UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Filozofická fakulta

Katedra logiky

Diplomová práce na oboru logika

Eva Vachková

Intuicionistická logika jako užitečný nástroj

Intuitionistic logic as a useful tool

Praha 2010 vedoucí práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

Děkuji vedoucímu práce doc. RNDr. Vítězslavu Švejdarovi, CSc. za cenné rady, mimořádnou ochotu a pomoc při tvorbě práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím s kopírováním a půjčováním této práce.

V Praze dne: Podpis:

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
Filozofická fakulta
Katedra / ústav: Katedra logiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Jméno a příjmení studenta: **Eva Vachková**

Datum narození:

Kontaktní adresa: Fantova 1789, 15500 Praha 5

Obor studia / kombinace: **Logika**

Diplomní obor: **Logika**

Název práce v češtině **Intuicionistická logika jako užitečný nástroj**

Název práce v angličtině: **Intuitionistic logic as a useful tool**

Vedoucí práce: **Doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.**

Konzultant:

Pokyny k vypracování:

Velkou událostí v rozvoji moderní logiky byl v 60. letech minulého století objev *forcingu.* S jeho pomocí byl vyřešen dlouho odolávající problém, nezávislost hypotézy kontinua, a forcing jako metoda umožnil řešit řadu dalších problémů v metamatematice klasické teorie množin a stal se pro určitou dobu velmi atraktivním předmětem studia.

Zhruba ve stejné době byla objevena kripkovská sémantika neklasických logik, v tom logiky *intuicionistické.* Kniha [Fit69] je motivována myšlenkou, že nejde o náhodu, mezi forcingem a intuicionistickou logikou lze hledat souvislosti a forcing lze vykládat jako aplikaci intuicionistické logiky. Kniha [Fit69] je tak vlastně zajímavá i z hlediska filozofického, neboť podporuje dnes celkem rozšířený názor, že intuicionismus je již nedůležitý jako ideologie, avšak sama intuicionistická logika je zajímavá, užitečná a aplikovatelná.

Diplomová práce by tedy měla směřovat k odpovědi na otázku, zda cesta přes intuicionistickou logiku je nejsnazším způsobem, jak vykládat forcing. Protože ale jde o obtížnou problematiku, nebude vadit, když teorie množin nakonec moc nebo dokonce vůbec zmíněna nebude. V tom případě věnujte pozornost následujícím otázkám:

(i) Co jsou nejzákladnější výsledky o Heytingových algebrách, jak lze navzájem převádět Heytingovy algebry a kripkovské modely, jak lze popsat sémantiku pro některé logiky mezi intuicionistickou a klasickou.

(ii) Lze tu část knihy [Fit69], která je věnována teorii důkazů intuicionistické logiky, snadno přepracovat tak, aby se místo bethovských stromů použily dnes obvyklejší gentzenovské kalkuly?

(iii) Lze z knihy [Fit69] vyčíst přehledné důkazy úplnosti pro intuicionistické predikátové kalkuly, jiné než důkaz uvedený v práci [Koz04]?

(iv) Jak lze syntakticky, tj. pomocí kalkulů, charakterizovat kripkovské modely s konstantním univerzem?

Doporučená literatura:

[Fit69] M. C. Fitting. Intuitionistic Logic, Model Theory, and Forcing. North-Holland, 1969.

[Jec71] Thomas J. Jech. Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing. Číslo 217 řady Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971.

[Koz04] Blanka Kozlíková. Sémantické metody v intuicionistické predikátové logice. Diplomová práce, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky, 2004.

Vedoucí práce (podpis): Vítězslav Švejdar

Datum zadání práce: **červen 2008**

L.S.

Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta (4)
Studijní oddělení
Praha 1, nám. J. Palacha 2, 116 38

....
Vedoucí základní součásti:

....
Děkan:

Datum: 5. 6. 2008

Abstrakt

V této práci se zabýváme intuicionistickou logikou a úplností gentzenovského kalkulu vůči její sémantice. V důkazu úplnosti jsou využity saturované sekventy. Jazyk, který bereme v úvahu, je nejvýše spočetný. Dále se práce zaměřuje na jedno z rozšíření intuicionistické logiky, a sice intuicionistickou logiku s konstantním univerzem, někdy nazývanou Grzegorczykovou. Zabýváme se Markovovým principem, díky němuž dokážeme, že gentzenovský kalkulus upravený pro tuto logiku nemá bezřezovou úplnost vůči Grzegorczykově sémantice. Značná pozornost je věnována Heytingovým algebrám, jedné z možných sémantik intuicionistické výrokové logiky. Ukážeme, že Rieger-Nishimurův svaz je také Heytingova algebra. Na Heytingových algebrách definujeme filtry a ultrafiltry a s jejich pomocí pak dostaneme kripkovské rámce. Dokážeme, že v těchto rámcích platí tytéž formule jako v Heytingových algebrách.

Klíčová slova: intuicionistická logika, úplnost, gentzenovské kalkuly, konstantní univerzum, Markovův princip, Heytingovy algebry.

Abstract

This work deals with intuitionistic logic and completness of Gentzen calculus with respect to its semantics. The completness proof uses saturated sequents. The language considered is at most countable. Furthermore, our work investigates one of the generalizations of intuitionistic logic, namely intuitionistic logic with constant domain, or Grzegorczyk's logic. We deal with Markov's principle and use it to prove that Gentzen calculus adapted to this logic is not cut-free complete with respect to Grzegorczyk's logic. Part of the work deals with Heyting algebras—one of the possible semantics of intuitionistic propositional logic. We show that the Rieger-Nishimura lattice is a Heyting algebra, too. For Heyting algebras, filters and prime filters are defined and used to obtain Kripke's frames. It is shown that the same formulas hold in these frames and in Heyting algebras.

Keywords: intuitionistic logic, completness, Gentzen calculi, constant domain, Markov's principle, Heyting algebras.

Obsah

1 Úvod

V této práci se budeme zabývat intuicionistickou logikou. V kapitole 2 definujeme sémantiku intuicionistické predikátové logiky a gentzenovský kalkulus. Nejprve uvedeme důkaz úplnosti pro klasickou logiku, pak přejdeme k logice intuicionistické. Budeme pracovat s nejvýše spočetným jazykem a s nejvýše spočetnými sekventy. Díky důkazu úplnosti gentzenovského kalkulu vůči kripkovské sémantice dostaneme ještě větu o kompaktnosti. Dále se budeme zabývat rozšířením intuicionistické logiky, a to intuicionistickou logikou s konstantním univerzem neboli Grzegorczykovou logikou. Jedním z našich cílů bylo dokázat úplnost i pro tuto logiku, a to zobecněním důkazů, které už máme k dispozici. Zjistili jsme, že tyto důkazy není možné přímočaře zobecnit pro Grzegorczykovu logiku, a tak zůstaneme u některých jejích vlastností. Rozšíříme hilbertovský kalkulus o jedno schéma, upravíme gentzenovský kalkulus a ukážeme, že oba kalkuly jsou ekvivalentní. Předvedeme princip, který neplatí v intuicionistické logice, ale platí v intuicionistické logice s konstantním univerzem. Na závěr se budeme zabývat intuicionistickou výrokovou logikou a některými jejími sémantikami, především Heytingovými algebrami. Ukážeme si jejich základní algebraické vlastnosti. Definujeme na nich ultrafiltry a předvedeme jak z Heytingovy algebry získat kripkovský model.

Nakonec se v práci nedostaneme k teorii množin, nicméně připravíme půdu pro užití intuicionistické logiky právě v teorii množin. V kapitole 5 ukážeme, jak charakterizovat kripkovské modely s konstantním univerzem. Naše úvahy jsou motivovány Fittingem, který v [6] používá intuicionistickou logiku s konstantním univerzem, proto se domníváme, že tímto směrem bychom mohli pokračovat k forcingu. Před aplikací Grzegorczykovy logiky je ale nejprve potřeba detailně prozkoumat právě tuto logiku. To se nám do určité míry podaří. Nepodaří se nám sice zobecnit některé už existující důkazy úplnosti pro upravený gentzenovský kalkulus, ale i tak zjištění, že to není možné, povede k zajímavému poznání o této logice. V kapitole 6 probíráme zdánlivě nesouvisející téma, ale algebraické metody mohou být užity v důkazech úplnosti, jak je tomu například v [7]. I Fitting Heytingovy algebry ve své knize [6] používá.

Ještě pár slov ke značení. Struktury v celé práci značíme velkými psacími písmeny $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, jejich nosné množiny velkými písmeny A, B. Světy v kripkovském modelu značíme malými řeckými písmeny ze začátku abecedy α, β. Výrokové formule značíme velkými písmeny A, B, predikátové formule malými řeckými písmeny φ, ψ, množiny formulí velkými řeckými písmeny Γ, Δ. Kromě kapitoly 6 pro implikaci budeme používat výhradně symbol $\to$, na metamatematické úrovni $\Rightarrow$. V kapitole 6 budeme obě implikace značit $\Rightarrow$, symbol $\to$ dostane speciální význam. Splněnost v klasické logice je označována $\models$, v intuicionistické logice $\Vdash$.

2 Základní pojmy intuicionistické logiky

V této kapitole si stručně uvedeme základní pojmy intuicionistické logiky. Budeme vycházet ze zdroje [13], odkud převezmeme i značení.

2.1 Sémantika intuicionistické výrokové logiky

Tato část je věnována sémantice intuicionistické výrokové logiky. Formule jsou sestaveny z výrokových atomů pomocí stejných spojek jako formule logiky klasické, ale narozdíl od klasické logiky nelze žádnou ze spojek intuicionistické výrokové logiky vyjádřit pomocí ostatních.

Definice 2.1. Trojici $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$, kde W je neprázdná množina, $\leq$ je částečné uspořádání na W a relace $\Vdash$ je podmnožinou kartézského součinu množiny W s množinou všech výrokových formulí, nazveme *kripkovským modelem pro intuicionistickou logiku*, pokud $\forall x, y \in W$, pro každé formule A, B a libovolný výrokový atom p platí:

1. pokud $x \leq y$ a $x \Vdash p$, pak $y \Vdash p$,
2. $x \Vdash A \,\&\, B$, právě když $x \Vdash A$ a $x \Vdash B$,
3. $x \Vdash A \vee B$, právě když $x \Vdash A$ nebo $x \Vdash B$,
4. $x \Vdash A \rightarrow B$, právě když $\forall y \geq x \, (y \Vdash A \Rightarrow y \Vdash B)$,
5. $x \Vdash \neg A$, právě když $\forall y \geq x \, (y \nVdash A)$.

Poznámka 2.1. V definici 2.1 není nutné požadovat, aby relace $\leq$ byla slabě antisymetrická. Můžeme si vystačit s tím, že $\leq$ je kvaziuspořádání na W. Takovou definici najdeme například v [7]

Definice 2.2. Řekneme, že formule A *platí v kripkovském modelu* $\langle W, R, \Vdash \rangle$, jestliže A je splněna v každém vrcholu x z W.

2.2 Gentzenovský kalkulus pro intuicionistickou výrokovou logiku

V této části uvedeme gentzenovský kalkulus pro intuicionistickou výrokovou logiku. Nejdříve definujeme sekvent.

Definice 2.3. Dvojici $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ nazveme *sekvent*, jestliže Γ, Δ jsou konečné množiny formulí. Množině Γ v sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ říkáme *antecedent* a množině Δ *sukcedent.*

Gentzenovský kalkulus má následující odvozovací pravidla:

$A :$ $\quad / \, \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle$

$W :$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle, \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle \, / \, \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

$\vee_r :$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi \rangle, \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \varphi \rangle$

$\&_l :$ $\quad \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle \, / \, \langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \Rightarrow \Delta \rangle, \ \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle \, / \, \langle \Gamma, \psi \,\&\, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

$\&_r :$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \, , \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle$

$\vee_l :$ $\quad \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle \, , \langle \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \rangle \, / \, \langle \Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta \rangle$

$\neg_l :$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \, / \, \langle \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

$\neg_r :$ $\quad \langle \Gamma, A \Rightarrow \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \neg A \rangle$

$\rightarrow_r:$ $\quad \langle \Gamma, A \Rightarrow B \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow A \rightarrow B \rangle$

$\rightarrow_l:$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \, , \langle \Pi, \psi \Rightarrow \Lambda \rangle \, / \, \langle \Gamma, \Pi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta, \Lambda \rangle$

$\rightarrow_w:$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, B \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B \rangle$

$Cut :$ $\quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \, , \langle \Pi, \varphi \Rightarrow \Lambda \rangle \, / \, \langle \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda \rangle$

Pravidla $\rightarrow_r$ a $\neg_l$ jsou téměř shodná s pravidly pro klasickou logiku až na to, že v sukcedentu se nepřipouštějí postranní formule.

