Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ján Rušin

Paradoxy v teorii pravděpodobnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jiří Haman

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2012

Na tomto mieste by som sa veľmi rád poďakoval Mgr. Jiřímu Hamanovi za odborné vedenie, trpezlivosť a čas venovaný konzultáciám. Tiež mu vďačím za mnohé cenné pripomienky a podnetné návrhy, ktoré pomohli vylepšiť túto prácu. Rovnako sa chcem poďakovať všetkým, ktorí ma neustále podporujú, pretože vďaka nim sa dosahovanie zvolených cieľov stáva ľahším.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 24.5.2012 Ján Rušin

Název práce: Paradoxy v teorii pravděpodobnosti

Autor: Ján Rušin

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jiří Haman

Abstrakt: Táto bakalárska práca sa zaoberá prehľadom a popisom vybraných paradoxov z teórie pravdepodobnosti. Menovite uvedieme paradox Montyho Halla, Bertrandov paradox a Petrohradský paradox. Čitateľ je v každej kapitole najprv oboznámený so zadaním paradoxu a s jeho podstatou. Potom je k uvedenému paradoxu predvedených niekoľko prístupov k jeho riešeniu. V pôvodnom zadaní Monty Hallovho paradoxu existuje len jedno riešenie, ku ktorému nás privedú dva rôzne postupy. Tento paradox doplníme tiež jednoduchými modifikáciami. Zadanie Bertrandovho paradoxu je vo svojej podstate nejednoznačné, čo ukážeme na štyroch vybraných prístupoch. Podobná situácia sa vyskytne aj v Petrohradskom paradoxe, ktorý vyriešime tromi vybranými prístupmi.

Klíčová slova: Monty Hallov paradox, Bertrandov paradox, Petrohradský paradox, úžitková funkcia

Title: Paradoxes in the Probability Theory

Author: Ján Rušin

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Jiří Haman

Abstract: The Bachelor's thesis present an overview and description of selected probability theory paradoxes, namely the paradox of Monty Hall, the Bertrand's paradox and the St. Peterburg paradox. In every chapter the reader is at first apprised of the formulation and the essence of the paradox. Then we show some possible solutions of this paradox. In original formulation of Monty Hall paradox there exists just one solution which can be reached by using two different ways. We add also some simple modifications to this particular paradox. The formulation of Bertrand's paradox is ambiguous which we show by using four selected approaches. And very similar situation arises in St. Peterburg paradox which we resolve by using three different approaches.

Keywords: Monty Hall paradox, Bertrand's paradox, St. Peterburg paradox, utility function

Obsah

Úvod **1**

1 Monty Hallov paradox **2**
1.1 Zadanie úlohy . . . 2
1.2 Podstata paradoxu . . . 2
1.3 Riešenie úlohy . . . 3
1.3.1 Bayesova veta . . . 3
1.3.2 Riešenie s využitím Bayesovej vety . . . 4
1.3.3 Riešenie s využitím rozhodovacieho stromu . . . 5
1.3.4 Overenie riešenia s využitím softwaru . . . 6
1.4 Riešenie modifikovaného problému . . . 7

2 Bertrandov paradox **9**
2.1 Zadanie úlohy . . . 9
2.2 Podstata paradoxu . . . 9
2.3 Riešenie úlohy . . . 9
2.3.1 Riešenie voľbou koncových bodov tetivy . . . 9
2.3.2 Riešenie voľbou stredu tetivy . . . 10
2.3.3 Riešenie voľbou vzdialenosti stredov tetivy a kružnice . . . 11
2.3.4 Riešenie voľbou dĺžky tetivy . . . 12

3 Petrohradský paradox **14**
3.1 Zadanie úlohy . . . 14
3.2 Podstata paradoxu . . . 14
3.3 Riešenie úlohy . . . 14
3.3.1 Riešenie za predpokladu obmedzených zdrojov . . . 15
3.3.2 Riešenie za predpokladu uvažovania funkcie úžitku . . . 16
3.3.3 Riešenie za predpokladu neobmedzených zdrojov . . . 19

Záver **23**

Zoznam použitej literatúry **24**

Prílohy **25**

Úvod

Cieľom tejto práce je predovšetkým prehľadne popísať vybrané pravdepodobnostné paradoxy, vystihnúť ich podstatu a predstaviť prístupy k ich riešeniu. Práca je rozčlenená do niekoľkých kapitol, pričom v každej kapitole sa venujeme jednému paradoxu.

V 1. kapitole spoznáme Monty Hallov paradox, ktorého riešenie je málo intuitívne, a preto je správny výsledok považovaný za paradoxný. Ukážeme postup riešenia s využitím Bayesovej vety, priblížime riešenie založené na jednoduchej úvahe znázornené rozhodovacím stromom a na záver budeme výsledky demonštrovať graficky znázornenými simuláciami vytvorenými v softwari Wolfram Mathematica 8.0. Taktiež ukážeme riešenie problému pre dve vybrané modifikované zadania.

V 2. kapitole sa zoznámime s tzv. Bertrandovým paradoxom. V jeho riešení využijeme definíciu geometrickej pravdepodobnosti. Tento paradox sa týka rôznych mechanizmov pre voľbu náhodnej tetivy v kružnici a zistenie pravdepodobnosti, s ktorou spĺňa zadanú podmienku. Hoci zadanie úlohy vyzerá jednoznačne, paradoxne vedie k rôznym výsledkom. Ukážeme, že je to tak v prípade, kedy je náhodná tetiva určená svojimi koncovými bodmi, svojím stredom, vzdialenosťou jej stredu od stredu kružnice a tiež jej dĺžkou.

V poslednej kapitole predstavíme fiktívnu hazardnú hru a s ňou súvisiaci Petrohradský paradox. Cieľom bude vyčísliť spravodlivú čiastku, ktorú by kasíno malo od hráča požadovať za hranie takejto hry. Najprv výsledok spočítame za predpokladu obmedzenosti finančných zdrojov hráča i kasína. Neskôr budeme zohľadňovať očakávanie hráča od hry a v tomto prístupe využijeme poznatky o úžitkových funkciách. V ďalšom prístupe k riešeniu problému uvážime možnosť zahrať si pevne zvolený počet hier a určíme spravodlivý poplatok za predpokladu neobmedzených finančných zdrojov hráča i kasína.

1. Monty Hallov paradox

1.1 Zadanie úlohy

Monty Hallov problém, taktiež známy ako paradox troch dverí, je úloha pomenovaná na základe televíznej hry Let's Make a Deal, ktorú moderoval Monty Hall.

Zadanie problému budeme formulovať takto: Predstavme si, že sa nachádzame v miestnosti, ktorá má troje dverí. Moderátor, ktorý je poctivý a nepodvádza, ukryl auto za jedny dvere. Za každé zo zvyšných dverí umiestnil cenu útechy, ktorá je reprezentovaná kozou. Všetky tri ceny moderátor umiestnil náhodne. Jediný, kto vie, ako sú ceny umiestnené, je moderátor. Jadro problému pozostáva z troch krokov v uvedenom poradí:

(1) Naša voľba jedných dverí, ktoré sú podľa nás výherné. Od tejto voľby sa odvíja krok (2).

(2) Moderátor otvorí iné než nami zvolené dvere. Druhou podmienkou je, aby za otvorenými dverami nebola výhra. V prípade viacerých možností sa moderátor rozhoduje náhodne. Moderátor nám ukáže, že za otvorenými dverami je skutočne koza.

(3) Moderátor nám poskytne možnosť ponechať si dvere vybrané v kroku (1) alebo zmeniť prvý výber. Prípadná zmena znamená výber zvyšných zatvorených dverí. Náš výber v kroku (3) je konečný a moderátor otvorí nami zvolené dvere v tomto kroku. Dozvieme sa teda, čo sme vyhrali. Týmto sa hra končí.

Navyše predpokladáme, že sme oboznámení s úplnými pravidlami hry pred jej začiatkom. Čo je pre nás v kroku (3) výhodnejšie? Ponechať si pôvodne vybrané dvere, alebo v záverečnom rozhodovaní zmeniť výber? Alebo je to úplne jedno?

1.2 Podstata paradoxu

Intuitívny prístup k problému nás vedie k rýchlemu záveru, že riešenie nezávisí na minulosti. Jedinou uznávanou skutočnosťou sa v tomto prípade stáva fakt, že jedny dvere sú otvorené, a preto ich viac neberieme do úvahy. S týmto prístupom máme v záverečnom rozhodovaní k dispozícii len dve možnosti. Ceny boli na začiatku moderátorom umiestnené náhodne, teda pravdepodobnosť výhry je rovnaká pre prvé aj druhé dvere, a to 1/2. Záverom tejto úvahy je odpoveď, že je úplne jedno, pre ktoré dvere sa nakoniec rozhodneme. Tento záver je ale nesprávny. Paradoxne je pre nás lepšie pôvodnú voľbu dverí zmeniť. Pokiaľ moderátor v kroku (2) otvorí jedny nevýherné dvere podľa pravidiel, zvýši tak pre nás pravdepodobnosť výhry auta pri záverečnej zmene.

1.3 Riešenie úlohy

K správnemu riešeniu sa dá dopracovať rôznymi metódami. My uvedieme dva rôzne postupy. Na začiatku si pre úplnosť pripomenieme niekoľko základných pojmov a viet z teórie pravdepodobnosti, ktoré neskôr využijeme. Nájdeme ich napríklad v [2] na str. 10 až 12, resp. v [6] na str. 27 až 29.

1.3.1 Bayesova veta

Definícia 1.1. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Ďalej nech platí, že $A, B \in \mathcal{A}$ a $P(B) > 0$. Potom **podmienená pravdepodobnosť** náhodného javu A za podmienky náhodného javu B je definovaná ako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.1}$$

Poznámka 1.2. Následkom vzťahu (1.1) je

$$P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B). \tag{1.2}$$

V definícii sme uvažovali $P(B) > 0$. Ďalej platí, že $(A \cap B) \subset B$. Pre $P(B) = 0$ teda dostaneme, že aj $P(A \cap B) = 0$. Vzťah (1.2) má preto zmysel aj pre $P(B) = 0$. Vďaka symetrii ľavej strany výrazu (1.2) v náhodných javoch A a B môžeme rovnosť (1.2) zapísať tiež ako

$$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A). \tag{1.3}$$

Definícia 1.3. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a ďalej nech platí, že $A, B \in \mathcal{A}$. Pokiaľ platí rovnosť

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B), \tag{1.4}$$

potom sa A a B nazývajú **nezávislé náhodné javy**.

