Univerzita Karlova v Praze

Filozofická fakulta

Katedra logiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Glivická

Impredikativita a paradox

Impredicativity and Paradox

Praha 2010 Vedoucí práce: Doc. PhDr. Vojtěch Kolman, PhD.

Děkuji vedoucímu své práce doc. Vojtěchu Kolmanovi za to, že podnítil můj zájem o zpracovávané téma a byl k dispozici ke konzultacím spojeným s jejím vypracováním.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Praze, dne 24. 8. 2010 Jana Glivická

V předložené práci studujeme roli pojmu impredikativity v návrzích řešení epistemologických a logických paradoxů. Věnujeme se vývoji tohoto pojmu tak, jak se na něm v první fázi podíleli Russell a Poincaré. Představujeme Russellovu teorii typů založenou na vyloučení impredikativních principů a definic a připomínáme s ní spjaté problémy. V návaznosti na to nabízíme Ramseyovu modifikaci této teorie, která měla dané problémy odstranit. Zkoumáme souvislost impredikativity s diagonální konstrukcí a zaměřujeme pozornost na vymezení podmínek, za nichž jsou diagonální konstrukce a impredikativní definice bludné — vedoucí ke sporu. K tomuto účelu nabízíme rozlišení vyčleňujících a potenciálně konstruujících principů. V závěru zmiňujeme také axiomatickou teorii množin, která na rozlišení predikativních a impredikativních principů rezignuje a jejíž přijetí znamenalo pokles zájmu o impredikativitu.

Klíčová slova: impredikativita, paradox, teorie typů, Russell, Poincaré, Ramsey, bludný kruh, axiom reducibility, diagonalizace, vyčleňující princip, potenciálně konstruující princip

In the submitted thesis a role is examined of the concept of impredicativity in solution suggestions for epistemological and logical paradoxes. We focus on the development of this concept in the way Russell and Poincaré contributed to it in the first stage. An introduction is given to Russell's theory of types based on the exclusion of impredicative principles and definitions, problems are mentioned related with this theory. We continue by offering Ramsey's modification of the theory of types supposed to solve the given problems. Connection is examined between impredicativity and diagonal construction and attention is paid to determination of conditions under which diagonal constructions and impredicative definitions are vicious, i.e. leading to contradictions. For this purpose a distinction is offered between out-picking and potentially constructing principles. In the conclusion the axiomatic set theory is mentioned which neutralizes the distinction between predicative and impredicative principles, and whose acceptance lead to disinterest in impredicativity.

Keywords: impredicativity, paradox, theory of types, Russell, Poincaré, Ramsey, vicious circle, axiom of reducibility, diagonalization, out-picking principle, potentially constructing principle

Obsah

1 Úvod

Na přelomu devatenáctého a dvacátého století se zkoumání v oblastech základů matematiky, spojená s projektem Fregova logicismu i Cantorovy naivní teorie množin, dostala do problémů. Objevila se řada paradoxních tvrzení, která značila, že s novými pojmy je cosi v nepořádku. Zpočátku se snad dalo doufat, že se situace vyřeší postupným vyjasňováním pojmů, jejich hlubším pochopením. To byl například případ Burali-Fortiho paradoxu, souvisejícího s pojmem ordinálního čísla. Zde se navíc dalo tvrdit, že jde o problém matematický, spojený pouze s Cantorovou teorií, nikoli problém logiky. Situace se ovšem změnila s formulací Russellova paradoxu, o níž Russell informoval Frega známým dopisem z roku 1902. Russellův paradox měl svoji formulaci jak pro Fregův systém, tak pro Cantorovu teorii množin. Významné také bylo, že pracoval pouze se základními pojmy třídy a náležení, takže se nedalo předpokládat, že se problém vyřeší postupným vyjasňováním pojmů. Logika a množinové základy matematiky se dostaly do situace, kdy bylo nutné přehodnotit základní, do té doby samozřejmě přijímané přístupy a předpoklady.

Jak toto přehodnocení probíhalo, budeme sledovat v linii určené množinovou verzí Russellova paradoxu. V ní totiž probíhal plodnější vývoj zakončený až Zermelo-Fraenkelovou axiomatizací teorie množin. Russellovo řešení je navíc pro obě dvě varianty paradoxu analogické. Uvidíme, že již na počátku se ono přehodnocení svázalo s pojmy predikativity a impredikativity. Poprvé je použil Russell, aby jejich analýzu dokončil po značné inspiraci Poincarého přístupem.

Russellem navržený přístup se ovšem ukázal být příliš omezující pro běžnou matematickou praxi. S ohledem na ni navrhl Ramsey modifikaci tohoto přístupu, kterou je možné chápat jako určitý mezistupeň mezi Russellovou teorií typů a Zermelo-Fraenkelovou teorií množin. Ovšem obecné přijetí axiomatické teorie množin dle Zermela, Fraenkela a Skolema, formulované ve dvacátých letech dvacátého století, znamenalo také konec zájmu o predikativitu v Russellově smyslu[1]. Prosadila se alternativní koncepce, nezaložená na rozlišení mezi predikativními a impredikativními definicemi.

[1] Další vývoj pojmu predikativity zkoumá Feferman. [1]

Učiňme ještě na úvod poznámku k terminologii. Výrazy množina, třída, soubor, agregát a další používali různí autoři v různých významech. My se budeme držet výrazu třída pro takový soubor objektů, který je sám chápán jako samostatný objekt, entita. Výraz soubor používáme[2] v obecnějším významu, kde nutně nepředpokládáme existenci odpovídající entity. Výraz totalita potom používáme pro soubor všech objektů určitého typu. Až v souvislosti s moderní axiomatizací teorie množin budeme hovořit o množinách.

[2] Typicky proto, abychom mohli hovořit o souborech, jež nejsou třídou.

2 Paradoxy

Připomeňme některé z paradoxů, jež souvisejí s otázkami, kterými se budeme zabývat. Vycházíme přitom z Russellova článku [7] a Kolmanovy knihy [3].

- Epimenidův paradox a paradox lháře

  V klasickém Epimenidově paradoxu prohlásí Kréťan Epimenides: „Všichni Kréťané jsou lháři.“ V tomto případě se samozřejmě paradoxnosti můžeme vyhnout, například nepředpokládáme-li, že lhář musí lhát vždy, či pokud prohlásíme Epimenidův výrok jednoduše za nepravdivý. Na Epimenidově tvrzení jsou ale založeny další dva paradoxy, jejichž řešení již není tak přímočaré. Jedná se o paradox lháře, při němž mluvčí prohlásí: „Právě teď lžu.“ Variantou tohoto paradoxu je věta: „Tato věta je nepravdivá.“ V obou případech máme co dočinění s tvrzením, které je pravdivé právě tehdy, když je nepravdivé.

- Russellův paradox

  Uvádíme zde jeho množinově-teoretickou variantu, nikoli variantu pro Fregův logický systém. Definujeme třídu r všech tříd, jež nejsou svými vlastními prvky, tedy $r := \{x|x \notin x\}$. Pro tuto třídu platí $r \in r \Leftrightarrow r \notin r$.

- Berryho paradox

  Vezměme soubor všech ordinálních čísel, která jsou popsatelná pomocí konečného počtu slov. Takovýchto popisů je jen spočetně mnoho, musí tedy existovat nějaká ordinální čísla pomocí konečného počtu slov nepopsatelná. Jelikož jsou ordinální čísla dobře uspořádaná, existuje nejmenší číslo nepopsatelné pomocí konečného počtu slov. Právě jsme ho ale pomocí konečného počtu slov popsali.

- Königův paradox

  Tento paradox je založen na předpokladu, že kontinuum lze dobře uspořádat, sám König ho považoval za vyvrácení tohoto předpokladu. Má v zásadě stejnou strukturu, jako paradox Berryho. Uvažujeme všechna reálná čísla, která jsou pojmenovatelná pomocí konečného výrazu. Těch je jen spočetně mnoho, samotných reálných čísel je však nespočetně mnoho, existují tedy reálná čísla konečným výrazem nepojmenovatelná. Za předpokladu dobré uspořádatelnosti kontinua můžeme vzít nejmenší takové číslo. Tím jsme ho ale pojmenovali pomocí konečného výrazu.

- Richardův paradox

  Vezměme soubor všech reálných čísel z intervalu (0,1), která jsou definovatelná konečně mnoha slovy. Konečných řetězců slov je jen spočetně mnoho, jimi definovaná čísla můžeme tedy seřadit ve spočetnou posloupnost S. Pomocí diagonální metody (n-tá cifra v desetinném rozvoji bude zvolena jako různá od n-té cifry n-tého čísla) můžeme definovat číslo, které se liší od všech čísel v uvažované posloupnosti, tedy není prvkem posloupnosti S. Zároveň jsme však toto číslo definovali konečně mnoha slovy, tedy musí být prvkem posloupnosti S.

- Burali-Fortiho paradox

  Uvažme třídu všech ordinálních čísel. Ta je vzhledem k povaze ordinálních čísel dobře uspořádána, odpovídá jí tedy ordinální číslo, označme ho Ω. Ω je ze své definice největším ordinálním číslem. Uvážíme-li ale číslo $\Omega + 1$, dostáváme ordinální číslo větší.

- Grellingův paradox

  Rozdělme adjektiva do dvou skupin — adjektiva autologická a heterologická. Adjektivum je autologické, jestliže ho můžeme připsat jemu samému. Tak například adjektivum „české“ je české, a proto je autologické. Heterologická adjektiva jsou ta, která jim samým připsat nemůžeme. Adjektivum „německé“ je adjektivum české, nikoli německé, je proto příkladem adjektiva heterologického. Do které z oněch dvou skupin patří adjektivum „heterologické“? Jestliže je heterologické, pak ho můžeme připsat jemu samému a je tedy autologické. Jestliže je autologické, můžeme ho díky definici autologičnosti připsat jemu samému a je tedy heterologické.

- Cantorův paradox

  Cantor dokázal, že pro každou třídu C platí $|P(C)| > |C|$, neboli že potence dané třídy má ostře větší mohutnost než třída samotná. Uvažme třídu V všech tříd. Její potence musí mít ostře větší mohutnost než třída V. Získali jsme tedy třídu, která má větší mohutnost, než třída všech tříd.

Zastavme se ještě u rozlišení, které činí Quine v *The Ways of Paradox* [9], kde rozlišuje *veridické paradoxy*, *falsidické paradoxy* a *antinomie*. Falsidické paradoxy jsou takové, které nás staví před absurdní tvrzení. Jako příklad Quine uvádí různé „důkazy", že $1 = 2$. Podstatné zde je, že se samozřejmě o žádný důkaz nejedná, v úvaze se skrývá na první pohled možná ne vždy patrná chyba. Mohli bychom tak spíše mluvit o matematickém klamu, než paradoxu. Zajímavější jsou zbývající dva případy a vztah mezi nimi. Veridický paradox je takový, jenž se při vhodné formulaci problému stává vlastně důkazem určitého tvrzení. Příkladem je zde známý problém holiče, jenž holí právě ty muže, kteří se neholí sami. Takový holič se pak samozřejmě holí právě tehdy, když se neholí. Zdá se, že jsme narazili na spor. Nicméně stačí si uvědomit, že ke sporu dospíváme pouze tehdy, pokud jsme předpokládali, že takový holič, jenž holí právě muže, kteří se neholí sami, existuje. Jinak řečeno, celou úvahu můžeme považovat za důkaz sporem, a to důkaz právě toho, že takový holič neexistuje. Antinomie jsou případy paradoxů, při nichž dospíváme zjevně ke sporu, aniž bychom mohli v úvaze identifikovat chybu (a prohlásit antinomii za falsidický paradox), či zamlčený předpoklad (a prohlásit ji za veridický paradox vyvracející tento předpoklad).

