké množství hodnot a opakované počítání inverzní funkce k distribuční funkci normálního rozdělení není příliš rychlé. (Informativní časové údaje byly naměřeny na počítači s 1700 MHz procesorem v *Mathematice 4.0*.)

```
IN norm1 := N[ Sqrt[2] * InverseErf[2*# - 1] ]&;
IN Timing[ t=Table [ norm1[ Random[ ] ], {10000} ]; ]
OUT {34.269 Second, Null}

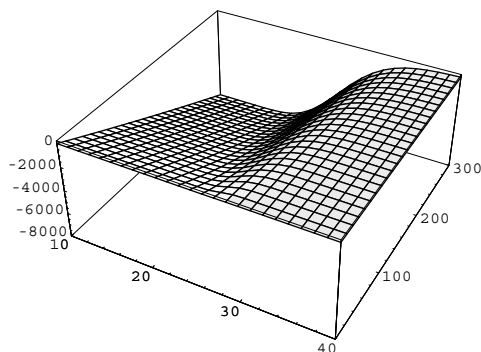
IN {Mean[t], Variance[t], Skewness[t], Kurtosis[t]}
OUT { .00297609, 1.00428, 0.0195444, 3.02308 }
```

Protože opakovaně voláme stále stejnou funkci, může se výpočet urychlit definováním funkce jako `CompiledFunction`. To umožní *Mathematice* dopředu vymežit typ hodnot se kterými se bude počítat a při výpočtu alokovat potřebná množství paměti bez nutnosti nejprve zjišťovat, jakého typu vlastně je dosazovaná hodnota.

```
IN norm1c=Compile[{}, Sqrt[2] * InverseErf[2*Random[ ] - 1]];
IN Timing[ t=Table [ norm1c[ ], {10000} ];]
OUT {32.377 Second, Null}

IN {Mean[t], Variance[t], Skewness[t], Kurtosis[t]}
OUT {0.0027636, 0.999293, 0.00793377, 3.01007 }
```

Pro rychlejší konstrukci hodnot použijeme (např. podle [5]) Boxovu-Mullerovu metodu:



Obr. 16: Derivace podle intenzity úrokové míry

Věta 5.1 *Nechť X, Y jsou dvě nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 1)$, pak*

$$Z_1 = \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y)$$

je dvojice nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(0, 1)$.

Ovšem ani počítání trigonometrických funkcí není nejrychlejší.

```
IN norm2 = Compile [ {mu, _Real}, {sigma, _Real}, {r1, _Real}, {r2, _Real}],
    mu + sigma* Sqrt[ -2* Log[r1] ]*{ Cos[2* Pi *r2], Sin[2* Pi* r2]};
IN Timing[t = Flatten[Table [norm2[0, 1, Random[ ], Random[ ]], {10000} ]];]
OUT {1.021 Second, Null}
IN {Mean[t], Variance[t], Skewness[t], Kurtosis[t]}
OUT {-0.000624338, 0.998562, -0.0069253, 2.98424}
```

Volání trigonometrických funkcí se ale můžeme vyhnout: veličiny X, Y si můžeme představit jako polární souřadnice bodu uvnitř jednotkové kružnice. Pokud (V, Z) budou eukleidovské souřadnice, tzn. dvojice náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na jednotkovém kruhu, potom příslušné polární souřadnice X', Y' lze definovat tak, aby $V = X' \cos(2\pi Y')$ a $Z = X' \sin(2\pi Y')$. Pak hustota (V, Z) je $\frac{1}{\pi}$, takže hustota (X', Y') je podle věty o transformaci náhodných veličin $\frac{1}{\pi} 2\pi x = 2x$ a hustota dvojice $((X')^2, Y')$ je $2\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$, což je zároveň hustota (X, Y) . Můžeme tedy říci, že pokud definujeme $V = \sqrt{X} \cos(2\pi Y)$ a $Z = \sqrt{X} \sin(2\pi Y)$, tak tyto V, Z jsou rovnoměrně rozdělené na jednotkovém kruhu. Pokud tato V, Z dosadíme za $X = (X')^2 = (V^2 + Z^2)$ a za Y do vzorce v Boxově-Mullerově metodě, dostaneme

$$Z_1 = \sqrt{-2 \log(V^2 + Z^2)} \frac{V}{\sqrt{(V^2 + Z^2)}} = \sqrt{-2 \frac{\log(V^2 + Z^2)}{(V^2 + Z^2)}} V$$

$$Z_2 = \sqrt{-2 \log(V^2 + Z^2)} \frac{Z}{\sqrt{(V^2 + Z^2)}} = \sqrt{-2 \frac{\log(V^2 + Z^2)}{(V^2 + Z^2)}} Z$$

Pro modelování dvojice náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na jednotkovém kruhu použijeme hodnoty dvou nezávislých náhodných veličin s rozdělením $R(-1, 1)$ s tím, že hodnoty mimo jednotkový kruh vyřadíme. I poté by měl být tento postup při větším počtu opakování o trochu rychlejší než počítání s funkcemi sinus a cosinus.

```
IN norm3 = Compile [ {mu, _Real}, {sigma, _Real}], Module[{va = 0.0, vb
    = 0.0, rad = 2.0, den = 0.0},
    {While[rad >= 1.00,
      va = 2.0 * Random[] - 1.0; vb = 2.0 * Random[] - 1.0; rad = va*va+vb*vb];
      den = Sqrt[-2.0*Log[rad]/rad]; {mu + sigma*va*den, mu + sigma*vb*den}}];]
IN {Timing[t = Flatten[Table [norm3[0, 1], {10000} ]];]}
OUT {0.981 Second, Null}

IN {Mean[t], Variance[t], Skewness[t], Kurtosis[t]}
OUT {0.00269157, 1.00071, 0.00770123, 2.99999}
```