Vzťah (1.4) sa dá ekvivalentne nahradiť vzťahom $P(A|B) = P(A)$, respektíve $P(B|A) = P(B)$ vďaka už spomínanej symetrii. Okrem podmienenej pravdepodobnosti budeme využívať aj vlastnosti úplného systému javov, ktorými je tento systém určený. Táto definícia je zároveň poslednou potrebnou definíciou v tejto časti.

Definícia 1.4. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Povieme, že náhodné javy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ tvoria **úplný systém javov**, ak platí

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad$ pre $\quad i \neq j$,

(ii) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$.

Teraz už môžeme s pomocou definície 1.1. a definície 1.4. pristúpiť k formulácii a k dôkazu vety o úplnej pravdepodobnosti. S jej pomocou potom dokážeme Bayesovu vetu.

Veta 1.5. (o úplnej pravdepodobnosti) Nech $A_1, A_2, \dots$ je úplný systém javov v pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ taký, že platí $P(A_i) > 0$ pre každé $i = 1, 2, \dots$ Potom

$$P(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B|A_i)\, P(A_i). \tag{1.5}$$

Dôkaz: Využijeme vopred pripravenú definíciu úplného systému javov. S jej pomocou totiž budeme uvažovanú pravdepodobnosť postupne upravovať.

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B \cap A_i).$$

Táto rovnosť platí, pretože náhodné javy $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots$ sú nezlučiteľné, tj. platí podmienka (i) z definície 1.4. Dokazované tvrdenie dostaneme v požadovanom tvare po jednoduchej aplikácii rovnice (1.3). □

Veta 1.6. (Bayesova veta) Nech platia podmienky z vety 1.5. a naviac nech platí, že $P(B) > 0$. Potom platí

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{+\infty} P(B|A_i)\, P(A_i)}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

Dôkaz: Všimneme si, že podľa vzťahov (1.2) a (1.3) sa dá $P(A \cap B)$ vyjadriť dvoma rôznymi spôsobmi. Teda platí $P(A|B)\, P(B) = P(B|A)\, P(A)$. Podľa tejto rovnosti môžeme pre ktorékoľvek j písať

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{P(B)}.$$

Teraz už len stačí do tohoto vzťahu dosadiť podľa (1.5) a získame

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{+\infty} P(B|A_i)\, P(A_i)}.$$

□

1.3.2 Riešenie s využitím Bayesovej vety

V tomto riešení budeme uvažovať nasledujúcu konkrétnu situáciu: V prvom kroku si vyberieme dvere číslo 3. V druhom kroku moderátor otvorí dvere číslo 1, za ktorými je ukrytá koza v súlade s pravidlami hry. Aká je pravdepodobnosť, povedzme p, výhry auta pri ponechaní prvého výberu v záverečnom rozhodovaní? Aká je pravdepodobnosť, povedzme q, výhry auta pri zmene prvého výberu v záverečnom rozhodovaní? Je dobré si uvedomiť, že sa môžeme obmedziť len na túto konkrétnu situáciu, pretože ostatné situácie sa riešia analogicky.

Zavedieme nasledujúce označenie náhodných javov:

- $A_i := \{\text{Dvere číslo } i \text{ sú výherné}\}, \quad i = 1, 2, 3,$
- $B_j := \{\text{Moderátor otvorí dvere číslo } j\}, \quad j = 1, 2, 3.$

Označme r pravdepodobnosť náhodného javu, že v prvej voľbe si vyberieme vyhrávajúce dvere. Vďaka náhodnému počiatočnému rozmiestneniu cien moderátorom vieme, že $r = P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Náš cieľ je spočítať všetky podmienené pravdpodobnosti, že dvere číslo i sú výherné za podmienky, že moderátor otvorí dvere číslo 1. Prípadné podmienené pravdepodobnosti za podmienky, že moderátor otvorí dvere číslo 2, sa spočítajú analogicky. Navyše z pravidiel hry vieme, že moderátor určite neotvorí nami vybrané dvere číslo 3, tj. $P(B_3) = 0$. S využitím vzťahu (1.6) z Bayesovej vety budeme postupne počítať pravdepodobnosti $P(A_1|B_1), P(A_2|B_1)$ a $P(A_3|B_1)$.

(a) $$P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)\,P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_1|A_i)\,P(A_i)} = \frac{0 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 0,$$

pretože moderátor nesmie otvoriť výherné dvere.

(b) $$q = P(A_2|B_1) = \frac{P(B_1|A_2)\,P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_1|A_i)\,P(A_i)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3},$$

pretože ak sme si na začiatku vybrali tretie dvere a výherné sú druhé dvere, tak moderátor musí otvoriť prvé dvere s pravdepodobnosťou 1.

(c) $$p = P(A_3|B_1) = \frac{P(B_1|A_3)\,P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_1|A_i)\,P(A_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3},$$

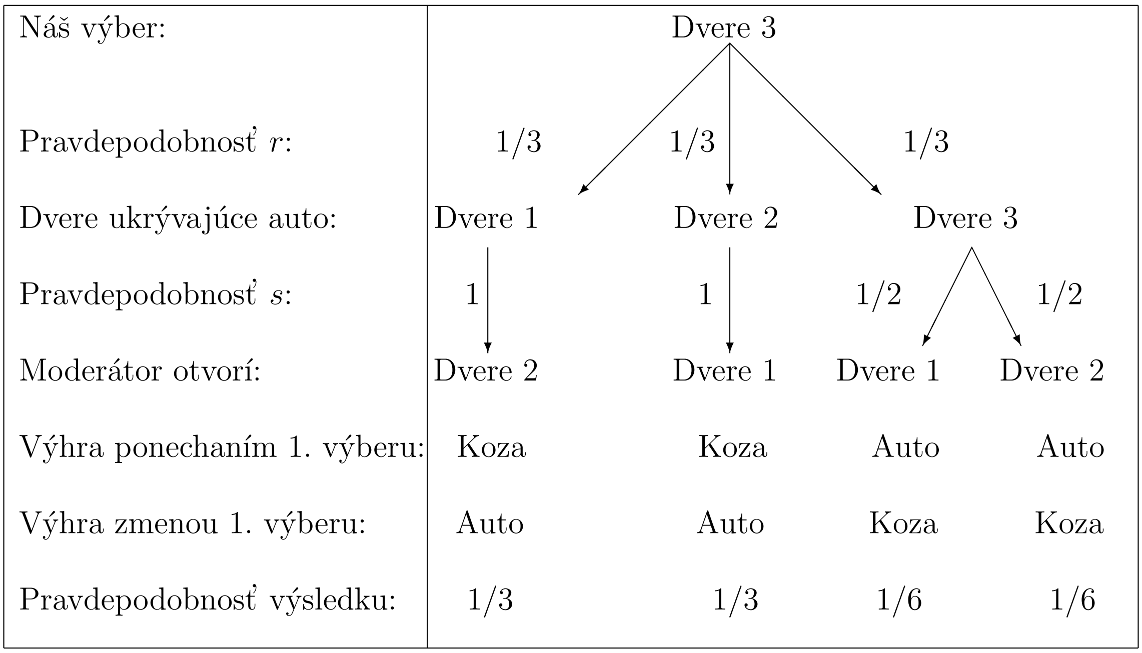
pretože ak sme si na začiatku vybrali tretie dvere, ktoré sú zároveň aj výherné, tak moderátor otvorí každé zo zvyšných dverí s pravdepodobnosťou 1/2.

Vidíme, že $p = r = 1/3$, tj. $P(A_3) = P(A_3|B_1)$. Teda náhodný jav A_3 je podľa vzťahu (1.4) nezávislý na náhodnom jave B_1. Pravdepodobnosť výhry auta pri ponechaní prvého výberu dverí sa nezmení ani po otvorení dverí moderátorom v druhom kroku. Avšak pravdepodobnosť q bude 2/3, pričom počas prvého výberu boli druhé dvere výherné len s pravdepodobnosťou 1/3. Z napočítaných hodnôt vyslovíme správny záver, že zmena prvého výberu je pre nás v poslednom kroku vždy výhodnejšia z hľadiska pravdepodobnosti výhry.

1.3.3 Riešenie s využitím rozhodovacieho stromu

Riešenie metódou rozhodovacieho stromu znázorníme graficky pre prípad, že si na začiatku hry zvolíme tretie dvere. Nech r označuje pravdepodobnosť, že dané dvere sú výherné. Hodnota r je z podkapitoly 1.3.2 rovnaká pre všetky dvere, a to 1/3. Pravdepodobnosť, že moderátor otvorí konkrétne dvere označíme ako s.

Ak je za nami zvolenými dverami koza, tak otvorenie dverí moderátorom je vynútené a závisí na umiestnení auta. V tomto prípade má s hodnotu 1. Ak sme v prvej voľbe vybrali výherné dvere, moderátor reaguje náhodne, teda hodnota s bude 1/2 pre otvorenie prvých dverí a 1/2 pre otvorenie druhých dverí. Znázornenie na obrázku 1.1 je nasledujúce:



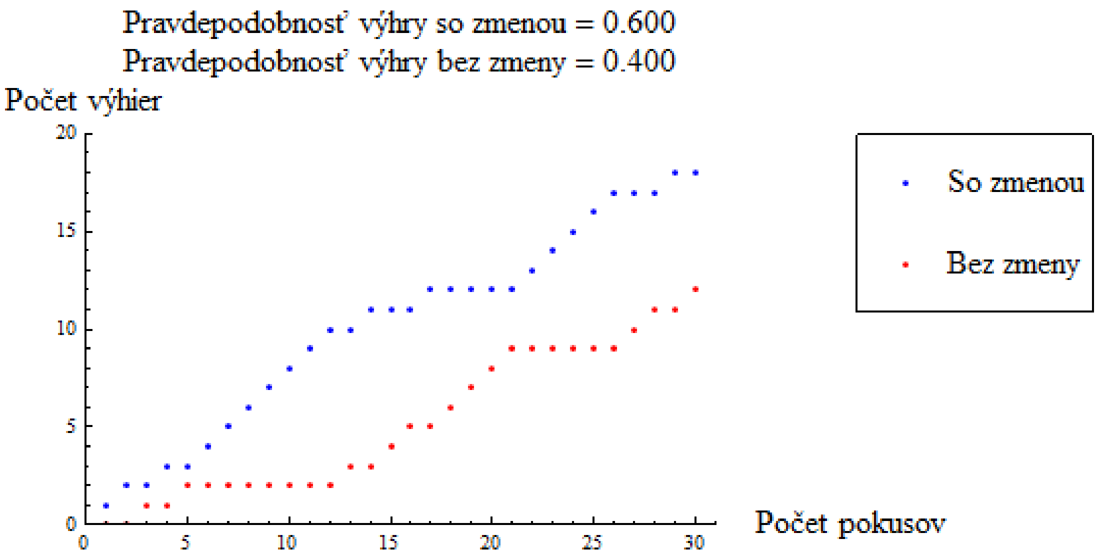
Obrázok 1.1: Rozhodovací strom a pravdepodobnosti možných výsledkov

Z uvedeného obrázka je vidieť, aké sú všetky možné výsledky a s akou pravdepodobnosťou jednotlivé výsledky nastávajú. Pri ponechaní pôvodného výberu vyhráme auto v dvoch prípadoch, pričom každý z nich nastane s pravdepodobnosťou 1/6. Celkovo teda pri ponechaní prvej voľby dverí vyhráme auto s pravdepodobnosťou 1/3. Auto ale pri ponechaní nevyhráme v dvoch prípadoch, pričom každý z nich nastáva s pravdepodobnosťou 1/3, čo nám celkovo dá 2/3. V prípade zmeny výberu dostaneme doplnkové pravdepodobnosti. Teda auto vyhráme s pravdepodobnosťou $1 - (1/3) = 2/3$ a nevyhráme ho s pravdepodobnosťou $1 - (2/3) = 1/3$.

