Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zdeněk Jaroň

Vlastnosti Poulsenových simplexů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce:	Doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	MA

Praha 2012

Děkuji svému vedoucímu Doc. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady i ochotu a trpělivost během našich konzultací.

Chtěl bych na tomto místě také poděkovat mým rodičům a mé ženě za významnou podporu nejen při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2.8.2012 Zdeněk Jaroň

Název práce: Vlastnosti Poulsenových simplexů

Autor: Zdeněk Jaroň

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Abstrakt: V předložené práci zkoumáme zobecnění konceptu Poulsenova simplexu pro nemetrizovatelné simplexy. Nejprve pro zadaný simplex F zkonstruujeme nový simplex S, obsahující F jako hranu a mající v sobě hustou množinu extremálních bodů, který zachovává některé důležité vlastnosti F. Tuto konstrukci v další části práce použijeme k tomu, abychom pro zadaný nekonečný kardinál κ zkostruovali simlexy S_1 a S_2, jejichž extremální body v nich tvoří hustou podmnožinu, pro něž kardinalita nejmenší husté podmnožiny je rovna κ, kardinalita nejmenší husté podmnožiny je stejná pro prostory afinních funkcí $A^c(S_1)$ i $A^c(S_2)$, ale přitom S_1 a S_2 nejsou afinně homeomorfní.

Klíčová slova: Poulsenův simplex, projektivní limita, Hellyho prostor

Title: Properties of Poulsen simplices

Author: Zdeněk Jaroň

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Abstract: In the present thesis, we study a generalisation of concept of the Poulsen simplex in general, non-metrizable case. First, for any given simplex F we construct a new one S, containing F as a face, having dense set of extreme points and preserving some important properties of F. In the next part, we employ this construction to build up, for any given infinite cardinal κ, two simplices S_1, S_2 with dense extreme boundary, with density character equal to κ and with spaces of affine functions $A^c(S_1)$ and $A^c(S_2)$ having the same density character, but which are not affinely homeomorphic.

Keywords: Poulsen simplex, projective limit, Helly space

Obsah

Úvod

Nejjednodušším zástupci Choquetových simplexů jsou ty, v nichž je množina extremálních bodů uzavřená, to jest *Bauerovy simplexy.* Ukazuje se ale, že typický simplex tuto vlastnost nemá. V roce 1961 E. T. Poulsen zkonstruoval simplex P, který je dnes po něm nazýván v němž dokonce extremální body tvoří hustou podmnožinu.

Později Lindenstrauss, Olsen a Sternfeld jeho myšlenku rozvedli, a v práci *The Poulsen simplex* [5] ukázali, že každý metrizovatelný simplex s hustou množinou extremálních bodů je afinně homeomorfní s P. Navíc libovolný metrizovatelný simplex je afinně homeomorfní s nějakou (uzavřenou) hranou P.

V této práci se budeme zabývat analogiemi tohoto výsledku pro nemetrizovatelné simplexy. V Kapitole 3, jejíž hlavní výsledek je formulovaný ve Větě 3.1, ukážeme, že simplex s hustými extremálními body můžeme zkostruovat kolem libovolného Choquetova simplexu. Takto vytvořený simplex bude zachovávat některé důležité vlastnosti původního.

V poslední kapitole ve Větě 4.1 předvedeme, že v obecném nemetrizovatelném případě není simplex s hustými extremálními body určen jednoznačně, a to ani pokud mu předepíšeme kardinalitu nejmenší husté podmnožiny.

Hlavní výsledky, které v této práci získáme, pochází z článku Wolfganga Luskyho *On nonseparable simplex spaces* [7]. Budeme k nim ale směřovat poněkud podrobněji a v některých pasážích jinou cestou. Například v oddíle 3.2 budeme hledat projektivní limitu simplexů místo induktivní limity jejich simplexových prostorů. V důkazu Věty 4.7 zase použijeme namísto Luskyho argumentu s L_1-preduálem slabou Rieszovu interpolační vlastnost k tomu, abychom ukázali, že Hellyho kompakt je simplex.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole pouze formalizujeme pojem Choquetův simplex a zavedeme většinu ostatního použitého značení.

Předložíme jen jeden základní výsledek ve Větě 1.4, a to, že můžeme ztotožnit simplex se stavovým prostorem jeho simplexového prostoru. (Tedy prostoru afinních funkcí na daném simplexu.)

Definice 1.1 [8, strana 52]**.** Mějme dánu F kompaktní konvexní podmnožinu lokálně konvexního prostoru E. Označme si kužel v $E \times \mathbb{R}$ generovaný množinou F jako

$$\widetilde{F} := \{(\alpha x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in F, \alpha \geq 0\}.$$

Ten nám generuje uspořádání $\preccurlyeq$ takto: $x \preccurlyeq y$ pokud $x - y \in \widetilde{F}$ pro $x, y \in E \times \mathbb{R}$.

Říkáme, že F je *Choquetův simplex*, právě když $\widetilde{F} - \widetilde{F}$ s uspořádáním $\preccurlyeq$ tvoří svaz. (Tedy každá dvojice prvků má supremum i infimum.)

Poznámka 1.2. Termínem *simplex* budeme v dalším textu vždy rozumět právě (kompaktní) Choquetův simplex.

Definice 1.3. Symbolem $A^c(S)$ budeme značit Banachův prostor všech reálných afinních funkcí na konvexní množině S vybavený supremovou normou.

Pro libovolnou množinu Γ značíme $\ell_\infty(\Gamma)$ Banachův prostor všech omezených funkcí z Γ do $\mathbb{R}$, opět vybavený supremovou normou. Zavedeme ještě $c_0(\Gamma)$ podprostor $\ell_\infty(\Gamma)$ jako

$$c_0(\Gamma) := \left\{ f\colon \Gamma \to \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Gamma_0 \subset \Gamma \text{ konečná} : |f\restriction_{\Gamma \setminus \Gamma_0}| < \varepsilon \right\}.$$

Konstantní funkci s hodnotou 1 definovanou na množině F budeme značit 1_F.

Symbolem $\mathrm{dc}(X)$ značíme nejmenší kardinalitu husté podmnožiny X. (V literatuře „density character")

Banachův prostor X nazveme *simplexovým prostorem* simplexu F, pokud X je izometrický s prostorem $A^c(F)$.

Stavový prostor Banachova prostoru X vzhledem k $e \in X$ je

$$\mathscr{S}(X) := \left\{ \varphi \in X^* \mid \varphi(e) = 1 = \|\varphi\| \right\}.$$

Na tomto prostoru budeme standardně uvažovat slabou s hvězdičkou topologii. Pokud X bude nějaký prostor funkcí a nebude uvedeno jinak, budeme mít na mysli stavový prostor vzhledem ke konstantní jedničce.

Věta 1.4. *Mějme lokálně konvexní prostor E a v něm Choquetův simplex F. Pak F je afinně homeomorfní se stavovým prostorem simplexového prostoru $A^c(F)$ vzhledem k prvku 1_F. Tj.*

$$F \simeq \mathscr{S}(A^c(F)) = \{\varphi \in A^c(F)^* \mid \varphi(1_F) = 1 = \|\varphi\|\}.$$

Důkaz. Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned} I\colon F &\to \mathscr{S}(A^c(F)) \\ x &\mapsto (f \mapsto f(x)). \end{aligned}$$

Zřejmě je I afinní a dobře definované (tj. Ix je skutečně stav pro libovolné x). Duál E^* lokálně konvexního prostoru E odděluje jeho body, a tedy i $A^c(F)$ odděluje body F. Z toho vidíme, že I je prosté.

$A^c(F)$ je podprostorem $\mathcal{C}(F)$, což znamená, že každý funkcionál $\varphi \in A^c(F)^*$ můžeme z Hahn-Banachovy věty rozšířit na funkcionál $\mu \in \mathcal{C}(F)^* = \mathscr{M}(F)$ se zachováním normy. Když $\varphi \in \mathscr{S}(A^c(F))$, pak i $\|\mu\| = 1 = \mu(F)$, a tedy μ je pravděpodobnostní míra na kompaktní konvexní množině. To znamená, že má jednoznačně určené těžiště x a pro každou $f \in A^c(F)$ platí

$$\varphi(f) = \mu(f) = f(x) = (Ix)(f),$$

a tedy I je na.

Pro net (x_λ) a bod x v F platí

$$x_\lambda \to x \implies \forall\, f \in A^c(F) : f(x_\lambda) \to f(x) \iff Ix_\lambda \overset{w^*}{\to} Ix,$$

a tedy I je spojité.

Vezmeme (x_λ) net v kompaktu F takový, že Ix_λ konverguje k Ix pro nějaké $x \in F$. Můžeme najít jeho podnet (x_{λ_α}), který konverguje k nějakemu $x_0 \in X$. Z předchozího odstavce ale vidíme, že Ix_{λ_α} konverguje k Ix_0, a proto $Ix_0 = Ix$, a tedy i $x_0 = x$. Každý konvergentní podnet má tedy limitu x, to znamená, že $x_\lambda \to x$. Z toho plyne, že I má spojitou inverzi. □

Kapitola 2

Nástroje

V této kapitole si shromáždíme potřebný aparát. První dvě sekce obsahují pouze převzaté výsledky bez důkazů, přeformulované do naší terminologie a často zjednodušené. Důležitá je zejména Věta 2.5, která nám dává cennou charakterizaci Choquetových simlexů.

Ve třetí podkapitole nakonec dokážeme několik pomocných tvrzení a topologických lemmat, které nám usnadní další práci.

2.1 Různé převzaté výsledky

Definice 2.1 [4, strana 30]**.** Říkáme, že Banachův prostor X má vlastnost *4,2.I.P.* pokud každá čtveřice $B_i, i = 1, \dots, 4$ uzavřených koulí v X, pro kterou platí

$$\forall\, i, j = 1, \dots, 4 : \ B_i \cap B_j \neq \emptyset$$

má neprázdný průnik.

Věta 2.2 [4, Theorem 4.3 & Theorem 6.1]**.** *Banachův prostor X je L_1-preduál, právě když má vlastnost 4,2.I.P.*

Lemma 2.3 [3, strana 181]**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je simplexový prostor, právě když X je L_1-preduál a jednotková koule v X má extremální bod.*

Definice 2.4 [6, Remark 6.17 & Theorem 6.18]**.** Nechť K je kompaktní konvexní množina. Pak říkáme, že $A^c(K)$ má

- *Rieszovu dekompoziční vlastnost* („Riesz decomposition property“), pokud pro každé nezáporné funkce $f, g_1, g_2 \in A^c(K)$, pro které platí $f \leq g_1 + g_2$, existují nezáporné funkce $h_1, h_2 \in A^c(K)$ tak, že

$$f = h_1 + h_2, \qquad h_1 \leq g_1, \qquad h_2 \leq g_2.$$

- *slabou Rieszovu interpolační vlastnost* („weak Riesz interpolation property“), jestliže pro každé $f_1, f_2, g_1, g_2 \in A^c(K)$, pro něž platí $f_1 \vee f_2 < g_1 \wedge g_2$ existuje funkce $h \in A^c(K)$, pro kterou platí $f_1 \vee f_2 < h < g_1 \wedge g_2$;

Věta 2.5 [6, Theorem 6.16 & 6.18]**.** *Buď K kompaktní konvexní množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) *K je simplex,*

(ii) $A^c(K)$ *má slabou Rieszovu interpolační vlastnost,*

(iii) $A^c(K)$ *má Rieszovu dekompoziční vlastnost.*

2.2 Projektivní limita

V této pasáži budeme vycházet z [6, oddíl 12.2.B].