V případě antinomií se ukazuje, že do nějaké doby nezpochybňované způsoby uvažování jsou neudržitelné. Quinovými slovy:

> Veridický paradox skrývá překvapení, ale ono překvapení se rychle vytratí, jakmile se nad důkazem zamyslíme. Falsidický paradox přináší překvapení, ale to je nahlédnuté jako falešný poplach, jakmile odhalíme klam, na němž je paradox založen. Nicméně antinomie skrývá překvapení, které nemůže být urovnáno ničím menším než zřeknutím se části našeho konceptuálního dědictví. [9, str. 9]

3 Tři Russellovy teorie

Ve svém článku z roku 1906 [6] navrhuje Russell novou terminologii:

> Normy (obsahující jednu proměnnou), které nedefinují třídu, navrhuji nazývat nepredikativními; ty, které třídu definují, budu nazývat predikativními. [6, str. 34]

Russellův pojem *nepredikativní* byl krátce poté nahrazen současným *impredikativní*. Normy, o nichž se v citaci hovoří, jsou ztotožněny s propozičními funkcemi.

Russell uvažuje o vztahu mezi propozičními funkcemi a třídami. Zásadním konstatováním je, jak už vyplývá ze zavedené terminologie, že tomu není tak, že každé propoziční funkci odpovídá třída právě těch objektů, na nichž daná propoziční funkce dává hodnotu pravda. Rozlišení vede mezi dvěma případy: (a) předpokládáme existenci třídy, k níž ale nemáme žádnou propoziční funkci, která by třídu definovala (to je případ tzv. výběrové třídy postulované axiomem výběru), (b) máme jasně určenou propoziční funkci, které nicméně neodpovídá žádná třída (to je případ Russellova paradoxu, kde onou propoziční funkcí je $x \notin x$ pro proměnnou x).

Problém impredikativních definic odpovídá případu (b), v němž jde o stanovení kritérií pro propoziční funkce tak, aby každé funkci splňující ona kritéria odpovídala třída. Russell předpokládá, že existence definující propoziční funkce je nutnou, nikoli postačující podmínkou pro existenci třídy. Onu postačujícnost pak mají dodávat právě ona kritéria predikativity.

Při analýze Burali-Fortiho paradoxu dospívá Russell k následujícímu zobecnění:

> Mějme vlastnost Φ a funkci f takové, že jestliže Φ platí o všech prvcích množiny u, pak $f(u)$ existuje, má vlastnost Φ a není prvkem množiny u; pak předpoklad, že existuje třída w všech prvků majících vlastnost Φ a že existuje $f(w)$, vede k závěru, že $f(w)$ má a zároveň nemá vlastnost Φ. [6, str. 35]

Pokud za Φ zvolíme „být ordinálním číslem“ a za $f(u)$ „ordinální číslo příslušející třídě u“, dostaneme Burali-Fortiho paradox; pokud za Φ zvolíme $x \notin x$ a za $f(u)$

zvolíme u, dostaneme Russellův paradox. V případě Burali-Fortiho paradoxu se nabízí možnost zpochybnit jeden ze dvou předpokladů: buď můžeme tvrdit, že soubor všech ordinálních čísel netvoří třídu, nebo že sice tvoří třídu, nicméně této třídě nepřísluší žádné ordinální číslo. Druhá z možností je založena na předpokladu, že pro třídu On všech ordinálů neexistuje hodnota $f(On)$. V případě Russellova paradoxu je situace jiná. Funkce f je v tomto případě identitou, a tedy nemůžeme zpochybnit existenci funkční hodnoty pro žádný argument. Propoziční funkce $x \notin x$ je tedy funkcí impredikativní. Ukazuje se tedy, že *zákon komprehenze* postulující pro každou propoziční funkci existenci třídy právě všech prvků, na nichž ona funkce nabývá hodnoty pravda, vede ke sporu. Otázkou zůstává, zda odmítnout jen jeho jednotlivé instance pro určité propoziční funkce a jak v tom případě takové funkce vymezit, či zda ho odmítnout principiálně. Russell se postupně věnuje třem následujícím teoriím:

1. Cik-cak teorie (The zigzag theory)

2. Teorie omezení velikosti (The theory of limitation of size)

3. Teorie eliminace tříd (The no classes theory)

3.1 Cik-cak teorie

> V cik-cak teorii začínáme předpokladem, že propoziční funkce určují třídy tehdy, když jsou poměrně jednoduché, a třídy neurčují pouze v případě, že jsou komplikované a nejasné. [6, str. 38]

Takto zahajuje Russell kapitolu věnovanou cik-cak teorii. Nejasné je ovšem samotné Russellovo představení této teorie. Sám upozorňuje, že pro její rozvoj by bylo zapotřebí stanovit axiomy, které by určily, jaké funkce jsou predikativní a jaké nikoli. Dodává ovšem hned, že se mu zatím nepodařilo najít žádný princip, na jehož základě by bylo možné takové axiomy stanovit, kromě toho, že by neměly umožnit v nové teorii formulovat známé paradoxy. Snad jediným konkrétním přiblížením toho, co si Russell pod onou „jednoduchostí“ propozičních funkcí představoval, je konstatování, že je-li nějaká propoziční funkce predikativní (tj. dostatečně jednoduchá), je predikativní (tj. dostatečně jednoduchá) i její negace.

Pojmenování této teorie vychází z následující úvahy. Je-li Φ impredikativní funkce, pak nemohou právě ty objekty, pro něž je pravdivá, tvořit třídu. Každá existující třída u tedy buď obsahuje prvek x, pro nějž neplatí $\Phi(x)$, či její doplněk obsahuje prvek x, pro nějž $\Phi(x)$ platí. Tuto skutečnost nazývá Russell cik-cak vlastností, jež pak dává jméno celé teorii. Poznamenejme jen, že existence onoho doplňku z předchozí úvahy je zaručena, jelikož definující predikativní funkci považuje Russell za nutnou podmínku existence množiny a predikativní funkce jsou v případě cik-cak teorie uzavřeny na negaci. Doplněk třídy u je tak definován negací predikativní funkce definující třídu u.

3.2 Teorie omezení velikosti

V tomto případě je pojem třídy omezen jen na ty soubory, jež nejsou „příliš velké“. Východiskem této teorie je zobecnění analýzy Burali-Fortiho paradoxu, jak jsme ji popsali v úvodu této kapitoly. V souvislosti s touto analýzou používá Russell další pojem, a to pojem *sebereprodukujících se* procesů a tříd. Ona sebereprodukce spočívá právě v tom, že na základě každé třídy, jejíž všechny prvky mají danou vlastnost, lze vždy definovat nový (ve smyslu nenáležející do uvažované třídy) prvek s touto vlastností. U sebereprodukujících se procesů nemůžeme předpokládat, že by se nám podařilo vytvořit třídu všech prvků s danou vlastností, v případě Burali-Fortiho paradoxu třídu všech ordinálních čísel.

Russell upozorňuje, že v případě sebereprodukujících se procesů můžeme na základě funkcí Φ a f tvořit řadu S, jejíž uspořádání bude odpovídat uspořádání ordinálních čísel, a to následujícím postupem. Zvolme množinu x, pro niž existuje $f(x)$, typicky tedy množinu, jejíž všechny prvky mají vlastnost Φ. Ono $f(x)$ bude prvním prvkem řady:

$$S(0) = f(x)$$

Abychom mohli generovat další prvky řady, potřebujeme, za předpokladu naivní verze principu transfinitní rekurze, stanovit krok pro následnické a limitní ordinály. V tomto případě si vystačíme s jednotným předpisem:

$$S(\alpha) = f(\{S(\beta) | \beta < \alpha\})$$

Od možnosti tvořit takovouto řadu odvíjí Russell stanovení kritéria toho, abychom mohli prohlásit nějaký soubor za příliš velký na to, aby byl třídou. Třídu musí být možné dobře uspořádat tak, aby toto uspořádání odpovídalo nějakému počátečnímu úseku řady ordinálních čísel. Pokud tomu tak není, daný soubor netvoří třídu a příslušná propoziční funkce je impredikativní.

3.3 Teorie eliminace tříd

Tato teorie je nejradikálnějším Russellovým návrhem. Potíže s určením toho, jaké propoziční funkce jsou predikativní, řeší tím, že se úplně vzdá předpokladu existence tříd. Russell upozorňuje, že pro tuto teorii není nutné předpokládat, že žádná predikativní funkce nedefinuje jí příslušející třídu, nutné je pouze vzdát se opačného předpokladu. Samozřejmě je toto řešení příliš drastické, přestože Russell ukazuje, jak některá tvrzení o třídách přeložit do řeči, v níž třídy nefigurují, za pomoci příslušných propozičních funkcí. Jestliže například třída u byla původně definována pomocí propoziční funkce $p(x)$, pak v teorii eliminace tříd přeložíme tvrzení „Třída u je jednoprvkovou třídou." jako „Existuje entita a taková, že $p(x)$ dá pravdivou propozici pouze pro tuto entitu.".

Toto je vlastně také řešením moderních axiomatizací teorie množin nepřipouštějících (vlastní) třídy jako objekty — řeč o třídách je nahrazena řečí o příslušných formulích. Nicméně tyto axiomatizace přímou řeč o třídách zachovávají právě v řeči o množinách, jež jsou objekty teorie, a nerezignují ani na svého druhu vymezení predikativních funkcí, jak je tomu například v případě axiomu vydělení. Omezení, které s sebou přináší nemožnost mluvit o třídách, je totiž zásadní právě v tom smyslu, že se vzdáme tříd jako matematických objektů a tím také možnosti přes třídy kvantifikovat. Jak přeložit do přípustné řeči tvrzení obsahující kvantifikaci přes třídy zůstává bez odpovědi. Russell zmiňuje, že je třeba prozkoumat, jaké partie matematiky by mohly zůstat zachovány, pokud bychom se přiklonili k této teorii.

V poznámce dodatečně připsané k článku píše, že po dalších zkoumáních je přesvědčen, že tato teorie je úplným řešením problémů spjatých s paradoxy. Nicméně v průběhu následujících dvou let mění názor a přiklání se k teorii, která na vymezení impredikativních funkcí a řeč o třídách nerezignuje, k teorii typů.

4 Poincaré a bludný kruh

V letech 1905 až 1906 vyšla série tří Poincarého článků pod názvem *Les mathematiques et la logique*. Hlavní otázkou celé série je, zda lze matematiku redukovat na logiku, zda je možné se v matematice obejít bez syntetických soudů a priori, což jsou pro Poincarého „soudy, jež nelze analyticky dokázat, redukovat na identity, ani empiricky potvrdit“ [4, str. 1023]. Poincaré tvrdí, že to možné není, syntetické soudy a priori dle něj právě dělají matematiku matematikou. Příkladem takového soudu je mu například princip indukce a možnost jeho užití pro přirozená čísla. Tyto otázky vybočují z našeho dosavadního zkoumání paradoxů a možností jejich eliminace, nicméně uvidíme, že nás další sledování započaté cesty k principu indukce a přirozených číslům zavede.

Kromě výše uvedené otázky se ve třetím článku své série, poté co se seznámil s Russellovým článkem [6], Poincaré podrobněji zabývá i paradoxy, zejména Richardovým a Burali-Fortiho. Jednu z kapitol věnuje Russellovým navrhovaným třem teoriím, zdůrazňuje, že všechny jsou nejasné, nepropracované, nedávají žádný návod, jak je dále rozvíjet, což ostatně přiznává i sám Russell. Tím je v zásadě odbývá a než se začíná věnovat vlastní analýze původu paradoxů, jen konstatuje, že ovšem

> opravdová matematika, taková, která je něčím užitečná, se může dál rozvíjet v souladu se svými vlastními principy, aniž by se nechala obtěžovat bouřemi, jež zuří mimo ni, a může jít dál krok za krokem se svými obvyklými výdobytky, které jsou definitivní a jichž se nebude muset nikdy vzdát. [4, str. 1062]

Skutečné řešení Richardova paradoxu podle Poincarého nastínil už sám Richard. Poincaré toto řešení formuluje následovně. Uvažovaná posloupnost reálných čísel je zde značena jako E, číslo definované diagonalizací jako N.