Můžeme také použít funkci normálně rozdělené náhodné veličiny přímo z knihoven poskytovaných programem:

```
IN norm4 := Random[NormalDistribution[0, 1]]
IN Timing[t = Table [ norm4, {10000} ];]
OUT {4.156 Second, Null}

IN {Mean[t], Variance[t], Skewness[t], Kurtosis[t]}
OUT {0.00039621, 1.00328, 0.0189654, 2.98887}
```

Nejrychlejší je ale nechat *Mathematicu* nagenarovat celý vektor náhodných veličin najednou pomocí funkce `RandomArray`. (U vícerozměrného normálního rozdělení navíc nebude u tohoto postupu Choleskyho dekompozice korelační matice počítána pokaždé zvlášť, jak by tomu bylo při opakovaném volání funkce `Random[MultinormalDistribution[M, Sigma]]`, ale jen jednou na začátku, takže tam bude rozdíl ještě znatelnější.)

```
IN Timing[norm5 =RandomArray[NormalDistribution[0, 1], 100000];]
OUT {0.08 Second, Null}

IN {Mean[t], Variance[t], Skewness[t], Kurtosis[t]}
OUT {0.00414737, 0.995067, -0.0163076, 2.9938}
```

V případě, že potřebujeme výběr z dvourozměrného normálního rozdělení (Y_1, Y_2) se střední hodnotou $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$, rozptyly $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ a korelací ρ , můžeme opět nejprve namodelovat výběr (X_1, X_2) ze dvou nezávislých standardizovaných normálních rozdělení. Položíme-li pak $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \rho X_1 + X_2 \sqrt{1 - \rho^2}$, dostaneme normální rozdělení s požadovanou korelací.

Tento postup můžeme použít i ve vícerozměrném případě. Chceme-li získat veličiny Y_i , $i = 1 \dots n$, které mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a jejichž kovarianční matice je V , můžeme nejprve provést rozklad $V = U U^T$ a pak dosadit $Y = U X$, kde X_i , $i = 1 \dots n$ jsou opět nezávislé veličiny se standardizovaným normálním rozdělením.

Uvedený rozklad lze zkonstruovat, protože V je pozitivně definitní symetrická matice. Pak vlastní čísla λ_i matice V jsou kladná, vybereme vlastní vektory p_i , pro které platí $V p_i = \lambda_i p_i$, $p_i^\top p_j = \delta_{i,j}$, zkonstruujeme matici $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ a diagonální matici L mající na diagonále hodnoty $\sqrt{\lambda_i}$. Položíme-li $U = P L$, vidíme, že platí $V P = P L L$, $P^\top P = E$, kde E je jednotková matice, tedy $U U^\top = P L L P = V$.

V Choleskyho dekompozici se navíc požaduje, aby matice U byla dolní diagonální. Pak je třeba najít řešení

$$\sum_{k=1}^j u_{ik} u_{jk} = v_{ij} \quad \text{pro } j \leq i.$$

V *Mathematice* je tento postup již použit v zabudovaných funkcích poskytujících výběr z vícerozměrného rozdělení.

Pro modelování náhodného výběru tedy použijeme funkci `RandomArray` a zkonstruujeme m simulací vývoje podkladové ceny v n časových krocích, pro každou simulaci pak spočítáme cenu opce. Za výslednou cenu opce budeme považovat průměr z hodnot získaných jednotlivými simulacemi. Nejprve spočítáme cenu evropské call opce. Opět označíme S současnou cenu akcie, T dobu do splatnosti, r intenzitu úrokové míry, σ volatilitu akcie. Podle vzorce 10 navíc předpokládáme, že cena akcie má logaritmicke-normální rozdělení s parametry $(\rho - 1/2\sigma^2, \sigma)$.

```
IN rnd[mu_, sigma_, n_] := RandomArray[NormalDistribution[mu, sigma], n]
IN vyvoj[S_, T_, n_, mu_, sigma_] :=
  FoldList[#1*#2 &, S, Exp[rnd[mu*T/n, sigma*Sqrt[T/n], n]]]
IN MCCall[S_, sigma_, K_, T_, r_, n_, m_] :=
  Module[{a = r - 1/2*sigma^2, tb},
IN tb = Table[ Exp[-r*T]*Max[Last[vyvoj[S, T, n, a, sigma]] - K, 0], {m}];
  {Mean[tb], StandardDeviation[tb]}
```

Porovnání ceny při 1000 simulací, 1 časový krok v každé simulaci: v tabulce jsou na každém řádku po řadě cena spočítaná metodou Monte Carlo, směrodatná odchylka tohoto odhadu, cena získaná Blackovou-Scholesovou metodou a příslušná tržní cena.

```
IN TT=94; Select[ Map[Flatten[{MCCall[Sms, sigma, #, TT, r[TT], 1, 1000],
  BSCall[Sms, Volprms, #, TT, r[TT], Opms[0, TT, #]}] &,
  ceny], #1[[4]] >= 0 &] // MatrixForm
```

```
OUT
```