Definice 2.6. Systém $(X_i, p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ je *projektivní systém* nebo *projektivní posloupnost* [1] („projective system“ či „inverse system“), pokud

- X_i jsou neprázdné kompaktní konvexní možiny,
- $p_{ij}\colon X_j \to X_j$ je spojité afinní a na, pro $i \le j \in \mathbb{N}$,
- p_{ii} je identita pro $i \in \mathbb{N}$ a
- $p_{ij} \circ p_{jk} = p_{ik}$ pro $i \le j \le k \in \mathbb{N}$.

Projektivní limitu této posloupnosti pak definujeme jako

$$\varprojlim X_i = \varprojlim (X_i, p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} := \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \;\middle|\; p_{ij}(x_j) = x_i, i \le j \in \mathbb{N} \right\}$$

a $\pi_j\colon \varprojlim X_i \to X_j$ bude j-tá projekce.

Pak $\varprojlim X_i$ je neprázdná kompaktní množina, zřejmě π_i jsou spojité, afinní a na a pro $i < j$ platí $p_{ij} \circ \pi_j = \pi_i$.

Věta 2.7 [6, Corollary 12.35]**.** *Projektivní limita systému simplexů je simplex.*

2.3 Další pomocná tvrzení

Lemma 2.8 [4, Lemma 4.2]**.** *Nechť X je Banachův prostor, ve kterém platí: Pro každé čtyři koule $B(x_i, r_i) \subset X$ $(i=1,\dots,4)$ takové, že každé dvě z nich se protínají a pro každé $\varepsilon>0$ existuje $x \in X$ tak, že $\|x - x_i\| \le r_i + \varepsilon, i=1,\dots,4$.*

Pak X má vlastnost 4,2.I.P.

Důkaz. Mějme v X dány koule $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^4$, které se po dvou protínají. Chceme ukázat, že mají společný bod.

Budeme tvořit posloupnost prvků X. Zvolme libovolně $\varepsilon_0 > 0$ a $z_0 \in X$ tak, aby pro $n = 0$ platilo

$$z_n \in \bigcap_{i=1}^{4} B(x_i, r_i + \varepsilon_n). \tag{1}$$

Máme-li z_n a ε_n, pro které platí (1), pak koule $B(z_n, \varepsilon_n)$ protíná všechny zadané koule. Pro každé $\delta > 0$ a $i = 1,\dots,4$ tedy z předpokladů existuje $y_i \in X$ takové, že

$$\|y_i - z_n\| \le \varepsilon_n + \delta, \qquad \|y_i - x_j\| \le r_j + \delta, \qquad j = 1,\dots,4,\ j \ne i.$$

[1] Tento pojem bývá definován obecněji, s indexy v libovolné shora usměrněné množině. Nám však budou stačit přirozená čísla.

Označíme-li si jejich těžiště $z_{n+1} := \frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, máme $\|z_{n+1}-z_n\| \le \varepsilon_n+\delta$ a pro $j=1,\dots,4$ platí

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}-x_j\| &\le \frac{1}{4}\Big(\|y_j-x_j\| + \sum_{i\neq j}\|y_i-x_j\|\Big)\\ &\le \frac{1}{4}\big(\|y_j-z_n\| + \|z_n-x_j\| + 3(r_j+\delta)\big)\\ &\le \frac{1}{4}\big(r_j+2\varepsilon_n+\delta\ +\ 3(r_j+\delta)\big)\ =\ r_j+\delta+\frac{\varepsilon_n}{2}.\end{aligned}$$

Pokud v předešlém zvolíme $\delta \le \frac{1}{4}\varepsilon_n$, můžeme označit $\varepsilon_{n+1} := \frac{3}{4}\varepsilon_n$ a získáme

$$\|z_{n+1}-z_n\| \le 2\varepsilon_n, \qquad \|z_{n+1}-x_j\| \le r_j+\varepsilon_{n+1}, \qquad j=1,\dots,4.$$

Tím pádem z_{n+1} a ε_{n+1} splňují (1), a tedy můžeme vytvořit posloupnost $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bodů v X takovou, že

$$\|z_{n+1}-z_n\| \le 2\left(\tfrac{3}{4}\right)^n\varepsilon_0, \quad \|z_{n+1}-x_j\| \le r_j+\left(\tfrac{3}{4}\right)^n\varepsilon_0, \quad j=1,\dots,4,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Tedy to je cauchyovská posloupnost. Označíme $z := \lim_{n\to\infty} z_n$. Jednoduše vidíme, že $z \in \bigcap_{j=1}^4 B(x_j,r_j)$ a tím jsme hotovi. □

Věta 2.9. *Buď K kompaktní konvexní množina. Pokud $A^c(K)$ má vlastnost 4,2.I.P., pak K je simplex.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme po vzoru [6, Theorem 6.20]. Předvedeme, že prostor $A^c(K)$ má Rieszovu dekompoziční vlastnost a pak budeme díky Větě 2.5 hotovi.

Mějme tedy dány nezáporné funkce $f, g_1, g_2 \in A^c(K)$ splňující $f \le g_1+g_2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $g_1+g_2 \le 1_K$. (Jinak si dané funkce přeškálujeme.) V prostoru $A^c(K)$ zvolíme uzavřené koule

$$\begin{aligned} B_1 &:= B(1_K,1), & B_2 &:= B(g_1-1_K,1),\\ B_3 &:= B(f-1_K,1), & B_4 &:= B(1_K+f-g_2,1),\end{aligned}$$

a jednoduchým vypočtem získáme platnost následujících inkluzí:

$$0 \in B_1\cap B_2\cap B_3, \qquad f\in B_1\cap B_3\cap B_4, \qquad g_1\in B_1\cap B_2\cap B_4.$$

Víme, že $A^c(K)$ má vlastnost 4,2.I.P., můžeme tedy zvolit $h_1 \in \bigcap_{i=1}^4 B_i$. Označme ještě $h_2 := f-h_1$.

Protože h_1 leží v B_1 a B_2, vidíme, že $0 \le h_1 \le g_1$. A podobně, díky tomu, že $f-h_2 \in B_3\cap B_4$, je i $h_2 \in B(1_K,1)\cap B(g_2-1_K,1)$, a tedy $0\le h_2\le g_2$. □

Lemma 2.10. *Nechť X je kompaktní konvexní množina a E podprostor $A^c(X)$ oddělující body X a obsahující 1_X. Pak E je hustý v $A^c(X)$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\overline{E} \ne A^c(X)$.

Můžeme najít funkcionál $\varphi \in A^c(X)^*$ tak, že $\varphi\restriction_E = 0$ ale $\varphi\ne 0$. Toto φ z Hahn-Banachovy věty rozšíříme na $\mu\in\mathscr{M}(X) = \mathcal{C}(X)^*$.

Potom existují nezáporné skaláry x_1, x_2 a pravděpodobnostní míry μ_1,μ_2 tak, že $\mu = a_1\mu_1 - a_2\mu_2$. Označíme x_1 a x_2 (jednoznačně určená) těžiště měr μ_1 a μ_2. Pro každou $f\in A^c(X)$ pak platí

$$\mu(f) = a_1 f(x_1) - a_2 f(x_2).$$

Protože $1_X \in E$, máme $0 = \mu(1_X) = a_1 - a_2$, tedy $a_1 = a_2 \neq 0$.

Pokud $x_1 \neq x_2$, pak pro každou $f \in E$ máme $a_1 f(x_1) = a_1 f(x_2)$ a to je spor s tím, že E odděluje body.

A pokud $x_1 = x_2$, pak $\mu(f) = a_1 f(x_1) - a_1 f(x_1) = 0$ pro každou $f \in A^c(X)$, což je spor s $\varphi \neq 0$. $\square$

Lemma 2.11 [7, Lemma 2.1]**.** *Nechť X je Banachův prostor a $V \subset X^*$ je omezená množina s w^*-topologií. Pak*

$$\mathrm{dc}(V) \leq \mathrm{dc}(X).$$

Důkaz. Vezměme Γ hustou podmnožinu X s kardinalitou $\mathrm{dc}(X)$ a označme

$$\Delta := \left\{ (\{x_1, \ldots, x_n\}, r) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in \Gamma,\, r \in \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Pak platí

$$\operatorname{card} \Delta = \operatorname{card} \Gamma \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \operatorname{card} \Gamma = \mathrm{dc}(X).$$

Pro pevně dané $\delta = (\{x_1, \ldots, x_n\}, r) \in \Delta$ zavedeme $E_\delta := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Díky Hahn-Banachově větě máme $V\restriction_{E_\delta} \subset X^*\restriction_{E_\delta} = E_\delta^*$. Množina $V\restriction_{E_\delta}$ je tedy totálně omezená a můžeme v ní najít konečnou r-síť Λ'_δ. Vezmeme $\Lambda_\delta \subset V$ takovou, že $\Lambda_\delta\restriction_{E_\delta} = \Lambda'_\delta$. Tedy platí

$$\forall\, x^* \in V \;\; \exists\, y^* \in \Lambda_\delta : \|(x^* - y^*)\restriction_{E_\delta}\| \leq r.$$

Protože každá w^*-otevřená množina ve V obsahuje podmnožinu tvaru

$$\left\{ y^* \in X^* \;\middle|\; |(y^* - x^*)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, m \right\}$$

pro nějaké vhodné $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in \Gamma$ a $x^* \in V$, vidíme, že $\bigcup_{\delta \in \Delta} \Lambda_\delta$ je w^*-hustá podmnožina V, pro kterou platí

$$\operatorname{card}\big(\textstyle\bigcup_{\delta \in \Delta} \Lambda_\delta\big) \leq \operatorname{card}(\Delta) = \mathrm{dc}(X). \qquad \square$$

Lemma 2.12. *Nechť Γ je libovolná množina. Pak platí* $\mathrm{dc}(\ell_\infty(\Gamma)) = 2^{\operatorname{card}(\Gamma)}$.

Důkaz. Na jednu stranu množina charakteristických funkcí $\{\chi_{\Gamma_0} \mid \Gamma_0 \subset \Gamma\}$ tvoří diskrétní podmnožinou prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$, na stranu druhou funkce s racionálními hodnotami jsou v něm husté. Tedy máme

$$2^{\operatorname{card}(\Gamma)} = \operatorname{card}(2^\Gamma) \leq \mathrm{dc}(\ell_\infty(\Gamma)) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q}^\Gamma) = 2^{\operatorname{card}(\Gamma)}. \qquad \square$$

Lemma 2.13 [7, Lemma 3.1]**.** *Nechť F je nekonečně dimenzionální simplex. Pak*

$$\mathrm{dc}(F) \leq \mathrm{dc}(A^c(F)) \leq 2^{\mathrm{dc}(F)}.$$

Důkaz. Z Věty 1.4 a z Lemmatu 2.11 dostaneme

$$\mathrm{dc}(F) = \mathrm{dc}\big(\mathscr{S}(A^c(F))\big) \leq \mathrm{dc}(A^c(F)).$$

Mějme Γ hustou podmnožinu F s kardinalitou $\mathrm{dc}(F)$. Zobrazení $(f \mapsto f\restriction_\Gamma)$ je izometrické vnoření $A^c(F)$ do metrického prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$. To znamená, že

$$\mathrm{dc}(A^c(F)) \leq \mathrm{dc}(\ell_\infty(\Gamma)).$$

A díky Lemmatu 2.12 jsme hotovi. $\square$

Tvrzení 2.14. *Nechť Γ je libovolná množina. Potom jednotková uzavřená koule v $c_0(\Gamma)^*$ je w^*-sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz. Uvědomíme si, že

$$B\big(c_0(\Gamma)^*\big) = \left\{ \mu \colon f \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i f(\gamma_i) \;\middle|\; \{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Gamma, \mu_i \in \mathbb{R}, \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu_i| \le 1 \right\}. \tag{2}$$

Mějme dánu posloupnost $(\mu^{(0,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ v $B(c_0(\Gamma)^*)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nosná množina $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ z (2) je pro všechny členy posloupnosti společná. Dále postupujeme indukcí podle $n \in \mathbb{N}$. $(\mu_n^{(n-1,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ je posloupnost čísel z $[-1,1]$. Vybereme z ní podposloupnost indexovanou $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergující k nějakému $\nu_n \in [-1,1]$ a označíme

$$\mu^{(n,k)} := \mu^{(n-1,j_k)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $(\mu^{(j,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ je vybraná podposloupnost a pro každou $f \in c_0(\Gamma)$ platí

$$\mu^{(j,j)}(f) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i^{(j,j)} f(\gamma_i) \xrightarrow{j\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu_i f(\gamma_i) := \nu(f).$$

Protože zkoumaná koule je w^*-uzavřená, ν v ní leží. To znamená, že $B(c_0(\Gamma)^*)$ je w^*-sekvenciálně kompaktní. □

Tvrzení 2.15. *Nechť K je kompakt. Pak prostor $\mathscr{M}_1(K)$ vybavený w^*-topologií je Bauerův simplex, pro který platí $\operatorname{dc}(\mathscr{M}_1(K)) \le \operatorname{dc}(K)$.*

Důkaz. Že $\mathscr{M}_1(K)$ je Bauerův simplex se dočteme v [6, Proposition 6.38].