> E je souborem všech čísel definovatelných konečným počtem slov, *aniž bychom zavedli samotný pojem souboru E.* Jinak by definice souboru E obsahovala bludný kruh; nelze definovat E za pomoci souboru E samot-

ného. Nyní jsme sice definovali N pomocí konečného počtu slov, ale za pomoci pojmu souboru E. Proto není N součástí souboru E. [4, str. 1083]

Richardův paradox tak můžeme označit za svého druhu falsidický paradox, kde onou chybou, které jsme se dopustili, bylo nerozlišení (a) definice konečným počtem slov bez možnosti užití pojmu E od (b) definice konečným počtem slov s možností užití pojmu E. Z pohledu možnosti (a) se možnost (b) jeví jako „definice nekonečným počtem slov" — jestliže nemůžeme soubor E zmiňovat použitím příslušného pojmu, bylo by nutné vyjmenovat postupně všechny členy odpovídající nekonečné posloupnosti. Do značné míry je tedy neutralizace Richardova paradoxu založena na odhalení nevyjasněnosti pojmů jako „definovat", „označovat", „popisovat" atd. Tyto pojmy jsou nevyjasněné do té míry, do jaké mohou či nemohou definovat, označovat či popisovat prvek náležející do určité totality (číslo N) s odkazem na tuto totalitu (soubor E). Zde už se velmi blížíme Russellově pozdější reformulaci principu bludného kruhu, zastavme se ale ještě u Poincarého řešení.

Analýza bludného kruhu se neomezuje jen na epistemologické paradoxy, například Richardův, ale Poincaré ji považuje za klíč k řešení i paradoxů logických[3]. Burali-Fortiho paradox je založen na bludném kruhu stejným způsobem. Rozlišení je zde vedeno mezi (a) ordinálními čísly definovatelnými bez odkazu k totalitě všech ordinálních čísel a (b) ordinálními čísly definovatelnými i s tímto odkazem. Že potom třídě On ordinálních čísel typu (a) odpovídá ordinální číslo větší než všechna čísla z On, je vysvětleno tím, že se jedná o ordinální číslo typu (b). Samozřejmě je toto řešení problematičtější než v případě Richardova paradoxu, kde bylo možné sledovat kořen paradoxu až do sféry přirozeného jazyka k pojmu „definovat". V případě Burali-Fortiho paradoxu jsme zůstali ve sféře jazyka matematiky, bude proto nutné s využitím analýzy bludného kruhu přestavět základy matematiky tak, aby díky nim bylo možné provádět příslušná rozlišení i uvnitř matematiky.

[3]Dělení paradoxů na epistemologické a logické navrhl Ramsey a popíšeme ho níže.

5 Russell a teorie typů

Na Poincarého práci navázal Russell a roku 1908 ji rozpracoval v článku *Mathematical logic as based on the theory of types*, kde formuluje princip bludného kruhu v této podobě:

> „Žádná totalita nemůže obsahovat prvky definovatelné na základě této totality.“ Tento princip v našem technickém jazyce zní takto: „Cokoli obsahuje vázanou proměnnou, nesmí být mezi možnými hodnotami této proměnné.“ [7, s. 163]

Russell analyzuje výrazy vyskytující se ve formulacích jednotlivých paradoxů, aby ukázal, že obsahují odkazy k *nelegitimním totalitám*. Tak například propozice „Lžu.“ je interpretována jako „Existuje propozice, kterou tvrdím a která je nepravdivá.“, což je dále ekvivalentní tvrzení „Není pravda, že pro každou propozici p platí, že pokud tvrdím p, pak p je pravdivá.“. K paradoxu dospíváme, pokud toto tvrzení považujeme za propozici. Russell proto tvrdí, že pojem „všechny propozice“ je nelegitimní. Pokud bychom připustili totalitu všech propozic, dostali bychom dle Russella díky paradoxu lháře propozici, která by musela ležet mimo tuto totalitu, abychom se vyhnuli sporu. Tato analýza ale dost dobře neodpovídá paradoxu lháře. Ten je založen ne pouze na tvrzení, že existuje propozice, kterou tvrdím a která je nepravdivá, ale také na faktu, že tato propozice je právě tou propozicí, jejímž vyslovením tvrdím, že ona mnou tvrzená nepravdivá propozice existuje. Jinými slovy zde nejde o odkaz k totalitě všech propozic, nýbrž o odkaz k jednomu konkrétnímu objektu, a to právě k propozici „Právě teď lžu.“.

Další Russellovy úvahy ale odpovídají zmiňovaným paradoxům. V Russellově paradoxu předpoklad existence totality všech tříd vede, aplikací diagonalizace na tuto totalitu, k existenci třídy různé od všech tříd. Pojem „všechny třídy“ je tudíž nelegitimní. V případě paradoxů Berryho, Königova a Richardova jsou jako nelegitimní totality na základě obdobných úvah identifikovány „všechny definice“, „všechna jména“ atd. Burali-Fortiho paradox pak vede k upření legitimity pojmu „všechny ordinály“, Cantorův by pak, přestože ho Russell nezmiňuje, obdobně vedl k prohlášení třídy V za nelegitimní. Tyto nelegitimní totality jsou vlastně tím, co by mohlo být východiskem Russellových sebereprodukujících se procesů, jak je popsal už ve svém předchozím článku.

S odmítnutím nelegitimních totalit souvisí další Russellovo rozlišení, vedené mezi výrazy každý, všechny (all) a výrazy nějaký, jakýkoli (any). Jako příklad je uváděna definice spojitosti funkce v bodě. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže pro každé ϵ existuje δ splňující určitá, pro nás teď nepodstatná, kritéria. Funkce $f(x)$ je zde jakoukoli (any) funkcí; na definici spojitosti se tak můžeme dívat jako na definiční schéma, z něhož dosazením konkrétní funkce dostaneme definici spojitosti pro onu funkci. Na druhou stranu definice mluví o každém (all) ϵ, kvantifikuje tedy přes určitou totalitu. Výrazy, které se vyskytují v kontextu slov nějaký, jakýkoli (any) jsou označovány jako *real variable*, volná proměnná; v našem případě je to funkce f. Zatímco výrazy v kontextu slov každý, všechny (all) jsou označovány jako *apparent variable*, vázaná proměnná, kterou je v našem případě číslo ϵ. Oba dva druhy proměnných jsou dle Russella v matematice nezbytné. Vázané proměnné proto, abychom mohli formulovat takové definice jako právě definici spojitosti v bodě, kde bylo nutné kvantifikovat přes totalitu všech reálných čísel. Volné proměnné jsou zase ty, s nimiž pracuje matematická dedukce. Chceme-li odvodit obecný výrok, například že pro všechny trojúhelníky platí trojúhelníková nerovnost, pracujeme nejprve s partikulární instancí onoho obecného výroku, nicméně s instancí neurčitou. Vezmeme nějaký obecný trojúhelník ABC a ukážeme, že pro něj nerovnost platí. Na základě toho, že na tento obecný trojúhelník nebyly kladeny žádné specifické požadavky, můžeme přejít od partikulárního tvrzení k tvrzení obecnému.

V případě totalit, které byly prohlášeny za nelegitimní, jak je tomu třeba u „všech propozic“, můžeme nicméně místo výrazu „všechny“ používat výraz „jakékoli“. Můžeme tedy tvrdit $p \vee \neg p$, nicméně v případě tvrzení $\forall p(p \vee \neg p)$ se už dopouštíme kvantifikace přes nelegitimní totalitu. To má závažné důsledky pro pokusy o definici přirozeného čísla jako objektu, který má všechny induktivní vlastnosti. „Všechny vlastnosti“ jsou opět nelegitimní totalitou. Můžeme tedy říci, že jestliže je n přirozené číslo a jestliže platí $\varphi(0) \wedge \forall m(\varphi(m) \rightarrow \varphi(m+1))$, pak $\varphi(n)$. Nemůžeme nicméně definovat přirozené číslo pomocí definice predikátu N, být přirozeným číslem, zamýšleným způsobem jako

$$N(x) = (\forall\varphi)((\varphi(0) \wedge \forall m(\varphi(m) \rightarrow \varphi(m+1))) \rightarrow \varphi(x))$$

právě kvůli kvantifikaci přes „všechny vlastnosti“.

Jaká jsou tedy kritéria toho, aby bylo možné mluvit o všech objektech s určitou vlastností? Poincaré za toto kritérium považoval konečnost:

> Slovo „všechny“ má velmi jasný význam, pokud se týká konečného množství objektů; aby mělo význam v případě, kdy počet objektů je nekonečný, bylo by třeba, aby existovalo aktuální (cele dané) nekonečno. (...) Není žádné aktuální (cele dané) nekonečno. Cantor a jeho následovníci na to zapomněli a upadli do kontradikce. [4, s. 1070]

Russell není tak restriktivní, nepovažuje za nutné vzdát se možnosti mluvit o všech objektech v případě jejich nekonečného počtu. Podmínka, kterou si klade, je *logická homogenita*:

> Zásadní není, jak se zdá z předchozí diskuze, konečnost, ale něco, co je možné nazývat *logickou homogenitou*. Tato vlastnost náleží jakémukoli souboru, jehož všechny členy spadají do oboru významu určité funkce. Bylo by vždy na první pohled patrné, zda daný soubor tuto vlastnost má či nemá, kdyby nebylo skryté víceznačnosti obvyklých logických termínů jako pravda a nepravda, kvůli níž se zdá, že existuje jedna funkce tam, kde se ve skutečnosti jedná o konglomerát mnoha funkcí. [7, s. 163]

Můžeme tedy mluvit o všech objektech s určitou vlastností, jestliže tvoří součást oboru významu jisté funkce, který je definován jako soubor všech argumentů, pro něž daná funkce nabývá nějaké hodnoty, tedy pro něž má význam.

Vzdání se představy jedné funkce ve prospěch konglomerátu více funkcí v případě pojmů pravdy a nepravdy, jak o tom hovoří Russell, je způsobem, jak se vyhnout například Grellingovu paradoxu. Přidržme se výkladu, který podává Quine [9, s. 7]. Adjektivum „heterologické“ odpovídá výrazu „nepravdivé o sobě“ a paradox tedy nastává ve chvíli, kdy klademe tuto otázku: „Je ‚nepravdivé o sobě‘ nepravdivé o sobě?“ Řešení spočívá v odlišení významu slova „nepravdivé“ v jeho prvním a druhém výskytu. Tomuto odlišení budou odpovídat celočíselné indexy připisované k jednotlivým výskytům, díky nimž se vyhneme aplikaci pojmu pravdy/nepravdy na výrazy, v nichž se tento pojem sám vyskytuje. Představa je taková, že „obyčejná“ adjektiva lze aplikovat na objekty včetně výrazů odpovídajících těmto adjektivům, adjektivum pravdy$_0$/nepravdy$_0$ na výrazy utvořené z těchto „obyčejných“ adjektiv, avšak na výrazy, v nichž se vyskytují adjektiva pravda$_0$/nepravda$_0$, lze aplikovat už pouze adjektiva pravda$_1$/nepravda$_1$, na výrazy je obsahující pak zase adjektiva pravda$_2$/nepravda$_2$ a tak dále. Můžeme tedy klást takovouto otázku: „Je slovo ‚německé‘ německé?“ Avšak otázku „Je ‚nepravdivé o sobě‘ nepravdivé o sobě?“ musíme nahradit otázkou „Je ‚nepravdivé$_0$ o sobě‘ nepravdivé$_1$ o sobě?“. Odpovědí bude, že není. Spíše než aby bylo nepravdivé$_1$ o sobě, nedává aplikováno samo na sebe smysl.

5.1 Rozvětvená teorie typů

Rozvíjení výše uvedeného přístupu, tedy indexování výrazů přirozenými čísly, by odpovídalo tzv. *jednoduché teorii typů* (simple theory of types). Russellovým řešením je ale *rozvětvená teorie typů* (ramified theory of types).

Nejprve je zavedena hierarchie propozic. Jsou rozlišeny propozice *elementární*, neobsahující žádné vázané proměnné, a propozice *generalizované*, které vázané proměnné obsahují. V rámci elementárních propozic lze rozlišit *termy*, odpovídající subjektu propozice, od *konceptů*, hrajících roli predikátů. Termy elementárních propozic jsou potom označeny jako *individua* a tvoří nejnižší typ v hierarchii. Individua tvoří totalitu, přes niž je možno kvantifikovat, mohou tedy vystupovat jako vázané proměnné.

Elementární propozice společně s propozicemi obsahujícími na místě vázaných proměnných pouze individua tvoří potom další typ hierarchie — *propozice prvního řádu*. Propozice prvního řádu opět tvoří totalitu, jejich vázané proměnné jsou totiž nižšího řádu než ony samotné, čímž je dodržen princip bludného kruhu. Vzhledem k tomu mohou vystupovat v pozici vázaných proměnných a propozice, které je v takové pozici obsahují, tvoří další typ hierarchie — *propozice druhého řádu*. Takovýmto způsobem lze generovat propozice libovolného řádu a budovat vyšší a vyšší patra hierarchie.