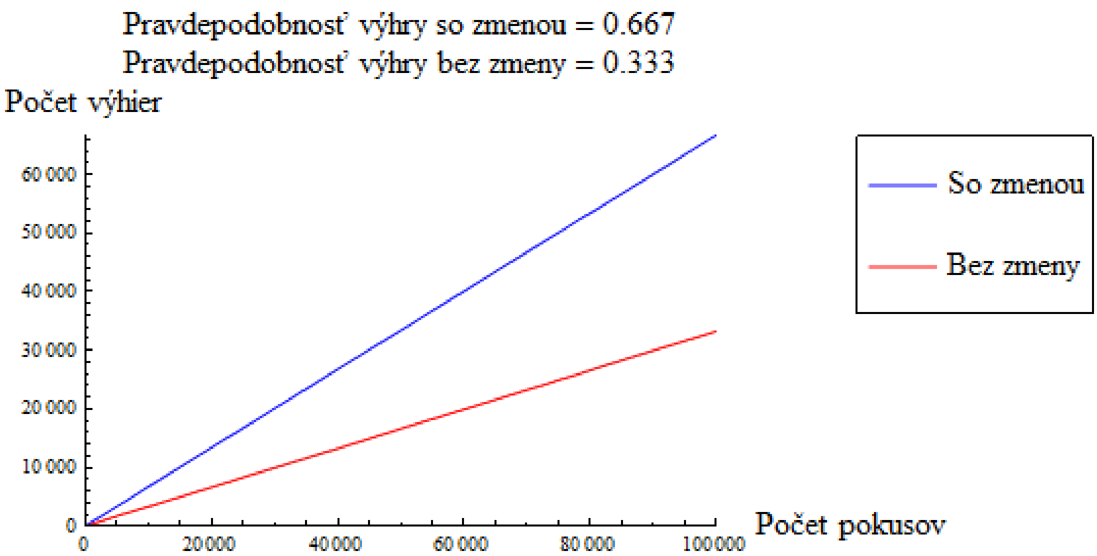
1.3.4 Overenie riešenia s využitím softwaru

Riešenie úlohy sa dá overiť pomocou počítačovej simulácie, ktorú sme vytvorili s využitím softwaru Wolfram Mathematica 8.0. Vygenerujeme n náhodných hier, grafické znázornenie predvedieme pre $n = 30$ (obr. 1.2) a $n = 100\,000$ (obr. 1.3), aby sme videli detailný vývoj pre nízky počet hier, ale i vývoj pre veľký počet hier.

Kroky v každej hre sa riadia pravidlami uvedenými v zadaní paradoxu. Náhodne si zvolíme číslo dverí z množiny $\{1, 2, 3\}$, ktoré predstavuje náš prvý výber. Z tej istej množiny náhodne vygenerujeme tiež číslo dverí, za ktorými bude ukryté auto. Dvere, ktoré otvorí moderátor generujeme náhodne z množiny $\{1, 2, 3\}$, z ktorej budú odstránené prvky predstavujúce náš výber a výherné dvere. Počet zatvorených dverí je teraz dva. Ak sa číslo zatvorených dverí, ktoré sme si na začiatku nevybrali, zhoduje s číslom dverí, za ktorými je auto, tak zaznamenáme výhru ku výhram so záverečnou výmenou. Ak je však náš prvý výber zhodný s číslom výherných dverí, tak zaznamenáme výhru ku výhram bez zmeny. Výsledné pravdepodobnosti výhier so zmenou a bez zmeny sú na obrázkoch 1.2 a 1.3. Zdrojový kód k simuláciám písaný vo Wolfram Mathematice 8.0 sa nachádza v prílohe 1.



Obrázok 1.2: Vývoj výhier pri zmene a ponechaní prvého výberu pre $n = 30$



Obrázok 1.3: Vývoj výhier pri zmene a ponechaní prvého výberu pre $n = 10^5$

1.4 Riešenie modifikovaného problému

Zadanú úlohu môžeme, samozrejme, modifikovať viacerými spôsobmi. Priblížime dve vybrané modifikácie. Predstavme si, že počet dverí v miestnosti je N, pričom $N \in \mathbb{N}$ a $N > 3$. Naša úprava zadania nebude spočívať v zmene počtu vyhrávajúcich dverí. Budeme teda uvažovať za jednými dverami auto, pričom za každými zo zvyšných $N - 1$ dverí bude koza. Vyberieme si jedny dvere. Pravdepodnosť náhodného javu, že za vybranými dverami sa nachádza auto, je $1/N$.

(i) Budeme predpokladať, že teraz príde moderátor, ktorý otvorí práve $N - 2$ prehrávajúcich dverí. Teda zatvorené ostanú dvere, ktoré sme si na začiatku hry zvolili. Spolu s nimi ostanú zatvorené ešte jedny dvere tak, aby sa za jednými zo zatvorených dverí nachádzalo auto. Teraz dostaneme možnosť zmeny svojho prvého výberu podobne, ako v prípade troch dverí. Ako sa máme rozhodnúť?

   Predstavme si, že by sme všetkých N dverí rozdelili na dve skupiny. Prvá skupina by bola tvorená len dverami, ktoré si vyberieme v prvom kroku. V druhej skupine by boli zahrnuté všetky zvyšné dvere, čiže $N - 1$ dverí. Pravdepodobnosť výhry auta pre prvú skupinu je $1/N$, pre druhú skupinu je to doplnok do 1, teda $1 - (1/N) = (N - 1)/N$. Aj keď moderátor otvorí $N - 2$ prehrávajúcich dverí z druhej skupiny, celková pravdepodobnosť výhry auta sa pre druhú skupinu nezmení. V druhej skupine nakoniec ostanú zatvorené len jedny dvere, ktoré budú mať v našom záverečnom rozhodovaní pravdepodobnosť výhry auta $(N - 1)/N$.

(ii) Ako sa zmení situácia, keď moderátor otvorí iný počet dverí ako $N - 2$? Nech moderátor otvorí len k prehrávajúcich dverí, pričom $1 \leq k < N - 2$ a $k \in \mathbb{N}$. Po otvorení k dverí nám dá moderátor možnosť ponechať si vybrané dvere alebo učiniť zmenu. Po tomto rozhodnutí moderátor otvorí naše dvere a dozvieme sa, či sme vyhrali auto alebo nie.

   Postupovať môžeme podobne ako v bode (i). Vytvoríme opäť dve skupiny. Prvá skupina obsahuje náš prvý výber, druhá skupina obsahuje všetky ostatné dvere. Moderátor otvára k prehrávajúcich dverí len z druhej skupiny. Po ukončení otvárania dverí vieme, že pravdepodobnosť výhry prvej skupiny sa nezmenila a je $1/N$. Pravdepodobnosť výhry pre každé zatvorené dvere druhej skupiny je $\frac{N-1}{N \cdot (N-k-1)}$, a to je vždy viac ako $\frac{1}{N}$. Preto sa nám oplatí aj v tomto prípade zmeniť náš pôvodný výber, hoci pravdepodobnosť výhry auta bude v porovnaní s výsledkom bodu (i) nižšia.

2. Bertrandov paradox

2.1 Zadanie úlohy

Úloha Bertrandovho paradoxu pochádza z roku 1889. Problém bol publikovaný v práci *Calcul des probabilités*, ktorej autorom je *Joseph Louis François Bertrand* (1822 - 1900). Vo svojej podstate sa táto úloha viaže ku geometrickej pravdepodobnosti.

Zadanie úlohy je jednoduché. Máme kružnicu K s takým polomerom $R > 0$, že $R \in \mathbb{R}$. Tejto kružnici je vpísaný rovnostranný trojuholník ABC. V kružnici K sa náhodne zvolí tetiva. S akou pravdepodobnosťou je tetiva dlhšia než strana trojuholníka ABC?

2.2 Podstata paradoxu

Čo je vlastne na tejto úlohe paradoxné? Zadanie síce vyzerá jednoznačne, ale len ťažko sa dá povedať, čo znamená náhodná voľba tetivy. Paradox spočíva v tom, že úloha vedie k riešeniam s rôznymi výsledkami. Problém sa tak stáva ilustráciou toho, že pravdepodobnosti nemusia byť jednoznačne definované vtedy, keď nie je jasne definovaná metóda určujúca náhodnú veličinu.

2.3 Riešenie úlohy

Pri riešení problému uvedieme štyri rôzne prístupy, v ktorých sa používajú rozličné metódy určenia náhodnej tetivy. Najprv si ale zadefinujeme geometrickú pravdepodobnosť. Spôsoby, ako môžeme zadefinovať geometrickú pravedpodobnosť, nájdeme napr. v [1] na str. 19, resp. v [2] na str. 13. Ilustratívne obrázky sú vytvorené pomocou softwaru Wolfram Mathematica 8.0.