Krein–Milmanova věta nám říká, že $\operatorname{co}\{\varepsilon_x \mid x \in K\}$ je w^*-hustá v $\mathscr{M}_1(K)$. Vezmeme-li $\Gamma \subset K$ hustou s minimální kardinalitou, pak

$$\left\{ \sum_{\gamma\in\Gamma_0} \lambda_\gamma \varepsilon_\gamma \;\middle|\; \Gamma_0 \subset \Gamma \text{ konečná}, \lambda_\gamma \in \mathbb{Q}^+, \gamma \in \Gamma_0, \sum_{\gamma\in\Gamma_0} \lambda_\gamma = 1 \right\}$$

je množina o kardinalitě $\operatorname{dc}(K)$, která je w^*-hustá v $\operatorname{co}\{\varepsilon_x \mid x \in K\}$, a tedy i v $\mathscr{M}_1(K)$. To znamená, že $\operatorname{dc}(\mathscr{M}_1(K)) \le \operatorname{dc}(K)$. □

Tvrzení 2.16. *Nechť K je konvexní kompaktní množina. Pak prostor $\mathcal{C}(K)$ je izometricky izomorfní s $A^c(\mathscr{M}_1(K))$, ve kterém $\mathscr{M}_1(K)$ uvažujeme s w^*-topologií.*

Důkaz. Vezměme zobrazení.

$$\begin{aligned} T \colon \mathcal{C}(K) &\to A^c(\mathscr{M}_1(K)) \\ f &\mapsto Tf = (\mu \mapsto \mu(f)). \end{aligned}$$

Opět využijeme toho, že v $\mathscr{M}_1(K)$ jsou konvexní kombinace Diracových měr w^*-husté. Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ pak platí

$$\|Tf\| = \sup_{\mu\in\mathscr{M}_1(K)} |Tf(\mu)| = \sup_{\mu\in\operatorname{co}\{\varepsilon_x \mid x\in K\}} |Tf(\mu)| = \sup_{x\in K} |Tf(\varepsilon_x)| = \sup_{x\in K} |f(x)| = \|f\|,$$

a tedy T je izometrie. Zbývá dokázat, že je na. Mějme $\varphi \in A^c(\mathscr{M}_1(K))$. Zobrazení $(x \mapsto \varphi(\varepsilon_x))$ je spojitá funkce na K. Stačí nám tedy ukázat, že

$$\varphi = T(x \mapsto \varphi(\varepsilon_x)).$$

Víme ale, že pokud se spojité afinní funkce rovnají na extremálních bodech, pak jsou si rovny všude. Stačí si tedy všimnout, že pro každé $y \in K$ platí

$$\varphi(\varepsilon_y) = \varepsilon_y(x \mapsto \varphi(\varepsilon_x)) = T(x \mapsto \varphi(\varepsilon_x))(\varepsilon_y). \qquad \square$$

Kapitola 3

Zobecnění Poulsenova simplexu

Pro zadaný simplex F v první podkapitole vybudujeme nový, který obsahuje F jako hranu a jehož extremální body jsou v F husté.

Ve druhé části tuto konstrukci použijeme k vybudování projektivní posloupnosti, jejíž limita se ukáže být hledaným simplexem.

V poslední podkapitole pak ukážeme jeho vlastnosti a tím dokážeme následující větu.

Věta 3.1 [7, Theorem 1.1]**.** *Nechť F je simplex. Pak existuje simplex $S \supset F$, který splňuje:*

(i) $\overline{\operatorname{ext} S} = S$,

(ii) *F je hrana S,*

(iii) *existuje izometrie $T\colon A^c(F) \to A^c(S)$ taková, že $T1_F = 1_S$ a pro každou $f \in A^c(F)$ platí $(Tf)\restriction_F = f$,*

(iv) $\operatorname{dc}(S) = \operatorname{dc}(F)$,

(v) $\operatorname{dc}(A^c(S)) = \operatorname{dc}(A^c(F))$,

(vi) *S je sekvenciálně kompaktní, pokud F je sekvenciálně kompaktní.*

3.1 Indukční krok

V nasledujícím oddílu budeme pracovat s obecným Choquetovým simplexem F. Jeho simplexový prostor $A^c(F)$ si označíme X. Symbolem $\mathscr{S}(X)$ budeme rozumět stavový prostor X vzhledem k $e := 1_F \in X$, tedy

$$\mathscr{S}(X) := \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| = 1 = x^*(e)\}.$$

Připomeňme, že $\mathscr{S}(X)$ uvažujeme s w^*-topologií.

Z Věty 1.4 vyplývá, že F je afinně homeomorfní s $\mathscr{S}(X)$. Stavy na X jsou právě evaluace v jednotlivých bodech F.

Mějme dánu Γ w^*-hustou podmnožinu $\mathscr{S}(X)$ s minimální kardinalitou, tj. takovou, aby $\operatorname{card}(\Gamma) = \operatorname{dc}(\mathscr{S}(X))$.

A budeme ještě potřebovat direktní součet $X \oplus \ell_\infty(\Gamma)$ s maximovou normou, tedy

$$\|(x, f)\| = \max(\|x\|, \|f\|), \quad x \in X, f \in \ell_\infty(\Gamma).$$

Definice 3.2. Pro $x \in X$ definujeme $\hat{x} \in \ell_\infty(\Gamma)\colon \gamma \mapsto \gamma(x)$. Označíme si

$$Y := Y(X, \Gamma) := \operatorname{span}\big(\{(x, \hat{x}) \mid x \in X\} \cup \{(0, f) \mid f \in c_0(\Gamma)\}\big)$$

podprostor $X \oplus \ell_\infty(\Gamma)$ a symbolem $\mathscr{S}(Y)$ míníme jeho stavový prostor vzhledem k $(e, \hat{e})$.

Tvrzení 3.3. *Pro každé $x \in X$ platí $\|x\| = \|\hat{x}\|$.*

Důkaz. Z definice je vidět, že $\|\hat{x}\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} |\gamma(x)| \leq \|x\|$. Najdeme $t \in F$, pro který $\|x\| = |x(t)| = |\varepsilon_t(x)|$. Γ je v $\mathscr{S}(X)$ w^*-hustá, najdeme v ní tedy net (ε_{t_α}), který w^*-konverguje k ε_t. Pak

$$\|\hat{x}\| \geq |\varepsilon_{t_\alpha}(x)| \to |\varepsilon_t(x)| = \|x\| . \qquad \square$$

Tvrzení 3.4. *Y je uzavřený podprostor $X \oplus \ell_\infty(\Gamma)$.*

Důkaz. Vezmeme-li $(x_n, \hat{x}_n + f_n)$ cauchyovskou posloupnost v Y, pak (x_n) je cauchyovská posloupnost v X, a tedy konverguje k nějakému $x \in X$. To znamená, že i $(\hat{x}_n)$ konverguje k $\hat{x}$. Protože $(\hat{x}_n + f_n)$ i $(\hat{x}_n)$ jsou cauchyovské posloupnosti, je (f_n) taky cauchyovská a, tedy konverguje k nějakému $f \in c_0(\Gamma)$. Původní posloupnost tedy konverguje k $(x, \hat{x} + f) \in Y(X, \Gamma)$. $\square$

Definice 3.5. Díky Tvrzení 3.3 je zobrazení $x \mapsto (x, \hat{x})$ izometrické vnoření prostoru X do $Y(X, \Gamma)$. Tímto způsobem budeme vnímat X jako podprostor Y. Můžeme tedy uvažovat projekci

$$\begin{aligned} P_X \colon Y(X, \Gamma) &\to X \\ (x, \hat{x} + f) &\mapsto x \end{aligned}$$

Poznámka 3.6. Pro nás bude důležitý zejména duální operátor k P_X, tedy

$$\begin{aligned} P_X^* \colon X^* &\to Y(X, \Gamma)^* \\ x^* &\mapsto \big((x, \hat{x} + f) \mapsto x^*(x)\big). \end{aligned}$$

$P_X^*(\varphi) \in \mathscr{S}(Y)$ pokud $\varphi \in \mathscr{S}(X)$, P_X^* je tedy vnoření $\mathscr{S}(X)$ do $\mathscr{S}(Y)$.

Definice 3.7. Označíme si množiny

$$\hat{\mathscr{S}}(X) := \{(\mu, 0) \in Y(X, \Gamma)^* \mid \mu \in \mathscr{S}(X)\} ,$$

$$M(\Gamma) := \{(0, \mu) \in Y(X, \Gamma)^* \mid \mu \in \mathscr{M}_1(\Gamma)\} .$$

Poznámka 3.8. Pro každou μ pravděpodobnostní míru na Γ můžeme najít $\lambda_i \geq 0$ a $\gamma_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{N}$, tak, že $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i = 1$ a

$$\mu = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \varepsilon_{\gamma_i},$$

kde $\varepsilon_\gamma(f) := f(\gamma), \ f \in \ell_\infty(\Gamma), \gamma \in \Gamma$.

Tvrzení 3.9. *Platí*

$$\mathscr{S}(Y) = \mathscr{S}(X \oplus \ell_\infty(\Gamma))\restriction_Y .$$

Důkaz. Stav na $X \oplus \ell_\infty(\Gamma)$ zůstane stavem i po restrikci na Y, na druhou stranu každý funkcionál z $\mathscr{S}(Y)$ můžeme z Hahn-Banachovy věty spojitě rozšířit na $X \oplus \ell_\infty(\Gamma)$ se zachováním normy, čímž získáme opět stav. $\square$

Důsledek 3.10. *Z předchozího Tvrzení plyne, že každé $\varphi \in \mathscr{S}(Y)$ je tvaru (μ, ν), pro vhodné $\mu \in [0,1] \cdot \mathscr{S}(X)$ a $\nu \in (\{\hat{x} \mid x \in X\} + c_0(\Gamma))^*$.*

Platí $0 \le \nu(\hat{e}) \le 1$, $\|\mu\| + \|\nu\| = 1$.