Na základě hierarchie propozic je zavedena hierarchie (propozičních) funkcí, které vznikají z propozic díky substituování za jejich jednotlivé složky. Propozici p, v níž substituujeme za nějakou její složku, společně s vyznačením této složky, nazývá Russell *maticí*. Řád matice je dán řádem příslušné propozice. Nicméně řád matice nepostačuje k určení typu funkce. Jednak proto, že neurčuje počet proměnných, za něž je substituováno, jednak proto, a zde se dostává ke slovu ono větvení neboli ramifikace, že kromě typu vázaných proměnných, jež jsou zohledněny v řádu příslušné propozice, závisí typ funkce také na typu argumentu, a ten (u propozic vyšších řádů), není řádem příslušné propozice určen, protože může být kteréhokoli z řádů nižších. Typ funkce tedy závisí jak na typu jejích argumentů, tak na typu jejích vázaných proměnných. Řád funkce je ale řádem příslušné matice, tedy nezávisí na argumentu funkce a jeho typu, ale pouze na typu vázaných proměnných.

Myhill ukázal, že typy funkcí se dají ztotožnit s konečnými klesajícími posloupnostmi přirozených čísel, kde první člen posloupnosti udává řád funkce a zbytek posloupnosti typ argumentu, přičemž první člen tohoto zbytku je opět řádem argumentu. Pro hodnotu propoziční funkce v bodě x používá Russell zápis $\varphi(x)$, onu propoziční funkci samotnou značí jako $\varphi(\hat{x})$. Je-li tedy x individuovou proměnnou a φ neobsahuje žádné vázané proměnné, pak funkce $\varphi(\hat{x})$ je typu $\langle 1, 0\rangle$. Budeme-li teď pracovat s argumentem typu $\langle 1, 0\rangle$, dostaneme obdobně funkci typu $\langle 2, 1, 0\rangle$. Nicméně ne vždy je řád funkce nejbližší vyšší než řád argumentu. V případě, že vycházíme z propozice druhého řádu, ale za argument vzniklé propoziční funkce nezvolíme propozici prvního řádu, ale individuum, bude mít výsledná funkce typ $\langle 2, 0\rangle$. Z tohoto důvodu zavádí Russell ještě kategorii *predikativních funkcí*. Jsou to ty funkce, jejichž řád je o jeden vyšší než řád jejich argumentu.

U pojmu predikativity tedy při tomto užití dochází k významovému posunu, nicméně i zde je používán s ohledem na legitimní, neboli dobře definovanou totalitu. Jak funkce typu $\langle 1, 0\rangle$, tak funkce typu $\langle 2, 0\rangle$ jsou funkcemi individuí, nicméně ta druhá je definována s ohledem na totalitu funkcí typu $\langle 1, 0\rangle$; ona propozice druhého řádu, z níž jsme vycházeli, totiž musela v roli vázané proměnné obsahovat funkce řádu prvního, jinak by sama nebyla funkcí druhého řádu. Definování funkce individuí pomocí odkazu na totalitu funkcí typu $\langle 1, 0\rangle$, tedy opět funkcí individuí, je problematické s ohledem na naše předchozí úvahy. Proto Russell za dobře definovanou totalitu považuje až totalitu predikativních funkcí daného řádu, tedy totalitu funkcí typu $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 2, 1, 0\rangle$, či $\langle 3, 2, 1, 0\rangle$, nikoli však už $\langle 2, 0\rangle$. Přes predikativní funkce určitého řádu lze potom tedy kvantifikovat a mohou tak vystupovat v roli vázaných proměnných. Predikativní funkce Russell značí pomocí vykřičníkové notace jako $\varphi!(\hat{x})$

5.2 Axiom reducibility

Viděli jsme, že odmítnutí totality „všech vlastností“ vedlo k nemožnosti definovat čísla pomocí predikátu N takto:

$$N(x) = (\forall\varphi)((\varphi(0) \wedge \forall m(\varphi(m) \rightarrow \varphi(m+1))) \rightarrow \varphi(x))$$

S ohledem na výše řečené se můžeme pokusit definici zachránit tak, že nebudeme kvantifikovat přes všechny vlastnosti, ale přes všechny vlastnosti/funkce typu $\langle 1, 0\rangle$, za předpokladu, že přirozená čísla mají typ $\langle 0\rangle$. Přirozené číslo tedy bude takový objekt, který má všechny induktivní vlastnosti prvního řádu. To by se mohlo zdát vyhovující s ohledem na dnes klasickou axiomatizaci Peanovy aritmetiky, v níž se objevuje schéma prvořádové indukce. Ovšem v rámci Russellovy teorie typů se dostaneme do potíží už například při pokusu dokázat, že součtem dvou přirozených čísel m, n je opět přirozené číslo. V tomto případě bychom chtěli postupovat indukcí — ukázat, že $m + 0$ je přirozené číslo a že také pokud $m + x$ je přirozené číslo, pak i $m+x+1$ je přirozené číslo, a indukcí usoudit, že tedy $m+n$ je přirozené číslo. Nicméně vlastnost „být přirozeným číslem“ je, dle naší definice, vlastností typu $\langle 2, 0\rangle$, definice ovšem zaručuje, že indukci lze použít pouze pro vlastnosti typu $\langle 1, 0\rangle$.

Zastavme se ještě u našeho předpokladu, že přirozená čísla jsou typu $\langle 0\rangle$. S ohledem na Russellovo pojetí teorie typů nebyl vlastně vůbec nutný. Pro Russella je důležitý relativní vztah mezi jednotlivými typy objektů, ne absolutní určení všech typů, které není nutné uvádět. V rámci takzvané *typové víceznačnosti* je tak třeba si typy doplnit tak, aby to odpovídalo teorii typů. Objekt s nejnižším typem v rámci daného kontextu lze považovat za individuum, přestože v rámci kontextu jiného by mu odpovídal typ komplikovanější. Náš předpoklad, že přirozená čísla jsou individui, byl tedy v daném případě jak oprávněný, tak nadbytečný.

Řešení, které nabízí Russell v souvislosti s obtížemi spojenými s důkazy indukcí, je ale samo dosti problematické. Uvědomuje si, že je třeba najít metodu, jak redukovat řád propoziční funkce. Toho by bylo možné dosáhnout tím, že bychom mezi individua připustili třídy. Pak bylo možné pro jakoukoli propoziční funkci $\varphi(\hat{x})$ místo $\varphi(x)$ vzít $x \in \{x|\varphi(x)\}$, což by bylo prvořádové tvrzení, vzhledem k tomu, že neodkazuje žádné totalitě funkcí jakéhokoli typu. Tím bychom ale opět do teorie typů vpustili zákon komprehenze a všechny s ním spojené paradoxy. Připuštění tříd jako objektů tedy musíme odmítnout. Místo toho nabízí Russell přijetí axiomu, který označuje jako *axiom tříd* či *axiom reducibility*:

$$(\forall\varphi)(\exists\psi)(\forall x)[\psi!(x) \leftrightarrow \varphi(x)]$$

Tento axiom postuluje ke každé funkci existenci predikativní funkce extenzionálně ekvivalentní. Díky němu můžeme například v případě indukce pro přirozená čísla přejít od funkce $N(\hat{x})$ typu $\langle 2, 0\rangle$ k predikativní funkci $\psi!(\hat{x})$, pro ni pomocí indukce dokázat $\psi!(m + n)$ a na základě extenzionální ekvivalence dostat $N(m + n)$.

S připuštěním axiomu reducibility se nabízí otázka, zda si jednoduše nevystačíme pouze s funkcemi predikativními. Pokud by tomu tak bylo, pak by se ramifikace stala zcela zbytečnou a mohli bychom se omezit na jednoduchou teorii typů. To bychom se ale výrazně odchýlili od původního Russellova záměru, podle nějž extenzionální ekvivalence nebyla dostatečným kritériem pro prohlášení dvou funkcí za identické, zejména s ohledem na to, že teorie typů měla umožnit práci i s intenzionálními kontexty. Typicky extenzionální objekty jako třídy jsou zaváděny až odvozeně, odhlédnutím od těch vlastností propozičních funkcí, které se projeví právě pouze v kontextech intenzionálních. Potom se však stále můžeme ptát, z jakého důvodu chce Russell budovat intenzionální systém, když sám zdůrazňuje, že:

> Funkce funkcí, kterými se zabývá speciálně matematika, jsou všechny extenzionální. [7, s. 172]

Na toto naráží Ramsey, když teorii typů kritizuje, jak se tím budeme později zabývat.

5.3 Definice třídy a řešení souvisejících paradoxů

Třídu definovanou funkcí $\psi(\hat{z})$ značí Russell $\hat{z}(\psi z)$, budeme používat i dnes standardní značení $\{z|\psi(z)\}$. Třída je zavedena jako argument extenzionální propoziční funkce:

$$f\{\hat{z}(\psi z)\} \Leftrightarrow (\exists\varphi)(\varphi!(x) \leftrightarrow \psi(x)) \wedge f\{\varphi!(\hat{z})\}$$

Vlastnosti třídy $\hat{z}(\psi z)$ jsou tedy určeny predikativní funkcí extenzionálně ekvivalentní funkci $\psi(\hat{z})$ a nezávisejí tak vůbec na způsobu konstrukce této funkce, ale pouze na její extenzi. Třída je tedy, jak odpovídá běžné představě, chápána extenzionálně. Russell zavádí ještě symbol cls, který odpovídá třídě všech objektů určitého typu:

$$cls = \hat{\alpha}\{(\exists\varphi)(\alpha = \hat{z}(\varphi!z))\}$$

Symbol cls je samozřejmě typově víceznačný, jeho typ závisí na typu vázané proměnné φ, respektive na typu příslušné predikativní funkce $\varphi!(\hat{z})$. Jestliže například z bude individuová proměnná, příslušná predikativní funkce $\varphi!(\hat{z})$ bude funkcí typu $\langle 1, 0\rangle$ a výraz cls bude tedy označovat třídu tříd individuí.

Konstatováním toho, že i třídy musíme chápat jako hierarchizované dle jim příslušného typu, je vlastně vyřešen Russellův paradox. Výraz $x \notin x$ neurčuje predikativní funkci, protože je agramatický. Každý (typově víceznačný) výraz $x \in y$ musíme interpretovat v souladu s teorií typů tak, že výrazu y přiřadíme řád vyšší než řád výrazu x. To samozřejmě v případě výrazu $x \in x$ a jeho negace $x \notin x$ není možné. Kromě toho i každá přípustná definice třídy typu $\{x|\varphi(x)\}$ definuje třídu vyššího řádu, než jaký odpovídá proměnné x. Proto nemá smysl se ptát, zda definovaná třída má vlastnost $\varphi(x)$, dosazení proměnné vyššího řádu na místo proměnné x je opět porušením gramatických pravidel.

Podívejme se ještě na definici kardinálního a ordinálního čísla a na řešení s nimi spjatých paradoxů Cantorova a Burali-Fortiho.

> Kardinální číslo třídy α je definováno jako třída všech tříd *podobných* α, přičemž dvě třídy jsou si podobné, jestliže mezi nimi existuje prostá relace. [7, s. 178]

Prvky nějakého kardinálního čísla, definovaného jako třída všech tříd, pak samozřejmě musejí být vzájemně stejného typu. Vzhledem k definici jsou však i kardinální čísla typově víceznačná. Podívejme se na příklad kardinálního čísla 0, to je definované jako třída, jejímž jediným prvkem je prázdná třída. Tedy

$$0 = \{\emptyset\}$$

Prázdná třída je definována klasicky

$$\emptyset = \{x|x \neq x\}$$

ovšem její typ závisí na typu proměnné x. Máme tedy prázdnou třídu individuí, prázdnou třídu tříd individuí atd. Každému typu proměnné tedy přísluší vlastní soubor kardinálních čísel. Pro každý typ existuje největší kardinál, ten je dán počtem objektů příslušného typu. Třídu všech objektů typu t totiž lze definovat jako

$$V = \{x|x = x\}$$

kde proměnná x má typ t. Reprodukovat Cantorův paradox se nám ovšem nepodaří. Ten byl založen na předpokladu existence „třídy všech tříd“ a následném vzetí její potence. My ovšem můžeme uvažovat pouze o třídě všech tříd typu t, jejíž potence ovšem je již typu vyššího. Na základě největšího kardinálního čísla daného typu tedy sice stále můžeme sestrojit kardinální číslo větší, ovšem jiného typu. Žádný „absolutně největší kardinál“ pak neexistuje a Cantorův paradox je v teorii typů nereprodukovatelný.