$$\begin{pmatrix} 15.720 & 2.392 & 15.590 & 15.8 \\ 13.335 & 2.370 & 13.098 & 13.3 \\ 10.636 & 2.443 & 10.607 & 10.6 \\ 8.305 & 2.441 & 8.115 & 8.3 \\ 5.830 & 2.346 & 5.624 & 5.6 \\ 5.237 & 2.501 & 5.125 & 5.3 \\ 3.299 & 2.268 & 3.135 & 3.1 \\ 2.958 & 2.267 & 2.643 & 2.65 \\ 1.418 & 1.746 & 0.909 & 0.95 \\ 1.133 & 1.636 & 0.607 & 0.62 \\ 0.381 & 0.943 & 0.058 & 0.1 \\ 0.296 & 0.906 & 0.026 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Podobně se spočítá cena pro americkou call nebo put opci.

```
IN hodnotaputam[S_, T_, K_, r_] := Exp[-r*T]*Max[K - S, 0]
IN vyvojputamcomp =
  Compile[{{S, _Real}, {T, _Real}, {n, _Integer}, {mu, _Real}, {sigma,
    _Real}, {K, _Real}, {r, _Real}},
    Module[{m = mu*T/n, s = sigma*Sqrt[T/n]}, Nest[Module[{nova = #[[2]]
      * Exp[randnorm[m, s]], hodn}, hodn = hodnotaputam[nova, T*#[[3]]/n,
      K, r];
      If[hodn > #[[1]], {hodn, nova, #[[3]] + 1}, {#[[1]], nova, #[[3]] +
      1}]] &, {hodnotaputam[S, T, K, r], S, 0}, n]],
    {{randnorm[_], _Real}}];
IN MCPutAmerComp =
  Compile[{{S, _Real}, {sigma, _Real}, {K, _Real}, {T, _Real},
    {r, _Real}, {n, _Integer}, {m, _Integer}},
    Module[{a = r - 1/2*sigma^2}, tb = Table[vyvojputamcomp[S, T, n, a,
    sigma, K, r][[1]], {m}];
    {Mean[tb], StandardDeviation[tb]}], {{vyvojputamcomp[_], _Real, 1},
    {Mean[_], _Real}, {StandardDeviation[_], _Real}, {tb, _Real, 1}}];
  Narozdíl od evropské opce ale cena americké opce závisí na vývoji ceny podkladového
  aktiva i před časem splatnosti, takže přesnost odhadu závisí nejen na počtu simulací, ale
  i na počtu časových kroků v každé simulaci. Následující tabulka ukazuje při čase 159 dní
  do splatnosti odhad ceny americké put opce, směrodatnou odchylku tohoto odhadu, tržní
  cenu a příslušnou realizační cenu.
IN TT = 159; Map[Flatten[{MCPutAmerComp[Sms, sigma, #, TT, r[TT], 80, 80],
  Opms[1, TT, #], #}] &, Select[ceny, Opms[1, TT, #] >= 0 &]]
  // MatrixForm
```

OUT

0.001	0.011	0.15	22.5
0.396	0.767	0.42	25.
2.079	1.484	1.1	27.5
4.304	1.462	2.7	30.
6.908	1.492	4.8	32.5
11.633	1.253	9.5	37.5
14.449	1.448	12.0	40.
17.004	1.603	14.5	42.5
19.370	1.583	17.0	45.

Při zvýšení počtu simulací m se sníží rozptyl odhadu. Zvýšení počtu časových kroků n znamená zahrnutí více příležitostí pro výhodné předčasné uplatnění opce, takže rozptyl odhadu (a také pozorovaná směrodatná odchylka odhadu) se zvýší. Na druhou stranu se ale zvýšením počtu časových kroků model více přiblíží ideálnímu modelu se spojitým časem.

5.4 Ocenění s použitím binomických stromů

V kapitole (4.1) byly odvozeny dva možné modely pro konstrukci binomického stromu vhodně reprezentujícího možnosti budoucího vývoje podkladového aktiva. Tyto modely jsou zadány svými parametry q, u, d , pro něž jsme v obou případech našli přesné a navíc i jednodušší přibližné vyjádření.

Při oceňování evropské opce má vliv pouze cena podkladového aktiva v čase splatnosti, takže při parametrech q, u, d zvolených podle některého z uvedených modelů a počtu uvažovaných časových kroků n již stačí pouze dosadit do binomického vzorce (21).

Složitější je situace opět u americké opce. Při výpočtu bude nutné projít všemi uzly binomického stromu, které reprezentují různé časové okamžiky $t = m \frac{T}{n}$, $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, a různé možné ceny podkladového aktiva $S = S_0 u^j d^{m-j}$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, v daném okamžiku. V každém uzlu je třeba rozhodnout, zda je výhodnější opci okamžitě uplatnit, nebo si ji ponechat. Nejprve tedy vyjádříme cenu opce v uzlech odpovídajících času splatnosti a pak budeme iteračně postupovat směrem zpět v čase. V uzlu $[j, m]$ (reprezentujícím cenu S) se hodnota opce $V_{j,m}$ spočítá z následujících hodnot $V_{j+1,m+1}$, $V_{j,m+1}$ (uzly představující cenu uS , dS v dalším časovém okamžiku) a částky získané okamžitým uplatněním této opce:

$$V_{j,m} = \max \left\{ (q V_{j+1,m+1} + (1-q) V_{j,m+1}), e^{-\rho m \frac{T}{n}} (S_0 u^j d^{m-j} - K)^+ \right\}.$$

Např. s použitím přibližného vyjádření parametrů modelu Cox-Ross-Rubinstein (24) dostaneme pro americkou call opci výpočet:

```
IN Q[r_, t_, u_, d_] := (Exp[r*t] - d)/(u - d)
IN Umodel1[t_, sigma_] := 1 + Sqrt[t]*sigma + t*sigma/2
IN Dmodel1[t_, sigma_] := 1 - Sqrt[t]*sigma + t*sigma/2
IN Tree1CallAmer[S_, sigma_, K_, T_, r_, n_] :=
  Module[{hodnota, strom, t = T/n, u, d, q, p}, u = Umodel1[t, sigma];
  d = Dmodel1[t, sigma]; q = Q[r, t, u, d]; p = 1 - q;
```



```
hodnota[s_, m_] := Exp[-r*t*m]*Max[s - K, 0];
```

```
strom[j_, m_] := strom[j, m] =
```

```
If[m == n, hodnota[S*u^j*d^(m - j), m], Max[p*strom[j, m + 1]
+ q*strom[j + 1, m + 1], hodnota[S*u^j*d^(m - j), m]]]; strom[0, 0]
```

Pro srovnání použijeme také přesné vyjádření parametrů modelu Jarrow-Rude (23), tedy parametry:

```
IN Umodel2[t_, sigma_, r_] := Exp[r t](1 + Sqrt[Exp[t sigma^2] - 1])
```

```
IN Dmodel2[t_, sigma_, r_] := Exp[r t](1 - Sqrt[Exp[t sigma^2] - 1])
```

k definici funkce Tree2CallAmer.