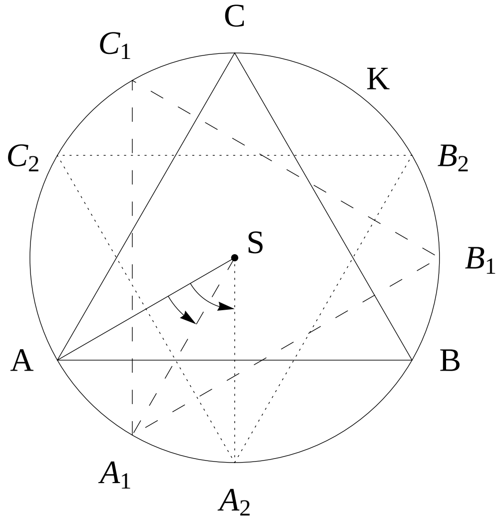
Definícia 2.1. Nech Ω je borelovskou množinou v $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s kladnou a konečnou Lebesgueovou mierou μ. Nech $\mathcal{A}$ označuje systém všetkých borelovských podmnožín množiny Ω a nech $\mu(A)$ označuje Lebesgueovu mieru množiny A. Potom pravdepodobnosť P definujeme predpisom

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

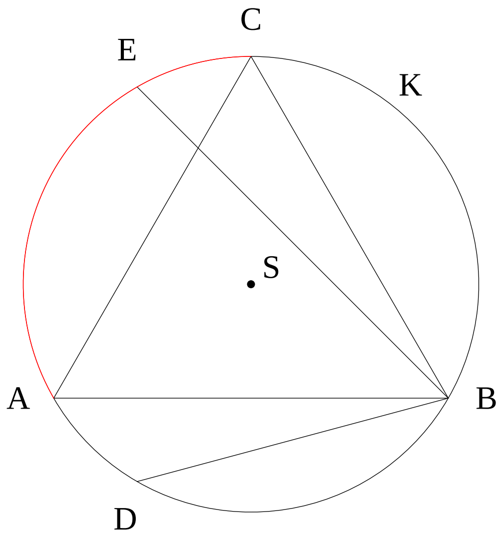
Takto definovaná pravdepodobnosť sa nazýva **geometrická pravdepodobnosť**.

2.3.1 Riešenie voľbou koncových bodov tetivy

V prvom prístupe si na začiatku náhodne zvolíme prvý koncový bod tetivy, kdekoľvek na kružnici K. Vpísaný trojuholník ABC môžeme ľubovoľne otáčať v bode otáčania S. Obrázok 2.1 nám znázorňuje trojuholník ABC spolu s trojuholníkmi $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$, ktoré vznikli otočením pôvodného trojuholníka o 30°, resp. 60° v kladnom smere otáčania okolo bodu S, tj. proti smeru hodinových ručičiek. Takže trojuholník môžeme vždy otočiť tak, aby bol jeden z jeho vrcholov totožný s prvým koncovým bodom tetivy. Preto môžeme uvažovať prvý koncový bod tetivy fixný a stotožníme ho s bodom B v trojuholníku ABC. Jej druhý koncový bod budeme voliť náhodne zo všetkých bodov na kružnici K. Vrcholy vpísaného trojuholníka rozdeľujú kružnicu na tri rovnako dlhé oblúky. Náhodná tetiva je dlhšia ako strana trojuholníka ABC vtedy, keď druhý bod tetivy leží na oblúku AC, čo nastáva v prípade, keď tetiva pretína vpísaný trojuholník ABC. Situáciu znázorňuje obrázok 2.2, na ktorom sú vyhovujúce koncové body na oblúku AC zobrazené červenou farbou.



Obrázok 2.1: Otáčanie trojuholníka ABC



Obrázok 2.2: Prvé riešenie

V definícii geometrickej pravdepodobnosti potom volíme množiny

$$X := \{\text{Body ležiace na oblúku } AC\}, \quad \Omega := \{\text{Body ležiace na kružnici } K\}.$$

Hľadaná pravdepodobnosť, že tetiva je dlhšia sko strana trojuholníka ABC, je

$$P_1 = \frac{\mu(X)}{\mu(\Omega)} = \frac{(2\pi R)/3}{2\pi R} = \frac{1}{3}.$$

2.3.2 Riešenie voľbou stredu tetivy

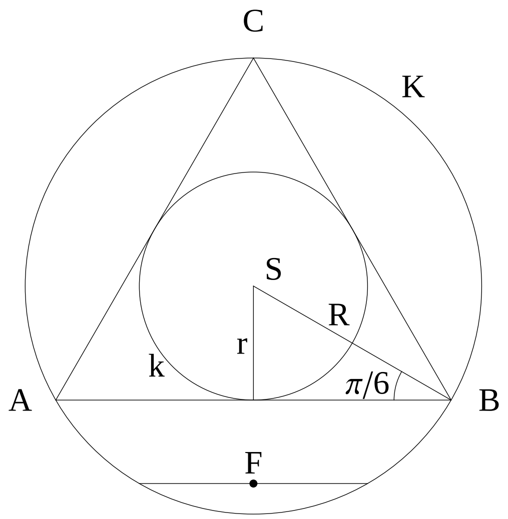
V tomto prístupe volíme náhodne bod F v kruhu K. Teda bod určuje jednoznačne tetivu, pokiaľ ho pokladáme za jej stred, ako ukazuje obrázok 2.3. Tetiva nie je určená jednoznačne, pokiaľ je bod F identický so stredom S kružnice K. Nech je navyše trojuholníku ABC vpísaná kružnica k. Ak bod F padne do oblasti ohraničenej kružnicou k (vyšrafovaný kruh na obrázku 2.4), tak tetiva bude dlhšia ako strana trojuholníka ABC. Ak polomer kružnice K je R, tak obsah väčšieho kruhu je πR^2. Polomer kružnice k sa dá určiť zo vzťahu $\sin \pi/6 = r/R$, takže $r = R/2$. Obsah menšieho kruhu teda vyjadríme ako $(\pi R^2)/4$.

Pri označení množín

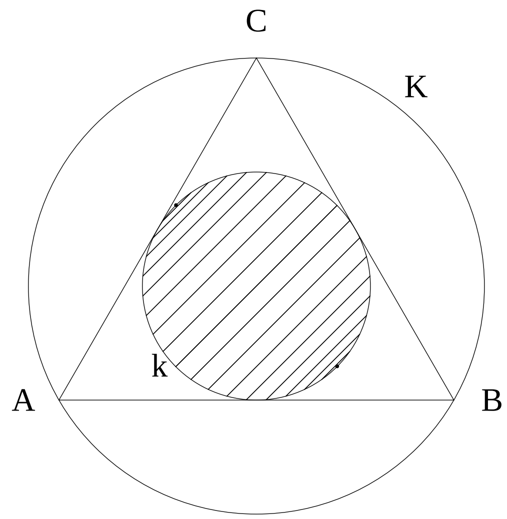
$$X := \{\text{Body ležiace vnútri kruhu } k\}, \quad \Omega := \{\text{Body ležiace vnútri kruhu } K\},$$

vyjadríme hľadanú pravdepodobnosť ako

$$P_2 = \frac{\mu(X)}{\mu(\Omega)} = \frac{(\pi R^2)/4}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$



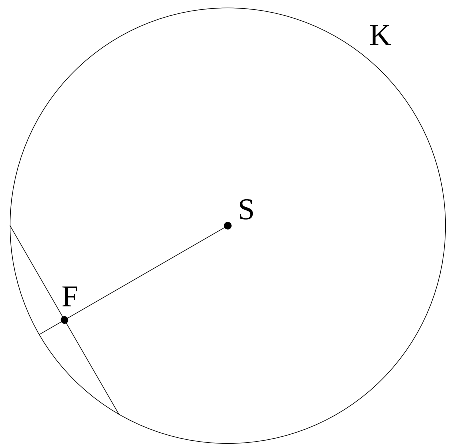
Obrázok 2.3: Náhodný stred tetivy



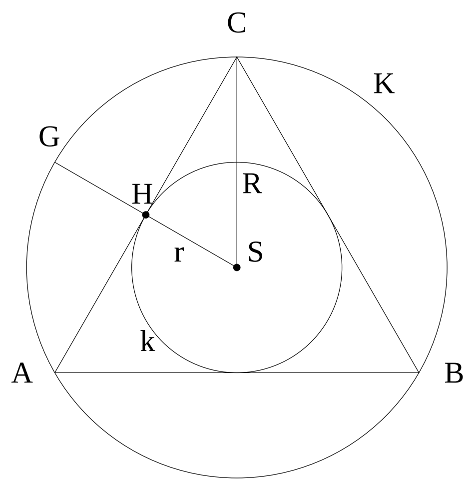
Obrázok 2.4: Druhé riešenie

2.3.3 Riešenie voľbou vzdialenosti stredov tetivy a kružnice

V predposlednom prístupe budeme náhodne voliť bod F kdekoľvek na polomere kružnice K. Bod F opäť predstavuje stred tetivy. Tetiva je jednoznačne určená vzdialenosťou jej stredu F od stredu kružnice K (viď obr. 2.5). Pri určovaní tejto vzdialenosti úplne postačí z dôvodu symetrie, ak sa budeme pohybovať po úsečke SG, ako ukazuje obrázok 2.6. Označme stred strany AC písmenom H. Tetiva bude dlhšia ako dĺžka strany trojuholníka ABC vtedy, keď jej stred F bude ležať na úsečke SH.



Obrázok 2.5: Náhodná vzdialenosť stredu tetivy od stredu kružnice



Obrázok 2.6: Tretie riešenie

Takže pre množiny označené ako

$$X := \{\text{Body ležiace na úsečke } SH\}, \quad \Omega := \{\text{Body ležiace na úsečke } SG\},$$

vyjadríme hľadanú pravdepodobnosť ako

$$P_3 = \frac{\mu(X)}{\mu(\Omega)} = \frac{r}{R} = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}.$$

2.3.4 Riešenie voľbou dĺžky tetivy

V poslednom prístupe budeme vychádzať z náhodnej voľby dĺžky tetivy. V tomto prístupe vychádzame z článku [4], str. 17 a 18. Z podsekcie 2.3.3 vieme, že vzdialenosť stredu tetivy od stredu kružnice môžeme voliť z intervalu $\langle 0, R\rangle$. Tetiva je dlhšia ako strana vpísaného rovnostranného trojuholníka vtedy, keď vzdialenosť jej stredu od stredu kružnice leží v intervale $\left\langle 0, \frac{R}{2}\right\rangle$. Akú minimálnu dĺžku musí mať tetiva tak, aby spĺňala podmienku úlohy?