Řešení Burali-Fortiho paradoxu je analogické. Ordinální číslo je definováno jako třída všech relací (chápaných extenzionálně) generujících dané dobré uspořádání. Tyto relace opět musejí být stejného typu. Uvažujeme-li potom třídu ordinálních čísel daného typu, jí příslušející ordinál je opět typu vyššího. Můžeme tedy generovat větší a větší ordinální čísla, ale společně s tím budou narůstat i jejich typy. „Třída všech ordinálů“ je opět nelegitimní totalitou. Výsledkem toho je, že nemůžeme sestrojit „největší ordinální číslo“ a Burali-Fortiho paradox mizí.

6 Ramsey a jeho rozlišení

Ramsey se podrobně věnuje otázce základů matematiky a teorii typů v článku *The foundations of mathematics* z roku 1925 [5], tedy v době po vydání Russellových a Whiteheadových *Principia Mathematica*, postavených na teorii typů, a s jejich znalostí. Jeho snahou je teorii typů zbavit některých problematických aspektů, například a typicky axiomu reducibility. V úvodu se jasně vymezuje co do příslušnosti k tehdy existujícím směrům v základech matematiky:

> (...) domnívám se, že matematika je součástí logiky, patřím tedy k tomu, co by mohlo být nazýváno logickou školou, oproti formalistické a intuicionistické škole. [5, s. 338]

Následuje rozlišení, na jehož základě je také možné formulovat rozdíl mezi jednotlivými školami:

> Jsou skutečně dvě různé kategorie věcí, které musí být popsány; matematické pojmy či koncepty a matematické propozice. [5, s. 339]

Formalismus na první místo klade propozice a formální manipulace s jejich zápisy, od nich se pak odvíjejí matematické koncepty. Logicismus vychází z analýzy pojmů a na základě této analýzy popisuje matematické propozice. Ramsey odmítá formalismus právě na základě absence analýzy matematických konceptů, která od sebe odlučuje kontext matematických propozic a přirozený jazyk, zabraňuje přenosu matematických pravd do přirozeného jazyka a tím jejich využití například v kontextech, v nichž se v přirozeném jazyce objevují číselné výrazy. Intuicionismus a s ním spojený finitismus je odmítnut na základě přílišné restriktivnosti co do přípustných metod a z toho vyplývajícího vzdání se určitých oblastí matematiky. Logicismus pak dle Ramseye uspěl v analýze matematických pojmů, které redukoval na pojmy logické, avšak jako problematický je nahlížen na této analýze založený popis matematických propozic.

Ramsey připomíná Russellovu definici matematiky, jako třídy všech propozic formy p implikuje q, kde p a q jsou propozice obsahující shodnou sadu proměnných a neobsahující žádné konstanty kromě konstant logických. Toto vymezení je ale dle Ramseye příliš široké, protože nevylučuje z matematiky propozice, které jsou sice plně obecné (neodkazují k žádnému konkrétnímu objektu, mimologické konstantě), ale přesto nepatří do oboru matematiky ani logiky. Jako příklad je uvedena následující propozice:

> Jakékoli dvě věci se liší v alespoň třiceti ohledech. [5, s. 340]

Taková věta není nutně pravdivá, pokud je pravdivá, tak potom kontingentně. Pokud bychom měli užít terminologii Wittgensteinovu, na nějž se Ramsey v celém článku často odvolává, je pravdivou či nepravdivou v závislosti na stavu světa. Znakem logických a matematických pravd je ale to, že jsou pravdivé nutně, tedy řečeno opět s Wittgensteinem nejen pro všechny předměty, ale také pro všechny stavy světa. Ramseyova odpověď, jak vymezit matematické propozice je následující:

> Jejich obsah musí být naprosto obecný, jejich forma tautologická. Formalisté naprosto zanedbali obsah a upřeli matematice smysl, logikové zanedbali formu a nechali matematiku skládat se ze všech pravdivých generalizací; pouze pokud přihlížíme k oběma stranám a chápeme matematiku jako složenou z tautologických generalizací, můžeme dospět k adekvátní teorii. [5, s. 341]

Společně s tímto vymezením se ale samozřejmě vynořuje otázka, jak popsat tautologičnost. V tomto ohledu Ramsey opět vychází z Wittgensteina, konkrétně ze spisu *Tractatus logico-philosophicus*. Podrobně rozebírá popis pravdivostních funkcí a další aspekty Wittgensteinova přístupu, jimiž se ovšem nebudeme zajímat. Podstatné pro nás je, že jako překážku toho, abychom mohli propozice teorie typů považovat za matematické tautologie, vidí Ramsey přijetí axiomu reducibility, který dle něj není tautologií [5, s. 346].

Od Russellova pojetí se Ramsey odchyluje i v jiném ohledu. Matematika je podle něj ze své podstaty extenzionální. Připomíná definici reálných čísel pomocí řezů na číslech racionálních. Takových řezů, které definují různá reálná čísla, je nespočetně mnoho. Každému řezu tedy nemusí odpovídat predikát, který ho definuje.

> Reálné číslo je tak extenzí, a může dokonce být extenzí bez korespondující intenze. [5, s. 349]

Ramsey tedy připouští existenci tříd, kterým neodpovídá žádná definující propoziční funkce. Takové třídy nemůžeme přímo zmiňovat v propozicích, nicméně je k nim odkazováno pomocí kvantifikace. Kvantifikujeme-li přes všechny třídy (daného typu), kvantifikace probíhá i přes třídy bez korespondující intenze.

Další podstatné rozlišení, které Ramsey činí, spočívá v rozdělení paradoxů do dvou skupin. Do jedné skupiny řadí paradoxy Russellův a Burali-Fortiho, do druhé pak paradoxy lháře, Berryho, Königův, Richardův a Grellingův. První skupina je označovaná jako paradoxy *logické* či *matematické*, protože pracují výhradně s matematickými a logickými pojmy a pro jejich zamezení je nutné přehodnotit předpoklady činěné v souvislosti se základními matematicko-logickými pojmy. Druhou skupinu Ramsey nazývá paradoxy *epistemologickými*, někdy jsou označovány také jako paradoxy *sémantické*. V tomto případě se nejedná o čistě matematicko-logické paradoxy, obsahují výrazy jako „definovat“, „označovat“, „popisovat“ či jinak odkazují k jazyku nebo symbolismu. Jejich řešení tedy nemusí znamenat zásah do matematiky a logiky, ale může se odehrát právě na úrovni (přirozeného) jazyka.

6.1 Tři defekty teorie typů

Pro Ramseye je Russellova teorie typů cestou správným směrem, na níž se ovšem nacházejí tři překážky. My se budeme hlouběji věnovat pouze jedné z nich — ramifikaci a s ní spojenému axiomu reducibility. Uveďme však pro úplnost všechny tři, umožní nám lépe pochopit Ramseyův přístup k základům matematiky a někdy přinesou i zajímavé souvislosti s modernějšími matematickými problémy. Učiňme však ještě poznámku k terminologii. Funkce, které v článku *Mathematical logic as based on the theory of types* a v prvním vydání *Principia Mathematica* byly označovány jako *predikativní*, jsou ve vydání druhém označovány jako *elementární*. Toto novější označení pro ně používá i Ramsey. Budeme se ho ve zbytku kapitoly držet, pojem *predikativní* budeme používat až v souvislosti s Ramseyovou redefinicí.

První z námitek se týká Russellova omezení se pouze na ty třídy, jimž odpovídá (predikativní) propoziční funkce. O tom jsme se vlastně již zmínili, nicméně Ramsey na obhajobu tohoto svého přístupu přináší nový argument. Připomíná definici rovnosti mohutnosti dvou tříd pomocí jednoznačného zobrazení jedné třídy na třídu druhou, kde zobrazení je chápáno extenzionálně, jako relace. Pokud bychom se omezili jen na relace, které jsou definovatelné pomocí nějaké (binární) propoziční funkce, zásadně bychom tím pozměnili zamýšlený význam definice:

> Co měl však Cantor, který prvně podal tuto definici, na mysli, bylo pouze to, že dvě třídy mohou být sobě vzájemně přiřazené, nikoli že musí existovat propoziční funkce, která je sobě skutečně přiřazuje. [5, s. 355]

Příklad Skolemova paradoxu ovšem ukazuje, že ani v systémech, které nepovažují existenci definující propoziční funkce za nutnou podmínku pro existenci třídy či množiny, nemusí mít Cantorova definice onen původně zamýšlený význam. Skolemův paradox pracuje s axiomatickou teorií množin. V ní se dá dokázat existence nespočetné množiny. Slabá verze Löwenheim-Skolemovy věty ale zaručuje pro axiomatickou teorii množin (za předpokladu její bezespornosti), existenci nejvýše spočetného modelu. Paradoxní situace nespočetné množiny uvnitř spočetného modelu se klasicky řeší rozlišením toho, co je nespočetné „uvnitř“ a „vně“ teorie. Množina u může být totiž z pohledu teorie nespočetná pouze proto, že uvnitř teorie neexistuje žádná relace, jako prvek univerza, která by dosvědčovala, že je množina u jednoznačně zobrazitelná na, z pohledu univerza, spočetnou množinu. Při pohledu zvenčí jsou samozřejmě všechny množiny spočetného modelu spočetné.

Skolemův paradox závisí na omezení se na logiku prvního řádu. Jsou-li množiny u, v spočetné, pak odpovídající zobrazení jedné na druhou, díky axiomu sjednocení a axiomu potence, jenž zaručuje existenci množiny „všech podmnožin“, by mělo existovat. Problém je zde samozřejmě opět v chápání významu výrazu „všechny podmnožiny“. Ukazuje se, že souboru, který je z pohledu zvenčí podmnožinou nějaké množiny, z pohledu teorie nemusí odpovídat žádná množina. V tomto smyslu tedy axiom potence nezaručuje existenci množiny „všech podmnožin“, ale pouze existenci množiny těch podmnožin, které jsou z hlediska teorie množinami.

Vidíme tedy, že i v případě, že se vzdáme předpokladu závislosti existence třídy či množiny na definující propoziční funkci, ještě nemáme zaručeno, že se tím nezmění zamýšlený význam například Cantorovy definice rovnosti mohutností.

Ramsey však svoji námitku vznášel v souvislosti multiplikativním axiomem, jehož přijetí je dle něj v případě, že se omezíme na třídy definované propozičními funkcemi, neoprávněné. Multiplikativní axiom je jednou z formulací principu, který je v současnosti označován jako axiom výběru[4]. Tento princip postuluje, že lze vybrat jeden prvek z každé (neprázdné) třídy nějaké dané třídy. Existence takové „výběrové třídy“ obsahující všechny vybrané prvky, je ovšem za nutnosti předpokladu existence definující propoziční funkce problematická.

Druhá námitka je spojená s ramifikací Russellovy teorie typů a axiomem reducibility. Ramsey považuje intenzionální přístup Russellův, který se projevuje ramifikací, za zbytečný v souvislosti se svým rozlišením paradoxů na epistemologické a logické. Pro řešení paradoxů logických je intenzionální přístup zbytečně jemný, stačí zde rozlišení typů propozičních funkcí na základě typů jejich argumentů.

> Jakákoli čistě matematická kontradikce, která by tkvěla v nerozlišení elementárních a neelementárních funkcí, by se znovu objevila s axiomem reducibility kvůli extenzionální povaze matematiky, v níž jsou ekvivalentní funkce zaměnitelné. [5, s. 359]

Problémy spojené s ramifikací, například komplikace tak základní matematické metody, jakou jsou důkazy indukcí, vedou Ramseye k jejímu odmítnutí. Podrobně se mu budeme věnovat v následující podkapitole.