Srovnání dosud zavedených modelů pro ocenění amerických opcí s časem splatnosti 94 dní ukazují tabulky (3) a (4). Použitý počet časových kroků n byl ve všech modelech 80, počet simulací m použitých v modelu Monte-Carlo také 80.

Tab. 3: **Call opce.**

Strike	Trzni am. call	BS cena call	MC cena amer. call	Tree1 cena amer. call	Tree2 cena amer. call
Cas vypoctu	0.	0.	16.824	8.903	8.833
5.	22.8	22.628	24.57	22.628	22.628
7.5	20.3	20.167	21.861	20.167	20.167
10.	18.1	17.706	19.738	17.706	17.706
12.	—	15.737	17.330	15.737	15.737
12.5	15.4	15.245	17.201	15.245	15.245
14.5	—	13.276	14.684	13.276	13.276
15.	12.9	12.784	14.585	12.784	12.784
17.	—	10.816	12.040	10.816	10.816
17.5	10.26	10.323	11.862	10.323	10.323
19.5	—	8.355	10.446	8.355	8.355
20.	7.8	7.863	9.689	7.863	7.863
22.	—	5.896	7.621	5.896	5.896
22.5	5.5	5.406	6.702	5.406	5.406
24.5	—	3.497	4.988	3.495	3.497
25.	3.05	3.047	4.792	3.046	3.048
27.	—	1.511	2.528	1.508	1.513
27.5	1.3	1.214	1.920	1.213	1.216
29.5	—	0.418	0.759	0.419	0.417
30.	0.35	0.304	0.447	0.305	0.305
32.	—	0.071	0.147	0.070	0.069
32.5	0.1	0.047	0.061	0.046	0.046
34.5	—	0.007	0.065	0.007	0.007
35.	0.05	0.004	0.	0.004	0.004

Je vidět, že metoda Monte Carlo dává v tomto případě vždy vyšší odhad ceny opce, než binomický model. Rozdíl může být ještě větší, pokud při stejné úrokové míře použi-

Tab. 4: **Put opce.**

Strike	Trzni am. put	BS cena put	MC cena amer. put	Tree1 cena amer. put	Tree2 cena amer. put
Cas vypoctu	0.	0.	16.744	9.273	8.853
20.	0.05	0.000	0.	0.000	0.000
22.	—	0.001	0.	0.001	0.001
22.5	0.1	0.004	0.008	0.004	0.004
24.5	—	0.063	0.110	0.064	0.065
25.	0.2	0.106	0.204	0.109	0.110
27.	—	0.538	1.302	0.562	0.566
27.5	0.95	0.734	1.342	0.771	0.774
29.5	—	1.906	3.442	2.058	2.057
30.	2.5	2.285	3.930	2.486	2.486
32.	—	4.020	5.880	4.45	4.45
32.5	4.7	4.488	6.452	4.95	4.95
34.5	—	6.417	8.407	6.95	6.95
35.	7.1	6.906	8.942	7.45	7.45
37.	—	8.871	10.873	9.45	9.45
37.5	9.6	9.363	11.286	9.95	9.95
40.	12.1	11.824	13.862	12.45	12.45
42.	—	13.792	15.750	14.45	14.45
42.5	14.6	14.284	16.279	14.95	14.95
44.5	—	16.253	18.276	16.95	16.95
45.	17.1	16.745	18.769	17.45	17.45

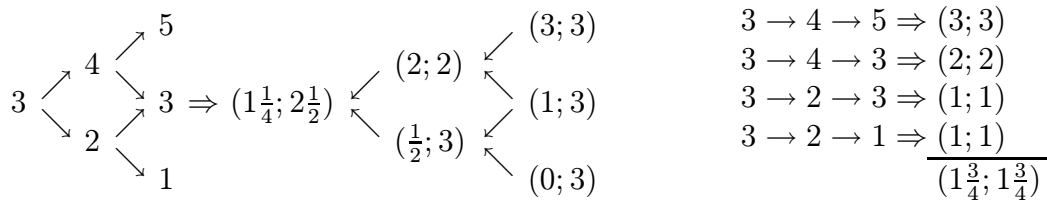
jeme mnohonásobně vyšší volatilitu – tabulka (5) srovnává ceny získané při volatilitě ceny podkladového aktiva rovné 0.1, zároveň je vždy uveden průměrný počet časových kroků do uplatnění opce (v obou modelech je použito 80 časových kroků, je-li tedy ve sloupci „čas uplatnění“ údaj 70, došlo k uplatnění v průměru v sedmdesátém kroku z 80).

Tab. 5: Call opce – vysoká volatilita.

Strike	MC cena amer. call	MC cas uplatneni	Tree2 cena amer. call	Tree2 cas uplatneni
5.	45.081	28.912	22.791	79.634
15.	40.017	29.487	15.713	77.353
20.	38.219	34.187	13.261	76.442
22.	37.955	29.737	12.396	75.353
25.	42.236	30.687	11.306	75.353
27.	35.269	28.912	10.587	74.091
30.	22.583	31.562	9.736	74.091
32.	16.948	25.162	9.168	74.091
35.	27.610	30.275	8.424	72.667
40.	13.612	17.825	7.355	72.667
45.	16.951	21.262	6.485	71.101
67.	4.358	3.55	3.889	67.634

K rozdílným výsledkům získaným pomocí binomického modelu a metody Monte Carlo lze dojít již při poměrně jednoduchém zadání. Představme si, že aktuální cena akcie je 3 a máme americkou call opci s realizační cenou 2. Namodelujeme vývoj ve třech časových okamžicích, v každém okamžiku cena akcie s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ o 1 poklesne, nebo vzroste. Úroková míra bude 0.

Následující první diagram znázorňuje binomický model vývoje podkladové ceny. Druhý diagram má uzly tvaru $(C; t)$, kde C je cena opce spočítaná v daném uzlu binomického modelu a t průměrná doba uplatnění opce, jak se jeví v tomto uzlu. Ve výsledku dostáváme cenu opce $1\frac{1}{4}$.