Poznámka 2.2. Některé zdroje používají v sekventu $\supset$ místo $\Rightarrow$ a nepoužívají lomené závorky $\langle\rangle$, nám se však zvolená notace zdá přehlednější.

Definice 2.4. Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ *platí v modelu* $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$, pokud v každém vrcholu $x \in W$, v němž jsou splněny všechny formule z Γ, je splněna také některá formule z Δ. Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je *intuicionisticky tautologický*, pokud platí v každém kripkovském modelu. Formule A *platí v modelu* $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$, pokud v modelu $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$ platí sekvent $\langle \Rightarrow A \rangle$. Formule A je *intuicionistická tautologie*, pokud formule A je splněna v každém vrcholu každého kripkovského modelu, tj. pokud sekvent $\langle \Rightarrow A \rangle$ je intuicionisticky tautologický.

Definice 2.5. Model $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$ nazveme *kripkovským protipříkladem na formuli* A, pokud v něm A neplatí.

Definice 2.6. Model $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$ takový, že v některém jeho vrcholu a jsou splněny všechny formule z Γ a nesplněny všechny formule z Δ, nazveme *kripkovským protipříkladem na sekvent* $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$.

2.3 Sémantika intuicionistické predikátové logiky

Definice 2.7. Trojici $\langle W, \leq, l \rangle$ nazveme *kripkovskou intuicionistickou predikátovou strukturou* pro jazyk L, pokud relace $\leq$ je uspořádání na neprázdné množině W a l je funkce definovaná na množině W, která splňuje následující podmínky:

1. Všechny hodnoty $l(\alpha)$ jsou struktury pro jazyk L.
2. Pokud A a B jsou nosné množiny struktur $l(\alpha)$ a $l(\beta)$ a platí $\alpha \leq \beta$, pak $A \subseteq B$.
3. Pokud $s^{l(\alpha)}$ a $s^{l(\beta)}$ jsou realizace libovolného funkčního nebo predikátového symbolu s ve strukturách $l(\alpha)$ a $l(\beta)$ a platí-li $\alpha \leq \beta$, pak $s^{l(\alpha)} \subseteq s^{l(\beta)}$.

Dvojici $\langle W, \leq \rangle$ nazýváme kripkovský rámec struktury $\langle W, \leq, l \rangle$.

Definice 2.8. Nechť $\langle W, \leq, \Vdash \rangle$ je kripkovská struktura pro jazyk L. Relace $\Vdash$ mezi prvky α množiny W, predikátovými formulemi φ a ohodnoceními proměnných e ve struktuře $l(\alpha)$ je definována následujícími podmínkami:

1. Je-li φ atomická formule jazyka L, pak $\alpha \Vdash \varphi\,[e]$, právě když $l(\alpha) \models \varphi\,[e]$ ve smyslu klasické logiky,
2. $\alpha \Vdash (\varphi \,\&\, \psi)\,[e]$, právě když $\alpha \Vdash \varphi\,[e]$ a $\alpha \Vdash \psi\,[e]$,
3. $\alpha \Vdash (\varphi \vee \psi)\,[e]$, právě když $\alpha \Vdash \varphi\,[e]$ nebo $\alpha \Vdash \psi\,[e]$,
4. $\alpha \Vdash (\varphi \rightarrow \psi)\,[e]$, právě když $\forall \beta \geq \alpha$, pro které platí $\beta \Vdash \varphi\,[e]$, platí i $\beta \Vdash \psi\,[e]$,
5. $\alpha \Vdash \neg\varphi\,[e]$, právě když $\forall \beta \geq \alpha$ platí $\beta \nVdash \varphi\,[e]$,

6. $\alpha \Vdash (\exists x \varphi)\,[e]$, právě když existuje prvek a nosné množiny struktury $l(\alpha)$ takový, že $\alpha \Vdash \varphi\,[e(x/a)]$,

7. $\alpha \Vdash (\forall x \varphi)\,[e]$, právě když $\forall \beta \geq \alpha$ a pro každý prvek b nosné množiny struktury $l(\beta)$ platí $\beta \Vdash \varphi\,[e(x/b)]$.

2.4 Gentzenovský kalkulus pro intuicionistickou predikátovou logiku

Gentzenovský kalkulus pro intuicionistickou predikátovou logiku má táž pravidla, jako jsme definovali v podkapitole 2.2, a navíc čtyři pravidla pro kvantifikátory:

$\exists_r$: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_x(t) \rangle \,/\, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi \rangle$

$\forall_l$: $\langle \Gamma, \varphi_x(t) \Rightarrow \Delta \rangle \,/\, \langle \Gamma, \forall x \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

$\exists_l$: $\langle \Gamma, \varphi_x(y) \Rightarrow \Delta \rangle \,/\, \langle \Gamma, \exists x \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

$\forall_r$: $\langle \Gamma \Rightarrow \varphi_x(y) \rangle \,/\, \langle \Gamma \Rightarrow \forall x \varphi \rangle$

kde t je term a y je proměnná substituovatelná za x do formule φ a u pravidel $\exists_l$ a $\forall_r$ proměnná y nemá volné výskyty ve výsledném sekventu.

3 Úplnost gentzenovského kalkulu vůči klasické logice

Budeme pracovat s obecnější definicí sekventu. Nebudeme již požadovat, aby množiny Γ a Δ v sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ byly konečné, bude nám stačit, pokud budou nejvýše spočetné. Musíme ještě změnit definici dokazatelnosti. Jazyk L, s nímž budeme pracovat, je bez rovnosti, obsahuje spočetně mnoho predikátových a funkčních symbolů a spočetně mnoho proměnných. Bereme v úvahu teorii T se spočetně mnoha axiomy.

Definice 3.1. Řekneme, že sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je *dokazatelný v nekonečném smyslu*, pokud lze vybrat $\Gamma' \subseteq \Gamma$ a $\Delta' \subseteq \Delta$ takové, že Γ', Δ' jsou konečné a $\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle$ je dokazatelný v intuicionistické logice.

Nejprve uvedeme důkaz pro klasickou logiku, neboť tento důkaz nás inspiroval k důkazu pro logiku intuicionistickou. Brzy se ukáže, že oba důkazy mají mnohé společné rysy. Důkaz jsme s některými úpravami převzali z [3]. Tento důkaz narozdíl od důkazu v [9] postupuje po jednom kroku. Budeme vždy zpracovávat například jen jednu konjunkci (respektive kvantifikaci), zatímco důkaz v [9] všechny logické spojky jednoho druhu (respektive kvantifikace) zpracovává najednou. Nám uvedený postup stačí, neboť množiny formulí Γ a Δ jsou nejvýše spočetné. Uveďme ještě jedno lemma, které nebudeme dokazovat, neboť důkaz je obecně známý. Toto lemma se v důkazu úplnosti se použije zásadním způsobem.

Lemma 3.1. (Königovo lemma)
Každý nekonečný konečně se větvící strom má nekonečnou větev.

Lemma 3.2. *Nechť sekvent $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega \rangle$ neobsahuje žádnou proměnnou zároveň volnou i vázanou a je nedokazatelný v teorii T. Pak lze sestrojit model, kde budou všechny formule z T a z antecedentu splněny a všechny formule ze sukcedentu nesplněny.*

Nechť teorie T je nejvýše spočetná množina sentencí. Zadefinujeme množinu Var, obsahuje všechny volné proměnné z Σ, Ω, je nekonečná spočetná a neobsahuje proměnné, které jsou vázané v Σ, Ω, T. Budeme konstruovat strom $\mathcal{P}$, tento strom bude zároveň v každém kroku neúplným důkazem příslušného sekventu. $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ budou predikátové formule v jazyce L, $t_0, t_{1,} t_2, \ldots$ termy. Očíslujeme všechny formule v jazyce L tak, aby se každá formule vyskytla ještě nekonečněkrát. Stejným způsobem očíslujeme všechny termy nad množinou Var. Pak očíslujeme všechny dvojice $[\varphi_i, t_j]$ opět tak, aby se každá dvojice vyskytla ještě nekonečněkrát. K tomu můžeme využít diagonální enumeraci. Formule lze očíslovat, neboť jazyk L je nejvýše spočetný. Sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je *aktivní* v $\mathcal{P}$, jestliže je listovým sekventem stromu $\mathcal{P}$ a žádná formule se neobjevuje zároveň v antecedentu a sukcedentu. Na začátku je $\mathcal{P}$ jednoprvkový strom, který obsahuje pouze sekvent $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega \rangle$. Dále budeme postupovat algoritmem:

Krok 1: Pokud nejsou aktivní sekventy v $\mathcal{P}$, tak skonči, jinak se zabývej dvojicí $[\varphi_i, t_j]$ a vezmi libovolný aktivní sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ ze stromu $\mathcal{P}$.

Krok 2: Pokud $\varphi_i \in T$, pak přidej φ_i do všech antecedentů, tedy $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ nahraď $\langle \varphi_i, \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$. To lze udělat, neboť φ_i neobsahuje volné proměnné, proto nebude porušena podmínka EVC.

Krok 3: Pokud $\varphi_i \in \Gamma$, pak $\Gamma' := \Gamma - \{\varphi_i\}$.
Pokud $\varphi_i \in \Delta$, pak $\Delta' := \Delta - \{\varphi_i\}$.

Krok 4:

- Pokud $\varphi_i = \psi_1 \,\&\, \psi_2$, pak
  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma', \psi_1 \,\&\, \psi_2 \Rightarrow \Delta \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\&_l \, \frac{\langle \Gamma', \psi_1 \,\&\, \psi_2, \psi_1, \psi_2 \Rightarrow \Delta \rangle}{\langle \Gamma', \psi_1 \,\&\, \psi_2 \Rightarrow \Delta \rangle}$$

  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \,\&\, \psi_2 \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\&_r \, \frac{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \,\&\, \psi_2, \psi_1 \rangle \qquad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \,\&\, \psi_2, \psi_2 \rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \,\&\, \psi_2 \rangle}$$

- Pokud $\varphi_i = \psi_1 \vee \psi_2$, pak
  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma', \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \Delta \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\vee_l \, \frac{\langle \Gamma', \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \Rightarrow \Delta \rangle \qquad \langle \Gamma', \psi_1 \vee \psi_2, \psi_2 \Rightarrow \Delta \rangle}{\langle \Gamma', \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \Delta \rangle}$$

- každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \vee \psi_2 \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\vee_r \frac{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1, \psi_2 \rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \vee \psi_2 \rangle}$$

- Pokud $\varphi_i = \neg\psi$, pak
  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma', \neg\psi \Rightarrow \Delta \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\neg_l \frac{\langle \Gamma', \neg\psi \Rightarrow \Delta, \psi \rangle}{\langle \Gamma', \neg\psi \Rightarrow \Delta \rangle}$$

  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \neg\psi \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\neg_r \frac{\langle \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta', \neg\psi \rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \neg\psi \rangle}$$

- Pokud $\varphi_i = \psi \to \chi$, pak
  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma', \psi \to \chi \Rightarrow \Delta \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\to_l \frac{\langle \Gamma', \psi \to \chi \Rightarrow \Delta, \psi \rangle \qquad \langle \Gamma', \psi \to \chi, \chi \Rightarrow \Delta \rangle}{\langle \Gamma', \psi \to \chi \Rightarrow \Delta \rangle}$$

  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\to_r \frac{\langle \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi \rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi \rangle}$$

- Pokud $\varphi_i = \exists x \psi(x)$, pak
  - každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma', \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta \rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\exists_l \frac{\langle \Gamma', \exists x \psi(x), \psi_x(y) \Rightarrow \Delta \rangle}{\langle \Gamma', \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta \rangle},$$

    kde y je nová proměnná, která se dosud v $\mathcal{P}$ nevyskytuje a $y \in \mathrm{Var}$.

– každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \exists x\psi(x)\rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\exists_r \frac{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \exists x\psi(x), \psi_x(t_j)\rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \exists x\psi(x)\rangle},$$

tento krok udělej pro term t_j nad množinou Var.

- Pokud $\varphi_i = \forall x\psi(x)$, pak
  – každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma', \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta\rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\forall_l \frac{\langle \Gamma', \forall x\psi(x), \psi_x(t_j) \Rightarrow \Delta\rangle}{\langle \Gamma', \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta\rangle},$$

  tento krok udělej pro term t_j nad množinou Var.

  – každý aktivní sekvent v $\mathcal{P}$ tvaru $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\psi(x)\rangle$ nahraď jeho odvozením:

$$\forall_r \frac{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\psi(x), \psi_x(y)\rangle}{\langle \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\psi(x)\rangle},$$

  kde y je nová proměnná, která se dosud v $\mathcal{P}$ nevyskytuje a $y \in \mathrm{Var}$.

Krok 5: Pokračuj krokem 1.

Pokud algoritmus skončí, tak $\mathcal{P}$ dává bezřezový důkaz sekventu

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$$

pro nějaké $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in T$. Pokud konstrukce $\mathcal{P}$ nikdy neskončí, pak sekvent $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ není dokazatelný v T. Předpokládejme, že konstrukce $\mathcal{P}$ nikdy neskončí a uvažme výsledek nekonečného procesu. Dostaneme nekonečný strom (kromě případu, kdy $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ obsahuje pouze atomické formule a T je prázdná, v tomto případě je strom $\mathcal{P}$ jediný sekvent). Pokud je teorie T prázdná, pak každý vrchol v nekonečném stromě $\mathcal{P}$ bude sekvent $\langle \Gamma'' \Rightarrow \Delta''\rangle$, kde Γ'' a Δ'' vznikly algoritmem. V obecném případě sekvent v každém vrcholu nekonečného stromu $\mathcal{P}$ bude tvaru $\langle \Gamma'' \Rightarrow \Delta''\rangle$, kde v antecedentu je spočetně mnoho formulí, jež tam byly uvedeny krokem 2. $\mathcal{P}$ je konečně větvící se nekonečný strom, tedy podle Königova lemmatu musí mít nekonečnou větev, označme ji $\mathcal{B}$. Definujme model $\mathcal{D} = (D, e, \models)$, nosná množina modelu je množina všech termů nad množinou Var (označme ji D). Dále definujeme realizace funkčních a predikátových symbolů ve struktuře $\mathcal{D}$ takto: $F^{\mathcal{D}}(t_1, \dots, t_n)$ je term $F(t_1, \dots, t_n)$ a

$$P^{\mathcal{D}} = \{[t_1, \dots, t_n]\,;\, P(t_1, \dots, t_n) \text{ je v antecedentu některého sekventu v } \mathcal{B}\}\,.$$

Definujeme sekvent $\langle \Gamma^\star \Rightarrow \Delta^\star \rangle$, kde $\Gamma^\star$ je sjednocení všech antecedentů v nekonečné větvi $\mathcal{B}$ a $\Delta^\star$ sjednocením všech sukcedentů v $\mathcal{B}$. Definujeme ohodnocení proměnných e předpisem $e(x) = x$, kde x je proměnná z množiny Var.

Lemma 3.3. *Pro ohodnocení e a term t nad množinou* Var *platí $t^{\mathcal{D}}[e] = t$.*

Důkaz. Dokážeme indukcí podle počtu funkčních symbolů v termu t. Pokud nejsou žádné, tak t je proměnná x. Protože $x^{\mathcal{D}}[e]$ je $e(x)$, dostaneme $x^{\mathcal{D}}[e] = x$, a tedy pro proměnnou x platí $e(x) = x$. Nechť $t = F(t_1, \dots, t_n)$. Z Tarského definice dostáváme

$$t^{\mathcal{D}}[e] = F^{\mathcal{D}}(t_1^{\mathcal{D}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{D}}[e]) = F^{\mathcal{D}}(t_1, \dots, t_n) = F(t_1, \dots, t_n),$$

kde druhá rovnost platí díky indukčnímu předpokladu a poslední rovnost jsme dostali z definice realizace funkčních symbolů ve struktuře $\mathcal{D}$. □

Lemma 3.4. *Výše definované ohodnocení e splňuje v modelu $\mathcal{D}$ všechny formule v antecedentu a nesplňuje žádnou formuli v sukcedentu sekventu $\langle \Gamma^\star \Rightarrow \Delta^\star \rangle$.*

Důkaz. Provedeme indukcí podle složitosti formule. Pokud je φ atomická a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak podle Tarského definice a lemmatu 3.3 dostáváme:

$$\mathcal{D} \vDash P(t_1, \dots, t_n)\,[e] \Leftrightarrow \left[t_1^{\mathcal{D}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{D}}[e]\right] \in P^{\mathcal{D}} \Leftrightarrow [t_1, \dots, t_n] \in P^{\mathcal{D}},$$

což je podle definice realizace P v $\mathcal{D}$ ekvivalentní s $P(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma$, kde Γ je některý z antecedentů v nekonečné větvi $\mathcal{B}$, a tedy $P(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^\star$. Z toho plyne $\mathcal{D} \vDash \varphi$ (pro $\varphi \in \Delta^\star$ nesplněnost analogicky).

Pokud $\varphi = \psi_1 \,\&\, \psi_2$ a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak z algoritmu pro případ $\&_l$ dostaneme (analogické zdůvodnění už nebudeme v ostatních případech vypisovat), že ψ_1 a ψ_2 jsou v $\Gamma^\star$, a tedy z indukčního předpokladu platí $\mathcal{D} \vDash \varphi$. Pokud $\varphi \in \Delta^\star$, pak v ψ_1 nebo ψ_2 jsou v $\Delta^\star$, tudíž $\mathcal{D} \nvDash \varphi$.

Pokud $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak je v $\Gamma^\star$ i ψ_1 nebo ψ_2, proto $\mathcal{D} \vDash \varphi$. Jestliže $\varphi \in \Delta^\star$, pak v $\Delta^\star$ budou ψ_1 a ψ_2, tedy z indukčního předpokladu $\mathcal{D} \nvDash \varphi$.

Pokud $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak $\psi_1 \in \Delta^\star$ nebo $\psi_2 \in \Gamma^\star$, a tedy $\mathcal{D} \vDash \varphi$. Pokud $\varphi \in \Delta^\star$, pak $\psi_1 \in \Gamma^\star$ a $\psi_2 \in \Delta^\star$, tedy platí předpoklad a neplatí závěr, proto $\mathcal{D} \nvDash \varphi$.

Pokud $\varphi = \neg\psi$ a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak $\psi \in \Delta^\star$, tudíž z indukčního předpokladu $\mathcal{D} \vDash \varphi$. Pokud $\varphi \in \Delta^\star$, pak $\psi \in \Gamma^\star$, a tedy z indukčního předpokladu $\mathcal{D} \nvDash \varphi$.

Pokud $\varphi = \exists x\psi(x)$ a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak pro nějaké $y \in \mathrm{Var}$ je $\psi_x(y) \in \Gamma^\star$. Dále dostaneme

$$\mathcal{D} \vDash \exists x\varphi(x)\,[e] \Leftrightarrow \exists t \in D\,(\mathcal{D} \vDash \varphi\,[e(x/t)])\,,$$

což je dále ekvivalentní s

$$\exists t \in D(\mathcal{D} \vDash \varphi\left(e\left(x/t^{\mathcal{D}}\,[e]\right)\right) \Leftrightarrow \exists t \in D\,(\mathcal{D} \vDash \varphi_x(t)\,[e])\,.$$

Poslední ekvivalence plyne z lemmatu 3.3, ostatní ekvivalence plynou z Tarského definice a splňování při substituci, viz kapitola 3 v [13]. Pokud $\varphi \in \Delta^\star$, pak pro každé t nad množinou Var platí $\psi_x(t) \in \Delta^\star$. Pro každé $t \in D$ platí následující ekvivalence:

$$\mathcal{D} \vDash\psi\,[e(x/t)] \Leftrightarrow \mathcal{D} \vDash\psi\left[e(x/t^{\mathcal{D}}\,[e])\right] \Leftrightarrow \mathcal{D} \vDash \psi_x(t)\,[e]\,,$$

kde jsme druhou ekvivalenci dostali z lemmatu 3.3. Z uvedené ekvivalence a indukčního předpokladu dostáváme $\mathcal{D} \nvDash \varphi$.

Pokud $\varphi = \forall x\psi(x)$ a $\varphi \in \Gamma^\star$, pak potřebujeme pro každé $t \in D$ ukázat, že $\mathcal{D} \vDash \psi_x(t)\,[e]$, což se ukáže analogicky jako případ pro existenční kvantifikátor v sukcedentu, a tedy $\mathcal{D} \vDash \varphi$. Pokud $\varphi \in \Delta^\star$, pak pro nějaké $y \in \mathrm{Var}$ je $\psi_x(y) \in \Delta^\star$, z indukčního předpokladu a výše uvedených ekvivalencí u případu $\exists x\psi(x) \in \Gamma^\star$ dostaneme $\mathcal{D} \nvDash \varphi$.

Pro $\varphi \in T$ platí $\mathcal{D} \vDash \varphi$, neboť $\varphi \in \Gamma^\star$. V nekonečné větvi $\mathcal{B}$ se díky kroku 2 v algoritmu vyskytují všechny axiomy teorie T. Tím jsme dokázali i lemma 3.2, neboť se nám podařilo ukázat, že sestrojený model má požadované vlastnosti. Platí $\Sigma \subseteq \Gamma^\star$ a $\Omega \subseteq \Delta^\star$. $\square$

Věta 3.1. (O úplnosti kalkulu GK vůči sémantice klasické logice)

1. *Jestliže je sekvent $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ klasicky logicky platný, pak má bezřezový důkaz v gentzenovském kalkulu pro klasickou logiku.*

2. *Nechť T je množina sentencí. Jestliže $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ vyplývá z T, pak existují sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in T$ takové, že sekvent $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ má bezřezový důkaz.*

Důkaz. Bod 1. dokážeme obměnou. Pokud sekvent $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega \rangle$ nemá bezřezový důkaz v gentzenovském kalkulu, tak výše zmíněnou konstrukcí sestrojíme model, ve kterém platí všechny formule z Σ a neplatí žádná formule z Ω. Bod 2. dostaneme díky skutečnosti, že pro sekvent, který vyplývá z T, musel algoritmus skončit, a tedy jsme dostali sekvent $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \Sigma \Rightarrow \Omega \rangle$, kde $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in T$. □

Důsledek 3.1. (Věta o eliminovatelnosti řezů)
Každý sekvent dokazatelný v gentzenovském kalkulu je dokazatelný i bez užití pravidla řezu.

Poznámka 3.1. Z bodu 2. ve větě 3.1 dostaneme větu o kompaktnosti. Pokud φ vyplývá z T, pak je φ dokazatelná z T, a tedy existuje konečná posloupnost formulí $F \subseteq T$ taková, že F dokazuje φ, a tedy z F vyplývá φ.

4 Úplnost gentzenovského kalkulu vůči intuicionistické predikátové logice

Použijeme ideu algoritmu z předchozí kapitoly, ke které nás inspiroval [3]. Dále použijeme [13], konkrétně cvičení 25 v kapitole 5. Jazyk L bude stejný jako v kapitole 3 a teorie T je opět nejvýše spočetná. Nejprve definujeme saturovaný sekvent.