Lemma 3.11. *Pro $y \in Y(X, \Gamma)$ platí*

$$\|y\| = \sup_{\varphi \in \hat{\mathscr{S}}(X) \cup M(\Gamma)} |\varphi(y)| = \sup_{\varphi \in \mathscr{S}(Y)} |\varphi(y)| \, .$$

Důkaz. Je-li $y = (x, \hat{x} + f)$, kde $x \in X$ a $f \in c_0(\Gamma)$, je norma y realizována buď prvkem x nebo $\hat{x} + f$. Pokud $\|y\| = \|x\|$, pak existuje $\mu \in \mathscr{S}(X)$ tak, že $\|y\| = |\mu(x)| = |(\mu, 0)(y)|$. V opačném případě máme $\|y\| = \|\hat{x} + f\|$, a potom existuje (γ_n) posloupnost v Γ taková, že

$$|(\hat{x} + f)(\gamma_n)| = |(0, \varepsilon_{\gamma_n})(y)| \to \|y\| \, .$$

$\square$

Lemma 3.12. *Zobrazení*

$$\begin{aligned} J \colon Y(X, \Gamma) &\to A^c(\mathscr{S}(Y)) \\ y &\mapsto (\varphi \mapsto \varphi(y)) \end{aligned}$$

je izometrie na.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že J je izometrie do. Pro $y \in Y$ díky Lemmatu 3.11 platí

$$\|Jy\| = \sup_{\varphi \in \mathscr{S}(Y)} |Jy(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \mathscr{S}(Y)} |\varphi(y)| = \|y\| \, .$$

Nyní vezmeme $\mathscr{S}(Y) \times \mathbb{R}$, což je kompaktní podmnožina lokálně konvexního prostoru $(Y^*, w^*) \times \mathbb{R}$. Protože $(Y^*, w^*)^* = Y$ pomocí kanonického izomorfismu, platí

$$\big((Y^*, w^*) \times \mathbb{R}\big)^* = \big\{(y, r) \colon (\varphi, \alpha) \mapsto \varphi(y) + r\alpha \mid y \in Y, r \in \mathbb{R}\big\}.$$

Nechť f je afinní funkce na $\mathscr{S}(Y)$ a nechť $\varepsilon > 0$. Grafy funkcí f a $f + \varepsilon$ nahlížené jako podmnožiny prostoru $(\mathscr{S}(Y), w^*) \times \mathbb{R}$ jsou konvexní a kompaktní a můžeme z Hahn-Banachovy věty najít konstantu c a funkcionál (y, r), aby platilo:

$$(y, r)(\varphi, f(\varphi)) < c < (y, r)(\varphi, (f + \varepsilon)(\varphi)), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(Y).$$

Uvědomíme si, že $r \neq 0$ a po úpravách dostaneme

$$f(\varphi) < \frac{c}{r} - \frac{\varphi(y)}{r} = \varphi\left(\frac{c}{r}(e, \hat{e}) - \frac{1}{r} y\right) < f(\varphi) + \varepsilon, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(Y).$$

Označíme si $y_\varepsilon := \frac{c}{r}(e, \hat{e}) - \frac{1}{r} y \in Y$. Pak platí $\|f - Jy_\varepsilon\| \le \varepsilon$.

Volbou $\varepsilon = \frac{1}{n}$ a $y_n := y_\varepsilon$ pro $n \in \mathbb{N}$ získáme cauchyovskou posloupnost (Jy_n). Posloupnost (y_n) je tedy také cauchyovská, a tudíž má v Y limitu y.

Pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(Y)$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|Jy(\varphi) - f(\varphi)| \le |Jy(\varphi) - Jy_n(\varphi)| + |Jy_n(\varphi) - f(\varphi)| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

a tedy $Jy = f$. Jinými slovy, J je na. $\square$

Lemma 3.13 [7, Lemma 2.2]**.** *$Y(X,\Gamma)$ je simplexový prostor, jehož příslušný simplex je afinně homeomorfní s $\mathscr{S}(Y)$.*

Důkaz. Nechť $B_i := B\left((x_i, \hat{x}_i + f_i), r_i\right) \subset Y, i = 1, \ldots, 4$, jsou uzavřené koule takové, že každé dvě z nich se protínají. Na Y máme maximovou normu, a proto platí:

$$\|x_i - x_j\| \leq r_i + r_j, \qquad \|\hat{x}_i + f_i - \hat{x}_j - f_j\| \leq r_i + r_j, \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

X je simplexový prostor a díky Lemmatu 2.3 je to L_1-preduál. Vezmeme v něm koule se středy v x_i s poloměry r_i (pro $i = 1, \ldots, 4$). Každé dvě z nich se protínají, Věta 2.2 nám tedy zaručí existenci prvku x z jejich průniku.

Zafixujme $\varepsilon > 0$. Protože $f_i \in c_0(\Gamma)$, můžeme najít $\Omega \subset \Gamma$ konečnou tak, že $|f_i(\mu)| \leq \varepsilon$ pro $\mu \in \Gamma \setminus \Omega$, $i = 1, \ldots, 4$. Víme, že

$$\|\hat{x}_i + f_i - \hat{x} - (\hat{x}_j + f_j - \hat{x})\| \leq r_i + r_j, \qquad i = 1, \ldots, 4$$

a zřejmě $(\ell_\infty(\Omega))^* = \ell_1(\Omega)$. Koule $B(\hat{x}_i + f_i - \hat{x}, r_i) \subset \ell_\infty(\Omega)$ mají tedy díky Větě 2.2 neprázdný průnik.

Jinými slovy existuje $f \in c_0(\Gamma)$ taková, že $\operatorname{spt}(f) \subset \Omega$ a

$$|(\hat{x}_i + f_i - \hat{x} - f)(\omega)| \leq r_i, \qquad i = 1, \ldots, 4;\ \omega \in \Omega.$$

Pro každý stav $\mu \in \Gamma \setminus \Omega$ (a pro každé $i = 1, \ldots, 4$) pak platí:

$$|(\hat{x}_i + f_i - \hat{x} - f)(\mu)| = |\mu(x_i - x) + f_i(\mu)| \leq |\mu(x_i - x)| + \varepsilon \leq r_i + \varepsilon.$$

To znamená, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ je $\bigcap_{i=1}^4 B\big((x_i, \hat{x}_i + f_i), r_i + \varepsilon\big)$ neprázdný. Z Lemmatu 2.8 vyplývá, že Y má vlastnost 4,2.I.P. a díky Lemmatu 3.12 ji má i prostor $A^c(\mathscr{S}(Y))$. Věta 2.9 nám tedy říká, že $\mathscr{S}(Y)$ je simplex a jsme (opět z Lemmatu 3.12) hotovi. □

Poznámka 3.14. Stavový prostor prostoru $A^c(\mathscr{S}(Y))$ vzhledem ke konstantní jedničce na $\mathscr{S}(Y)$ je podle Věty 1.4 afinně homeomorfní s prostorem $\mathscr{S}(Y)$.

Toto v kombinaci s předešlým lemmatem pro nás bude důležité, až budeme chtít aplikovat na Y poznatky, které nyní dokazujeme pro X.

Lemma 3.15 [7, Lemma 2.3]**.** *(i) $\mathscr{S}(Y) = \overline{\text{co}}^{w^*}\big(\hat{\mathscr{S}}(X) \cup M(\Gamma)\big)$.*

(ii) $P_X^*(\mathscr{S}(X)) = \hat{\mathscr{S}}(X)$ je hrana $\mathscr{S}(Y)$.

Důkaz. (*i*) Označme si $S := \overline{\text{co}}^{w^*}(\hat{\mathscr{S}}(X) \cup M(\Gamma))$ podmnožinu $\mathscr{S}(Y)$ a vezměme $y = (x, \hat{x} + f) \in Y(X, \Gamma)$.

Pokud by v $\mathscr{S}(Y) \setminus S$ existoval stav φ_0, pak z oddělovací Hahn-Banachovy věty dostaneme existenci $\delta > 0$ a funkcionálu $y \in (Y^*, w^*)^* = Y$ takového, že $y(\varphi_0) = 1$ a $y(\varphi) \leq (1 - \delta)$ pro $\varphi \in S$. Zvolme $y' := y + \|y\|(e, \hat{e})$. Pak platí, že $y'(\varphi_0) = 1 + \|y\|$ a pro $\varphi \in S$ je $0 \leq y'(\varphi) \leq 1 + \|y\| - \delta$. To vede díky Lemmatu 3.11 ke sporu:

$$1 + \|y\| = y'(\varphi_0) \leq \sup_{\varphi \in \mathscr{S}(Y)} y'(\varphi) \leq \|y'\| = \sup_{\varphi \in S} |y'(\varphi)| = \sup_{\varphi \in S} y'(\varphi) \leq 1 + \|y\| - \delta.$$

(*ii*) Protože $P_X^*(x^*) = \big((x, \hat{x} + f) \mapsto x^*(x)\big) = (x^*, 0) \in Y(X,\Gamma)^*$, platí

$$P_X^*(\mathscr{S}(X)) = \big\{(\mu,\nu) \in Y^* \;\big|\; \exists\, x^* \in \mathscr{S}(X) : (\mu,\nu) = P_X^*(x^*)\big\} = \hat{\mathscr{S}}(X).$$

Nechť $(\mu_i, \nu_i) \in \mathscr{S}(Y), i = 1,2$ a $\lambda \in (0,1)$ tak, že

$$\lambda(\mu_1,\nu_1) + (1-\lambda)(\mu_2,\nu_2) \in P_X^*(\mathscr{S}(X)).$$

Pak existuje $\mu \in \mathscr{S}(X)$ splňující

$$(\mu, 0) = \big(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2,\ \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2\big),$$

z čehož plyne, že $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{S}(X)$. Protože navíc $\|\mu_i\| + \|\nu_i\| = 1$, dostaneme $\nu_i = 0$ $(i = 1,2)$. Takže $\hat{\mathscr{S}}(X)$ je extremální množina množiny $\mathscr{S}(Y)$, tedy její hrana. $\square$

Lemma 3.16 [7, Corollary 2.4]. (*i*) $\mathrm{dc}(\mathscr{S}(Y(X,\Gamma))) = \mathrm{dc}(\mathscr{S}(X))$.

(*ii*) $\mathrm{dc}(Y(X,\Gamma)) = \mathrm{dc}(X)$.

(*iii*) *Pokud je $\mathscr{S}(X)$ w^*-sekvenciálně kompaktní, pak i prostor $\mathscr{S}(Y(X,\Gamma))$ je w^*-sekvenciálně kompaktní.*

(*iv*) $\operatorname{ext}\mathscr{S}(Y(X,\Gamma))\restriction_X = \big\{x \mapsto \varphi(x,\hat{x}) \;\big|\; \varphi \in \operatorname{ext}\mathscr{S}(Y)\big\}$ *je w^*-hustá v $\mathscr{S}(X)$.*

Důkaz. (*i*): Vezměme

$$\tilde{M} := \left\{(0,\mu) \in M(\Gamma) \;\middle|\; \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{\gamma_i},\ 0 \le \lambda_i \in \mathbb{Q}, \gamma_i \in \Gamma\right\}.$$

To je w^*-hustá podmnožina $M(\Gamma)$ taková, že

$$\mathrm{card}(\tilde{M}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(\Gamma) = \mathrm{dc}(\mathscr{S}(X)).$$

Najdeme $\tilde{S}$ hustou podmnožinu $\hat{\mathscr{S}}(X)$ s $\mathrm{card}(\tilde{S}) = \mathrm{dc}(\mathscr{S}(X))$ a označíme $\tilde{Q}$ množinu všech konvexních kombinací prvků z $\tilde{M}$ a $\tilde{S}$ s racionálními koeficienty. Pak

$$\mathrm{card}(\tilde{Q}) = \mathrm{card}(\tilde{M}) \cdot \mathrm{card}(\tilde{S}) \cdot \aleph_0 = \mathrm{dc}(\mathscr{S}(X)).$$

$\tilde{Q}$ je w^*-husté v $\mathrm{co}\big(\hat{\mathscr{S}}(X) \cup M(\Gamma)\big)$ a z Lemmatu 3.15 (*i*) i v $\mathscr{S}(Y)$. To nám dá $\mathrm{dc}(\mathscr{S}(Y)) \le \mathrm{dc}(\mathscr{S}(X))$.

Obrácenou nerovnost získáme z faktu, že restrikce $\mathscr{S}(Y) \to \mathscr{S}(X)$ je spojitá a na.