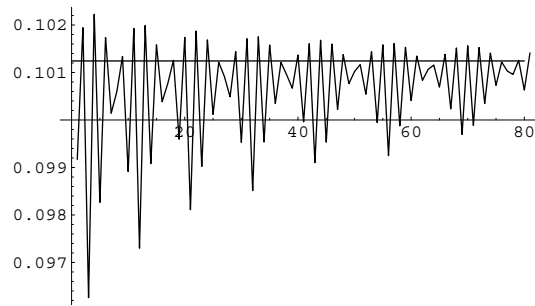


Vpravo je stejný vývoj ceny akcie ve čtyřech trajektoriích modelu Monte Carlo, u každé trajektorie je opět uvedena cena opce v této trajektorii a čas uplatnění ve tvaru $(C; t)$. Výsledná cena je $1\frac{3}{4}$, tedy vyšší než u binomického modelu, průměrný čas uplatnění je přitom nižší.

Můžeme se také podívat na výsledky plynoucí z těchto binomických modelů při zvýšení počtu n uvažovaných časových okamžiků.

^{IN} $K = S_{ms} + 4;$

```
IN ListPlot[Table[Tree2CallAmer[Sms, sigma, K, TT, r[TT], i], {i, 30, 30+80
}], PlotJoined -> True]
```



Obr. 17: Přesnost binomického modelu

Na obr. (17) jsou výsledky ocenění americké opce binomickým modelem při počtu uvažovaných časových okamžiků od 30 do 110. Vodorovná přímká udává pro srovnání cenu evropské call opce se stejnými parametry podle Blackova-Scholesova vzorce. Je vidět, že konvergence odhadu k teoretické hodnotě je velmi kolísavá. Poměrně pravidelné kolísání naznačuje, že výsledek závisí také na tom, jak bude nejbližší uzel v čase splatnosti vzdálen od realizační ceny K .

5.5 Bariérové opce

Jak bylo ukázáno v kapitole (3.14), pro ocenění bariérových opcí jsou známy analytické vzorce odvozené za předpokladu, že obchodování probíhá ve spojitém čase. Příklad vzorce pro opci *down-and-in* v případě, že bariéra H je menší než realizační cena K

```
IN y1[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := (r*T + Log[H^2/(S K)])/(sigma*Sqrt[T])
+ (sigma*Sqrt[T])/2;
```

```
IN y2[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := (r*T + Log[H^2/(S K)])/(sigma*Sqrt[T])
- (sigma*Sqrt[T])/2;
```

```
IN BSBarrCallhdi[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := If[S < H, BSCall[S, sigma,
K, T, r], (H/S)^(2*r/sigma^2 - 1)*(H^2/S*norm[y1[S, sigma, K, H, T,
r]] - K* Exp[-r*T]* norm[y2[S, sigma, K, H, T, r]])]
```

Opce *down-and-out* při $H > K$:

```
IN BSBarrCallHdo[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := If[S < H, 0,
S*norm[x1[S, sigma, K, H, T, r]] - K*Exp[-r*T]* norm[x2[S, sigma, K,
H, T, r]] - (H/S)^(2*r/sigma^2 - 1) * (H^2/S* norm[x3[S, sigma, K,
H, T, r]] - K Exp[-r*T] norm[x4[S, sigma, K, H, T, r]])]
```

Opce *up-and-in* při $H > K$:

```
IN x1[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := (r*T + Log[S/H])/(sigma*Sqrt[T]) +
(sigma*Sqrt[T])/2;
```

```
IN x2[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := (r*T + Log[S/H])/(sigma*Sqrt[T]) -
(sigma*Sqrt[T])/2;
```

```

IN x3[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := (r*T + Log[H/S])/(sigma*Sqrt[T]) +
  (sigma*Sqrt[T])/2;
IN x4[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := (r*T + Log[H/S])/(sigma*Sqrt[T]) -
  (sigma*Sqrt[T])/2;
IN BSBarrCallHui[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_] := If[S > H, BSCall[S, sigma,
  K, T, r],
  S norm[x1[S, sigma, K, H, T, r]] - K*Exp[-r*T] norm[x2[S, sigma, K,
  H, T, r]] - (H/S)^(2*r/sigma^2 + 1)* S (norm[-y1[S, sigma, K, H, T,
  r]] - norm[-x3[S, sigma, K, H, T, r]]) + (H/S)^(2*r/sigma^2 - 1)* K
  Exp[-r*T] (norm[-y2[S, sigma, K, H, T, r]] - norm[-x4[S, sigma, K,
  H, T, r]])]

```

Navíc platí, že cena call opce typu *in* a cena opce typu *out* dají dohromady cenu běžné call opce. Následující tabulky ukazují výsledné ceny bariérových opcí při čase do splatnosti 159 dní, různých realizačních cenách. V tabulce (6) byla použita úroveň bariéry ve výši 0.8K, ve druhé tabulce (7) 1.2K.

Tab. 6: **Bariérová opce**, $H = 0,8K$.

<u>down & in</u>	<u>down & out</u>	<u>BS call</u>	<u>strike</u>
0.000	9.070	9.070	19.
0.001	7.127	7.129	21.
0.022	5.195	5.218	23.
0.064	4.237	4.302	24.
0.159	3.279	3.439	25.
0.240	2.795	3.036	25.5
0.352	2.303	2.656	26.
0.503	1.798	2.301	26.5
0.700	1.274	1.975	27.
0.954	0.723	1.677	27.5
1.273	0.137	1.410	28.
0.967	0.	0.967	29.
0.635	0.	0.635	30.
0.401	0.	0.401	31.
0.186	0.	0.186	32.5
0.043	0.	0.043	35.
$8.19 \cdot 10^{-3}$	0.	$8.19 \cdot 10^{-3}$	37.5