Z obrázka 2.6 vidíme, že úsečka SC má dĺžku R. Ďalej dĺžka úsečky SH je $\frac{R}{2}$. Náš cieľ je zistiť dĺžku úsečky AC o ktorej vieme, že je dvojnásobkom dĺžky úsečky HC, pretože bod H je stredom AC. Keď spojíme stred stany AC s jej protiľahlým vrcholom B, dostaneme tak os uhla ABC, ktorá rozdeľuje uhol ABC na dva rovnako veľké uhly ABH a CBH. Máme teda, že

$$\measuredangle HBC = 30^\circ \ \& \ \measuredangle BCH = 60^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \measuredangle SCH = 90^\circ.$$

Trojuholník SHC je pravouhlý a pre výpočet dĺžky HC a následného výpočtu dĺžky AC môžeme použiť napr. vzťah

$$\frac{|HC|}{R} = \cos 30^\circ \quad \Rightarrow \quad |HC| = R \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R \quad \Rightarrow \quad |AC| = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R.$$

Zistili sme, že minimálna dĺžka tetivy spĺňajúca podmienku úlohy je $\sqrt{3}R$. Nasledujúci postup znázorníme na obrázku 2.7. Nech priamka p je dotyčnica kružnice K. Bod dotyku označme X. Z uvedeného bodu veďme náhodne priamku q, ktorá pretína kružnicu v nejakom bode, označme ho Y. Tento priesečník je jednoznačne určený uhlom α, ktorý zvierajú priamky p a q. Uhol α stačí voliť z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, pretože takto vystihneme všetky body na obvode kružnice K. Z každého bodu Y môžeme viesť práve dve tetivy t pre každú možnú dĺžku tetivy L. Výnimkou je dĺžka tetivy $L = 2R$, pretože tetiva s touto dĺžkou existuje iba jedna. Vďaka symetrii stačí, ak sa obmedzíme len na jednu tetivu vedúcu z bodu Y, tj. len na jednu polovicu kružnice, pre každý bod Y. Deliaca úsečka kružnice je pre každý bod Y vždy určená tetivou dĺžky $L = 2R$.

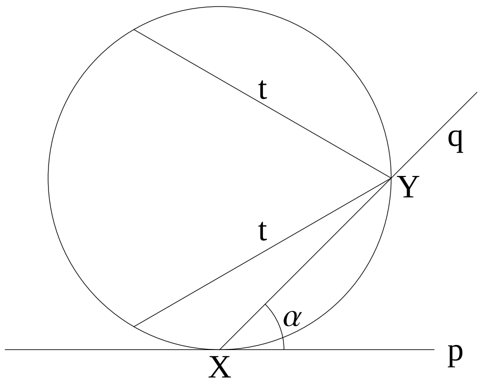
Teraz budeme náhodne voliť usporiadané dvojice (α, L) z rovnomerného rozdelenia na množine $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 2R\rangle$ ako naznačuje obrázok 2.8. Vodorovná os označuje možné voľby α, tj. interval $\langle 0, \pi\rangle$. Zvislá os označuje možné voľby L, tj. interval $\langle 0, 2R\rangle$. Nás zaujímajú len tie riešenia, kde $L > \sqrt{3}R$. Preto množiny použité vo výpočte geometrickej pravdepodobnosti zvolíme ako

$$X := \left\{\left\langle \sqrt{3}R, 2R\right\rangle \times \langle 0, \pi\rangle\right\}, \qquad \Omega := \{\langle 0, 2R\rangle \times \langle 0, \pi\rangle\}.$$

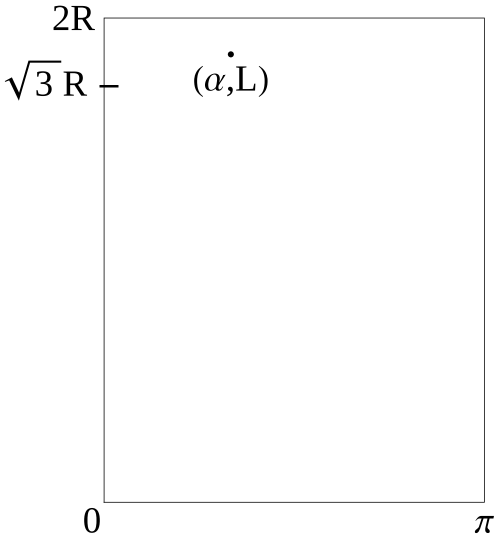
Potom platí

$$P_4 = \frac{\mu(X)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\langle\sqrt{3}R, 2R\rangle \times \langle 0, \pi\rangle)}{\mu(\langle 0, 2R\rangle \times \langle 0, \pi\rangle)} = \frac{(2R - \sqrt{3}R)\pi}{2R\pi} = 1 - \sqrt{3}/2.$$

Z výpočtu sa dá vyvodiť, že výsledok nezávisí na voľbe uhla α ani na voľbe polomeru R kružnice K.



Obrázok 2.7: Voľba tetív vedúcich z bodu Y



Obrázok 2.8: Štvrté riešenie

Ako už bolo povedané v podkapitole 2.2, vidíme, že existujú rôzne riešenia v závislosti na tom, akým spôsobom zvolíme náhodnú tetivu. Taktiež musíme dodať, že metóda voľby tetivy môže byť úplne iná v porovnaní s tými, ktoré sme v tejto práci uviedli. Tým pádom je možné, že aj získaný výsledok bude iný.

3. Petrohradský paradox

3.1 Zadanie úlohy

Daniel Bernoulli (1700 - 1782) predložil pred Petrohradskou akadémiou vied v roku 1738 hypotetickú situáciu známu ako Petrohradská hra. Predstavme si hráča v kasíne, ktorý hádže spravodlivou mincou tak dlho, pokiaľ nepadne hlava[1]. Ak hlava padne po prvýkrát v k-tom hode mincou, kde $k \in \mathbb{N}$, tak hráč získa od kasína výhru 2^k Kč a hra sa týmto hodom končí. Teda možná výhra sa zdvojnásobuje v každom hode, v ktorom nepadne hlava. Hráč získa 2 Kč, ak padne hlava v prvom hode, 4 Kč, ak padne hlava v druhom hode, atď. Akú sumu by mal hráč zaplatiť kasínu ako vstupný poplatok do hry, aby bola táto hra spravodlivá? Spravodlivou hrou rozumieme hru, v ktorej je stredná hodnota čistého zisku hráča nulová, takže zaplatený poplatok za hru je rovnako veľký ako očakávaná výhra z jednej hry.

3.2 Podstata paradoxu

Aby sme objavili podstatu paradoxu, spočítajme najprv očakávanú výhru hráča z jednej hry. Nech L označuje náhodnú veličinu udávajúcu výšku výhry hráča v Kč. Potom pravdepodobnosť $P(L = 2^k) = 1/2^k$ a stredná hodnota tejto výhry je

$$EL = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = +\infty.$$

Paradox je úplne vystihnutý výpočtom EL. Aby bola hra spravodlivá, tak hráč by mal byť ochotný zaplatiť kasínu nekonečnú sumu peňazí ako vstupný poplatok do hry. Hoci sú tieto výpočty matematicky korektné, výsledok je v reálnom živote neprijateľný. Medzi hlavné dôvody môžeme zaradiť:

(a) Obmedzené finančné zdroje kasína.

(b) Obmedzené finančné zdroje hráča.

(c) Averzia hráča k riziku a neochota zaplatiť vysoký vstupný poplatok. Ochota riskovať len veľmi nízke čiastky.

3.3 Riešenie úlohy

Podrobnejšie uvedieme tri modifikované prístupy k riešeniu nášho problému. Najprv zameriame svoju pozornosť na problém obmedzenosti finančných zdrojov hráča i kasína. Ukážeme jednoduchý postup vedúci k približne spravodlivej hodnote poplatku za jednu hru. Potom sa bližšie pozrieme na situáciu, v ktorej zohľadníme hráčovu averziu k riziku, ktorá je vyjadrená konkrétnou úžitkovou funkciou. V záverečnom prístupe zmeníme taktiku a vstupný poplatok určíme pre

[1] Na českých minciach je hlava mince tá strana, na ktorej je vyobrazený český lev. Táto strana sa tiež označuje ako líc alebo panna.

sériu tvorenú pevným počtom n hier. Z tohto dôvodu sa bude vopred vyžadovať informácia o počte hier, ktoré si hráč bude chcieť zahrať. Dôležité pre nás bude hlavne dokázať skutočnosť, že čiastka požadovaná kasínom od hráča za hranie série n hier je spravodlivá.

3.3.1 Riešenie za predpokladu obmedzených zdrojov

Ak sa, podobne ako v [5] na str. 27 až 30, rozhodneme prijať predpoklad obmedzených finančných zdrojov hráča i kasína, tak pri stanovení maximálnej výhry hráča vieme určiť vstupný poplatok do hry tak, aby hra bola približne spravodlivá. Predpokladajme, že kasíno je ochotné vyplatiť najviac 10 000 000 Kč za jednu hru. Z nerovnosti $2^{23} < 10^7 < 2^{24}$ vyplýva, že táto situácia nastáva počnúc 24. hodom. Teda máme

$$EL = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^{23} \cdot \frac{1}{2^{23}} + \left(\frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{2^{25}} + \ldots \right) \cdot 10^7.$$

Prvých 23 sčítancov v predchádzajúcej rovnosti dáva v súčte 23, pre posledný sčítanec platí

$$\left(\sum_{k=24}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) \cdot 10^7 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) \cdot \frac{1}{2^{23}} \cdot 10^7 = \frac{1}{2^{23}} \cdot 10^7 \approx 1{,}19.$$

Celkom teda máme

$$EL \approx 23 + 1{,}19 = 24{,}19 \text{ Kč}.$$

Získaný výsledok je veľmi ľahko interpretovateľný. Ak hráč zaplatí ako vstupný poplatok 25 Kč, tak bude hra výhodnejšia pre kasíno. Ak zaplatí 24 Kč, tak sa stane hra výhodnejšou pre hráča.