(*ii*): Z vlastností prostoru $c_0(\Gamma)$, z volby Γ a z Lemmatu 2.11 máme

$$\mathrm{dc}(c_0(\Gamma)) = \mathrm{card}(\Gamma) = \mathrm{dc}(\mathscr{S}(X)) \le \mathrm{dc}(X).$$

Pokud si označíme $\tilde{Y} := \big\{(x, \hat{x} + f) \;\big|\; x \in \tilde{X}, f \in \tilde{C}\big\}$, kde $\tilde{X}$ a $\tilde{C}$ jsou vhodné husté podmnožiny X a $c_0(\Gamma)$, pak $\tilde{Y}$ je hustá v Y a

$$\mathrm{dc}(Y) \le \mathrm{card}(\tilde{Y}) = \mathrm{dc}(X) \cdot \mathrm{dc}(c_0(\Gamma)) = \mathrm{dc}(X).$$

(iii): Nechť $\mathscr{S}(X)$ je w^*-sekvenciálně kompaktní. Vezměme libovolnou posloupnost $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ prvků z $\mathscr{S}(Y)$, tvaru

$$\varphi_i = (\mu_i, \nu_i)\colon (x, \hat{x} + f) \mapsto \mu_i(x) + \nu_i(\hat{x} + f), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Pro $i \in \mathbb{N}$ si označíme $\psi_i\colon x \mapsto \mu_i(x) + \nu_i(\hat{x})$, $x \in X$ a $\omega_i := \nu_i\restriction_{c_0(\Gamma)}$.

Pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $\psi_i \in \mathscr{S}(X)$, z $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tedy můžeme vybrat w^*-konvergentní podposloupnost, jejíž limitu si nazveme ψ. Vybranou podposloupnost budeme značit stejně jako původní posloupnost.

Dále pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je ω_i prvkem $B(c_0(\Gamma)^*)$, což je podle Tvrzení 2.14 také w^*-sekvenciálně kompaktní prostor. Opět přejdeme k podposloupnosti, tak aby $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergovala k nějakému $\omega \in B(c_0(\Gamma)^*)$.

Pro každé $y = (x, \hat{x} + f) \in Y$ tedy máme

$$\varphi_i(y) = \psi_i(x) + \omega_i(f) \xrightarrow{i\to\infty} \psi(x) + \omega(f) =: \varphi(y).$$

To znamená, že φ je bodovou limitou (vybrané podposloupnosti) $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Zbývá nám ukázat, že $\varphi \in \mathscr{S}(Y)$.

Zřejmě je φ lineární. Pro $y \in Y$ platí $|\varphi_i(y)| \le \|y\|$ a $|\varphi_i(y)| \to |\varphi(y)|$. Z toho plyne, že $|\varphi(y)| \le \|y\|$, a tedy $\|\varphi\| \le 1$.

A konečně, máme $1 = \varphi_i((e, \hat{e})) \to \varphi((e, \hat{e}))$, a tedy $\varphi((e, \hat{e})) = 1$.

(iv): Stačí si uvědomit, že $\operatorname{ext} M(\Gamma) = \{(0, \varepsilon_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset \operatorname{ext} \mathscr{S}(Y)$ a že $\operatorname{ext} M(\Gamma)\restriction_X = \big\{(x \mapsto \varepsilon_\gamma(\hat{x})) \bigm| \gamma \in \Gamma\big\} = \Gamma$. Z volby Γ jsme pak hotovi. $\square$

3.2 Limitní konstrukce

Definice 3.17. Pojmenujeme si následující objekty:

- $Y_0 := X = A^c(F)$.
- V prostoru Y_0 si označíme funkci $e_0 := 1_F$. (Jednotkový prvek)
- $F_0 := \mathscr{S}(Y_0)$ je stavový prostor Y_0 vzhledem k prvku e_0.
  Připomeňme, že Věta 1.4 nám říká, že $F \simeq F_0$.
- Γ_0 bude (nějaká) w^*-hustá podmnožina $\mathscr{S}(Y_0)$ s minimální kardinalitou.

Dále, máme-li hotové objekty pro $i-1$, zkonstruujeme novou sadu pro i ($i \in \mathbb{N}$).

- Po vzoru Definice 3.2, označíme

  $$Y_i := Y(Y_{i-1}, \Gamma_{i-1}) := \operatorname{span}\big(\{(x, \hat{x}) \mid x \in Y_{i-1}\} \cup \{(0, f) \mid f \in c_0(\Gamma_{i-1})\}\big)$$

  podprostor $Y_{i-1} \oplus \ell_\infty(\Gamma_{i-1})$.
- $e_i := (e_{i-1}, \hat{e}_{i-1})$ bude jednotkový prvek v Y_i.
- $\mathscr{S}(Y_i)$ je stavový prostor Y_i vzhledem k e_i. Označme si $F_i := \mathscr{S}(Y_i)$.
- Γ_i je opět nějaká w^*-hustá podmnožina $\mathscr{S}(Y_i)$ s $\operatorname{card}(\Gamma_i) = \operatorname{dc}(\mathscr{S}(Y_i))$.

Dále jako P_i pojmenujeme projekci $P_{Y_{i-1}}: Y_i \to Y_{i-1}$ z Definice 3.5 a zavedeme zobrazení

$$\begin{gathered} p_i \colon F_i \to F_{i-1} \\ \big(p_i(\varphi)\big)(x) := \varphi(x, \hat{x}). \end{gathered}$$

Pro $i < j \in \mathbb{N}_0$ ještě zavedeme $p_{ij}: F_j \to F_i$ složení $p_{i+1} \circ \cdots \circ p_j$, a nakonec p_{ii} bude identita na F_i.

Pozorování 3.18. Z Lemmatu 3.13 vidíme, že pro $i \in \mathbb{N}$ je F_i simplex.

Tvrzení 3.19. *Systém $(F_i, p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ je projektivní posloupnost.*

Důkaz. Zafixujme $i \in \mathbb{N}$.

Pokud $\varphi \in \mathscr{S}(Y_{i-1})$, pak $(\varphi, 0) \in \mathscr{S}(Y_i)$ a $p_i((\varphi, 0)) = \varphi$. Tedy p_i je na.

Nechť $(\mu_\lambda, \nu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je net v $\mathscr{S}(Y_i)$ w^*-konvergující k (μ, ν). To znamená, že (kromě jiného) pro každé $x \in Y_{i-1}$ platí $(\mu_\lambda, \nu_\lambda)(x, \hat{x}) \to (\mu, \nu)(x, \hat{x})$, což přesně znamená

$$p_i(\mu_\lambda, \nu_\lambda) \xrightarrow{w^*} p_i(\mu, \nu),$$

a tedy p_i je spojité. Jednoduchými úpravami dospějeme i k tomu, že p_i je afinní.

Skládáním těchto zobrazení se tyto vlastnosti zachovají, což znamená, že pro $i < j \in \mathbb{N}_0$ je p_{ij} spojité, afinní a na. Zbylé dvě podmínky plynou přímo z definice zobrazení (p_{ij}). □

Definice 3.20. Označíme si projektivní limitu této posloupnosti

$$S := \varprojlim (F_i, p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0},$$

a π_i příslušné projekce S na F_i, $i \in \mathbb{N}_0$. Pro $i < j \in \mathbb{N}_0$ si pojmenujeme vnoření

$$V_{ij} \colon F_i \to F_j := P_j^* \circ \cdots \circ P_{i+1}^*,$$

a pro pohodlnost ještě $V_{ii} := \mathrm{Id}_{F_i}$. Pro $j \in \mathbb{N}_0$ definujeme zobrazení

$$\begin{aligned} &W_j \colon F_j \to S \\ &W_j(x)(i) := \begin{cases} p_{ij}(x) & \text{pro } i \le j, \\ V_{ji}(x) & \text{pro } i > j. \end{cases} \end{aligned}$$

Shrnutí 3.21. Pro $i \le j \le k \in \mathbb{N}_0$ jsou W_j a V_{ij} prosté a spojité vnoření a platí

$$V_{jk} \circ V_{ij} = V_{ik}, \qquad W_j \circ V_{ij} = W_i, \qquad p_{ij} \circ V_{ij} = \pi_i \circ W_i = \mathrm{Id}_{F_i}.$$

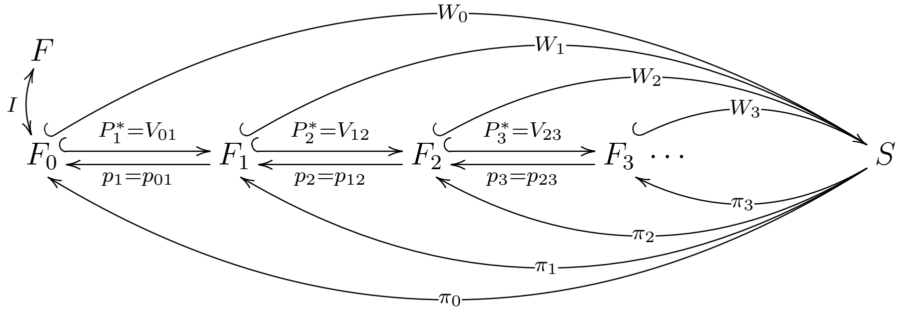
Viz Obrázek 1.

Lemma 3.22. *Pro $i < j \in \mathbb{N}_0$ je $V_{ij}(F_i)$ hrana F_j.*

Důkaz. Lemma 3.15 (ii) nám vlastně říká, že $V_{ij}(F_i)$ je hrana F_j pokud $j = i+1$. Extremální množina extremální množiny je opět extremální množina, a proto to platí i pro libovolné $j > i$. □

Lemma 3.23. *Pro $j \in \mathbb{N}_0$ platí*

(i) $W_j(F_j)$ *je hrana S.*



Obrázek 1: Diagram podstatných zobrazení.
Zobrazení I je izometrie z důkazu Věty 1.4.

(*ii*) $W_j(\operatorname{ext} F_j) \subset \operatorname{ext} S$.

Důkaz. (*i*) Vezměme $x \in F_j$, $0 < \lambda < 1$ a $z_1, z_2 \in S$, že $W_j(x) = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$. Potřebujeme ukázat, že existují $x_k \in F_j$ tak, že $W_j(x_k) = z_k$, $k = 1, 2$.

Zvolíme $x_k := \pi_j(z_k), k = 1, 2$ a stačí nám ukázat, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ platí $\pi_i W_j(x_k) = \pi_i(z_k)$.

Pro $i \leq j$ jednoduše dostaneme

$$\pi_i(z_k) = p_{ij}\pi_j(z_k) = p_{ij}(x_k) = p_{ij}\pi_j W_j(x_k) = \pi_i W_j(x_k), \qquad k = 1, 2.$$

Jestliže je $i > j$, pak z volby z_1 a z_2 máme

$$\pi_i W_j(x) = \pi_i W_i V_{ji}(x) = V_{ji}(x) = \lambda \pi_i(z_1) + (1-\lambda)\pi_i(z_2).$$

Z Lemmatu 3.22 je $V_{ji}(F_j)$ hranou F_i, tedy existují $x'_k \in F_j$ tak, že $\pi_i(z_k) = V_{ji}(x'_k)$, $k = 1, 2$. Pak platí

$$x_k = \pi_j(z_k) = p_{ji}\pi_i(z_k) = p_{ji}V_{ji}(x'_k) = x'_k, \qquad k = 1, 2,$$

a tedy $\pi_i(z_k) = V_{ji}(x_k) = \pi_i W_j(x_k)$ a jsme hotovi.

Protože $W_j(\operatorname{ext} F_j) = \operatorname{ext} W_j(F_j)$, bod (*ii*) je jednoduchým důsledkem předchozího. □

Lemma 3.24. *Systém množin*

$$\mathcal{B} := \left\{ S \cap \prod_{i \in \mathbb{N}_0} U_i \;\middle|\; U_i \subset F_i \text{ otevřená}, i \in \mathbb{N}_0,\ \exists\, n_U \in \mathbb{N}\ \ \forall\, i > n_U : U_i = F_i \right\}$$

je báze topologie na S. Pro $U = \left(S \cap \prod_{i \in \mathbb{N}_0} U_i\right) \in \mathcal{B}$ budeme značit n_U nejmenší přirozené číslo takové, že $U_i = F_i$ pro $i > n_U$.