Definice 4.1. Řekneme, že sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je *saturovaný vůči množině* Var, jestliže splňuje následující podmínky:

- $\psi \,\&\, \chi \in \Gamma$, pak ψ i χ jsou v Γ,
- $\psi \vee \chi \in \Delta$, pak ψ i χ jsou v Δ,
- $\psi \vee \chi \in \Gamma$, pak ψ nebo χ je v Γ,
- $\psi \,\&\, \chi \in \Delta$, pak ψ nebo χ je v Δ,
- $\psi \to \chi \in \Gamma$, pak $\chi \in \Gamma$ nebo $\psi \in \Delta$,
- $\neg\psi \in \Gamma$, pak $\psi \in \Delta$,
- $\exists x\, \psi \in \Gamma$, pak existuje proměnná y, která není volná v Γ ani Δ a je z množiny Var a platí $\psi_x(y) \in \Gamma$,
- $\exists x\, \psi \in \Delta$, pak pro všechny termy t nad množinou Var platí$\psi_x(t) \in \Delta$,
- $\forall x\, \psi \in \Gamma$, pak pro všechny termy t nad množinou Var platí $\psi_x(t) \in \Gamma$.

Poznámka 4.1. Saturovaný sekvent je analogický k algoritmu z kapitoly 3. Všimněme si, že saturovaný sekvent má téměř stejné vlastnosti jako antecedent a sukcedent sekventu $\langle \Gamma^\star \Rightarrow \Delta^\star \rangle$. V následujícím lemmatu budeme vytvářet z nedokazatelného sekventu saturovaný podobným způsobem jako pracoval algoritmus. Budeme brát formule jazyka L po jedné a přidávat do antecedentu nebo do sukcedentu tak, abychom dostali saturovaný sekvent, přičemž stejně jako u algoritmu nepřidáme nic navíc, co výchozí sekvent neobsahoval ve svých podformulích.

Lemma 4.1. *Nechť je sekvent* $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ *nedokazatelný a množina* Var *obsahuje všechny volné proměnné v* $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$*, neobsahuje žádnou vázanou ze sekventu* $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ *a obsahuje nekonečně spočetně mnoho nikde nepoužitých proměnných. Pak existuje (potenciálně nekonečný) sekvent* $\langle\Pi \Rightarrow \Lambda\rangle$*, který je saturovaný vůči* Var *a takový, že* $\Sigma \subseteq \Pi$ *a* $\Omega \subseteq \Lambda$ *a* Π *a* Λ *jsou sestaveny jen z podformulí, které už v* Σ *a* Ω *byly.*

Důkaz. Očíslujeme všechny formule v jazyce L opět tak, aby se každá formule vyskytla ještě nekonečněkrát, stejným způsobem očíslujeme i termy nad množinou Var. Stejně jako v kapitole 3 očíslujeme všechny dvojice $[\varphi_i, t_j]$. Probíráme je po jedné tak, abychom dostali nedokazatelný sekvent saturovaný vůči množině Var. Vezmeme dvojici $[\varphi_i, t_j]$, která je na řadě. Pro $\varphi_i \in \Sigma_n$ postupujeme následovně:

- $\Sigma_0 = \Sigma$, $\Omega_0 = \Omega$
- $\varphi_i = \psi \,\&\, \chi$, pak $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi, \chi\}$
- $\varphi_i = \psi \vee \chi$, pak
$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\psi\} & \text{pokud je zachována nedokazatelnost} \\ \Sigma_n \cup \{\chi\} & \text{jinak} \end{cases}$$
- $\varphi_i = \psi \rightarrow \chi$, pak
$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\chi\} & \text{pokud je zachována nedokazatelnost} \\ \Omega_n \cup \{\psi\} & \text{jinak} \end{cases}$$
- $\varphi_i = \neg\psi$, pak $\Omega_{n+1} = \Omega_n \cup \{\psi\}$
- $\varphi_i = \exists x\psi$, pak $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi_x(y)\}$, kde $y \in$ Var a y není volná v Σ_n ani Ω_n
- $\varphi_i = \forall x\psi$, pak $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi_x(t_j)\}$ pro term t_j nad množinou Var

Případ $\varphi_i = \psi \,\&\, \chi$ a $\varphi_i \in \Omega_n$ (respektive $\vee$) je analogický k $\psi \vee \chi \in \Sigma_n$ (respektive &). Případ $\varphi_i = \exists x\psi$ a $\varphi \in \Omega_n$ je analogický k $\forall x\psi \in \Sigma_n$. Pokud $\varphi_i = \psi \rightarrow \chi$ a $\varphi \in \Omega_n$, neděláme nic. V případě, že $\varphi_i = \forall x\psi$ a $\varphi_i \in \Omega_n$, neděláme také nic. Položme

$$\Pi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n \qquad \text{a} \qquad \Lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n.$$

Tímto procesem dostaneme určitě sekvent, který je saturovaný vůči množině Var. Sekvent $\langle \Pi \Rightarrow \Lambda \rangle$ je také nedokazatelný – kdyby byl dokazatelný, tak se již konečná dokazatelná část objevila na nějaké hladině n, což nemohlo nastat, neboť všechny kroky zachovávají nedokazatelnost sekventu. Nechť například $\varphi = \psi \,\&\, \chi$ a $\varphi \in \Sigma$, pak dostaneme, $\psi \in \Pi$ a $\chi \in \Pi$, kdyby přidáním ψ nebo χ vznikl dokazatelný sekvent, tak musel být dokazatelný i výchozí sekvent, neboť formule $\psi \,\&\, \chi$ je splněna právě tehdy, když jsou splněny oba konjunkty. Analogicky se zachovávání nesplněnosti ukáže i pro ostatní případy. □

Lemma 4.2. *Nechť je sekvent $\langle \Sigma \Rightarrow \Omega \rangle$ nedokazatelný v teorii T. Pak lze sestrojit kripkovský protipříklad na $\langle \Sigma, T \Rightarrow \Omega \rangle$.*

Postup bude stejný jako v kapitole 3, jen se rovnou zaměříme na nekonečnou větev. Dále oproti předchozí kapitole uvedeme trochu podrobněji splňování v zkonstruovaném modelu při ohodnocení e.

Nejprve zvolíme množiny Var_i. Množina Var_0 je nekonečná spočetná množina proměnných, obsahuje všechny volné proměnné z Σ a Ω, ale žádné vázané proměnné z Σ, Ω a T. $\mathrm{Var}_1, \mathrm{Var}_2, \dots$ zvolíme jako nekonečné spočetné množiny proměnných disjunktních s Var_0, které neobsahují žádné vázané proměnné z Σ, Ω a T, přičemž každé dvě množiny Var_k, Var_j jsou disjunktní, $k, j \in \mathbb{N}$.

Na hladině i budeme uvažovat nedokazatelné saturované sekventy vůči množině $\bigcup_{k=0}^{i} \mathrm{Var}_k$. Takové sekventy budeme zapisovat $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i]$, tyto dvojice budou světy (vrcholy) konstruovaného kripkovského modelu. K sekventu $\langle \Sigma, T \Rightarrow \Omega \rangle$ sestrojíme podle lemmatu 4.1 saturovaný sekvent $[\langle \Pi \Rightarrow \Lambda \rangle, 0]$. Všimněme si, že narozdíl od předchozí kapitoly přidáme všechny axiomy teorie T najednou, zatímco algoritmus přidával axiomy T po jednom. Kripkovský model je neprázdný, neboť na úrovni 0 máme sekvent $\langle \Pi \Rightarrow \Lambda \rangle$, který je saturovaný vůči množině Var_0, a je nad množinou $\langle \Sigma, T \Rightarrow \Omega \rangle$.

Model označíme $\mathcal{K} = \langle W, \leq, \rho \rangle$, kde ρ přiřazuje prvkům W struktury. Relaci dosažitelnosti definujeme takto:

$$[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \leq [\langle \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \rangle, j] \Leftrightarrow \Gamma \subseteq \Gamma_1 \,\&\, i \leq j$$

Tímto dostaneme kvaziuspořádání. Díky podmínce $i \leq j$ máme zaručeno, že dosažitelné univerzum je vždy větší nebo rovno výchozímu. Realizaci funkčních symbolů ve struktuře $\mathcal{D}$ na hladině i definujeme takto: $F^{\mathcal{D}}(t_1, \ldots, t_n)$ je term $F(t_1, \ldots, t_n)$. Na hladině $i+1$ je větší univerzum, proto realizace, která už byla v $\mathcal{D}$ na hladině i, zůstane zachována, pouze přibudou termy, které připadají v úvahu. Dále definujeme realizaci predikátových symbolů ve struktuře $\mathcal{D}$ na hladině i příslušející vrcholu $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i]$ takto:

$$P^{\mathcal{D}} = \left\{ [t_1, \ldots, t_n];\ t_1, \ldots, t_n \text{ termy nad } \bigcup_{k=0}^{i} \mathrm{Var}_k \text{ a } P(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma \ \right\}.$$

Dále definujeme ohodnocení proměnných na hladině i: $e_i(x) = x$, kde $x \in \bigcup_{k=0}^{i} \mathrm{Var}_k$. Všechna ohodnocení jsou po hladinách do sebe zařazena inkluzí, tudíž se nemůže stát, že by na nějaké vyšší hladině došlo ke změně ohodnocení již ohodnocené proměnné.

Lemma 4.3. *Nechť s je term, $\mathcal{D}$ je struktura na hladině i a termy $t_1, \ldots, t_n$ jsou sestaveny z proměnných z $\bigcup_{k=0}^{i} \mathrm{Var}_k$. Pak $s^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n] = s(t_1, \ldots, t_n)$.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle složitosti termu. Pokud s je proměnná, pak $s^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n] = (t_1, \ldots, t_n)(s) = t_j$, což je totéž, jako když za proměnnou x_j dosadíme t_j. První rovnost jsme dostali z Tarského definice. Pokud s je $F(s_1, \ldots, s_k)$, pak

$$(F(s_1, \ldots, s_k))^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n] = r(F)(s_1^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n], \ldots, s_k^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n]).$$

Funkce r je pro strukturu $\mathcal{D}$ definována na L tak, že $r(F)$ je n-ární operace na množině D (funkce z D^n do D), tedy prvek $r(F)$ je realizace funkce F ve struktuře $\mathcal{D}$. Do jednotlivých termů dosazujeme termy t_j, což je totéž jako dosadit termy t_j najednou (díky indukčnímu předpokladu), a tedy dostaneme:

$$r(F)(s_1^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n], \ldots, s_k^{\mathcal{D}}[t_1, \ldots, t_n]) = F\left(s_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, s_k(t_1, \ldots, t_n)\right).$$

$\square$

Lemma 4.4. *Pro každou hladinu i, každé ohodnocení e na této hladině takové, že $t_1, \ldots, t_n$ jsou hodnoty ohodnocení e proměnných $x_1, \ldots, x_n$, každou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a každý vrchol $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i]$ platí:*
$[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)[e]$, *pokud* $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$,
$[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \nVdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)[e]$, *pokud* $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule. Nechť φ je atomická formule $P(s_1(\underline{x}), \ldots s_k(\underline{x}))$, kde $\underline{x}$ značí n-tici. Označme α vrchol kripkovského modelu $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i]$. Platí

$$\alpha \Vdash P(s_1, \ldots, s_k)\,[e] \Leftrightarrow P(s_1(\underline{x}), \ldots s_k(\underline{x}))(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma,$$

což je dále ekvivalentní s $P(s_1(\underline{t}), \ldots s_k(\underline{t})) \in \Gamma$. Kde jsme k poslední ekvivalenci využili lemma 4.3. Dále máme $\left[s_1^{\mathcal{D}}[e], \ldots, s_k^{\mathcal{D}}[e]\right] \in P^{\mathcal{D}}$, čímž dostaneme $[s_1(\underline{t}), \ldots, s_k(\underline{t})] \in P^{\mathcal{D}}$, a tedy podle definice realizace predikátových symbolů ve struktuře $\mathcal{D}$ na příslušné hladině dostáváme pro atomickou formuli φ $\alpha \Vdash \varphi\,[e] \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$.