Toto riešenie v sebe obsahuje jeden malý problém. Intuitívne sa dá vidieť, že aj keby bol vstupný poplatok do hry 24 Kč, napriek tomu je celkom malá pravdepodobnosť, že výhra získaná z hry bude vyššia. Išlo by o situáciu, kedy by hra skončila aspoň v piatom hode, čo sa dá vyjadriť tiež ako pravdepodobnosť, že hra neskončí v prvých štyroch hodoch, teda

$$P(k > 4) = 1 - P(k \leq 4) = 1 - (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}) = 1 - (15 \cdot 2^{-4}) = 2^{-4}.$$

Pokiaľ by mal hráč dostatok obmedzených finančných zdrojov tak, aby si mohol hru zopakovať viackrát, určite by od tejto investičnej príležitosti upustil. Problém tkvie v tom, že v cene za hru sú zohľadnené len náklady kasína. Nie je tu už zohľadnené očakávanie hráča od hry, tj. čo najpravdepodobnejší zárobok a averzia hráča k riziku. K pochopeniu uvedených skutočností nám pomôže nasledujúca ilustrácia. Výsledky získame použitím softwaru Wolfram Mathematica 8.0.

Strany mince budú reprezentované číslami 0 a 1. Ak sa vygeneruje číslo 1, hra bude pokračovať. V opačnom prípade hra skončí. Náhodne si vygenerujeme 10, 20, 50 a 100 hier. Zapamätáme si dĺžku každej hry. Pre každú zo skupín 10, 20, 50 a 100 hier nás budú zaujímať počty hier, ktoré mali dĺžku 1, 2, . . ., 23, 24 a viac. Hodnoty vyjadrujúce počty jednotlivých dĺžok hier zaznamenáme do tabuľky 3.1. V našom prípade žiadna z vygenerovaných hier nepresiahla dĺžku deviatich hodov, preto sú nulové počty hier dĺžky 10 až 23 v tabuľke 3.1 znázornené bodkami. Taktiež vidíme, že väčšina hier sa skončila už v prvých troch hodoch.

Celkovú výhru a celkové vstupné poplatky zapíšeme v tabuľke 3.2, do ktorej pridáme zhodnotenie úspešnosti, tj. celkový čistý zisk, resp. čistú stratu. Vprílohe 2 je možné nájsť kód, ktorým boli hodnoty tabuliek 3.1 a 3.2 získané. Vo výpočtoch uvažujeme vstupný poplatok za jednu hru vo výške 24 Kč.

Dĺžka hry (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	24 a viac
Výhra (2^k)	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	...	10^7
# dĺžok v 10 hrách	5	2	2	0	0	0	0	0	1	...	0
# dĺžok v 20 hrách	10	3	5	1	0	1	0	0	0	...	0
# dĺžok v 50 hrách	26	15	5	2	1	0	1	0	0	...	0
# dĺžok v 100 hrách	50	29	8	4	4	3	2	0	0	...	0

Tabuľka 3.1: Početnosti dĺžok pre rôzne počty náhodne generovaných hier

Počet hier	Celková výhra	Celková výška poplatkov	Zisk/strata hráča
10	546	240	306
20	152	480	−328
50	344	1 200	−856
100	920	2 400	−1 480

Tabuľka 3.2: Prehľad výhier a poplatkov pre počty hier z tabuľky 3.1

3.3.2 Riešenie za predpokladu uvažovania funkcie úžitku

V snahe zohľadniť hráčovo očakávanie od hry a jeho averziu k riziku budeme na začiatku tejto časti definovať pomocný nástroj - úžitkovú funkciu. Uvedieme vlastnosti úžitkovej funkcie a zobrazíme tri takéto funcie graficky. Ukážeme tiež, ako je možné chápať význam hráčovej averzie k riziku. Hlavným cieľom bude určenie spravodlivej ceny za hru v prípade, keď poznáme hráčovu úžitkovú fukciu a teda aj jeho očakávanie od hry.

Definícia 3.1. Funkcia $U : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ taká, že $U \in C^1$ je rýdzo konkávna a spĺňa

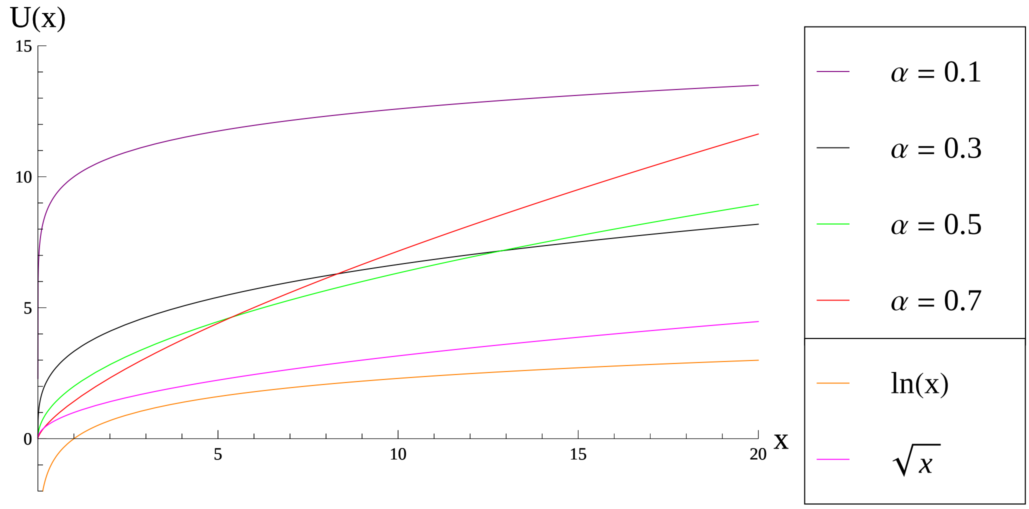
(1) $U'(0) := \lim_{x\to 0+} U'(x) = +\infty$,

(2) $U'(+\infty) := \lim_{x\to +\infty} U'(x) = 0$,

sa nazýva **úžitková funkcia**.

Z požiadavky konkávnosti funkcie U spojenej s požiadavkami (1) a (2) vyplýva, že úžitková funkcia je striktne rastúca s klesajúcou prvou deriváciou $U'(x)$. Môžeme teda povedať, že investor, ktorý svoje správanie prispôsobuje úžitkovej funkcii, vždy uprednostní vyššiu hodnotu svojho bohatstva pred nižšou hodnotou. Na druhej strane je ale nutné dodať, že úžitok investora je z každej nasledujúcej získanej jednotky bohatstva klesajúci.

Typickým príkladom takejto úžitkovej funkcie je $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ pre $\alpha \in (0,1)$, $U(x) = \ln(x)$, alebo $U(x) = \sqrt{x}$, pričom odmocninová úžitková funkcia je špeciálnym prípadom mocninnej úžitkovej funkcie pre $\alpha = \frac{1}{2}$. Musíme dodať, že konštanta nemá na rozhodovanie investora nijaký vplyv. To sa dá zistiť výpočtom na základe rovnice (3.1), ktorú uvádzame nižšie. Úžitkové funkcie sú porovnávané na obrázku 3.1. Hodnota x označuje výšku nášho kapitálu, hodnota $U(x)$ znamená úžitok z daného kapitálu x.

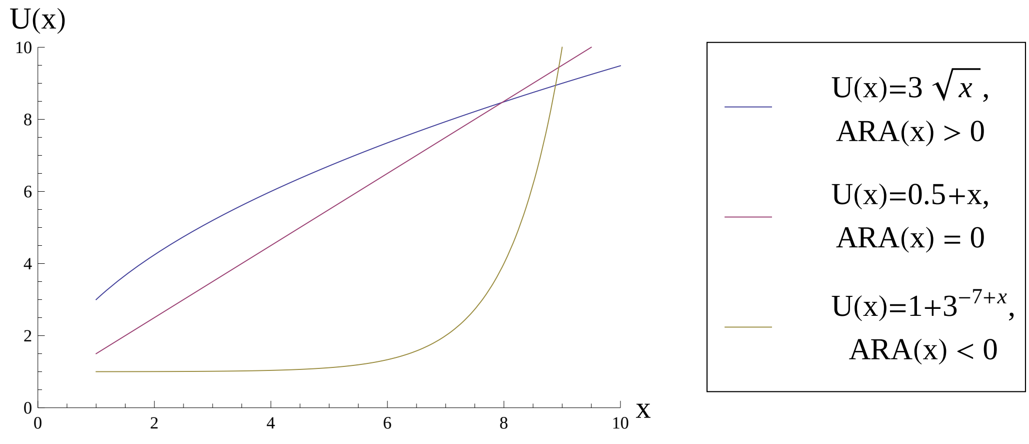


Obrázok 3.1: Porovnanie úžitkových funkcií $U(x) = \ln(x)$, $U(x) = \sqrt{x}$ a úžitkovej funkcie $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ pre vybrané hodnoty parametra α

Pretože predpokladáme, že investor zahrnie do svojho výberu úžitkovej funkcie rôzne prístupy k riziku svojej investície, je vhodné klasifikovať tieto možné funkcie prostredníctvom takzvaných mier rizika. Najpoužívanejšia je Arrow-Prattova miera absolútnej averzie k riziku, ktorú definujeme ako

$$ARA(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Na obrázku 3.2 sú znázornené funkcie vyjadrujúce rôzne hodnoty $ARA(x)$.



Obrázok 3.2: Porovnanie absolútnych mier averzie k riziku

Hodnoty $ARA(x)$ majú nasledujúcu interpretáciu:

(a) $ARA(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ investor je averzívny voči riziku.

(b) $ARA(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ investor je neutrálny voči riziku.

(c) $ARA(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ investor vyhľadáva riziko.

Pretože definícia 3.1. sa obmedzuje na konkávnu a rastúcu funkciu U, tak pracujeme len s takými úžitkovými funkciami, ktoré majú za predpokladu $U \in C^2$ kladnú hodnotu $ARA(x)$.

Nech X je kladná náhodná veličina s konečnou očakávanou hodnotou úžitku, tj. $E(U(X)) < +\infty$, pričom U označuje úžitkovú funkciu, ako bola zavedená v definícii 3.1. V takomto prípade môžeme zadefinovať kladné reálne číslo z tak, aby spĺňalo rovnosť

$$U(z) = E(U(X)). \tag{3.1}$$

Takéto číslo z vyjadruje hodnotu spravodlivej ceny za hru pre hráča, ktorý svoje správanie prispôsobuje úžitkovej funkcii U. Pokiaľ kasíno ponúkne hráčovi možnosť hrať hru za nižší vstupný poplatok ako z, tak je pre hráča táto hra výhodnejšia a pôjde si ju zahrať. Ak je však vstupný poplatok požadovaný kasínom vyšší ako z, hráč si hru nezahrá, pretože sa pre neho stáva nevýhodnou.