Pro každou neprázdnou $U \in \mathcal{B}$ pak platí:

(*i*) *Pokud $x_1 \in U$, $x_2 \in S$ a $\pi_{n_U}(x_1) = \pi_{n_U}(x_2)$, pak i $x_2 \in U$.*

(*ii*) *Pro $n \geq n_U$ obsahuje $\pi_n(U)$ neprázdnou otevřenou množinnu.*

Důkaz. Zřejmě je $\mathcal{B}$ báze topologie na S a bod (i) plyne jednoduše z definice $\mathcal{B}$. Bod (ii) nám stačí, bez újmy na obecnosti, dokázat pro $n := n_U$. Mějme tedy dánu neprázdnou $U \in \mathcal{B}$, to jest

$$U = (U_1 \times \cdots \times U_n \times F_{n+1} \times F_{n+2} \times \cdots) \cap S.$$

Vezměme $z \in U$. Pak pro $i \leq n$ platí $p_{in}\pi_n z = \pi_i z \in U_i$, a tedy $\pi_n z \in p_{in}^{-1}(U_i)$. To znamená, že

$$U_n' := \bigcap_{i \leq n} p_{in}^{-1} U_i$$

je otevřená neprázdná podmnožina U_n. Chceme ukázat, že $U_n' \subset \pi_n U$.

Pro dané $x \in U_n'$ potřebujeme tedy najít $y \in U$ takové, že $\pi_n y = x$. Zvolme $y := W_n x$. Jednoduše platí $\pi_n y = \pi_n W_n x = x$, zbývá nám tedy dokázat, že y je prvkem U. Protože $y \in S$, stačí nám k tomu, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je $\pi_i y \in U_i$.

Pro $i > n$ zřejmě platí $\pi_i y \in U_i = F_i$. Vezmeme-li $i \leq n$, víme z definice U_n', že $x \in p_{in}^{-1} U_i$, tedy $\pi_i y = p_{in}\pi_n W_n x = p_{in} x \in U_i$ a jsme hotovi. □

Věta 3.25. *Nechť pro $i \in \mathbb{N}$ je $\tilde{F}_i \subset F_i$ taková, že $p_i(\tilde{F}_i)$ je hustá podmnožina F_{i-1}.*

Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i(\tilde{F}_i)$ je hustá podmnožina S.

Důkaz. Vezměme si $\mathcal{B}$ bázi topologie na S z Lemmatu 3.24. Chceme tedy ukázat, že pro danou $U \in \mathcal{B}$ neprázdnou existuje n přirozené a $x \in \tilde{F}_n$ tak, že $W_n(x) \in U$.

Zvolme $n := n_U + 1$. Lemma 3.24 (ii) nám říká, že $\pi_{n-1}(U)$ obsahuje otevřenou podmnožinu. Existuje tedy $x \in \tilde{F}_n$ takové, že $p_n(x) \in \pi_{n-1}(U)$. Jinými slovy jsme našli $y \in U$ takové, že

$$\pi_{n-1}(y) = p_n(x) = p_n \pi_n W_n(x) = \pi_{n-1} W_n(x).$$

Z Lemmatu 3.24 (i) plyne, že $W_n(x) \in U$, a jsme hotovi. □

Důsledek 3.26. *Mějme $\tilde{F}_i \in F_i$ pro $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i(\tilde{F}_i)$ je hustá v S, platí-li některá z následujících podmínek:*

(i) *$\tilde{F}_i$ je hustá podmnožina F_i pro každé $i \in \mathbb{N}$.*

(ii) *$\tilde{F}_i = \operatorname{ext} F_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Díky předchozí větě nám stačí ukázat, že pro $i \in \mathbb{N}$ je $p_i(\tilde{F}_i)$ hustá v F_{i-1}. Pokud platí podmínka (i), dostaneme to jednoduše díky spojitosti projekce p_i.

Na druhou stranu, pokud máme (ii), bod (iv) Lemmatu 3.16 nám vlastně říká, že pro $i \in \mathbb{N}$ je $p_i(\operatorname{ext} F_i)$ husté v F_{i-1}, což je přesně to co potřebujeme. □

3.3 Hlavní důkaz

Důkaz Věty 3.1. Simplex S, který jsme zkonstruovali, obsahuje původní simplex F ve smyslu inkluze $W_0 \circ I$.

(i): Plyne z Lemmatu 3.23 (ii) v kombinaci s Důsledkem 3.26 (ii).

(ii): Díky ztotožnění F s F_0 (viz Věta 1.4) to plyne přímo z Lemmatu 3.23 (i).

(iii): Definujme

$$T\colon A^c(F) \to A^c(S)$$
$$f \mapsto f \circ I^{-1} \circ \pi_0$$

Protože jak π_0, tak I^{-1} jsou spojité a afinní, máme $Tf \in A^c(S)$ pro $f \in A^c(F)$ a T je tedy dobře definované.

Zobrazení $I^{-1} \circ \pi_0$ je na, a tedy pro $f \in A^c(F)$ platí:

$$\|Tf\| = \left\|f \circ I^{-1} \circ \pi_0\right\| = \sup_{x \in S} \left|f\big((I^{-1} \circ \pi_0)(x)\big)\right| = \sup_{x \in F} |f(x)| = \|f\|$$

Pro $x \in S$ máme $T1_F(x) = 1_F\big(I^{-1} \circ \pi_0(x)\big) = 1$, a tedy $T1_F = 1_S$.

A konečně, pro všechna $f \in A^c(F)$ máme

$$(Tf)\restriction_F = Tf \circ W_0 \circ I = f \circ I^{-1} \circ \pi_0 \circ W_0 \circ I = f.$$

(iv): Lemma 3.16 (i) nám vlastně říká, že $\mathrm{dc}(F_i) = \mathrm{dc}(F_{i-1}), i \in \mathbb{N}$. Navíc F je homeomorfní s F_0 a tudíž

$$\mathrm{dc}(F) = \mathrm{dc}(F_i), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

V Důsledku 3.26 (i) tedy můžeme zvolit množiny $\tilde{F}_i$ tak, aby kardinalita každé z nich byla $\mathrm{dc}(F)$, z čehož plyne, že $\mathrm{dc}(S) \leq \mathrm{dc}(F)$. Obrácenou nerovnost vidíme z faktu, že $I^{-1} \circ \pi_0$ je spojité zobrazení S na F.

(v): Zobrazení T z důkazu bodu (iii) je izometrické vnoření, a tedy máme $\mathrm{dc}(A^c(F)) \leq \mathrm{dc}(A^c(S))$. Pro $i \in \mathbb{N}$ si zavedeme, po vzoru T, zobrazení

$$T_i\colon A^c(F_i) \to A^c(S)$$
$$f \mapsto f \circ \pi_i.$$

Ze stejných argumentů jako výše jsou zobrazení T_i dobře definované izometrie.

Z Lemmatu 3.12 plyne, že $\mathrm{dc}(Y_i) = \mathrm{dc}(A^c(F_i)), i \in \mathbb{N}$, a Lemma 3.16 (ii) nám říká, že $\mathrm{dc}(Y_i) = \mathrm{dc}(Y_{i-1}), i \in \mathbb{N}$. Z tohoto, a z definice Y_0, pak máme

$$\mathrm{dc}(A^c(F)) = \mathrm{dc}(A^c(F_i)), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Zvolíme-li $\tilde{A}_i$ hustou podmnožinu $A^c(F_i)$ s kardinalitou $\mathrm{dc}(A^c(F))$, pak i $T_i\tilde{A}_i$ je husté v $T_iA^c(F_i)$ $(i \in \mathbb{N})$. Máme tedy $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i\tilde{A}_i$ hustou podmnožinu $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_iA^c(F_i)$ o kardinalitě $\aleph_0 \cdot \mathrm{dc}(F) = \mathrm{dc}(F)$. Abychom získali $\mathrm{dc}(A^c(F)) \geq \mathrm{dc}(A^c(S))$ nám stačí tedy dokázat, že $\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_iA^c(F_i)} = A^c(S)$.

Platí, že $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_iA^c(F_i)$ je podprostor $A^c(S)$ obsahující $1_S = T_1 1_{F_1}$. Chceme ukázat, že je hustým podprostorem. Díky Lemmatu 2.10 nám k tomu stačí, že $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_iA^c(F_i)$ odděluje body S.

Mějme dány x a y různé body v S. Pak existuje $j \in \mathbb{N}$ tak, že $\pi_j(x) \neq \pi_j(y)$. $A^c(F_j)$ odděluje body F_j, tedy existuje $f \in A^c(F_j)$ tak, že

$$T_jf(x) = f(\pi(x_j)) \neq f(\pi(y_j)) = T_jf(y).$$

(vi): Nechť F je sekvenciálně kompaktní. Pak z Lemmatu 3.16 (iii) jsou všechny simplexy $F_i, i \in \mathbb{N}$ taktéž sekvenciálně kompaktní.

Mějme dánu $(x_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$ posloupnost prvků S. Postupujeme indukcí pro $j \in \mathbb{N}$:

Z posloupnosti $(x_{j-1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ vybereme pomocí sekvenciální kompaktnosti F_j podposloupnost $(x_{j,i})_{i\in\mathbb{N}}$ tak, aby $(\pi_j x_{j,i})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergovala k nějakému $y^{(j)} \in F_j$. Navíc platí, že $p_j y^{(j)} = y^{(j-1)}$, protože p_j je spojitá.

Pak diagonální posloupnost $(x_{i,i})_{i\in\mathbb{N}}$ je podposloupností $(x_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergující k prvku $y \in S$, definovaném pomocí $\pi_i y := y^{(i)}, i \in \mathbb{N}$. Tedy S je sekvenciálně kompaktní. $\square$

Kapitola 4

Nejednoznačnost

V této kapitole využijeme předchozího výsledku k vybudování dvou simplexů S_1 a S_2 s hustými extreálními množinami a se stejnými, předem zadanými, kardinalitami nejmenších hustých podmnožin.

Pomocí toho, že konstrukce z předchozí kapitoly zachovává sekvenciální kompaktnost, ukážeme, že S_1 a S_2 nejsou afinně homeomorfní.

Věta 4.1 [7, Corollary 1.3]**.** *Buď κ nekonečný kardinál. Pak existují simplexy S_1 a S_2 takové, že*

(*i*) $\overline{\operatorname{ext} S_i} = S_i$, $i = 1, 2$,

(*ii*) $\operatorname{dc}(S_1) = \operatorname{dc}(S_2) = \kappa$,

(*iii*) $\operatorname{dc}(A^c(S_1)) = \operatorname{dc}(A^c(S_2))$,

ale takové, že $A^c(S_1)$ není izomorfní s $A^c(S_2)$. (To znamená, že S_1 a S_2 nejsou afinně homeomorfní.)

Navíc, pokud $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$, pak S_1 a S_2 můžeme zvolit tak, že

$$\operatorname{dc}(A^c(S_1)) = \operatorname{dc}(A^c(S_2)) = \kappa.$$

4.1 Hellyho prostor

Definice 4.2 [2, 5.M]**.** Zavedeme si *Hellyho prostor*:

$$E_1 := \left\{ f\colon [0,1] \to [0,1] \;\middle|\; f \text{ neklesající}, f(1) = 1 \right\}$$

s topologií zděděnou ze součinového prostoru $[0,1]^{[0,1]}$.