Poslední námitka je spojena s chápáním identity. Ramsey připomíná definici identity z *Principia Mathematica*:

$$x = y \Leftrightarrow (\forall\varphi)(\varphi!(x) \rightarrow \varphi!(y))$$

První výtka vůči této definici je směřována na její závislost na axiomu reducibility. Bez jeho předpokladu by mohly objekty x a y dávat stejnou hodnotu pro všechny predikativní propoziční funkce, ovšem na některých funkcích vyšších řádů by se mohly lišit. Vzhledem k tomu, že kvantifikovat můžeme pouze přes predikativní funkce, dostali bychom se do situace, kdy pro dva objekty identické dle výše uvedené definice bychom mohli nalézt vlastnost, kterou jeden z nich má a druhý nemá. Ramsey podotýká, že by sice možná bylo lze dokázat pro jakoukoli nepredikativní funkci, že na

[4]Russell o něm mluví jako o Zermelově axiomu.

dvou identických (dle uvedené definice) objektech dává vždy stejnou hodnotu, avšak vznáší proti definici identity další námitku.

> Skutečná námitka proti této definici identity je stejná jako výše zmíněná námitka proti definování tříd pouze jako definovatelných tříd, že je to dezinterpretace, že nedefinuje význam v jakém je symbol pro identitu skutečně používán. To lze jednoduše nahlédnout takto: tato definice činí sporným, aby dvě věci měly společné všechny elementární vlastnosti. Přitom to je naprosto možné, i kdyby k tomu, ve skutečnosti, nikdy nedošlo. [5, s. 361]

Ramsey připouští, že dva objekty a a b nelze považovat za identické, protože se liší svými jmény — objekt označovaný symbolem a má vlastnost „mít jméno a“, zatímco objekt označovaný symbolem b tuto vlastnost nemá. Zde bychom samozřejmě mohli namítat, že vlastnost „mít jméno“ není objektovou vlastností objektu označovaného symbolem a, ale pouze jeho vlastností metajazykovou a jako taková není předmětem matematického zkoumání uvnitř dané teorie. Ramsey však místo toho tvrdí, že přestože nemůžeme udat dva konkrétní objekty se společnými všemi predikativními vlastnostmi, neznamená to, že nemůžeme přepokládat existenci nějakých (konkrétné neurčených) takových dvou objektů.

6.2 Predikativní funkce

Věnujme se teď tomu, jak se vypořádat s ramifikací a axiomem reducibility. Částečně se řešení skrývá v rozlišení mezi propoziční funkcí a zápisem propoziční funkce, tedy jak píše Quine v předmluvě k Russellově *Mathematical logic as based on the theory of types* v rozlišení mezi „propozičními funkcemi jako notacemi a propozičními funkcemi jako vlastnostmi a relacemi“ [2, s. 152]. Absence tohoto rozlišení u Russella se projevila i v našem výkladu jeho teorie, který byl ve stejném smyslu nepřesný. Ramseyovo chápání propoziční funkce se blíží spíše jejímu chápání jako vlastnosti či relace, nicméně uvidíme, že se tohoto chápání nedrží důsledně a v některých ohledech je závislé právě na zápisu funkce.

Druhým zdrojem řešení je Wittgensteinovo pojetí logiky. Ramsey v souladu s ním zavádí pravdivostní funkce, operující jednak na propozicích, jednak na propozičních funkcích; jednak s konečným, jednak s nekonečným počtem argumentů. Omezme se nyní na propozice a jejich konečný počet. Máme-li n propozic, máme také 2^n pravdivostních možností, z nichž jedna každá je plně určena pravdivostními hodnotami všech propozic. Dostáváme potom 2^{2^n} pravdivostních funkcí, z nichž zase každá je určena nějakou sadou pravdivostních možností. Tak například konjunkce dvou propozic p, q je určna sadou $\{p = 1, q = 1\}$ a jejich disjunkce sadou $\{p = 1, q = 1; p = 1, q = 0; p = 0, q = 1\}$. Podstatné zde ovšem je právě připuštění nekonečného počtu argumentů pravdivostní funkce. Tak mohou pravdivostní funkce nahradit kvantifikátory. Existenčnímu odpovídá sada pravdivostních možností, v nichž vždy alespoň jedna propozice má pravdivostní hodnotu 1, obecnému kvantifikátoru pak odpovídá jedna pravdivostní možnost, a to ta, v níž mají pravdivostní hodnotu 1 všechny propozice. Složené propozice jsou tak ztotožněny se sadami pravdivostních podmínek, takže například zápisy $p \to q$ a $\neg p \vee q$ vyjadřují stejnou propozici. Nicméně Ramsey připouští i ty sady pravdivostních podmínek, jimž neodpovídá žádný zápis, a i takové sady určují propozici:

> Nicméně musíme uvažovat propozice, jež náš jazyk není schopný vyjádřit. (...) Obecné propozice musí být samozřejmě chápány jako vztahující se ke všemu, ne pouze stahující se ke všemu tomu, pro co máme jména. [5, s. 363]

Ramsey píše, že „elementární není adjektivem vztahujícím se k typu propoziční funkce, ale pouze k jejím instancím“ [5, s. 363]. Jedné propozici může odpovídat jak elementární, tak neelementární propoziční symbol. Tak tomu je v případě, že uvažujeme konečný počet individuí a, b, ... z. Zápisy $\varphi(a) \wedge \varphi(b) \wedge \ldots \wedge \varphi(z)$ a $(\forall x)\varphi(x)$ označují stejnou propozici, přitom první z nich je elementární a druhý neelementární.

> „Elementární propozice“ je jako „mluvené slovo“; přesně totéž slovo může být jak psané, tak mluvené, stejně tak tatáž propozice může být vyjádřena jak elementárně, tak neelementárně. [5, s. 364]

Z výše uvedeného by se tedy zdálo, že Ramsey bude zachovávat extenzionální přístup a propoziční funkci bude ztotožňovat například s množinou hodnot, na nichž nabývá hodnoty pravda. Propoziční funkci však Ramsey definuje jako symbol určité formy, ovšem je si zjevně vědom neproblematičnosti takové definice:

> To je zjevné z faktu, že „funkce funkcí“ a „funkce individuí“ nejsou přísně analogické; protože zatímco funkce jsou symboly, individua jsou objekty, takže abychom dostali výraz analogický výrazu „funkce funkcí“, museli bychom mluvit o „funkcích jmen individuí“. [5, s. 365]

Nyní je tedy na čase definovat, co přesně chápe Ramsey jako funkci[5]. Způsob, jakým jsou funkce definovány v teorii typů, je odmítnut jako *subjektivní*, závisející na způsobu konstrukce funkce, nikoli na jejím významu. Budeme se ovšem muset vyrovnat s tím, že Ramsey sice na jedné straně definuje funkci jako symbol, na druhé straně upozorňuje, že při kvantifikaci přes funkce daného typu jsou zohledněny i funkce, kterým neodpovídá žádná konstrukce, a tedy ani žádný zápis/symbol.

Predikativní funkce individuí je definována jako „jakákoli pravdivostní funkce argumentů, které, konečné či nekonečné ve svém počtu, jsou všechny buď atomickými funkcemi individuí, nebo propozicemi“. [5, s. 367]

> Takto definujeme přesně určený obor funkcí individuí, který je širší než jakýkoli obor objevující se v Principiích. Je podstatně závislý na pojmu pravdivostní funkce nekonečného počtu argumentů; pokud bychom připustili jen konečný počet argumentů, naše predikativní funkce by byly jednoduše elementárními funkcemi Principií. [5, s. 367]

Podstatné je, že pravdivostní funkce nám umožní vyjádřit kvantifikaci, kterou bychom při nekonečném počtu argumentů za použití klasických logických spojek operujících jen s konečně mnoha argumenty nebyli schopni vyjádřit. A jak jsme viděli, kvantifikace znamenala u Russella nárůst řádu příslušné funkce, čímž funkce přestávala být elementární. Tak například funkce $(\forall y)\varphi(\hat{x}, y)$ je funkcí individuí, protože jejím argumentem je x v roli individuové proměnné, ale přestože v jejím

[5] Funkcí budeme v tomto výkladu mínit propoziční funkci.

zápise je použita kvantifikace, jedná se o funkci predikativní, jelikož ona kvantifikace odpovídá logickému součinu atomických funkcí $\varphi(\hat{x}, y)$ a logický součin je jedna z pravdivostních funkcí. Ramsey ukazuje, že takovýmto způsobem, tedy aplikací logického součinu, lze kvantifikovat přes proměnné libovolného typu. Díky tomuto pojetí jsou všechny funkce teorie typů, bez ohledu na typ jejich vázaných proměnných, v Ramseyově smyslu predikativní. Tím vlastně opouštíme ramifikaci, vracíme se k jednoduché teorii typů a problematický axiom reducibility se stává nadbytečným.

Russellova ramifikace mimo jiné bránila tomu, aby funkce individuí definovaná za pomoci kvantifikace přes funkce individuí porušovala princip bludného kruhu. Byla stále funkcí individuí, ale funkcí vyššího řádu. Kvantifikovali jsme přes funkce typu $\langle 1, 0\rangle$, výsledkem byla funkce typu $\langle 2, 0\rangle$. Jestliže ramifikaci opustíme, nevrátí se nám do systému opět paradoxy spojené s bludným kruhem? Ramsey argumentuje, že nikoli. Zdání bludného kruhu je vyvoláno jenom způsobem zápisu, protože nemáme vhodné prostředky, jak zapisovat pravdivostní funkce nekonečného počtu argumentů. Funkce definovaná odkazem k totalitě všech funkcí (daného typu) je prostě dána nějakou pravdivostní funkcí na atomických funkcích a propozicích. Onen odkaz potřebujeme jen kvůli našim omezeným vyjadřovacím prostředkům. Podobně bychom propozici $p \wedge q$ mohli definovat jako logický součin propozic p, q, $p \wedge q$, $p \vee q$. To, že se takovému odkazu k souboru propozic, jehož je sama členem, můžeme vyhnout, je dáno jen tím, že propozice konečné délky jsme schopni „psát přímo“. Podobně uvádí Ramsey příklad nejvyššího muže ve skupině, což je naprosto neproblematické určení, i když s odkazem k totalitě, které je onen nejvyšší muž sám členem. Zda jsme schopni zapsat propozici zápisem konečné délky jako v případě propozice $p \wedge q$ je ale dle Ramseye záležitostí závislou na našem způsobu zápisu, a tedy záležitostí kontingentní. A na základě kontingentních záležitostí bychom neměli činit logická rozlišení.

Ramsey tedy rozlišuje typy funkcí: funkce individuí jsou funkcemi typu 1, funkce funkcí individuí jsou funkcemi typu 2 atd. Za nadbytečné je považováno pouze určování řádů v závislosti na typu vázaných proměnných.

> Musíme zdůraznit podstatný rozdíl mezi řádem a typem. Typ funkce je reálná charakteristika závisející na jejím argumentu; ale řád propozice nebo funkce není reálná charakteristika, ale to, co Peano nazývá pseudofunkcemi. Řád propozice je jako jmenovatel zlomku. Z pouhé rovnosti „$x = y$“ nemůžeme usoudit, že jmenovatel x je roven jmenovateli y, z faktu, že „p“ a „q“ jsou instancemi téže propozice, nemůžeme usoudit, že řád „p“ je roven řádu „q“. [5, 374]

6.3 Řešení paradoxů

Russell trval na ramifikaci své teorie typů také z toho důvodu, že vzhledem k její intenzionalitě se zdála zabraňovat paradoxům závislým na výrazech přirozeného jazyka, paradoxům epistemologickým. Ramsey ukazuje, že tyto paradoxy lze řešit jinak než ramifikací. Poměrně velký prostor věnuje řešení Grellingova paradoxu. Vzhledem k tomu, že se ale odehrává na úrovni problematizace výrazu „znamenat“, tedy výrazu přirozeného jazyka, nebudeme ho podrobně rozebírat. Zmiňme jen, že připomíná námi naznačené řešení pomocí indexování výrazů „pravdivý“ a „nepravdivý“. Výrazu „znamenat“ neodpovídá jeden význam, na základě zvolení jednoho významu lze vždy získat význam jiný a významy výrazu „znamenat“ tvoří nelegitimní totalitu.