Je ale také možné bariérové opce ocenit přibližným výpočtem pomocí konstrukce binomických stromů, podobně jako v případě americké opce. Např. u *down-and-out* call opce pak počítáme:

```

IN Tree2BarrCallhdo[S_, sigma_, K_, H_, T_, r_, n_] :=
  Module[{hodnota, strom, t = T/n, u, d, q, p}, u = Umodel2[t, sigma,
  r]; d = Dmodel2[t, sigma, r]; q = Q[r, t, u, d]; p = 1 - q;
  hodnota[s_] := Exp[-r*T]*Max[s - K, 0];

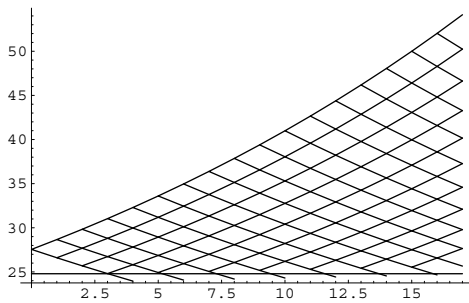
```

Tab. 7: Bariérová opce, $H = 1,2K$.

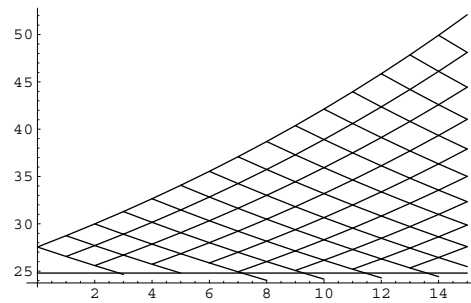
down & in	down & out	up & in	up & out	BS call	strike
0.000	9.070	9.070	0.	9.070	19.
0.013	7.116	7.129	0.	7.129	21.
0.119	5.098	5.218	0.	5.218	23.
0.284	4.017	4.302	0.	4.302	24.
0.597	2.842	3.439	0.	3.439	25.
0.830	2.205	3.036	0.	3.036	25.5
1.129	1.526	2.656	0.	2.656	26.
1.502	0.799	2.301	0.	2.301	26.5
1.959	0.015	1.975	0.	1.975	27.
1.677	0.	1.677	$3.29 \cdot 10^{-4}$	1.677	27.5
1.410	0.	1.410	$6.66 \cdot 10^{-4}$	1.410	28.
0.967	0.	0.965	$1.25 \cdot 10^{-3}$	0.967	29.
0.635	0.	0.634	$1.61 \cdot 10^{-3}$	0.635	30.
0.401	0.	0.399	$1.69 \cdot 10^{-3}$	0.401	31.
0.186	0.	0.185	$1.43 \cdot 10^{-3}$	0.186	32.5
0.043	0.	0.042	$6.92 \cdot 10^{-4}$	0.043	35.
$8.19 \cdot 10^{-3}$	0.	$7.96 \cdot 10^{-3}$	$2.22 \cdot 10^{-4}$	$8.19 \cdot 10^{-3}$	37.5

```
strom[j_, m_] := strom[j, m] = If[m == n, hodnota[S*u^j*d^(m - j)],
  If[S*u^j*d^(m - j) < H, 0, p*strom[j, m + 1] + q*strom[j + 1, m + 1]]];
strom[0, 0]
```

Při ocenění pomocí binomických stromů záleží přesnost výsledku také na tom, jak vzdálené budou nejnižší uzly nad bariérou H od této bariéry. Obrázek (18) ukazuje uzly použité při konstrukci stromu při realizační ceně K rovné momentální ceně podkladového aktiva (Sms), bariéry $H = 0,9K$ a při použití sedmnácti časových kroků, obrázek (19) ukazuje stejný výpočet při použití patnácti kroků. V prvním případě vyjde cena opce 2,36187, ve druhém případě 2,28577, analytický výpočet přitom dá výsledek 2,24592.



Obr. 18: Binomický strom: 17 kroků



Obr. 19: Binomický strom: 15 kroků

5.6 Metoda konečných diferencí – americká opce

Použijeme postup ukázaný v kapitole (4.3) k nalezení přibližného řešení Blackovy-Scholesovy rovnice v případě americké put opce. Nejprve budeme postupovat podle rovnice (29).

```
IN DiffAmPut[S_, Smax_, Smin_, K_, sigma_, T_, r_, m_, n_] :=
  Module[{a, b, c, t = T/n, B, Bmin, difer, horni = 0, dolni = K, znamy,
    J, x = 0, mincena} ,
    Bmin = Log[Smin]; J = Round[(Log[S] - Bmin)/(Log[Smax] - Bmin)*m];
    B = (Log[S] - Bmin)/J; Exp[J*B + Bmin];
    a = (r - sigma^2/2) t/(2B) - sigma^2 t/(2B^2);
    b = 1 + sigma^2 t/B^2 + r t;
    c = -1/((r - sigma^2/2) t/(2B) + sigma^2 t/(2B^2));(*= 1/c v zapisu
    cich*)
    mincena = Table[K - Exp[j B + Bmin], {j, 0, m}]; znamy = Table[Max[K
    - Exp[j B + Bmin], 0], {j, 0, m}];(*pocita se od 0*)
    For[i = n, i > 0, i--;
    AppendTo[body, znamy]; Clear[x]; difer = {dolni, x};
    For[j = 1, j < m, j++;
    AppendTo[difer, Expand[c(znamy[[j]] - a difer[[j - 1]] -
    b difer[[j]])] ]];
    znamy = Map[Max[#[[1]], #[[2]] &, {difer /. Flatten[Solve[difer[[m
    + 1]] == horni, x]], mincena} // Transpose] ];
    znamy[[J + 1]]]
```