Nechť $\varphi = \psi \,\&\, \chi$ a $\varphi \in \Gamma$. Ze saturovanosti Γ dostaneme $\psi \in \Gamma$ a $\chi \in \Gamma$, a tedy podle indukčního předpokladu $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \Vdash \psi$ a $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \Vdash \chi$, proto $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \Vdash \varphi$.

Nechť $\varphi \in \Delta$, potřebujeme ukázat, že φ je v příslušném vrcholu nesplněna. Díky saturovanosti sekventu dostáváme, že $\psi \in \Delta$ nebo $\chi \in \Delta$. Podle definice saturovaného sekventu je v Δ právě ten disjunkt, který zachovává nesplněnost, a tudíž z indukčního předpokladu dostáváme $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \nVdash \varphi$.

Nechť $\varphi = \psi \vee \chi$ a $\varphi \in \Gamma$. Pak ze saturovanosti Γ dostaneme $\psi \in \Gamma$ nebo $\varphi \in \Gamma$. Z indukčního předpokladu dostaneme $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \Vdash \varphi$.

Nechť $\varphi \in \Delta$, pak $\psi \in \Delta$ a $\chi \in \Delta$, tudíž z indukčního předpokladu $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \nVdash \varphi$.

Nechť $\varphi = \psi \to \chi$ a $\varphi \in \Gamma$. Vezměme v úvahu libovolný sekvent $[\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle, j]$, který je dosažitelný z $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i]$. Pak $\psi \to \chi \in \Gamma'$, neboť $\Gamma \subseteq \Gamma'$, tedy ze saturovanosti $\chi \in \Gamma'$ nebo $\psi \in \Delta'$. Nechť $[\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle, j] \Vdash \psi$. Ověříme, že pak $[\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle, j] \Vdash \chi$. Pokud $\chi \in \Gamma'$, pak indukční předpoklad dává $[\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle, j] \Vdash \psi \to \chi$. Pokud $\psi \in \Delta'$, pak indukční předpoklad dává, že by formule ψ byla nesplněná, ale my jsme předpokládali, že ψ je splněná, proto tento případ nenastane.

Nechť $\varphi \in \Delta$. Vezmeme v úvahu sekvent $[\langle \Gamma, \psi \Rightarrow \chi \rangle, i]$, rozšíříme tento sekvent na saturovaný vůči $\bigcup_{k=0}^{j} \mathrm{Var}_k$, kde $i \leq j$. Tím dostaneme sekvent $[\langle \Gamma', \psi \Rightarrow \chi, \Delta' \rangle, j]$, který je dosažitelný z $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i]$. V Γ' jsou i podformule ψ a Δ' obsahuje podformule χ. Z indukčního předpokladu dostaneme $[\langle \Gamma', \psi \Rightarrow \chi, \Delta' \rangle, j] \Vdash \psi$ a $[\langle \Gamma', \psi \Rightarrow \chi, \Delta' \rangle, j] \nVdash \chi$, tudíž existuje dosažitelný svět, ve kterém je předpoklad implikace splněn a závěr nesplněn, proto $[\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle, i] \nVdash \varphi$.

Nechť $\varphi = \neg\psi$ a $\varphi \in \Gamma$. Vezmeme libovolný dosažitelný saturovaný sekvent $[\langle \Gamma' \Rightarrow \Delta' \rangle, j]$, $\Gamma \subseteq \Gamma'$, tudíž $\neg\psi \in \Gamma'$, ze saturovanosti $\psi \in \Delta'$, tudíž z indukčního předpokladu $[\langle\Gamma' \Rightarrow \Delta'\rangle, j] \nVdash \psi$, a tedy libovolný dosažitelný svět nesplňuje ψ, proto $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \Vdash \varphi$.

Nechť $\varphi \in \Delta$. Uvažme sekvent $[\langle\Gamma, \psi \Rightarrow \neg\psi\rangle, j]$, který doplníme na saturovaný $[\langle\Gamma', \psi \Rightarrow \neg\psi, \Delta'\rangle, j]$. Platí $[\langle\Gamma', \psi \Rightarrow \neg\psi, \Delta'\rangle, j] \Vdash \psi$ a tento sekvent je dosažitelný z $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$, tudíž existuje dosažitelný sekvent, kde je ψ splněno, proto $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \nVdash \varphi$.

Nechť $\varphi = \exists x\psi$ a $\varphi \in \Gamma$. Ze saturovanosti $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$ dostáváme, že pro nějaké $y \in \bigcup_{k=0}^{i} \mathrm{Var}_k$ $\psi(y) \in \Gamma$. Z indukčního předpokladu dostáváme $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \Vdash \varphi$.

Nechť $\varphi \in \Delta$. Ze saturovanosti $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$ dostáváme $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \nVdash \psi_x(t)$ pro všechny termy na této hladině, tudíž $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \nVdash \varphi$.

Nechť $\varphi = \forall x\psi$ a $\varphi \in \Gamma$. Vezmeme libovolný saturovaný sekvent $[\langle\Gamma' \Rightarrow \Delta'\rangle, j]$, který je dosažitelný z $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$. Platí $\forall x\psi \in \Gamma'$, neboť $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Díky saturovanosti $[\langle\Gamma' \Rightarrow \Delta'\rangle, j] \Vdash \psi_x(t)$ pro všechny termy na této hladině, tudíž $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \Vdash \varphi$.

Nechť $\varphi \in \Delta$. K sekventu $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$ uvažme sekvent $\langle\Gamma \Rightarrow \psi_x(y)\rangle$, k němu vezmeme saturovaný sekvent na hladině $i+1$ $[\langle\Gamma' \Rightarrow \psi_x(y), \Delta'\rangle, i+1]$, z indukčního předpokladu $[\langle\Gamma' \Rightarrow \psi_x(y), \Delta'\rangle, i+1] \nVdash \psi_x(y)$, tudíž dostaneme $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i] \nVdash \varphi$. Podmínka EVC je zachována, neboť y je dosud nikde nepoužitá proměnná.

Tím jsme dokázali i lemma 4.2 – ukázali jsme, že sestrojený model má požadované vlastnosti. Libovolný vrchol $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$ v modelu $\mathcal{K}$ splňuje všechny formule z antecedentu a nesplňuje žádnou ze sukcedentu sekventu $\langle\Sigma, T \Rightarrow \Omega\rangle$. □

Poznámka 4.2. Kripkovský model, který jsme zkonstruovali, vypadá jako fundovaný strom a jeho hloubka je mohutnosti $\aleph_0$.

Věta 4.1. (O silné úplnosti kalkulu GJ vůči kripkovské sémantice)
Nechť $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ je sekvent, který je platný ve všech kripkovských strukturách pro intuicionistickou logiku, kde ve všech vrcholech platí axiomy teorie T. Pak je sekvent $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ dokazatelný bezřezovým důkazem v teorii T v intuicionistické logice, tedy kalkulus GJ je úplný vůči kripkovské sémantice.

Důkaz. Obměnou. Nechť je sekvent $\langle\Sigma \Rightarrow \Omega\rangle$ nedokazatelný, pak podle lemmatu 4.1 rozšíříme sekvent $\langle\Sigma, T \Rightarrow \Omega\rangle$ na saturovaný vzhledem k příslušným hladinám. Dostaneme saturovaný sekvent $[\langle\Gamma \Rightarrow \Delta\rangle, i]$ takový, že $\Sigma \cup T \subseteq \Gamma$ a $\Omega \subseteq \Delta$. Výše zmíněnou konstrukcí sestrojíme kripkovský model $\mathcal{K} =$

$\langle W, \leq, \rho \rangle$, ve kterém díky lemmatu 4.4 jsou všechny formule z antecedentu sekventu $\langle \Sigma \cup T \Rightarrow \Omega \rangle$ splněny a všechny ze sukcedentu nesplněny. $\square$

Důsledek 4.1. (Věta o kompaktnosti)
Nechť T je libovolná nejvýše spočetná teorie. Jestliže z T vyplývá φ, pak existuje konečná množina $F \subseteq T$ taková, že z F vyplývá φ.

Důkaz. Nechť z T vyplývá φ, pak podle definice platí φ v každém vrcholu každého kripkovského modelu při každém ohodnocení, při kterém jsou v tomto vrcholu splněny všechny axiomy teorie T. To znamená, že sekvent $\langle T \Rightarrow \varphi \rangle$ je platný. Z věty 4.1 dostáváme, že sekvent $\langle T \Rightarrow \varphi \rangle$ je dokazatelný v nekonečném smyslu, a tedy existuje $F \subseteq T$ konečná taková, že sekvent $\langle F \Rightarrow \varphi \rangle$ je dokazatelný. Z věty o korektnosti dostaneme, že tento sekvent je platný, tudíž z F vyplývá φ. $\square$

Věta 4.2. (Věta o korektnosti GJ)
Každý sekvent dokazatelný v predikátovém kalkulu GJ je intuicionisticky logicky platný.

Důkaz. Důkaz věty o korektnosti GJ lze nalézt například v [13] nebo v [9]. $\square$

5 Intuicionistická predikátová logika s konstantním univerzem

Klasická logika má jediné konstantní univerzum, ale u intuicionistické logiky tomu tak vždy není. V této kapitole se budeme zabývat intuicionistickou logikou s konstantním univerzem. Naše úvahy jsou motivovány [6], kde je používána právě taková logika. Domníváme se, že může být velmi zajímavá a užitečná. Co vlastně konstantní univerzum pro intuicionistickou predikátovou logiku znamená? V intuicionistické logice mohou vycházet při přechodu do dosažitelného světa najevo existence nových objektů a vztahů mezi nimi. Naším cílem je vzít takovou logiku, kde zůstávají počty individuí v každém světě stejné, tedy svět β dosažitelný ze světa α bude mít stejná individua jako svět α, pouze mohou vyjít najevo nové skutečnosti o individuích, která byla už ve světě α. V této kapitole bychom chtěli dosáhnout základního poznání o logice s konstantním univerzem. Nejprve definujeme hilbertovský a gentzenovský kalkulus pro intuicionistickou predikátovou logiku s konstantním univerzem.

Třída kripkovských modelů s konstantním univerzem byla navržena v 70. letech Grzegorczykem jako sémantika pro intuicionistickou predikátovou logiku. Tato sémantika ale není pro intuicionistickou logiku adekvátní, neboť v ní platí obecně neintuicionistický princip, a to schéma, které budeme dále značit (CD) podle anglického constant domain. Této logice bychom tedy mohli říkat Grzegorczykova. Klemke a nezávisle Görnemannová dokázali, že korektní a úplný kalkulus vůči Grzegorczykově sémantice vznikne tak, že k hilbertovskému kalkulu pro intuicionistickou logiku přidáme právě (CD) jako axiomatické schéma.

5.1 Hilbertovský kalkulus pro intuicionistickou predikátovou logiku s konstantním univerzem

Hilbertovský kalkulus pro intuicionistickou logiku s konstantním univerzem je stejný jako pro intuicionistickou predikátovou logiku, pouze ho rozšíříme o jedno axiomatické schéma. Nejprve uvedeme výrokovou a predikátovou variantu pro intuicionistickou logiku a nakonec přidáme schéma (CD).

5.1.1 Výroková varianta

Použijeme hilbertovský kalkulus tak, jak je definován pro klasickou logiku v [13], ale místo $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ vezmeme následující schéma:

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A).$$

Dále přidáme ještě jedno schéma, a to

$$A \to (\neg A \to B).$$

5.1.2 Predikátová varianta

Ke kalkulu definovanému v 5.1.1 přidáme dvě schémata a dvě pravidla, která jsou shodná s klasickou logikou:

1. $\forall x\varphi \to \varphi_x(t)$,
2. $\varphi_x(t) \to \exists x\varphi$,
3. $\psi \to \varphi/\psi \to \forall x\varphi$,
4. $\varphi \to \psi/\exists x\varphi \to \psi$,

kde v 1. a 2. je term t substituovatelný za proměnnou x ve φ a v 3. a 4. je ψ formule, která neobsahuje volné výskyty proměnné x.