Matematicko-logické paradoxy (Russellův, Burali-Fortiho a Cantorův) ovšem již Ramsey nemůže připsat za vinu nevyjasněnosti pojmů přirozeného jazyka. Nicméně v tomto případě se prostě můžeme přidržet řešení Russellova. Tyto paradoxy pracují s pojmem třídy, kterou Russell definoval s odkazem na predikativní funkce. V jejich typech je tedy zohledněn pouze typ argumentu, nikoli typy vázaných proměnných vyskytujících se v propozičních funkcích, kterými jsou určeny. S ohledem na teorii tříd je tedy Russellova teorie typů teorií jednoduchou, nikoli rozvětvenou. Ramsey, jak jsme viděli, Russellovu teorii typů přejal, pouze odmítl její ramifikaci. Jelikož však řešení matematicko-logických paradoxů na ramifikaci nezávisí, můžeme i pro Ramseyovu modifikaci přijmout vysvětlení Russellovo.

6.4 Identita a multiplikativní axiom

Věnujme se krátce ještě zbylým dvěma Ramseyovým námitkám — problémům multiplikativního axiomu a identity. Definici identity pomocí rovnosti hodnot všech predikativních funkcí Ramsey, jak jsme viděli, odmítl. Řešení, které nabízí, je zavedení tzv. *functions in extension*. Ty jsou definovány pomocí relace mezi individui a propozicemi, kde tato relace je chápána extenzionálně (*relation in extension* [6]) a nemusí jí tedy odpovídat, v souladu s Ramseyovým pojetím, žádný zápis, žádná konstrukce. Každá *function in extension* je relace, jež přiřazuje každému individuu x jednu propozici, která je značena jako $\phi_e(x)$, celá funkce pak jako $\phi_e(\hat{x})$, kde e odkazuje ke slovu „extension". Takto definovaná funkce pak samozřejmě nemusí odpovídat žádné funkci predikativní. Dostali jsme tedy širší obor funkcí a identitu můžeme definovat takto:

$$x = y \Leftrightarrow (\forall \phi_e)(\phi_e(x) \leftrightarrow \phi_e(y))$$

Zdůrazněme, že v potaz jsou brány „všechny relace". Jestliže jsou x, y různá individua, musí existovat nějaká *function in extension*, která přiřazuje individuu x propozici p a individuu y propozici $\neg p$. Díky ní pak naše nová definice tato dvě individua rozliší.

Ramsey zdůrazňuje, že *functions in extension* mají využití pouze u funkcí individuí, u funkcí funkcí se můžeme omezit na funkce predikativní. V případě funkcí individuí nám to dá možnost definovat třídy pomocí *functions in extension* a totalita tříd individuí bude redukována na totalitu *functions in extension*. Tato redukce tříd na funkce se nicméně liší od pojetí Russellova, u něhož třídy jsou definovány pomocí těch funkcí, kterým odpovídá nějaký zápis, nějaká konstrukce. Důvody, které nás vedly k přijetí *functions in extension* byly spojené s definováním identity individuí. Nicméně pokud se přesuneme k objektům vyššího typu, situace je jiná,

> jelikož nepotřebujeme definovat identitu mezi funkcemi, ale pouze identitu mezi třídami, kterou lze redukovat na ekvivalenci funkcí, jež je definovatelná snadno. [5, s. 379]

[6]Tento termín je převzatý od Russella.

Zavedení *functions in extensions* celý systém značně komplikuje, přitom jejich jediným účelem je rozlišit mezi dvěma individui x a y, jež dávají pro všechny predikativní funkce stejnou hodnotu. Je takové rozlišení ovšem potřeba? Ramsey definuje predikativní funkce tak, aby byly nezávislé na jazyce, aby vyjadřovaly všechny myslitelné, ne pouze všechny vyjádřitelné predikáty, vlastnosti. Čím se tedy liší uvažovaná individua x, y? Jen tím, že je za rozdílné označujeme, tím, že jim dáváme různá jména. Zde se ovšem už pohybujeme na úrovni jazyka. Ramsey sám kritizoval Russellovo rozlišování řádů propozičních funkcí právě kvůli tomu, že je závislé na jazyce, na způsobu (jazykové) konstrukce funkcí. Přitom Russellův přístup lze obhajovat pouze jako zvolení jemnějších než extenzionálních kritérií pro rovnost dvou výrazů. Ramseyův přístup se však spíš pouze rovná konstatování, že „dvě individua jsou různá právě tehdy, když jsou různá", protože to, že jsme schopni postulovat existenci funkce, která dvěma různým individuím přiřadí různé propozice, závisí právě na konstatování toho, že ona individua jsou různá.

Pokud jde o přijetí multiplikativního axiomu, odpověď kterou Ramsey dává, jsme vlastně už zmínili několikrát:

> Pokud „třídou" míníme, tak jako já, jakýkoli soubor věcí homogenních co do typu, ne nutně definovatelných funkcí, která není pouhou *function in extension*, pak se multiplikativní axiom zdá naprosto evidentní tautologií. Nevím, jak by se o něm dalo rozumně pochybovat, a myslím, že by nikdy nebyl zpochybňován, pokud by nebyl dezinterpretován. [5, s. 381]

7 Diagonalizace

Několik z paradoxů je postaveno na metodě diagonalizace. Můžeme se takto dívat na paradoxy Richardův, Russellův či Grellingův. Při této metodě pracujeme s představou reprezentací objektů uspořádaných pod sebe dle souřadnicové osy y tak, že jednotlivé prvky jejich reprezentace mají určeno své pořadí na ose x. Vzetí prvků ležících na diagonále, nahrazení jednoho každého dle předem daného pravidla prvkem jiným a uchopení vzniklé posloupnosti prvků opět jako reprezentace nějakého objektu nám zaručí existenci reprezentace, jež se liší od reprezentací všech objektů uspořádaných dle osy y. Pokud jsou reprezentace zvoleny tak, že jejich různost znamená různost reprezentovaného objektu, získáme objekt různý od všech objektů na ose y. Tak v případě Richardova paradoxu jsou oněmi reprezentacemi prostě desetinné zápisy příslušných reálných čísel. Zde je třeba učinit ještě dodatečné úvahy, protože zápisy 0,1000… a 0,0999… reprezentují totéž číslo, nicméně diagonalizací získáme zápis reálného čísla odlišného od všech reálných čísel v naší výchozí posloupnosti.

Zde záviselo použití metody také na faktu, že reálných čísel, z nichž jsme vycházeli, bylo jen spočetně mnoho a mohli jsme je tedy dobře uspořádat. Podobně je tomu v případě Grellingova paradoxu. Zde si můžeme představit uspořádaná adjektiva podél obou os, souřadnici [m,n] pak náleží 1 nebo 0 podle toho, zda m-té adjektivum je či není pravdivé o adjektivu n-tém. Diagonalizace pak odpovídá definici adjektiva „heterologické“. Russellův paradox je jakýmsi zobecněním diagonalizace, protože nepředpokládá existenci nějakého uspořádání množin. Idea diagonalizace je v tomto případě obsažena v konstrukci formule $x \notin x$, v její autoreferenci, podobně jako v případě definice adjektiva „heterologické“.

Vidíme, že diagonalizace je jednou z metod, která nám umožňuje definovat objekty při porušení principu bludného kruhu. Pro definování adjektiva „heterologické“ jsme již předpokládali totalitu všech adjektiv, pro definování třídy $\{x|x \in x\}$ jsme předpokládali totalitu všech tříd. Je tedy diagonalizace metodou, která ze své podstaty vede ke sporu, a jako takovou bychom ji měli odmítnout? Ponechme stranou fakt, že takového odmítnutí by bylo pouze externí v tom smyslu, že by neurčovalo kritéria pro to, které propoziční funkce či formule považovat za predikativní.

Naší odpovědí je ne, diagonalizace sama o sobě není bludná, nevede ke sporu. Cantor ji využil k důkazu pozitivního tvrzení, že totiž pro každou třídu C platí $|P(C)| > |C|$, neboli že mohutnost potence je vždy větší než mohutnost dané množiny. To, že stejná metoda vedla k Cantorovu paradoxu, je podstatně závislé na předpokladu existence univerzální třídy. Dle Russellovy teorie typů, ale i v Ramseyově modifikaci, je to nelegitimní totalita, protože obsahuje třídy různých typů — třídy individuí, třídy tříd individuí atd.

Aby byla diagonalizace bludná, musí být tedy splněny dva dodatečné předpoklady. Musíme předpokládat existenci určité totality, na niž je aplikována diagonalizace, a objekt, který diagonalizací získáme, musí splňovat kritéria příslušnosti k oné totalitě.

8 Kdy je impredikativita bludná

Podívejme se na impredikativitu[7] ze stejného pohledu jako na diagonalizaci. Kdy je impredikativita bludná a kdy nikoli? Viděli jsme už, že Ramsey uvádí příklad zjevně korektní definice, která je ovšem impredikativní. Příklad nejvyššího muže ve skupině je určením odkazujícím k totalitě, které je určovaný objekt členem, přitom je zjevně určením korektním.

Budeme se snažit rozlišit mezi několika představami o tom, jak jsou nám dány třídy. Russellova představa byla taková, že podstatně závisejí na našem popisu — pro existenci třídy je nutná existence příslušné propoziční funkce. Neproblematicky, nezávisle na našem popisu, jsou nám dána pouze individua, objekty ostatních typů a třídy vyšších řádů jsou závislé na stavbě celé typové hierarchie. V tomto ohledu je tedy Russellův přístup silně konstruktivní — univerzum je budováno zdola v postupných krocích, které na sebe vzájemně navazují.

Ramsey tento konstruktivní přístup mírní, zřeknutím se ramifikace totiž značně zjednodušuje Russellovu hierarchizaci. Objekty, které byly u Russella dány s odkazem na totalitu vytvořenou v předchozím kroku, například impredikativní propoziční funkce typu $\langle 2,0\rangle$ dané s odkazem na funkce typu $\langle 1,0\rangle$ v roli vázaných proměnných, jsou u Ramseye dány rovnou, tedy funkce typu $\langle 2,0\rangle$ společně s funkcemi typu $\langle 1,0\rangle$. Viděli jsme ovšem, že ani Ramsey nerezignuje na hierarchizaci úplně, rozlišuje funkce individuí, funkce funkcí individuí atd. a v návaznosti na to tedy třídy individuí, třídy tříd individuí atd.

Ovšem původní pohled na třídu, který ji chápal jako jakýkoli dobře definovaný soubor objektů, hierarchizaci na jednotlivé typy nepředpokládá vůbec. Quine k tomu ve své knize *Set Theory and its Logic* [8] dodává:

> Nepohlížíme na třídy jako tvořené tím, že jsou specifikovány — tedy dány jedna za druhou a tak, že jejich počet v průběhu času roste. Poincaré nenavrhoval temporální implementaci teorie tříd. Doktrínou tříd spíše je, že jsou zde od počátku. Pokud je tomu tak, neskrývá se v impre-

[7] Nyní se opět vracíme k Russellovu pojetí impredikativity spojenému s principem bludného kruhu.

dikativních specifikacích žádný klam. Je přijatelné vybrat požadovanou třídu uvedením jakékoli její vlastnosti, přestože se může stát, že budeme kvantifikovat i přes ni, tak jako přes všechno ostatní v univerzu.

Na základě těchto různých přístupů k ontologii teorie tříd se pak samozřejmě bude lišit i náš popis toho, k čemu v souvislosti s paradoxy dochází. Jestliže předpokládáme, že třídy jsou dány na základě našeho popisu, můžeme se ptát, proč naprosto určitému popisu $\{x|x \notin x\}$ neodpovídá žádná třída. Jestliže však přijmeme přístup, že třídy „jsou zde od počátku", nebudeme ani sváděni k tomu předpokládat zákon komprehenze. Pak $(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$ je prostě vlastností, o níž se můžeme ptát, jestli jí jakákoli z tříd má či nemá. Potom konstatování toho, že žádná třída y s takovou vlastností neexistuje, může být asi tak stejně paradoxní jako konstatování toho, že neexistuje žádné přirozené číslo n s vlastností $1 > n > 3$.

Podobně se bude lišit náš popis v případě vlastností, kterým třída odpovídá. První z pohledů bude hovořit o tom, že určitá norma, vlastnost či predikativní funkce definuje třídu. Druhý z pohledů bude mluvit o tom, že nějaká třída má takovou vlastnost, že je třídou právě všech prvků splňujících danou normu, majících danou vlastnost.