Lemma 4.3. *Hellyho prostor E_1 je kompaktní a konvexní množina a platí:*

(*i*) *E_1 je separabilní.*

(*ii*) *Kažý prvek E_1 má spočetnou bázi okolí.*

(*iii*) *E_1 je sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz. Vidíme, že E_1 je uzavřená podmnožina kompaktu $[0,1]^{[0,1]}$, a je to tedy kompakt. S vektorovými operacemi po složkách je E_1 konvexní množina.

(i): Označme si $I := [0,1]$. Pak

$$\mathcal{B} := \left\{ E_1 \cap \prod_{x\in I} U_x \;\middle|\; U_x \subset I \text{ otevřená, } \exists\, \Gamma_U \subset I \text{ konečná } \forall\, x \in I \setminus \Gamma_U : U_x = I \right\}$$

je báze topologie na E_1. Každá neprázdná $U \in \mathcal{B}$ obsahuje nějakou po částech spojitou funkci. Tu navíc můžeme zvolit tak, aby její hodnoty i body skoku byly racionální. To znamená, že E_1 je separabilní.

(ii): Zafixujme si libovolnou funkci $f \in E_1$. Označíme si Q množinu všech otevřených intervalů v I s racionálními mezemi (uvažujeme $I \in Q$) a definujeme

$$\Gamma := \{x \in I \mid f \text{ nespojitá v } x\} \cup (I \cap \mathbb{Q})$$

$$\mathcal{R} := \left\{ E_1 \cap \prod_{x\in I} U_x \;\middle|\; U_x \in Q,\ \exists\, \Gamma_U \subset \Gamma \text{ konečná } \forall\, x \in I \setminus \Gamma_U : U_x = I \right\}$$

Protože funkce f má nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti (viz například [9, Theorem 4.30]), jsou Γ i $\mathcal{R}$ spočetné množiny.

Ukážeme, že $\mathcal{R}$ tvoří bázi okolí f. Mějme tedy dánu otevřenou množinu $U \in \mathcal{B}$ obsahující f, tj. $U = E_1 \cap \prod_{x\in I} U_x$, kde $U_x \subset I$ jsou otevřené. Nechť Γ_U je konečná množina taková, že $U_x = I$ pro $x \in I \setminus \Gamma_U$. Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že pro každé $x \in I$ je $U_x \in Q$.

Pro každé $x \in \Gamma_U$ je buď $x \in \Gamma$, pak označíme $V_x := U_x$. Nebo je $x \notin \Gamma$, pak je f v x spojitá a můžeme najít racionální čísla y_1, y_2 taková, že $y_1 < x < y_2$, pro které platí $f(y_1) \in U_x$, $f(y_2) \in U_x$. V tom případě definujeme $V_{y_1} := V_{y_2} := U_x$.

Pro všechna ostatní $x \in I$ ještě označíme $V_x := I$. Pak

$$V := E_1 \cap \prod_{x\in I} V_x$$

je otevřená množina obsahující f. Zbývá nám ukázat, že $V \subset U$.

Nechť $g \in V$. Pak pro každé $x \in \Gamma_U$ je buď $x \in \Gamma$, potom $g(x) \in V_x = U_x$. Nebo $x \notin \Gamma$ a pak máme $y_1 < x < y_2$, pro které platí $g(y_j) \in V_{y_j} = U_x$. Protože g je neklesající, máme i $g(x) \in U_x$. Pro $x \notin \Gamma_U$ je $U_x = I$, a tedy $g \in U$.

(iii): Vímme že E_1 je kompakt a platí (ii). Sekvenciální kompaktnost tedy plyne z [2, Theorem 5.5]. □

Definice 4.4. Pro $x \in [0,1]$ si jako δ_x označíme spojitou afinní funkci na E_1 danou předpisem $\delta_x(f) := f(x)$.

Lemma 4.5. *Platí*

(i) $\mathrm{dc}(A^c(E_1)) = 2^{\aleph_0}$.

(ii) $\mathrm{span}\,\{\delta_x \mid x \in [0,1]\}$ *je hustý podprostor* $A^c(E_1)$.

Důkaz. (i) Pro $x, y \in [0,1], x \neq y$, platí $\|\delta_x - \delta_y\| = 1$. $\{\delta_x \mid x \in [0,1]\}$ je tedy diskrétní podmnožinou o kardinalitě kontinua. Navíc víme že, E_1 je separabilní, a s pomocí Lemmatu 2.13 dohromady dostaneme

$$2^{\aleph_0} = \mathrm{card}([0,1]) \leq \mathrm{dc}(A^c(E_1)) \leq 2^{\mathrm{dc}(E_1)} = 2^{\aleph_0}.$$

(ii) Protože $\{\delta_x \mid x \in [0,1]\}$ odděluje body E_1 a $\delta_1 = 1_{E_1}$, plyne tvrzení přímo z Lemmatu 2.10. □

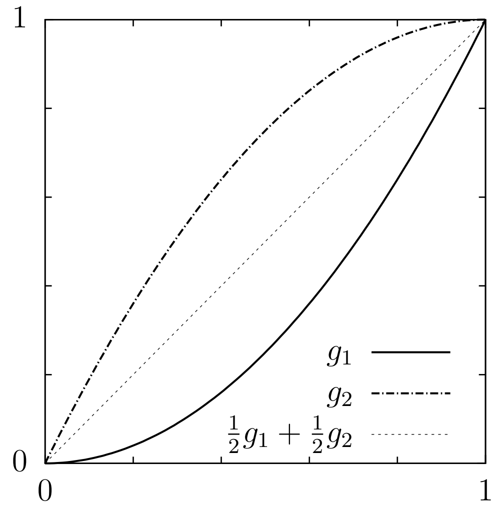
Lemma 4.6. *Pro Hellyho prostor E_1 platí*

$$\operatorname{ext}(E_1) = \bigl\{ f \in E_1 \mid f([0,1]) \subset \{0,1\} \bigr\}.$$

Důkaz. Označíme si $E_1' := \bigl\{ f \in E_1 \mid f([0,1]) \subset \{0,1\} \bigr\}$. Zřejmě platí $E_1' \subset \operatorname{ext} E_1$ a my budeme chtít dokázat rovnost. Zavedeme si funkce

$$g_1(x) := x^2, \qquad g_2(x) := 2x - x^2, \qquad x \in [0,1].$$

Pak g_1, g_2 jsou rostoucí funkce zobrazující interval $[0,1]$ na $[0,1]$, pro které navíc platí $\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.



Obrázek 2: Funkce g_1 a g_2.

Mějme dánu funkci $f \in E_1$. Pro $i = 1,2$ si označíme $f_i := g_i \circ f$. Zřejmě $f_i([0,1]) \subset [0,1]$ a $f_i(1) = 1$. Pokud vezmeme $0 \le x_1 < x_2 \le 1$, pak platí $f(x_1) \le f(x_2)$. A protože g_i je rostoucí dostaneme i $f_i(x_1) \le f_i(x_2)$, $i = 1,2$. To znamená, že $f_1, f_2 \in E_1$.

Jednoduše vidíme, že $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 = f$ a že $f_1 = f_2$, právě když $f \in E_1'$. To znamená, že $\operatorname{ext} E_1 \subset E_1'$. □

Věta 4.7. *Hellyho prostor E_1 je simplex.*

Důkaz. Ukážeme, že $A^c(E_1)$ má slabou Rieszovu interpolační vlastnost. Pak budeme díky Větě 2.5 hotovi.

Mějme dány funkce $f_1, f_2, g_1, g_2 \in A^c(E_1)$ splňující $f_1 \vee f_2 < g_1 \wedge g_2$. Protože $g_1 \wedge g_2 - f_1 \vee f_2$ je spojitá a kladná funkce na kompaktu E_1, nabývá svého minima. Díky Lemmatu 4.5 (*ii*) můžeme tedy (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že

$$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \operatorname{span}\bigl\{ \delta_x \mid x \in [0,1] \bigr\}.$$

To znamená, že máme afinní funkce tvaru

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i}, \qquad f_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i \delta_{x_i}, \qquad g_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i}, \qquad g_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \delta_{x_i},$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, i \in 1, \ldots, n$ a $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = 1$.[1] Budeme chtít najít funkci tvaru

$$h = \sum_{i=1}^{n} e_i \delta_{x_i}, \qquad e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}$$

takovou, že pro každé $\varphi \in E_1$ je

$$f_1(\varphi) \vee f_2(\varphi) < h(\varphi) < g_1(\varphi) \wedge g_2(\varphi). \tag{3}$$

Uvažované afinní funkce ale závisí pouze na hodnotách φ v bodech $x_1, \ldots, x_n$. To znamená, že (3) platí, právě když pro každé $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n = 1$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \vee \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \right) < \sum_{i=1}^{n} e_i y_i < \left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \wedge \sum_{i=1}^{n} d_i y_i \right). \tag{4}$$

Koeficienty e_i zavedeme takto:

$$\tilde{e}_j := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=j}^{n} a_i \vee \sum_{i=j}^{n} b_i \; + \; \sum_{i=j}^{n} c_i \wedge \sum_{i=j}^{n} d_i \right), \qquad j = 1, \ldots, n,$$
$$e_n := \tilde{e}_n, \qquad e_j := \tilde{e}_j - \tilde{e}_{j+1}, \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

Všimneme si, že $\sum_{i=j}^{n} e_i = \tilde{e}_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$. Z předpokladů navíc víme, že $(f_1 \vee f_2)(\chi_{[x_j,1]}) < (g_1 \wedge g_2)(\chi_{[x_j,1]})$ platí pro každé j. To nám dá tyto nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=j}^{n} a_i \vee \sum_{i=j}^{n} b_i \right) < \tilde{e}_j < \left(\sum_{i=j}^{n} c_i \wedge \sum_{i=j}^{n} d_i, \right) \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Zafixujme nyní $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n = 1$ a pojmenujme si ještě $y_0 := 0$. Protože $\{y_j - y_{j-1}\}_{j=1}^{n}$ jsou nezáporná čísla mezi nimiž je alespoň jedno kladné, po rozepsání díky předchozím nerovnostem dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i y_i &= \sum_{i=1}^{n} e_i \Big(\sum_{j=1}^{i} y_j - y_{j-1} \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=j}^{n} e_i \Big) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{e}_j (y_j - y_{j-1}) \\ &> \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=j}^{n} a_i \Big) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j. \end{aligned}$$

Ze stejného důvodu platí i $\sum_{j=1}^{n} e_j y_j > \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$ a analogicky dokážeme i $\sum_{i=1}^{n} e_i y_i < (\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \wedge \sum_{i=1}^{n} d_i y_i)$. Tím jsme ukázali platnost (4) a jsme hotovi. $\square$

Shrnutí 4.8. Z Lemmat 4.3 a 4.5 spolu s Větou 4.7 získáme, že Hellyho prostor je separabilní sekvenciálně kompaktní simplex, pro který platí $\mathrm{dc}(A^c(E_1)) = 2^{\aleph_0}$.

[1] Kdyby totiž $x_n \neq 1$, pak $f_1(\chi_{\{1\}}) = 0 = g_1(\chi_{\{1\}})$.

4.2 Další simplexy

Lemma 4.9. *Existuje separabilní simplex E_2, který není sekvenciálně kompaktní a platí pro něj* $\mathrm{dc}(A^c(E_2)) = 2^{\aleph_0}$.

Důkaz. Z [1, Corollary 15.2] víme, že $\ell_\infty(\mathbb{N})$ je izometricky izomorfní s $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, kde $\beta\mathbb{N}$ je Stone–Čechova kompaktifikace přirozených čísel. Tedy i $\ell_\infty(\mathbb{N})^*$ je izometricky izomorfní s $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})^* = \mathscr{M}(\beta\mathbb{N})$.