5.1.3 Rozšíření hilbertovského kalkulu

Intuicionistická logika s konstantním univerzem vznikne tak, že přidáme k právě definovanému hilbertovskému kalkulu ještě jedno schéma, nazvěme ho *schéma konstantního univerza (CD):*

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x\varphi(x) \vee \psi,$$

za předpokladu, že x není volná v ψ.

Takto upravený hilbertovský kalkulus nazveme HJC (C ve zkratce HJC značí constant, (CD) je zkratka anglického constant domain).

5.2 Gentzenovský kalkulus pro intuicionistickou predikátovou logiku s konstantním univerzem

Gentzenovský kalkulus ponecháme tak, jak jsme ho definovali v 2.2 a 2.4, ale upravíme pravidlo $\forall_r$, kde škrtneme omezení na postranní formule a dostaneme $\forall_{rc}$:

$$\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_x(y) \rangle \, / \, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi \rangle \, ,$$

kde proměnná y je substituovatelná za x ve φ a nemá žádné volné výskyty v množině $\Gamma \cup \Delta \cup \{\forall x \varphi\}$.

Takto definovaný gentzenovský kalkulus nazveme GJC. Nejprve potřebujeme ukázat, že upravené pravidlo $\forall_{rc}$ říká totéž jako (CD) v hilbertovském kalkulu.

Lemma 5.1. *V gentzenovském kalkulu GJC je dokazatelné schéma (CD).*

Důkaz. Dokážeme sekvent $\langle \Rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x \varphi(x) \vee \psi \rangle$.

$$\rightarrow_r \dfrac{\vee_l \dfrac{\forall_{rc} \dfrac{\forall_l \dfrac{\vee_r \dfrac{\langle \varphi \Rightarrow \varphi, \psi \rangle \qquad \langle \psi \Rightarrow \psi, \varphi \rangle}{\langle \varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi, \psi \rangle}}{\langle \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow \varphi, \psi \rangle}}{\langle \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow \forall x \varphi(x), \psi \rangle}}{\langle \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \psi, \forall x \varphi(x) \vee \psi \rangle}}{\langle \Rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x \varphi(x) \vee \psi \rangle}$$

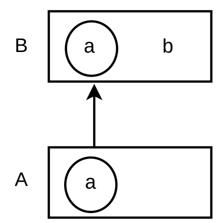
□

Lemma 5.2. *V hilbertovském kalkulu HJC je simulovatelné pravidlo $\forall_{rc}$ (znamená, že v HJC dokážeme odvodit vše, co lze odvodit v GJC pomocí pravidla $\forall_{rc}$).*

Důkaz.

1. $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta \vee \varphi_y(x)$
2. $\bigwedge \Gamma \to \forall x (\bigvee \Delta \vee \varphi_y(x))$
3. $\forall x \, (\varphi(x) \vee \psi) \to \forall x \varphi(x) \vee \psi$
4. $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta \vee \forall x \varphi(x)$

Z 1. do 2. se dostaneme použitím generalizace (zvolili jsme proměnnou x, která není volná v Δ ani Γ), 3. je (CD), kde x není volná v ψ, 4. je tautologickým důsledkem bodů 2. a 3. □



Obrázek 1: Protipříklad na schéma konstantního univerza

5.3 Kripkovské rámce s konstantním univerzem

Dále musíme ukázat, že schéma (CD) charakterizuje třídu všech kripkovských modelů s konstantním univerzem.

Lemma 5.3. *Nechť má kripkovský rámec konstantní univerzum. Pak v něm platí schéma (CD).*

Důkaz. Vezmeme svět α se strukturou $\mathcal{A}$, A značí nosnou množinu struktury $\mathcal{A}$ ($\beta, \mathcal{B}, B$ analogicky). Nechť ve světě α platí předpoklad (CD), pak $\alpha \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \psi)$, což nám dává $\forall a \in A$ platí $\alpha \Vdash \varphi(a) \vee \psi$, a tedy $\forall a \in A\, \alpha \Vdash \varphi(a)$ nebo $\alpha \Vdash \psi$. Nechť β je libovolný svět dosažitelný z α, pak v β musí platit $\beta \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \psi)$, tudíž $\forall b \in B\, \beta \Vdash \varphi(b) \vee \psi$, což nám dává $\forall b \in B\, \beta \Vdash \varphi(b)$ nebo $\beta \Vdash \psi$. Jestliže $\forall a \in A\, \alpha \Vdash \varphi(a)$, pak $\forall b \in B\, \beta \Vdash \varphi(b)$, neboť $A = B$. Nechť $\alpha \nVdash \forall x \varphi(x)$, pak $\alpha \Vdash \psi$, a tudíž i $\beta \Vdash \psi$. Z toho plyne, že $\alpha \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \psi) \rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \psi$. □

Příklad 5.1. Na obrázku 1 je protipříklad na (CD), $\mathcal{A}$ je struktura ve světě α, $\mathcal{B}$ ve světě β. Nechť $\alpha \nVdash \psi$ a $\beta \Vdash \psi$, $\alpha \Vdash \varphi(a)$, pak $\alpha \Vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi)$, ale $\alpha \nVdash \forall x \varphi(x) \vee \psi$, neboť $\beta \nVdash \forall x \varphi(x)$.

Podle příkladu 5.1 si dokážeme v kripkovském rámci, který nemá konstantní univerzum, opatřit protipříklad na (CD). Dále jsme díky lemmatu 5.3 dostali, že (CD) skutečně charakterizuje třídu všech kripkovských modelů s konstantním univerzem.

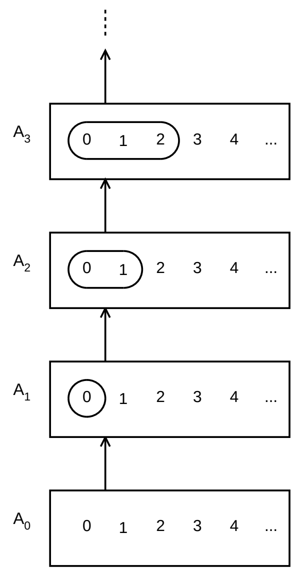
5.4 DNS a Markovův princip

Uvedeme dvě tvrzení, z nichž jedno bude v logice s konstantním univerzem dokazatelné.

- DNS (double negation shift): $\forall x \neg\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\neg\forall x \varphi(x)$

- Markovův princip: $(\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))\ \&\ \neg\neg\exists x\varphi(x)) \to \exists x\varphi(x)$.

Ukážeme, že Markovův princip neplatí v intuicionistické logice, která nemá konstantní univerzum, zatímco v logice s konstantním univerzem platit bude. Nejprve se zabývejme schématem DNS.

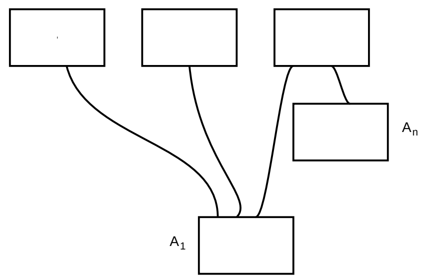


Obrázek 2: Protipříklad na schéma DNS

Příklad 5.2. Na obrázku 2 je protipříklad na schéma DNS v logice s konstantním univerzem. V každém světě je struktura se spočetně mnoha proměnnými. Ve struktuře $\mathcal{A}_1$ příslušné světu α_1 je splněn predikát P pro 0, ve struktuře $\mathcal{A}_2$ se platnost predikátu rozšíří ještě o 1, $\alpha_3 \Vdash P(0, 1, 2)$. V každém dalším světě se platnost predikátu rozšíří vždy o jeden prvek. Ve světě $\alpha_0 \Vdash \forall x \neg\neg P(x)$, ale $\alpha_0 \nVdash \neg\neg\forall x P(x)$.

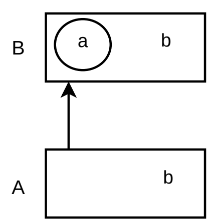
Lemma 5.4. *DNS nemá konečný protipříklad v intuicionistické logice s konstantním univerzem.*

Důkaz. Na obrázku 3 je konečný model. Konečný model musí mít listy. Použijeme obecný princip, že pro každý svět $\alpha_i \Vdash \neg\neg\varphi \Leftrightarrow$ pro každý list $\lambda \Vdash \varphi$. Předpokládáme, že $\alpha_1 \Vdash \forall x \neg\neg P(x)$. Chceme ukázat $\alpha \Vdash \neg\neg\forall x P(x)$, tedy $\forall x P(x)$ je splněna ve všech listech, což znamená, že $P(a)$ je splněna v každém listu každým jeho prvkem a. Protože $\alpha_1 \Vdash \forall x \neg\neg P(x)$, tak pro každý list α_n musí pro každý prvek a jeho struktury platit $\alpha_n \Vdash \neg\neg P(a)$, a tedy $\alpha_n \Vdash P(a)$. $\square$



Obrázek 3

Zjistili jsme, že existuje formule, která platí v každém konečném modelu, ale má nekonečný protipříklad, a tedy pro intuicionistickou logiku s konstantním univerzem neplatí FMP (vlastnost konečných modelů).



Obrázek 4: Protipříklad na Markovův princip

Příklad 5.3. Na obrázku 4 je protipříklad na Markovův princip v intuicionistické logice. Ve světě α je struktura $\mathcal{A}$, $\alpha \nVdash \exists x\varphi(x)$ a $\alpha \Vdash \forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)$, dále platí $\alpha \Vdash \neg\neg\exists x\varphi(x)$, neboť $\beta \nVdash \forall x\neg\varphi(x)$, a tedy

$$\alpha \nVdash (\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \,\&\, \neg\neg\exists x\varphi(x)) \to \exists x\varphi(x).$$

Naším cílem bude ukázat, že Markovův princip v logice s konstantním univerzem platí. Nejprve uvedeme sémantický důkaz, pak důkaz v kalkulu GJC.

Lemma 5.5. *Markovův princip platí v intuicionistické logice s konstantním univerzem.*

Důkaz. Uvedeme sémantický důkaz. Opět $\mathcal{A}$ značí strukturu ve světě α, $\mathcal{B}$ strukturu ve světě β. Nechť ve světě α je splněn předpoklad implikace, tedy $\alpha \Vdash \forall x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$, $\alpha \Vdash \neg\neg\exists x\varphi(x)$, a tudíž ve všech dosažitelných světech $\gamma \nVdash \neg\exists x\varphi(x)$. Pak i $\alpha \nVdash \neg\exists x\varphi(x)$, aby toto bylo splněno, musí existovat nějaký dosažitelný svět β takový, že $\beta \Vdash \exists x\varphi(x)$, což znamená, že pro nějaké $a \in B$ $\beta \Vdash \varphi(a)$. Díky předpokladu konstantního univerza musí být i $a \in A$ a na a můžeme aplikovat předpoklad $\forall x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$, tedy $\alpha \Vdash (\varphi(a) \vee \neg\varphi(a))$. Pokud $\alpha \Vdash \varphi(a)$, pak $\alpha \Vdash \exists x\varphi(x)$. Ukažme, že druhá možnost vede ke sporu: z $\forall x(\exists y\varphi(y) \vee \neg\varphi(x))$ dostaneme díky (CD) $\exists y\varphi(y) \vee \forall x\neg\varphi(x)$. Druhý disjunkt je ve sporu s $\neg\neg\exists x\varphi(x)$. $\square$

