Anna Horská, *Gentzenův důkaz bezespornosti aritmetiky*

(V. Švejdar, posudek vedoucího na diplomovou práci, červen 2011)

Gentzenův důkaz bezespornosti Peanovy aritmetiky PA byl důležitým milníkem ve vývoji logiky 20. století. Druhá Gödelova věta o neúplnosti tvrdí, že v PA — ani v žádné jiné dostatečně silné bezesporné a rekurzívně axiomatizovatelné teorii — není možné dokázat její vlastní bezespornost. Gentzenovy výsledky dodávají k Druhé Gödelově větě vysvětlení, jaké axiomy by bylo nutné k PA přidat, aby v takto rozšířené teorii důkaz bezespornosti PA byl možný. Lze říci, a v předložené práci je to zmíněno, že Gentzenovy práce z části předjímají výsledek Parise a Harringtona ze 70. let o matematické neúplnosti PA. Gentzenovy práce tím, že je v nich definován kalkulus přirozené dedukce a sekventový kalkulus, také vlastně založily teorii důkazů.

Předložená práce A. Horské podrobně prezentuje dva (oba) Gentzenovy důkazy bezespornosti PA: důkaz z roku 1936 označený jako *druhý*, je založen na přirozené dedukci a na "reálných ordinálních číslech", tj. na jisté množině reálných čísel, která je dobře uspořádaná a o jejíchž prvcích se mluví jako o číslech ordinálních, kdežto *třetí* důkaz bezespornosti je založen na sekventovém kalkulu a na skutečných ordinálních číslech. Práce obsahuje i stručné pojednání o ordinální aritmetice.

Práce A. Horské je obsáhlá, je v ní řada vysvětlení a příkladů a prakticky neobsahuje překlepy ani pravopisné či stylistické chyby, pokud to ovšem mohu ve slovenštině posoudit. Pokládám za důležité, že v práci si lze přečíst i životopisná data a historické údaje. Oba důkazy jsou pojednány přehledně, podrobně a s porozuměním. To zejména v případě důkazu z roku 1936 považuji za obdivuhodný výkon. Pojednání o reálných ordinálních číslech včetně důkazu, že jsou dobře uspořádaná, a včetně souvislosti se skutečnými ordinálními čísly, je autorčino vlastní. Také v popisu redukčního procesu, který daný důkaz převádí na důkaz s menším číslem, musela autorka samostatné domyslet a doplnit velké množství podrobností.

Práce je náročná i typograficky, neboť formální důkazy v kalkulech se sekventy potřebují velký prostor a jejich sazba se v matematických textech vyskytuje zřídka. S (typo)grafickou podobou si autorka také dala hodně práce.

V práci jsem nenalezl žádné věcné chyby. Mám pouze několik poznámek spíše terminologických. Místo *esenciální* řez bych doporučil říkat *podstatný* řez. Fakt, že Peanova aritmetika bez indukce je někdy nazývána takto a někdy Robinsonovou aritmetikou, vzbuzuje otázku, zda a jak Gentzen označení Peanova aritmetika a Robinsonova aritmetika používá a kdy a kde se vlastně ustálily. Autorka se nepokusila dát do souvislosti Gentzenovy důkazy se Schwichtenbergovým důkazem v knize Handbook of Mathematical Logic. To je ale spíš podnět do budoucna a v žádném případě kritika, práce je už tak velmi obsáhlá. Ale uvítal bych, kdyby se autorka v průběhu obhajoby vyjádřila k otázce, zda a jaká vysvětlení a motivační poznámky lze v Gentzenových pracích nalézt.

Autorka vykonala velké množství práce a patří tak do velmi úzkého okruhu odborníků, kteří prostudovali Gentzenův důkaz bezespornosti z roku 1936 (tzv. druhý). Jsem přesvědčen, že její diplomová práce poslouží na katedře logiky jako učební text. Navrhuji klasifikovat ji známkou *výborně*.

V Praze 24.6.2011 doc RNDr Vítězslav Švejdar CSc