Ukážme, aký vzťah platí pre očakávaný úžitok z jednej hry:

$$E(U(X)) = U(2) \cdot \frac{1}{2} + U(2^2) \cdot \frac{1}{2^2} + U(2^3) \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} U(2^k) \cdot \frac{1}{2^k} \tag{3.2}$$

Pomocou vzťahu (3.1) určíme spravodlivú cenu z za jednu hru pre dve vybrané úžitkové funkcie.

1. $U(z) = \ln(z)$
Očakávaný úžitok z hry podľa (3.2) bude:

$$E(U(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(2^k) \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2^k} = \ln(2) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2 \cdot \ln(2).$$

Využili sme znalosť, že $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2$.

Spravodlivá cena bude:

$$\ln(z) = 2 \cdot \ln(2) \quad \Rightarrow \quad \ln(z) = \ln(4) \quad \Rightarrow \quad z = 4 \text{ Kč}.$$

2. $U(z) = \sqrt{z}$
Očakávaný úžitok z hry podľa (3.2) bude:

$$E(U(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-\frac{k}{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Súčet $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-\frac{k}{2}}$ je rovný $1+\sqrt{2}$, pretože ak pre $m \in \mathbb{N}$ označíme $k = 2m-1$ (nepárne číslo) a $k = 2m$ (párne číslo), potom sa dá predchádzajúca suma rozložiť na

$$\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-\frac{2m}{2}} + \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-\frac{2m-1}{2}} = \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} + \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m+\frac{1}{2}} = (1+\sqrt{2}) \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} = 1+\sqrt{2}.$$

Spravodlivá cena bude:

$$\sqrt{z} = 1+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z = (1+\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad z = 3 + 2\cdot\sqrt{2} \approx 5{,}83 \text{ Kč}.$$

Spočítali sme teda očakávané úžitky z hry a spolu s nimi sme určili spravodlivú cenu za jednu hru pre logaritmickú a odmocninovú úžitkovú funkciu. Táto cena z už v sebe zahŕňa hráčovo očakávanie od hry aj jeho averziu k riziku (narozdiel od spočítanej ceny v podsekcii 3.3.1).

3.3.3 Riešenie za predpokladu neobmedzených zdrojov

V tejto podkapitole sa budeme riešením zaoberať len z teoretického hľadiska. K tomuto riešeniu nás motivuje [3] na str. 251 až 253. Pretože stredná hodnota výhry je nekonečná, budeme uvažovať sériu petrohradských hier a vstupný poplatok bude závisieť na dĺžke série, tj. na celkovom počte hier, ktoré si hráč zahrá. Nech $n \in \mathbb{N}$ označuje dĺžku série hier.

Definícia 3.2. Povieme, že séria petrohradských hier je **spravodlivá**, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P\left(\left\{\left|\frac{N_n}{R_n} - 1\right| < \varepsilon\right\}\right) \to 1 \quad \text{pre} \quad n \to +\infty,$$

kde N_n je súčet výhier zo série hier dĺžky n a R_n je súčet zaplatených vstupných poplatkov pre sériu hier dĺžky n.

Poznámka 3.3. Pre $n \to +\infty$ platí ekvivalencia

$$P\left(\left\{\left|\frac{N_n}{R_n} - 1\right| < \varepsilon\right\}\right) \to 1 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\left\{\left|\frac{N_n}{R_n} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) \to 0.$$

Definícia 3.2. nám hovorí, že s rastúcou dĺžkou série hier je podiel počtu investovaných a získaných peňazí skoro iste rovný 1, čo intuitívne zodpovedá spravodlivej sérii hier. V ďalšom texte ukážeme, že uvedenej definícii vyhovuje prípad, kde je vstupný poplatok $\log_2 n$ Kč za jednu hru, tj. $n \log_2 n$ za sériu n hier.

Veta 3.4. Nech $R_n = n \log_2 n$. Potom je séria n petrohradských hier spravodlivá.

Dôkaz: V dôkaze vety 3.4. budeme postupovať pomocou tzv. metódy odseknutia. Jedná sa o dokazovaciu techniku, ktorá sa hodí v prípadoch, kde nejaká náhodná veličina nemá konečný rozptyl a aj napriek tomu chceme zistiť jej limitné vlastnosti. V celom dôkaze budeme uvažovať $k \in \mathbb{N}$.

Nech L_k znamená výhru hráča v k-tej hre zo série n hier, kde $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Veličina L_k nemá konečnú strednú hodnotu ani rozptyl. Rozdelíme si ju preto do dvoch indikátorových veličín podľa určitej hodnoty. Prvá veličina reprezentuje veľmi pravdepodobné výhry (U_k), druhá veľmi nepravdepodobné výhry (V_k). Deliacim bodom je hodnota $R_n = n \log_2 n$. To znamená

$$\begin{aligned} U_k &:= I(L_k \leq n \log_2 n) \cdot L_k, \\ V_k &:= I(L_k > n \log_2 n) \cdot L_k, \end{aligned}$$

kde $I(\cdot)$ je indikátorová funkcia. Určite platí, že $L_k = U_k + V_k$. Musíme ukázať, že $P(A_{(n)}) \to 0$ pre $n \to +\infty$, kde

$$A_{(n)} := \left\{ \left| \frac{N_n}{R_n} - 1 \right| > \varepsilon \right\}.$$

Na základe zadefinovaných veličín uvažujme dva nasledujúce javy:

$$\begin{aligned} B_{(n)} &:= \left\{ \left| \frac{U_1 + \ldots + U_n}{R_n} - 1 \right| > \varepsilon \right\}, \\ C_{(n)} &:= \{V_1 + \ldots + V_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Jav $A_{(n)}$ určite nenastane, pokiaľ nenastane aspoň jeden z javov $B_{(n)}$ alebo $C_{(n)}$. Jav $C_{(n)}$ nastane v prípade, že v aspoň jednej hre presiahne výška výhry hráča hodnotu $n \log_2 n$, tj. existuje aspoň jedno k také, že $V_k \neq 0$. Pokiaľ jav $C_{(n)}$ nenastane, potom určite nastane jav $B_{(n)}$, pretože v každej hre výhra hráča nepresiahne hodnotu $n \log_2 n$. Navyše platí, že $(B_{(n)} \cap C^c_{(n)}) = A_{(n)}$.

Máme teda, že $A_{(n)} \subset (B_{(n)} \cup C_{(n)})$ a aplikáciou na pravdepodobnostnú mieru

$$P(A_{(n)}) \leq P(B_{(n)}) + P(C_{(n)}).$$

Teraz stačí ukázať, že

(a) $P(C_{(n)}) \to 0$ pro $n \to +\infty$,

(b) $P(B_{(n)}) \to 0$ pro $n \to +\infty$,

pretože potom tiež $P(A_{(n)}) \to 0$ pre $n \to +\infty$.

Prípad (a)

Z definície veličiny V_k vieme, že $P(V_k \neq 0) = P(L_k > n \log_2 n)$. Hodnota výhry v každej hre má rovnaké rozdelenie (hráme tú istú hru n-krát), preto platí tiež

$$P(V_k \neq 0) = P(L_1 > n \log_2 n)$$

pre každé k. Z uvedeného máme, že

$$P(C_{(n)}) \leq P(V_1 \neq 0) + \ldots + P(V_n \neq 0) = n \cdot P(L_1 > n \log_2 n).$$

Urobíme odhad na $P(L_1 > n \log_2 n)$ pomocou zistenia všetkých možných situácií pre výhry vyššie ako $n \log_2 n$. Najprv zistíme, koľko hodov mincou za sebou potrebujeme tak, aby výhra presiahla $n \log_2 n$. Pokiaľ hodíme mincou j-krát za sebou, potom máme výhru 2^j Kč, tj.

$$2^j > n \log_2 n \quad \Rightarrow \quad \log_2 2^j > \log_2(n \log_2 n) \quad \Rightarrow \quad j > \log_2 n + \log_2(\log_2 n).$$

Tzn. na prekročenie hodnoty R_n je potrebné s počtom hodov presiahnuť hodnotu $x := \log_2 n + \log_2(\log_2 n)$, tj. dosiahnuť aspoň $\lceil x \rceil$ hodov. Potom

$$P(L_1 > R_n) = \frac{1}{2^{\lceil x \rceil}} + \frac{1}{2^{\lceil x \rceil + 1}} + \ldots = \frac{1}{2^{\lceil x \rceil}} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2 \cdot \frac{1}{2^{\lceil x \rceil}} \leq 2 \cdot \frac{1}{2^x},$$

kde posledná nerovnosť plynie z nerovnosti $x \leq \lceil x \rceil$. Hodnota 2^x sa dá potom upraviť na tvar $n \log_2 n$. Celkovo tak máme

$$P(C_{(n)}) \leq n \cdot \frac{2}{n \log_2 n} \longrightarrow 0,$$

pre $n \to +\infty$.

Prípad (b)

V tomto prípade využijeme tzv. Čebyševovu nerovnosť, ktorá hovorí, že pokiaľ má reálna náhodná veličina X_n konečný rozptyl, potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|X_n - EX_n| > \varepsilon) \leq \frac{var(X_n)}{\varepsilon^2}.$$

Označme

$$X_n = \frac{U_1 + \ldots + U_n}{R_n}.$$

Musíme ukázať, že náhodná veličina X_n má správnu strednú hodnotu a rozptyl, ktoré sedia do Čebyševovej nerovnosti.

Ukážme, že $EX_n \to 1$ pre $n \to +\infty$. Hodnota R_n je pevné číslo, potrebujeme teda len zistiť, čomu sa rovná náhodný súčet $U_1 + \ldots + U_n$. Pretože jednotlivé hry majú rovnaké rozdelenie, stačí sa obmedziť na EU_1. Táto situácia je analogická situácii z predchádzajúceho prípadu, kde sme skúmali, koľko potrebujeme v jednej hre hodov mincou tak, aby sme prekročili hodnotu výhry $n \log_2 n$. Momentálne vieme, že by sme potrebovali $\lceil x \rceil$ hodov. Teraz sa budeme zaujímať o to, koľko hodov potrebujeme, aby sme túto hranicu neprekročili. Analogicky je možné zistiť, že je to $\lfloor x \rfloor$ hodov. To znamená

$$EU_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + \ldots + 2^{\lfloor x \rfloor} \cdot \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} = \lfloor x \rfloor.$$

Dostávame teda, že

$$EX_n = \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^{n} EU_k = \frac{1}{R_n} \cdot n \cdot EU_1 = \frac{1}{R_n} \cdot n \cdot \lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{R_n} \cdot n \cdot x,$$

kde sme využili vlastnosť, že $\lfloor x \rfloor \leq x$. Dosadením za x a R_n dostaneme, že $EX_n \to 1$ pro $n \to +\infty$.