Za E_2 si zvolíme $\mathscr{M}_1(\beta\mathbb{N})$, braný jako podprostor $\ell_\infty(\mathbb{N})^*$. Tedy

$$E_2 := \left\{\mu \in \ell_\infty(\mathbb{N})^* \mid \mu(1_\mathbb{N}) = 1, \mu \geq 0\right\} \simeq \mathscr{M}_1(\beta\mathbb{N}).$$

Prostor E_2 budeme uvažovat s w^*-topologií, a z Tvrzení 2.15 tedy vidíme, že E_2 je separabilní simplex. S pomocí Tvrzení 2.16 a Lemmatu 2.12 dostaneme

$$\mathrm{dc}(A^c(E_2)) = \mathrm{dc}(\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})) = \mathrm{dc}(\ell_\infty(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}.$$

Ukážeme, že $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je posloupnost ze které nelze vybrat w^*-konvergentní podposloupnost, a tedy, že E_2 není sekvenciálně kompaktní.

Nechť je vybraná podposloupnost indexovaná přirozenými čísly $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pokud by existovala míra $\mu \in \mathscr{M}_1(\beta\mathbb{N})$ taková, že $\varepsilon_{i_k} \xrightarrow{w^*} \mu$, znamenalo by to, že pro každou $f \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ platí $\varepsilon_{i_k}(f) = f(i_k) \to \mu(f)$. Protože ale $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})\restriction_\mathbb{N} = \ell_\infty(\mathbb{N})$, můžeme najít $f \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$ tak, že $f(i_k) = 1$ pro k liché a $f(i_k) = 0$ pro k sudé a to je spor. □

Lemma 4.10 [7, Lemma 3.3]. *Nechť κ je nekonečný kardinál. Pak existují simplexy F_1 a F_2 takové, že*

$$\mathrm{dc}(F_1) = \mathrm{dc}(F_2) = \kappa, \qquad \mathrm{dc}(A^c(F_1)) = \mathrm{dc}(A^c(F_2)) = 2^{\aleph_0}\cdot\kappa,$$

přičemž F_1 je sekvenciálně kompaktní a F_2 není sekvenciálně kompaktní.

Důkaz. Vezměme diskrétní množinu Γ o kardinalitě κ. Jako $\Gamma_\infty := \Gamma \cup \{\infty\}$ pak budeme značit jednobodovou (Alexandrovovu) kompaktifikaci Γ. Díky Tvrzení 2.15 vidíme, že $\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$, bráno s w^*-topologií, je simplex, pro který platí $\mathrm{dc}(\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)) \leq \kappa$. Spojité funkce na Γ_∞ mají tvar

$$\mathcal{C}(\Gamma_\infty) = \left\{f\colon \Gamma \to \mathbb{R} \mid \exists x\in\mathbb{R}\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\Gamma_0\subset\Gamma \text{ konečná} : \|f\restriction_{\Gamma\setminus\Gamma_0} - x\| < \varepsilon\right\},$$

a tedy díky Tvrzení 2.16 platí

$$c(\Gamma) := \mathrm{span}\big(\{1_\Gamma\} \cup c_0(\Gamma)\big) = \mathcal{C}(\Gamma_\infty)\restriction_\Gamma,$$

$$A^c(\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)) \simeq \mathcal{C}(\Gamma_\infty) \simeq c(\Gamma).$$

Jinými slovy, $c(\Gamma)$ je simplexový prostor nad simplexem $\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$. Z vlastností $c_0(\Gamma)$ a z definice $c(\Gamma)$ vidíme, že $\mathrm{dc}(c(\Gamma)) = \kappa$.

Pro $\gamma \in \Gamma$ je charakteristická funkce χ_γ spojitá na Γ_∞. Zavedeme si množiny

$$U_\gamma := \left\{\mu \in \mathscr{M}_1(\Gamma_\infty) \mid \mu(\chi_\gamma) > \tfrac{3}{4}\right\}, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Pak $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ je systém po dvou disjunktních otevřených podmnožin $\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$. To znamená, že $\mathrm{dc}(\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)) = \kappa$.

Pravděpodobnostní míry na Γ_∞ vypadají takto:

$$\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty) = \left\{ \mu_\infty \varepsilon_\infty + \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i \varepsilon_{\gamma_i} \,\middle|\, \{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Gamma,\ \mu_i, \mu_\infty \geq 0,\ \mu_\infty + \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i = 1 \right\}.$$

Vezmeme-li $\mu \in \mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$ jako výše, pak na element $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i \varepsilon_{\gamma_i}$ můžeme nahlížet jako na prvek $B(c_0(\Gamma)^*)$. To je z Tvrzení 2.14 w^*-sekvenciálně kompaktní prostor, z čehož můžeme vidět, že i $\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$ je w^*-sekvenciálně kompaktní.

Vezmeme simplexy E_1 ze Shrnutí 4.8 a E_2 z Lemmatu 4.9. Víme, že to jsou separabilní simplexy pro něž platí $\mathrm{dc}(A^c(E_i)) = 2^{\aleph_0}, i = 1, 2$, E_1 je sekvenciálně kompaktní, zatímco E_2 není. Ve zbytku důkazu bereme $i = 1, 2$. Na každý simplex můžeme nahlížet jako na podmnožinu nadroviny lokálně konvexního prostoru, která neprotíná počátek, a s tím označíme

$$\begin{aligned} F_i :=& \operatorname{co}\big(E_i \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)\big) \\ =& \big\{(\lambda x, (1-\lambda)y) \mid x \in E_i, y \in \mathscr{M}_1(\Gamma_\infty), \lambda \in [0,1]\big\}. \end{aligned}$$

Nyní dokážeme, že $A^c(F_i)$ má Rieszovu dekompoziční vlastnost, a tedy díky Větě 2.5, že F_i je simplex. Každá spojitá afinní funkce na F_i je tvaru

$$(\varphi, \psi)\colon (\lambda x, (1-\lambda)y) \mapsto \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\psi(y),$$

pro nějaké vhodné $\varphi \in A^c(E_i)$ a $\psi \in A^c(\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty))$. Mějme tedy dány nezáporné $f_j = (\varphi_j, \psi_j) \in A^c(F_i)$, $j = 0, 1, 2$ takové, že $f_0 \leq f_1 + f_2$. Pak

$$\varphi_0(x) = f_0(x, 0) \leq f_1(x, 0) + f_2(x, 0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \qquad x \in E_i,$$

a tedy $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 + \varphi_2$. Zřejmě i φ_1 a φ_2 jsou nezáporné a analogicky získáme stejný výsledek pro $\psi_j, j = 0, 1, 2$. Protože E_i i $\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$ jsou simplexy, můžeme podle již zmíněné Věty 2.5 najít funkce $\varphi_1', \varphi_2' \in A^c(E_i)$ a $\psi_1', \psi_2' \in A^c(\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty))$ tak, že

$$\varphi_0 = \varphi_1' + \varphi_2', \quad \psi_0 = \psi_1' + \psi_2', \quad 0 \leq \varphi_j' \leq \varphi_j, \quad 0 \leq \psi_j' \leq \psi_j, \quad j = 1, 2.$$

Teď nám stačí označit

$$f_1' := (\varphi_1', \psi_1') \qquad \text{a} \qquad f_2' := (\varphi_2', \psi_2').$$

Jednoduše vidíme, že f_1' a f_2' jsou nezáporné spojité afinní funkce, jejichž součet je funkce f_0. $A^c(F_i)$ má tedy požadovanou vlastnost a F_i je simplex.

Navíc platí

$$\mathrm{dc}(A^c(F_i)) = \mathrm{dc}(A^c(E_i)) \cdot \mathrm{dc}(c(\Gamma)) = 2^{\aleph_0} \cdot \kappa,$$

$$\mathrm{dc}(F_i) = \mathrm{dc}(E_i) \cdot \mathrm{dc}(\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)) = \kappa.$$

Dále jednoduše vidíme, že F_2 není sekvenciálně kompaktní (Protože v sobě obsahuje kopii simplexu E_2, který není.) Zbývá dokázat, že F_1 tuto vlastnost má. Mějme v F_1 dánu posloupnost $(\lambda_i x_i, (1-\lambda_i)y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Protože prostory $\mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$, E_1 i $[0, 1]$ jsou sekvenciálně kompaktní, postupně přejdeme k podposloupnosti (beze změny značení) tak, aby

$$\lambda_i \to \lambda, \qquad x_i \to x, \qquad y_i \to y, \qquad \text{pro } i \to \infty.$$

pro nějaké vhodné $\lambda \in [0, 1]$, $x \in E_1$ a $y \in \mathscr{M}_1(\Gamma_\infty)$. Vybraná podposloupnost $(\lambda_i x_i, (1-\lambda_i)y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pak konverguje k $(\lambda x, (1-\lambda)y)$. □

Důkaz Věty 4.1. Pro daný kardinál κ vezmeme simplexy F_1, F_2 z Lemmatu 4.10 a pomocí Věty 3.1 z nich vytvoříme simplexy S_1 a S_2 pro které platí

$$\overline{\operatorname{ext}(S_i)} = S_i, \qquad \operatorname{dc}(S_i) = \kappa, \qquad \operatorname{dc}(A^c(S_i)) = 2^{\aleph_0} \cdot \kappa, \qquad i = 1, 2,$$

S_1 je sekvenciálně kompaktní ale S_2 není, protože v sobě obsahuje kopii sekvenciálně nekompaktního F_2. Nyní dokážeme, že $A^c(S_1) \not\simeq A^c(S_2)$. Pro spor předpokládejme, že existuje surjektivní izomorfismus $T\colon A^c(S_1) \to A^c(S_2)$.

Z Věty 1.4 vidíme, že $\mathscr{S}(A^c(S_1))$ je w^*-sekvenciálně kompaktní. Protože

$$B(A^c(S_i)^*) = \operatorname{co}\big(\mathscr{S}(A^c(S_i)) \cup -\mathscr{S}(A^c(S_i))\big), \qquad i = 1, 2,$$

je i $B(A^c(S_1)^*)$ w^*-sekvencialní kompakt. Operátor T^* zobrazuje $\mathscr{S}(A^c(S_2))$ na podmnožinu $\|T^*\|\, B(A^c(S_1)^*)$. Protože $\mathscr{S}(A^c(S_2))$ je w^*-kompaktní a operátor T^* je w^*-spojitý víme, že $T^*\mathscr{S}(A^c(S_2))$ je dokonce uzavřená v $\|T^*\|\, B(A^c(S_1)^*)$, a tedy sekvenciálně kompaktní. Předpokládali jsme, že T je na, z čehož vyplývá, že sekvenciálně kompaktní je i $\mathscr{S}(A^c(S_2))$, a tedy (opět díky Věty 1.4) i S_2. To je spor, a tudíž $A^c(S_1)$ není izomrorfní s $A^c(S_2)$, a následně S_1 není afinně homeomorfní s S_2. □

Seznam použité literatury

[1] Carothers, N. L.: *A Short Course on Banach Space Theory*. Cambridge University Press, 2005.

[2] Kelley, J. L.: *General topology*. Van Nostrand Company, Inc., Toronto, New York, London, 1955.

[3] Lazar, A. J.; Lindenstrauss, J.: Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices. *Acta Math.*, ročník 126, 1971: s. 165–194.

[4] Lindenstrauss, J.: *Extension of compact operators*. číslo 48 v Memoirs of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, 1964.

[5] Lindenstrauss, J.; Olsen, G.; Sternfeld, Y.: The Poulsen simplex. *Commun. Math. Phys.*, ročník 28, č. 1, 1978: s. 91–114.

[6] Lukeš, J.; Malý, J.; Netuka, I.; aj.: *Integral representation theory: applications to convexity, Banach spaces and potential theory*. Walter de Gruyter, 2010.

[7] Lusky, W.: On nonseparable simplex spaces. *Math. Scand.*, ročník 61, 1987: s. 276–285.

[8] Phelps, R. R.: *Lectures on Choquet's Theorem*. číslo 1757 v Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2001.

[9] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, třetí vydání, 1976.