Pokusme se rozvinout rozdíl mezi tím, když z nějaké totality pouze vybíráme určitý prvek, jak odpovídá představě danosti všech množin „rovnou", nezávisle na konstrukcích, a tím, když na základě nějaké totality konstruujeme nový objekt, jak odpovídá představě postupné konstrukce univerza zdola. Nazvěme principy, které nám pouze umožňují činit výběry z nějaké totality, principy *vyčleňujícími* a principy, které nám umožňují objekty konstruovat, principy *potenciálně konstruujícími*. Výraz „potenciálně" zde má zdůraznit možnost, že jeden princip může být vyčleňující či konstruující v závislosti na třídě, na niž je aplikován. Vezměme si jako příklad operaci sjednocení. Sjednocením třídy $\{\{a, b, c\}, \{a\}, \{b, c\}\}$ je třída $\{a, b, c\}$, jeden z prvků původní třídy; v tomto případě jsme tedy pouze vyčlenili jeden z prvků. Ovšem sjednocením třídy $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ je třída $\{a, b, c, d\}$, která není prvkem původní třídy; v tomto případě jsme tedy nový prvek zkonstruovali.

Naše rozlišení je samozřejmě relativní vzhledem k uvažované ontologii. Jestliže se v Russellově pojetí kvantifikací přes propoziční funkce typu $\langle 1, 0\rangle$ dostáváme k propozičním funkcím typu $\langle 2, 0\rangle$, tedy funkcím, které nejsou součástí totality, přes niž jsme kvantifikovali, bude pro Russellovu teorii typů kvantifikace přes funkce typu $\langle 1, 0\rangle$, funkce individuí, principem potenciálně konstruujícím. Ramsey naopak v případě funkcí pro argument stejného typu nebere hledisko řádu vázaných proměnných v potaz. Kvantifikací přes funkce individuí se dostáváme opět pouze k funkcím individuí (za předpokladu, že jako výše zachovááme typ argumentu). Vzhledem k tomu, že pro kvantifikaci už předpokládáme totalitu všech funkcí individuí, je v Ramseyově případě kvantifikace přes funkce individuí principem vyčleňujícím.

Viděli jsme, že potenciálně konstruující principy mohou vést k paradoxům. Potenciálně konstruující, či vzhledem k obsažené diagonalizaci vždy konstruující, je formule $x \notin x$, potenciálně konstruující jsou také principy umožňující přiřadit dané třídě jí příslušný ordinál či potenci. Tyto tři principy jsou nezbytné k odvození Russellova, Burali-Fortiho a Cantorova paradoxu. Samozřejmě nenavrhujeme jako řešení příslušných paradoxů vzdát se příslušných principů, to by bylo s ohledem na poslední dva uvedené příliš restriktivní.

Samy o sobě totiž potenciálně konstruující principy nevedou ke sporu. Podobně jako v případě diagonalizace, i zde je třeba předpokládat, že daný princip je konstruující na nějaké totalitě a že konstruovaný objekt splňuje kritéria příslušnosti do oné totality. V tomto ohledu může být zcela vyhovujícím řešením Russellův přístup.

Jiná situace nastává ale v případě principů vyčleňujících. Ty nemohou vést k paradoxům, protože na rozdíl od předchozích principů neumožňují zkonstruovat nelegitimní objekty typu „třídy všech tříd, které nejsou prvky samy sebe“, „největšího ordinálního či kardinálního čísla“. Pouze vyčleňují „již existující“ objekty z „již existujících“ tříd. Přitom jsou ze stejného důvodu z podstaty impredikativní — vyčleňují objekt, který je prvkem dané třídy, na základě odkazu k této třídě a porušují tak princip bludného kruhu. Příkladem vyčleňujícího principu je již několikrát zmiňovaný případ výběru nejvyššího muže ze skupiny.

Vyčleňující principy tak tvoří kategorii principů, jež jsou impredikativní, přesto však nejsou bludné. Jejich vymezení je samozřejmě opět vymezením externím. Neposkytujeme žádná kritéria, která by umožnila identifikovat těmto principům odpovídající propoziční funkce uvnitř Russellovy teorie typů. Nicméně jsou nám příkladem toho, že rozvětvená teorie typů je více restriktivní, než by si vynucoval pouhý účel zabránění reformulaci paradoxů uvnitř této teorie.

Pokud bychom chtěli náš závěr formulovat, v souladu s tématem práce, paradoxně, mohli bychom říci, že tentýž důvod, který vede k tomu, že vyčleňující principy nemohou dát vzniknout paradoxům, vede k tomu, že jako impredikativní nejsou připuštěny do teorie, jejímž cílem je vzniku paradoxů zabránit.

9 Zermelo-Fraenkelova axiomatizace

Dalším přístupem jak zabránit matematicko-logickým paradoxům byla axiomatická teorie množin, jíž začal budovat Zermelo na počátku dvacátého století a které současnou podobu dali Fraenkel a Skolem ve dvacátých letech. Úspěch této teorie a její široké přijetí znamenalo pokles zájmu o predikativitu a impredikativitu, jak popisuje Feferman [1, s. 11].

Podívejme se ovšem na tuto axiomatizaci z hlediska Russellova pojetí. Zermelo-Fraenkelova teorie množin (**ZF**) pracuje s jedním typem proměnné, proměnnou množinovou. Univerzem množin je jakákoli struktura splňující axiomy **ZF**, množinou jakýkoli prvek tohoto univerza, což znamená, že univerzum množin je nám dáno jaksi „vcelku“, není „konstruováno zdola“ jako v případě Russellovy teorie typů, kdy na základě totality individuí dostáváme množiny individuí, na jejich základě množiny množin individuí a tak dále. Samozřejmě že v případě axiomatické teorie množin nejsou množiny dány pomocí je definující vlastnosti. Existence některých množin je sice přímo postulována axiomem, ovšem ne nutně ve formě existence množiny všech množin s nějakou vlastností. Tak například axiom nekonečna ve formě

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

postuluje existenci množiny, jejímiž prvky jsou množiny $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ atd. nicméně nevylučuje, že jejími prvky jsou i množiny jiného tvaru, kupříkladu $\{\{\emptyset\}\}$.

Zásadnější ale z hlediska našeho zkoumání je, že **ZF** připouští existenci množin definovaných impredikativními formulemi, díky schématu axiomů vydělení:

Je-li $\varphi(x)$ formule jazyka teorie množin proměnné x, která neobsahuje volnou proměnnou b, pak

$$(\forall a)(\exists b)(\forall x)(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

je axiomem **ZF**.

Nejenže formule $\varphi(x)$ může kvantifikovat přes všechny množiny a díky tomu její použití v axiomu specifikace porušuje princip bludného kruhu, axiom vydělení také umožňuje použít pro specifikace množin formule, jež by byly v teorii typů, jednoduché i rozvětvené, agramatické, jako v případě Russellovy formule $x \notin x$. Schéma axiomů vydělení můžeme chápat jako implementaci principu Russellovy teorie omezení velikosti do **ZF**. K paradoxu totiž v tomto případě nedospějeme proto, že pouze vydělujeme určitou podmnožinu z existující množiny a. Ona vydělená množina, množina b, bude sice různá od všech prvků množiny a, což ovšem nevede ke sporu, protože za množinu a nemůžeme vzít „množinu všech množin“. Soubor všech množin není v **ZF** množinou, ale vlastní třídou. Důkaz tohoto tvrzení jen přeříkáním Cantorova paradoxu, který tedy v kontextu **ZF** přestává být antinomií a stává se veridickým paradoxem.

Jak říká Quine:

> Něčí antinomie může být pro jiného veridickým paradoxem a něčí veridický paradox může být pro druhého banalitou. [9, s. 12]

10 Závěr

Viděli jsme tři teorie — Russellovu, Ramseyovu a Zermelo-Fraenkelovu — jež jsou odpovědí na výzvu, před niž matematiku a logiku postavily probírané paradoxy. Vyšli jsme od Russellových a Poincarého analýz vzniku paradoxů, které přirozenou cestou vedly k formulaci principu bludného kruhu. Ovšem v zápětí jsme viděli Ramseyovo odmítnutí tohoto principu s odkazem na to, že je závislý na námi zvolené reprezentaci funkcí. V závěru jsme připomněli axiomatickou teorii množin, jež rezignuje i na ty principy, jako hierarchizace univerza do různých typů, které Ramsey z Russellova přístupu zachoval. Mohli jsme se tedy přesvědčit, že bez ohledu na to, jak se mohly Russellovy analýzy a výstavba teorie typů zdát být založeny na zcela přirozených předpokladech, nebyly přirozené v tom smyslu, že by je bylo možné považovat za „ono správné“ řešení problémů spjatých s paradoxy. Jestliže se máme vzdát, jak jsme konstatovali, části našeho konceptuálního dědictví, těžko si představit jednu „přirozenou“ a „správnou“ cestu. Náš názor toho, co je přirozené a správné, je totiž právě dán oním konceptuálním dědictvím, jehož se musíme vzdát.

Přestože tedy cesta vývoje matematiky vedla od teorie typů k axiomatické teorii množin, v některých ohledech došlo k návratu k Russellovým návrhům. Zmiňovali jsme se o Russellově návrhu omezit se u přirozených čísel pouze na indukci pro vlastnosti prvního řádu. To, jak jsme viděli, kritizoval Ramsey, který chtěl indukci připustit pro všechny vlastnosti individuí. Jeho přístup, který by odpovídal druhořádové logice s její možností kvantifikovat přes všechny podmnožiny univerza, se ovšem neujal, a to s ohledem na příklon k logice prvořádové. Pro prvořádovou logiku totiž můžeme, na rozdíl od logiky druhořádové, stanovit kalkulus, který je vůči ní korektní a úplný. S jedním nepříjemným důsledkem omezení se na prvořádovou logiku jsme se již setkali — byl jím Skolemův paradox. Dalším důsledkem je nutnost omezení se na indukci pro prvořádové formule, což vede k nemožnosti vymezit přirozená čísla tak, jak bychom chtěli, a průniku nestandardních čísel do aritmetiky.

Axiomatická teorie množin, která byla z jednoho pohledu vyostřením Ramseyova odmítnutí závislosti existence množin na jejich jazykové konstrukci a na pojmech predikativity a impredikativiy, se tedy z druhého pohledu dostává mezi teorii Russellovu a Ramseyovu. Závislost na jazykové konstrukci je totiž přenesena do prvořádové logiky, kde místo ke „všem podmnožinám univerza“ můžeme odkazovat pouze k těm podmnožinám, které jsou dány nějakou formulí v jazyce teorie. V axiomatické teorii množin jsme se tedy oprostili od závislosti pojmu množiny na definující propoziční forumuli, ovšem nezískali jsme tím, jak ukazuje Skolemův paradox, takovou volnost v prohlášení toho, který soubor je množinou, jakou si představoval Ramsey.

Seznam použité literatury

[1] FEFERMAN, Solomon: „Predicativity“. 2005. Přetištěno in: Shapiro, Stewart (ed.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* Oxford University Press, Oxford 2005.

[2] VAN HEIJENOORT, Jean: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1897 - 1931.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1967.

[3] KOLMAN, Vojtěch: *Filosofie čísla. Základy logiky a aritmetiky v zrcadle analytické filosofie.* Filosofia, Praha 2008.

[4] POINCARÉ, Henri: „Les mathématiques et la logique I-III“, 1905 — 1906. Anglický překlad in: Ewald, William (ed.): *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.*, vol II. Claredon Press. Oxford 1996.

[5] RAMSEY, Frank Plumpton: „Foundations of Mathematics“. 1925. *Proceedings of London Mathematical Society*, 25: 338 - 384.

[6] RUSSELL, Bertrand: „On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types“. 1906. *Proceedings of London Mathematical Society*, 4: 29-53.

[7] RUSSELL, Bertrand: „Mathematical logic as based on the theory of types“. 1908. Přetištěno in: [2].

[8] QUINE, Willard Van Orman: *Set Theory and its Logic.* Revised edition. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London 1969.

[9] QUINE, Willard Van Orman: *The Ways of Paradox and Other Essays.* Revised and enlarged edition. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London 1976.