Z predchádzajúceho sme vlastne dostali, že $B_{(n)} = \{|X_n - EX_n| > \varepsilon\}$. Ešte ukážeme, že $var(X_n) \to 0$ pre $n \to +\infty$. Z Čebyševovej nerovnosti potom platí, že $P(B_{(n)}) \to 0$ pre $n \to +\infty$, čím dôkaz dokončíme. Máme, že

$$EU_1^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{2} + \ldots + (2^{\lfloor x \rfloor})^2 \cdot \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} = 2 + \ldots + 2^{\lfloor x \rfloor} < \lfloor x \rfloor \cdot 2^{\lfloor x \rfloor} < x \cdot n \log_2 n.$$

V poslednej nerovnosti sme využili platnosť predpokladu, aby hráč so svojou výhrou neprekročil hodnotu $n \log_2 n$. Jednotlivé hry sú opäť nezávislé a rovnako rozdelené. Preto s použitím odhadu na EU_1^2 máme

$$var(X_n) = \frac{1}{R_n^2} \cdot n \cdot var(U_1) < \frac{1}{R_n^2} \cdot n \cdot EU_1^2 < \frac{1}{R_n^2} \cdot n \cdot x \cdot n \log_2 n.$$

Dosadením za x a R_n v poslednej nerovnosti dostaneme, že $var(X_n) \to 0$ pre $n \to +\infty$. Celkovo teda máme

$$P(B_{(n)}) < \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{R_n^2} \cdot n \cdot x \cdot n \log_2 n = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{x}{\log_2 n} \longrightarrow 0,$$

pre $n \to +\infty$. Týmto je dôkaz dokončený. $\square$

Ukázali sme, že séria n petrohradských hier je spravodlivá pre vstupný poplatok do hry vo výške $n \log_2 n$ pre vysoké n, pretože sme po celý čas uvažovali $n \to +\infty$. Pokiaľ by sme sa uvedeným vzorcom chceli riadiť aj pri sériách s minimálnym počtom hier, tak zistíme, že takáto séria hier nebude spravodlivá. Dokonca pre dĺžku série 1, 2 alebo 3 je to pre nás arbitrážna príležitosť, tj. zaručene vyhráme viac, ako sme zaplatili na vstupnom poplatku. Pre dĺžku série 4 hráme neprehrávajúcu hru, pretože $N_n \geq R_n$ a v žiadnom prípade neutrpíme stratu.

Pre doplnenie ešte pridajme tabuľku 3.3, v ktorej porovnáme celkovú výhru, výšku poplatkov a konečný výsledok v prípade platby za každú hru zvlášť (Poplatky 1, Zisk/strata 1) a v prípade platby za sériu hier (Poplatky 2, Zisk/strata 2). Poplatok za jednotlivú hru budeme uvažovať vo výške 24,19 Kč, ktorý zodpovedá maximálnej výplate kasína 10^7 Kč (z časti 3.3.1). Za sériu n hier budeme uvažovať poplatok vo výške $n \log_2 n$ Kč. Hodnoty budeme zaokrúhľovať. Početnosti jednotlivých dĺžok hier do tabuľky nebudeme zaznamenávať. Hry budú opäť generované náhodne vo Wolfram Mathematice 8.0. Potrebný zdrojový kód sa nachádza v prílohe 3.

Počet hier	Výhra	Poplatky 1	Poplatky 2	Zisk/strata 1	Zisk/strata 2
10	58	242	33	−184	25
100	812	2 419	664	−1 607	148
1 000	15 496	24 190	9 966	−8 694	5 530
10 000	139 448	241 900	132 877	−102 452	6 571

Tabuľka 3.3: Prehľad výhier a poplatkov pre uvedené počty hier, ak za hry platíme jednotlivo a sériovo

Záver

V práci sme študovali niektoré paradoxy z teórie pravdepodobnosti a pozornosť sme venovali vysvetleniu ich možných riešení.

V prvej časti sme ukázali, že unáhlene závery môžu byť niekedy nesprávne, ako je to aj v prípade Monty Hallovho paradoxu. Pripomenuli sme pojmy a tvrdenia dôležité pre jeden konkrétny postup riešenia paradoxu. Všimli sme si, že aj jednoduchá, ale dobre premyslená úvaha nám ukáže cestu k správnemu výsledku. Závery riešení sme overili simuláciami hier v matematickom softwari. Paradox sme spestrili modifikáciami, v ktorých sme skúmali istým spôsobom zovšeobecnený problém.

V druhej časti sme pozorovali nejednoznačne zadaný problém. S využitím geometrickej pravdepodobnosti sme riešili Bertrandov paradox, pričom v každom zo štyroch riešení bola náhodná tetiva zvolená iným spôsobom. Text sme doplnili názornými obrázkami, ktoré častokrát uľahčujú pochopenie použitých prístupov. Dospeli sme k záveru, že výsledok úlohy nemusí byť jednoznačný, pokiaľ nie je jednoznačne daná metóda určujúca voľbu náhodnej tetivy.

V poslednej časti sme sa zaoberali fiktívnou hazardnou hrou známou ako Petrohradský paradox. Hlavným cieľom bolo určiť v istom zmysle spravodlivý poplatok do hry s ohľadom na obmedzenia, ktoré sa v probléme môžu vyskytovať. Spočítali sme poplatok do hry v prípade obmedzených zdrojov kasína i hráča. Všimli sme si, že ak sme do úvahy zahrnuli aj hráčovu averziu k riziku a jeho očakávanie od hry, získaný poplatok bol podstatne odlišný. Na záver sme predviedli určenie spravodlivého poplatku za vopred známy počet hier, ktoré si môžeme zahrať. Ukázali sme, že ak je počet hier n, potom je spravodlivý poplatok za sériu n hier rovný $n \log_2 n$ Kč.

Zoznam použitej literatúry

[1] Anděl, J. (2003): *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha.

[2] Dupač, V., Hušková, M. (2005): *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, Praha.

[3] Feller, W. (1968): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume 1, John Wiley and Sons, Third Edition.

[4] Marinoff, L. (1994): *A Resolutions of Bertrand's Paradox*, Philosophy of Science, Volume 61, No. 1, str. 1-24.

[5] Székely, G. J. (1986): *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest.

[6] Zvára, K., Štěpán, J. (2002): *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, Praha.

Prílohy

Príloha 1: Zdrojový kód k simuláciám Monty Hallovho paradoxu

```
Clear[n, NV, VD, OD, VSZ, VBZ];
Needs["PlotLegends`"];
(*Počet hier*)
n = 100000; (*n = 30;*)
(*Náš výber*)
NV = RandomChoice[{1, 2, 3}, n];
(*Výherné dvere*)
VD = RandomChoice[{1, 2, 3}, n];
(*Otvorené dvere moderátorom*)
OD = Table[RandomChoice[Complement[{1, 2, 3}, {NV[[x]],
 VD[[x]]}]], {x, 1, n}];
(*Výhra so zmenou*)
VSZ = Table[If[Complement[{1, 2, 3}, {NV[[x]], OD[[x]]}]
[[1]] == VD[[x]], 1, 0], {x, 1, n}];
(*Výhra bez zmeny*)
VBZ = Table[If[NV[[x]] == VD[[x]], 1, 0], {x, 1, n}];
ListPlot[{Accumulate[VSZ], Accumulate[VBZ]},
 PlotRange -> {{0, n}, {0, 2/3 n}},
 Joined -> True, (*Joined -> False,*)
 AxesLabel -> {Style["   Počet pokusov", FontSize -> 16],
   Style["Počet výhier", FontSize -> 16]}, PlotStyle -> {Blue, Red},
 PlotLabel -> Column[{Style[
     "Pravdepodobnosť výhry so zmenou = " <>
      ToString[NumberForm[N[Total[VSZ]/n], {4, 3}]], FontSize -> 16],
    Style["Pravdepodobnosť výhry bez zmeny = " <>
      ToString[NumberForm[N[Total[VBZ]/n], {4, 3}]],
     FontSize -> 16]}],
 PlotLegend -> {Style["So zmenou", FontSize -> 16],
   Style["Bez zmeny", FontSize -> 16]}, LegendSize -> 0.5,
 LegendPosition -> {0.8, -0.1}, LegendShadow -> {0, 0}]
```

Príloha 2: Zdrojový kód pre získanie hodnôt do tabuliek 3.1 a 3.2

```
n = 10; (*20, 50, 100*)
Postupnost1 =
  Table[NestWhile[
    Join[#, {Generovane =
        RandomVariate[BinomialDistribution[1, 0.5]]}] &, {5},
    Last[#] > 0 &], {i, 1, n}];
Postupnost2 = Drop[Postupnost1, None, 1];
Dlzky = Map[Length, Postupnost2]
Najdlhsia = Max[Dlzky]
PoctyDlzok = BinCounts[Dlzky, {1, Najdlhsia + 1, 1}]
Vyhry1 = NestList[#*2 &, 2, Najdlhsia - 1]
VyhrySucet1 = PoctyDlzok.Vyhry1
```

```
PoplatokJednotlivo = n*24
Zisk = VyhrySucet1 - PoplatokJednotlivo
```

Príloha 3: Zdrojový kód pre získanie hodnôt do tabuľky 3.3

```
n = 10; (*100, 1000, 10000*)
Postupnost1 =
  Table[NestWhile[
    Join[#, {Generovane =
        RandomVariate[BinomialDistribution[1, 0.5]]}] &, {5},
    Last[#] > 0 &], {i, 1, n}];
Postupnost2 = Drop[Postupnost1, None, 1];
Dlzky = Map[Length, Postupnost2];
Najdlhsia = Max[Dlzky];
PoctyDlzok = BinCounts[Dlzky, {1, Najdlhsia + 1, 1}];
Vyhry1 = NestList[#*2 &, 2, Najdlhsia - 1];
VyhrySucet1 = PoctyDlzok.Vyhry1
PoplatokJednotlivo = n*24.19//Round
PoplatokSeria = Round[n*Log[2, n] // N]
Zisk1 = VyhrySucet1 - PoplatokJednotlivo
Zisk2 = VyhrySucet1 - PoplatokSeria
```