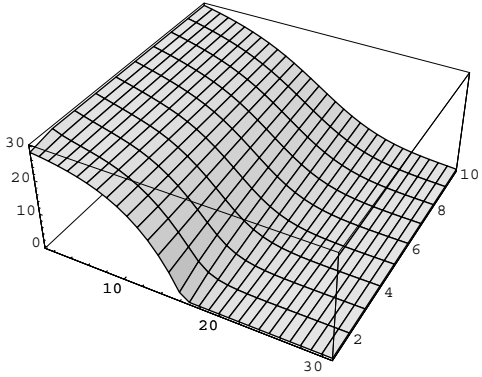
Na příkladě srovnáme výsledek s předchozími postupy:

```
IN sig = 0.09; k = 2; TT = 159;
IN DiffAmPut[Sms, 20*Sms, 0.05*Sms, Sms + k, sig, TT, r[TT], 30, 10]
IN Tree2PutAmer[Sms, sig, Sms + k, TT, r[TT], 80]
IN MCPutAmerComp[Sms, sig, Sms + k, TT, r[TT], 80, 80]
IN BSPut[Sms, Sms + k, sig, TT, r[TT]]
OUT 12.5939
OUT 12.9031
OUT {17.8205, 6.80581}
OUT 0.0875329
```

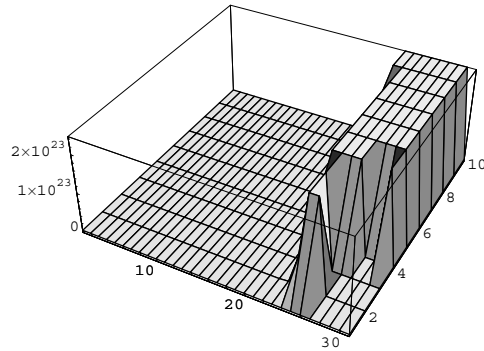
Při výpočtu bylo za minimální možnou cenu podkladového aktiva (tzn. cenu, kdy už lze cenu put opce považovat za rovnou K) použito 0,05násobku současné ceny, jako maximální možné ceny (při níž lze už cenu put opce považovat za nulovou) bylo použito 20násobku současné ceny. Použitá volatilita je 0,09, čas do splatnosti 159 dní, při výpočtu bylo použito 10 časových kroků (o stejné velikosti) a 30 kroků v podkladové ceně (jejichž logaritmy mají stejnou velikost). Obrázek (20) ukazuje cenu opce vycházející v mezivýpočtech při různých podkladových cenách a v různých časech. Výpočet probíhá iteračně od času 0 (do splatnosti) do času 159 (desátý časový krok).

Nyní provedeme stejný výpočet při volatilitě 0,009:

```
IN sig = 0.009;
IN DiffAmPut[Sms, 20*Sms, 0.05*Sms, Sms + k, sig, TT, r[TT], 30, 10]
IN Tree2PutAmer[Sms, sig, Sms + k, TT, r[TT], 80]
OUT 2.06498*10^14
OUT 2.18774
```



Obr. 20: Diference: volatilita = 0,09



Obr. 21: Diference: volatilita = 0,009

Obrázek (21) opět ukazuje průběh výpočtu. V každém kroku výpočtu se používají parametry zavedené v rovnicích (26) až (28) a při těchto parametrech se řeší lineární rovnice (29). Pokud je ale použitý krok v logaritmické ceně ΔB příliš velký ve srovnání s parametry $\Delta t \sigma^2$, vyjde parametr c zadaný rovnicí (28) téměř nulový. Ve výpočtu se pak tímto parametrem opakovaně dělí, což může vést ke zcela nepřesnému numerickému výsledku, jako v tomto případě.

V takovém případě je možno použít výpočet podle rovnice (30). V tomto modelu je cena opce $V_{i,j}$ v časovém kroku i vyjádřena z hodnot čase $i+1$, místo z hodnot v čase $i-1$ jako v předchozím modelu. Není tedy nutné při iteraci podle času v pořadí $i = N, N-1, \dots, 1, 0$ v každém kroku řešit lineární rovnici, lze přímo dosadit tři již známé hodnoty do této rovnice (30) a získat tak další hodnotu v novém časovém kroku.

```
IN DiffAmPut2[S_, Smax_, Smin_, K_, sigma_, T_, r_, m_, n_] :=
  Module[{a, b, c, t = T/n, B, Bmin, difer, horni = 0, dolni = K, znamy,
    J, mincena},
    body = {}; Bmin = Log[Smin]; J = Round[(Log[S] - Bmin)/(Log[Smax] -
      Bmin)*m]; B = (Log[S] - Bmin)/J; Exp[J*B + Bmin];
    a = (-(r - sigma^2/2) t/(2B) + sigma^2 t/(2B^2))/(1 + r t);
    b = (1 - sigma^2 t/B^2)/(1 + r t);
    c = ((r - sigma^2/2) t/(2B) + sigma^2 t/(2B^2))/(1 + r t);
    mincena = Table[K - Exp[j B + Bmin], {j, 0, m}]; znamy = Table[Max[K
      - Exp[j B + Bmin], 0], {j, 0, m}]; (*pocita se od 0*)
    For[i = n, i > 0, i--;
      AppendTo[body, znamy]; difer = {dolni};
```



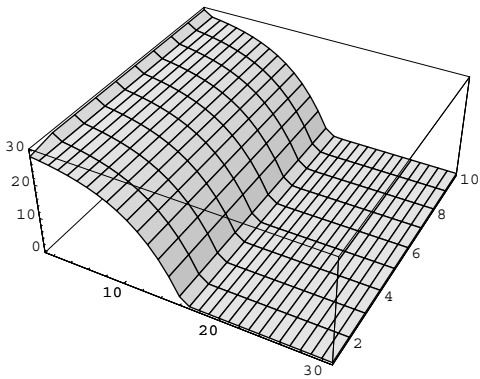
```

For[j = 1, j < m, j++; AppendTo[difer, a znamy[[j - 1]] +
b znamy[[j]] + c znamy[[j + 1]] ];
znamy = Map[Max[#[[1]], #[[2]]] &, {AppendTo[difer, 0], mincena} //
Transpose] ];
znamy[[J + 1]]
IN sig = 0.009;
IN DiffAmPut2[Sms, 20*Sms, 0.05*Sms, Sms + k, sig, TT, r[TT], 30, 10]
IN Tree2PutAmer[Sms, sig, Sms + k, TT, r[TT], 80]
OUT 2.06278
OUT 2.18774

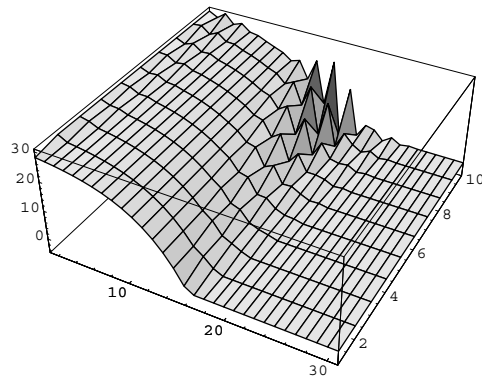
IN sig = 0.06;
IN DiffAmPut2[Sms, 20*Sms, 0.05*Sms, Sms + k, sig, TT, r[TT], 30, 10]
IN Tree2PutAmer[Sms, sig, Sms + k, TT, r[TT], 80]
OUT 2.
OUT 9.01569