Lemma 5.6. *Markovův princip je dokazatelný v GJC.*

Důkaz. Dokážeme $\langle \Rightarrow (\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \mathbin{\&} \neg\neg\exists x\varphi(x)) \rightarrow \exists x\varphi(x)\rangle$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\langle \varphi(z) \Rightarrow \neg\varphi(z), \varphi(z)\rangle$}
\AxiomC{$\langle \neg\varphi(z) \Rightarrow \neg\varphi(z), \varphi(z)\rangle$}
\LeftLabel{$\vee_l$}
\BinaryInfC{$\langle \varphi(z) \vee \neg\varphi(z) \Rightarrow \neg\varphi(z), \varphi(z)\rangle$}
\LeftLabel{$\exists_r$}
\UnaryInfC{$\langle \varphi(z) \vee \neg\varphi(z) \Rightarrow \neg\varphi(z), \exists x\varphi(x)\rangle$}
\LeftLabel{$\forall_l$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(z)) \Rightarrow \neg\varphi(z), \exists x\varphi(x)\rangle$}
\LeftLabel{$\forall_{rc}$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \Rightarrow \forall x\neg\varphi(x), \exists x\varphi(x)\rangle$}
\AxiomC{$\langle \varphi(z) \Rightarrow \varphi(z)\rangle$}
\LeftLabel{$\neg_l$}
\UnaryInfC{$\langle \neg\varphi(z), \varphi(z) \Rightarrow\rangle$}
\LeftLabel{$\forall_l$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x\neg\varphi(x), \varphi(z) \Rightarrow\rangle$}
\LeftLabel{$\exists_l$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x\neg\varphi(x), \exists x\varphi(x) \Rightarrow\rangle$}
\LeftLabel{$\neg_r$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x\neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\exists x\varphi(x)\rangle$}
\LeftLabel{$\neg_l$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x\neg\varphi(x), \neg\neg\exists x\varphi(x) \Rightarrow\rangle$}
\LeftLabel{Cut}
\BinaryInfC{$\langle \forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)), \neg\neg\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\varphi(x)\rangle$}
\LeftLabel{$\&_l$}
\UnaryInfC{$\langle \forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \mathbin{\&} \neg\neg\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\varphi(x)\rangle$}
\LeftLabel{$\rightarrow_r$}
\UnaryInfC{$\langle \Rightarrow (\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \mathbin{\&} \neg\neg\exists x\varphi(x)) \rightarrow \exists x\varphi(x)\rangle$}
\end{prooftree}
$$

$\square$

Definice 5.1. Nechť φ, ψ_1, ψ_2 jsou libovolné formule. Řekneme, že výskyt obecného kvantifikátoru ve formuli φ je *pozitivní (respektive negativní)*, jestliže je pozitivní (respektive negativní) v její podformuli. Dále definujeme případy pro vnější symbol:

- Pokud $\varphi = \psi_1 \mathbin{\&} \psi_2$, pak jsou všechny výskyty $\forall$ v podformulích ψ_1 a ψ_2 pozitivní,
- Pokud $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, pak jsou všechny výskyty $\forall$ v podformulích ψ_1 a ψ_2 pozitivní,
- Pokud $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$, pak jsou všechny výskyty $\forall$ v podformuli ψ_1 negativní, v podformuli ψ_2 pozitivní.

Pokud je ve formuli φ před pozitivním (respektive negativním) výskytem lichý počet negací, pak je tento výskyt negativní (respektive pozitivní).

Definice 5.2. Nechť $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ je libovolný sekvent. Pro formuli φ definujeme *pozitivní* a *negativní výskyt obecného kvantifikátoru v sekventu* $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$ takto:

- Pro $\varphi \in \Gamma$ jsou všechny pozitivní (respektive negativní) výskyty $\forall$ ve formuli φ pozitivními (respektive negativními) výskyty v sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$,
- Pro $\varphi \in \Delta$ jsou všechny pozitivní (respektive negativní) výskyty $\forall$ ve formuli φ negativními (respektive pozitivními) výskyty v sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$.

Příklad 5.4. Vezměme například formuli $\varphi = \neg\forall x(\psi_1 \vee \neg\forall y(\psi_2 \rightarrow \psi_3))$, pokud je φ v antecedentu, pak první výskyt $\forall$ je negativní, druhý pozitivní (pro φ v sukcedentu je to naopak).

Lemma 5.7. *Markovův princip nemá bezřezový důkaz v kalkulu GJC.*

Důkaz. Podle lemmatu 5.5 Markovův princip platí ve všech kripkovských modelech s konstantním univerzem. Podle příkladu 5.3 Markovův princip neplatí v intuicionistické logice, která nemá konstantní univerzum. Z toho plyne, že k důkazu Markovova principu musíme užít upravené pravidlo $\forall_{rc}$, a tedy se v sukcedentu objeví dvě formule, kde v jedné z nich je negativní výskyt univerzálního kvantifikátoru. Prověřením všech pravidel kalkulu GJC se zjistí, že jediné pravidlo, které může snížit počet negativních kvantifikátorů větší než jeden na nulu, je pravidlo řezu. V Markovově principu se vyskytuje jeden pozitivní univerzální kvantifikátor a žádný negativní, z toho plyne, že k důkazu Markovova principu musíme užít řez. □

Důsledek 5.1. *Pro kalkulus GJC neplatí věta o eliminovatelnosti řezů.*

Důsledek 5.2. *Pro kalkulus GJC neplatí bezřezová úplnost vůči intuicionistické logice s konstantním univerzem.*

Závěrem této kapitoly uveďme pár poznámek k úplnosti a vlastnostem intuicionistické logiky s konstantním univerzem. Podařilo se nám ukázat, že Grzegorczykova logika stejně jako intuicionistická predikátová logika nemá FMP. Jedním z našich cílů bylo dokázat úplnost GJC. V úvahu připadalo několik možností, například přepracovat stromový důkaz úplnosti, který je v [9] pro intuicionistickou predikátovou logiku, to se nám ale nemohlo podařit, neboť pravidlo $\forall_{rc}$ stále zvyšuje počet použitých proměnných a v každém okamžiku musíme již použité termy vzít v úvahu i pro $\forall_l$, a tudíž velikost univerza, které by připadalo v úvahu, stále narůstá. Tento proces narůstání nekončí, proto není možné vzít po jeho skončení sjednocení všech použitých proměnných a prohlásit toto sjednocení za univerzum kripkovského modelu. Dokud nebudeme vědět, jak dobře zacházet s proměnnými, tak tento důkaz použít nemůžeme. Další možností bylo přepracovat důkaz z kapitoly 4, ale i zde narazíme na stejný problém. Navíc se ve světle lemmatu 5.7 zdá, že bude zapotřebí dokázat úplnost GJC nějakým zásadně jiným způsobem. V úvahu ještě připadá přepracovat důkaz, který je pro Gödel-Dummetovu logiku v [13]. Dalším námětem k bádání, jak nás upozornil článek [5], je otázka, zda pro intuicionistickou logiku s konstantním univerzem platí věta o interpolaci.

Algebraický důkaz úplnosti kalkulu HJC vůči Grzegorczykově sémantice lze nalézt v [7] – nejprve jsou zadefinovány algebraické modely odpovídající kalkulu HJC. K důkazu je dále využita Lindenbaum-Tarského algebra.

6 Heytingovy algebry

V této kapitole se budeme věnovat některým sémantikám intuicionistické výrokové logiky, zejména Heytingovým algebrám. Ukážeme, jak lze některé sémantiky na sebe vzájemně převádět. Nejprve uvedeme základní pojmy z teorie svazů.

6.1 Základní algebraické pojmy

Definice 6.1. Nechť P je uspořádaná množina. P nazveme *svazově uspořádanou množinou*, jestliže $\forall x, y \in P$ existuje $\inf\{x, y\}$ a $\sup\{x, y\}$.

Definice 6.2. Řekneme, že struktura $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je *svaz*, pokud $\wedge$, $\vee$ jsou binární operační symboly a $\forall a, b, c \in A$ platí:

1. $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (komutativita)

2. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (asociativita)

3. $a \wedge (b \vee a) = a$, $a \vee (b \wedge a) = a$ (absorpce)

Poznámka 6.1. Svaz lze definovat i pomocí uspořádání. Ukážeme, že obě definice jsou ekvivalentní.

Lemma 6.1. *Nechť $\mathcal{A}$ =$(A, \wedge, \vee)$ je svaz. Pak $\forall a \in A$ platí:*

1. $a \wedge a = a$,

2. $a \vee a = a$,

neboli idempotentnost operací $\wedge, \vee$.

Důkaz. Ukážeme první identitu, druhá se dokáže analogicky. Platí $a = a \vee (a \wedge a)$, z toho dostáváme

$$a \wedge a = a \wedge [a \vee (a \wedge a)] = a \wedge (a \vee b) = a,$$

kde $a \wedge a$ označíme jako b a poslední rovnost dostaneme z bodu 3. definice 6.2. $\square$

Lemma 6.2. *Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je svaz. Pro $\forall x, y \in A$ položíme $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ($\Leftrightarrow x \vee y = y$), pak $(A, \leq)$ je svazově uspořádaná množina a $\forall x, y \in A$ platí:* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

Důkaz. Musíme ukázat vlastnosti uspořádání. Reflexivita plyne z idempotentnosti operace $\wedge$. Slabá antisymetrie: nechť $x \leq y$, $y \leq x$. To znamená, že $x \wedge y = x$ a zároveň $y \wedge x = y$. Protože $x \wedge y = y \wedge x$, musí být $x = y$. Tranzitivita: nechť $x \leq y$ a $y \leq z$. To znamená, že $x \wedge y = x$ a $y \wedge z = y$. Tedy $x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$, a tudíž $x \leq z$.

Nyní zbývá ověřit, že pro libovolné prvky x, y platí: $x \wedge y$ je infimum prvků x, y v částečně uspořádané množině $(A, \leq)$, $x \vee y$ je supremum v částečně uspořádané množině $(A, \leq)$. Dokážeme například pro $x \wedge y$. Ověříme, že $x \wedge y$ je dolní závorou množiny $\{x, y\}$, stačí ukázat, že $x \wedge y \leq x$ a $x \wedge y \leq y$. Ukažme první nerovnost: $x \wedge y \leq x \;\Leftrightarrow\; (x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$. Zároveň

$$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (y \wedge x) = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y.$$

Použili jsme body 1. a 2. v definici 6.2. Musíme ještě ověřit, že $x \wedge y$ je největší dolní závorou množiny $\{x, y\}$. Nechť $d \in A$ je dolní závorou množiny $\{x, y\}$, pak platí $d \wedge x = d$ a $d \wedge y = d$. Potřebujeme dokázat, že $d \leq x \wedge y$, to jest $d \wedge (x \wedge y) = d$. Máme $d \wedge (x \wedge y) = (d \wedge x) \wedge y = d \wedge y = d$. □

Poznámka 6.2. Ukázali jsme, že na libovolném svazu lze definovat uspořádání. Pokud svaz $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ má při výše definovaném uspořádání nejmenší a největší prvek, tak je budeme značit 0 a 1, signatura takového svazu je $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$.

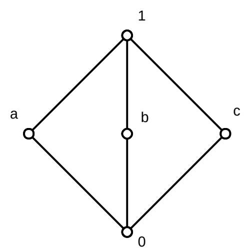
Definice 6.3. Množinu A nazveme *svazem*, je-li A neprázdná částečně uspořádaná množina a $\forall a, b \in A$ existuje supremum a infimum množiny $\{a, b\}$ v množině A. Značíme $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Poznámka 6.3. Definice 6.2 a 6.3 jsou ekvivalentní:

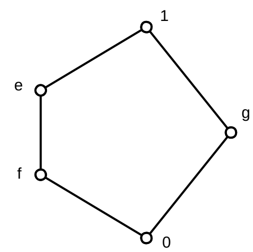
- 6.3 $\Rightarrow$ 6.2 plyne z vlastností suprema a infima.
- 6.2 $\Rightarrow$ 6.3 plyne z již dokázaného lemmatu 6.2.