```

Na obr. (22) je znázorněn průběh výpočtu při volatilitě 0,009, na obr. (23) při volatilitě 0,06. Malý rozptyl (v porovnání s použitými kroky v logaritmu podkladové ceny ΔB) tentokrát nevadí, k nepřesnostem vede naopak příliš velký rozptyl, u něhož se může stát, že některý z parametrů a , b , c použitých v rovnici (30) vyjde záporný.



Obr. 22: Diference: volatilita = 0,009



Obr. 23: Diference: volatilita = 0,06

6 Závěr

Z matematického a výpočetního hlediska je spíše než oceňování jednoduchých finančních nástrojů, jakými jsou např. dluhopisy s pevnou kuponovou sazbou, zajímavější postup ocenění složených derivátů, jako jsou opce.

Pro ocenění evropských opcí je díky svému snadnému vyjádření v praxi běžně používán obecně známý Blackův-Scholesův vzorec. Ovšem ve skutečnosti nebývají dokonale splněny předpoklady, za kterých byl tento vzorec odvozen – i na příkladě vzorku dat použitého v této práci se ukázalo, že rozdělení historických cen akcií neodpovídá příliš výběru z logaritmicko-normálního rozdělení s konstantními parametry, zejména s konstantní volatilitou. Při použití implikované volatility lze dokonce pozorovat rozdíly v závislosti na realizační ceně dané opce.

Podobná je situace u ostatních typů derivátů, pro které lze odvodit analytickou oceňovací metodu na základě předpokladů o logaritmicko-normálním rozdělení ceny podkladového aktiva, jako např. u bariérových opcí. Výpočet udávající cenu bariérové opce je ještě citlivější na změny vstupních parametrů v situaci, kdy je aktuální cena podkladového aktiva blízko bariéry.

Nejčastěji prodávaným typem opce je ale opce americká. Při jejím ocenění lze jako první přiblížení opět užít Blackův-Scholesův vzorec, pro přesnější ocenění je ale potřeba použít vhodný numerický model. Zde byly uvedeny binomické modely, Monte Carlo simulace a numerické řešení příslušné parciální diferenciální rovnice. Jako efektivnější se ukázalo použití binomického modelu, ve kterém modelování vývoje podkladové ceny probíhá v menším počtu uzlů na počátku, zatímco při simulaci Monte Carlo se na počátku vlastně generuje velké množství téměř shodných trajektorií. Monte Carlo simulaci by ale bylo snazší způsobil i pro složitější situace, např. počítání ceny opce, jejíž výplata závisí na větším množství podkladových aktiv, jejichž ceny jsou vzájemně korelovány.

U všech modelů má velký vliv na výsledek určení vstupních parametrů. Např. při použití historických cen akcií je třeba sledovat vliv dividend na vývoj ceny, při použití časových parametrů je třeba rozhodnout, zda je vhodnější měřit čas v kalendářních dnech, nebo zda počítat pouze pracovní dny, při kterých probíhá obchodování. Pro účely výpočtu je také třeba na základě reálných úrokových měr stanovit vývoj bezrizikové úrokové míry.

Nejsložitější ale může být určení volatility ceny podkladového aktiva a v případě více aktiv jejich korelace, což jsou parametry, které narozdíl od samotné ceny není možné pozorovat přímo. Z možných postupů odhadu zde byly zmíněny výběrový odhad, určení implikované volatility, nebo odhad s použitím regresních modelů, jako je (G)ARCH model.

7 Literatura

- [1] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2002.
- [2] Fuchs, K.: *Hodnocení portfolia opcí*. Diplomová práce. UK MFF, Praha 2003.
- [3] Gamerman, D.: *Markov Chain Monte Carlo – Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. Chapman & Hall, London 1997.
- [4] Härdle, W., Kleinow, T., Stahl, G.: *Applied Quantitative Finance – Theory and Computational Tools*. Springer-Verlag, Berlin 2002.
- [5] Hurt, J.: *Simulační metody*. Skripta SPN, Praha 1982.
- [6] Hull, J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice-Hall, Upper Saddle River 1999.
- [7] Mandl, P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*. Academia, Praha 1985.
- [8] Mandl, P.: *Stochastické finanční modely*. Seminář z aktuárských věd 2002/03. Matfyzpress, Praha 2003.
- [9] Morgan, J. P., Reuters: *RiscMetrics – Technical Document*. 4th ed., Morgan Guaranty Trust Company, New York 1996.
- [10] Nielsen, L. T.: *Pricing and Hedging of Derivative Securities*. Oxford University Press, Oxford 1999.
- [11] Rennie, A. J. O., Baxter, M. W.: *Financial Calculus – An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- [12] Shaw, W.: *Modelling Financial Derivatives with Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge 1998.

Internetové zdroje:

- [13] Yahoo Finance – Options centre.
<http://biz.yahoo.com/opt/>
- [14] British Bankers Association.
<http://www.bba.org.uk/bba/>