Definice 6.4. Svaz $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ nazveme *distributivním*, pokud splňuje distributivní zákon: $\forall a, b, c \in A$ platí:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$



(a) Diamant N5



(b) Pentagon M5

Obrázek 5: Nedistributivní svazy

Příklad 6.1. Jako příklad nedistributivních svazů uveďme pentagon a diamant, jejich struktura je na obrázku 5. Nedistributivitu pentagonu můžeme ukázat na jednoduchém příkladu, $a \wedge (b \vee c) = a$, zatímco $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0$. Podobně lze nedistributivitu ukázat pro diamant, $f \vee (e \wedge g) = f$, ale $(f \vee e) \wedge (f \vee g) = e$.

Definice 6.5. Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je svaz. O množině R řekneme, že je *podsvaz*, jestliže $R \subseteq A$ a $\forall a, b \in R$ platí: $a \wedge b \in R$, $a \vee b \in R$.

Lemma 6.3. *Svaz $\mathcal{A}$ =$(A, \wedge, \vee)$ je distributivní $\Leftrightarrow$ pentagon a diamant nejsou jeho podsvazy.*

Důkaz.
$\Rightarrow$ Pentagon a diamant jsou podsvazy, pak podle příkladu 6.1 svaz A není distributivní.
$\Leftarrow$ Zde se odkážeme na důkaz v [4]. □

6.2 Základní vlastnosti Heytingových algeber

Heytingovými algebrami se zabýval Arend Heyting, žák Brouwera.

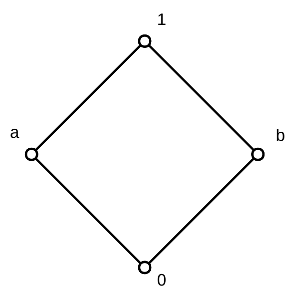
Definice 6.6. Řekneme, že distributivní svaz $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1)$ je *Heytingova algebra*, jestliže $\forall a, b \in A$ existuje prvek $a \to b$ takový, že $\forall c \in A$ platí:

$$c \leq a \to b \;\Leftrightarrow\; a \wedge c \leq b$$

Operaci $\to$ nazveme *Heytingovou implikací*.

Poznámka 6.4. Jestliže $\mathcal{A}$ je Heytingova algebra, pak $\rightarrow$ je binární operace na A. Navíc $\rightarrow$ můžeme přidat k signatuře Heytingových algeber. $0 \rightarrow 0 = 1$, proto 1 lze vynechat ze signatury Heytingovy algebry. Označme Heytingovu algebru jako $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$. V definici Heytingovy algebry není nutné požadovat, aby byl svaz distributivní. Distributivitu dostaneme z jednoznačnosti Heytingovy implikace.

Poznámka 6.5. V některých zdrojích se Heytingovy algebry nazývají pseudo-Booleovy algebry a značí se PBA.



(a)

(b) Řetězec

Obrázek 6: Jednoduché Heytingovy algebry

Příklad 6.2. Na obrázku 6 jsou dvě jednoduché Heytingovy algebry, první z nich je dokonce Booleova algebra, což ukážeme v oddílu 6.4. Na obrázku 6b je nekonečný řetězec s nejmenším a největším prvkem. Každý prvek má v uspořádání $\leq$ svého přímého následníka a mezi 0 a 1 je nekonečně mnoho prvků. Poznamenejme ještě, že Heytingovými algebrami nejsou pentagon a diamant, neboť nejsou distributivními svazy, a navíc Heytingova implikace v nich není definována pro každou dvojici prvků. Například pro pentagon na obrázku 5b není definováno $a \rightarrow b$, jelikož $b \wedge a \leq b$ a zároveň $c \wedge a \leq b$ a prvky b, c jsou nesrovnatelné. Stejně pro diamant z obrázku 5a, kde není definován prvek $e \rightarrow f$, $f \wedge e \leq f$ a $g \wedge e \leq f$, ale prvky f a g jsou nesrovnatelné.

Lemma 6.4. *Distributivní svaz* $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1)$ *je Heytingova algebra* $\Leftrightarrow$ *existuje binární operace* $\rightarrow$ *taková, že* $\forall a, b, c \in A$ *platí:*

1. $a \rightarrow a = 1$

2. $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$

3. $b \wedge (a \to b) = b$

4. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

Důkaz.
$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ splňuje body 1. až 4. a ukažme, že $\mathcal{A}$ vyhovuje definici 6.6. Nejprve předpokládejme, že $c \leq a \to b$ a ukažme, že pak $c \wedge a \leq b$. Podle 2. $c \wedge a \leq (a \to b) \wedge a = a \wedge b \leq b$. Dále ukažme, že $\forall a \in A$ zobrazení $(a \mapsto \bullet)$ je monotónní v pravé složce, to jest $b_1 \leq b_2 \Rightarrow a \to b_1 \leq a \to b_2$. Skutečně, protože $b_1 \leq b_2$, máme $b_1 \wedge b_2 = b_1$. Proto podle 4.

$$(a \to b_1) \wedge (a \to b_2) = a \to (b_1 \wedge b_2) = a \to b_1.$$

Tedy $a \to b_1 \leq a \to b_2$. Nyní předpokládejme $c \wedge a \leq b$ a ukažme, že pak $c \leq a \to b$. Podle 3. $c = c \wedge (a \to c) \leq 1 \wedge (a \to c)$. Podle 1. dostaneme

$$1 \wedge (a \to c) = (a \to a) \wedge (a \to c) = a \to (a \wedge c).$$

Poslední rovnost jsme získali díky bodu 4. Nakonec díky monotonii $(a \mapsto \bullet)$ dostáváme $a \to (a \wedge c) \leq a \to b$, a tedy $c \leq a \to b$.
$\Rightarrow$ 1. $c \leq 1 \Leftrightarrow a \wedge c \leq a$. 2. $\forall c (c \leq a \to b \Leftrightarrow a \wedge c \leq b)$,

$$a \to b \leq a \to b \Rightarrow a \wedge (a \to b) \leq b,$$

obě strany pronikneme a (to lze, neboť operace $\wedge$ a $\vee$ jsou monotónní). Dostaneme

$$a \wedge (a \wedge (a \to b)) \leq a \wedge b.$$

Z toho plyne $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$. Dále $a \wedge b \leq b \Rightarrow b \leq a \to b$. Znovu pronikneme a a dostaneme $a \wedge b \leq (a \to b) \wedge a$. Dokázali jsme obě nerovnosti, a tedy

$$a \wedge (a \to b) = a \wedge b.$$

3. $b \leq a \to b \Leftrightarrow a \wedge b \leq b$. Pronikneme b a získáme $b \wedge b \leq (a \to b) \wedge b$, a tedy

$$b \leq (a \to b) \wedge b,$$

$b \wedge (a \to b) \leq b$ platí vždy $\forall x (a \wedge x \leq a)$, proto $b = (a \to b) \wedge b$. 4. $a \to (b \wedge c) \leq a \to b$ a zároveň $a \to (b \wedge c) \leq a \to c$, proto

$$a \to (b \wedge c) \leq (a \to b) \wedge (a \to c).$$

Z $a \wedge (a \to b) \leq b$ a $a \wedge (a \to c) \leq c$ plyne

$$(a \wedge (a \to b)) \wedge (a \wedge (a \to c)) \leq b \wedge c.$$

Tím je rovnost dokázána. $\square$

Poznámka 6.6. V Heytingově algebře $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \to)$ platí také identita $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$ a identita $a \vee (a \to 0) = (a \to 0) \wedge (a \to 0)$.

Definice 6.7. Řekneme, že svaz $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je *úplný*, pokud $\forall X \subseteq A$ existuje $\vee X = \sup(X)$ a $\wedge X = \inf(X)$.

Lemma 6.5.

1. *Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \to)$ je Heytingova algebra. Pak $\forall a, b \in A$ platí*

$$a \to b = \bigvee \{c;\ c \in A \ \&\ a \wedge c \leq b\}.$$

2. *Úplný distributivní svaz $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, 1)$ je Heytingova algebra $\Leftrightarrow$ splňuje nekonečný distributivní zákon, tj. $\forall a, b_i \in A$ a $i \in I$ platí:*

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

Důkaz.

1. Zřejmě $a \to b \leq a \to b$. Z definice Heytingovy implikace $a \wedge (a \to b) \leq b$. Pak $a \to b \leq \bigvee \{c \in A;\ a \wedge c \leq b\}$. Na druhou stranu, jestliže c splňuje $c \wedge a \leq b$, pak $c \leq a \to b$. Navíc

$$\bigvee \{c \in A;\ a \wedge c \leq b\} \leq a \to b.$$

2. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ je Heytingova algebra. Pro každé $i \in I$ platí $a \wedge b_i \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i$. Proto

$$\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i.$$

Nechť nyní $c \in A$ takové, že $\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \leq c$. Pak pro každé $i \in I$ $a \wedge b_i \leq c$. Navíc $b_i \leq a \to c$ pro každé $i \in I$. Z toho plyne $\bigvee_{i \in I} b_i \leq$

$a \to c$, což dává $a \wedge \bigvee_{i\in I} b_i \leq c$. Když za c vezmeme $\bigvee_{i\in I}(a \wedge b_i)$, dostaneme $a \wedge \bigvee_{i\in I} b_i \leq \bigvee_{i\in I}(a \wedge b_i)$. Obrácená nerovnost platí v každém svazu.
$\Leftarrow$ Předpokládejme, že úplný distributivní svaz splňuje nekonečný distributivní zákon. Položme

$$a \to b = \bigvee \{c \in A;\, a \wedge c \leq b\}\,.$$

Označme $M = \{c \in A;\, a \wedge c \leq b\}$ a $s = \bigvee M$. Ověříme, že $s \in M$, potřebujeme $a \wedge s \leq b$. Použijeme nekonečný distributivní zákon:

$$a \wedge \bigvee \{c \in A;\, a \wedge c \leq b\} = \bigvee \{a \wedge c;\, c \in A \;\&\; a \wedge c \leq b\}\,.$$

Dále $\forall x \in M$ platí $x \leq b$ a $s \leq b$, neboť b je horní závora, s je nejmenší horní závora $\Rightarrow$ $s \in M$ (s je největší prvek množiny M).

□

Poznámka 6.7. Uveďme si ještě k bodu 2 lemmatu 6.5 duální distributivní zákon:

$$a \vee \bigwedge_{i\in I} b_i = \bigwedge_{i\in I} (a \vee b_i)\,.$$

Poznamenejme ještě, že jeden plyne z druhého. Z nekonečné distributivity plyne konečný distributivní zákon, ale obrácená implikace neplatí, jak je ukázáno v příkladu 6.3.

Definice 6.8. Řekneme, že částečně uspořádaná množina $(A, \leq)$ je *fundovaná*, jestliže každá její neprázdná podmnožina má minimální prvek.

Lemma 6.6. *Nechť svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je fundovaný (jako uspořádaná množina, tedy $(L, \leq)$ je fundovaná). Pak $\forall A \subseteq L$, $A \neq \emptyset$ existuje* $\inf(A)$*. Toto infimum je zároveň infimem jisté konečné podmnožiny množiny A.*

Důkaz. Nechť $A \neq \emptyset$ je dána. Označme

$$A_\wedge = \{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n;\, n \geq 1,\, a_i \in A\}\,.$$

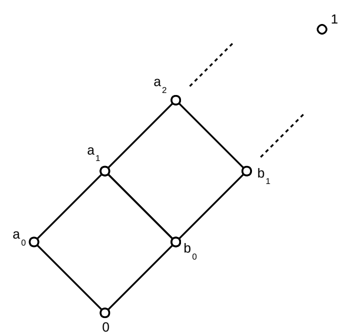
Pak $A_\wedge \neq \emptyset$, tedy díky fundovanosti můžeme vzít některé její minimum a. Máme $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$, $n \geq 1$, $a_i \in A$. Je-li $x \in A$ libovolné, pak $a \wedge x \leq a$. Nemůže ovšem platit $a \wedge x < a$, to by pak $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge x$ byl menší než minimální prvek množiny $A_\wedge$, a tedy a by nebylo minimum, proto $a \wedge x = a$, čili $a \leq x$. Prvek a je minoranta A. Je-li b libovolná minoranta, pak musí být $b \leq a_1, \ldots, b \leq a_n$. Tedy $b \leq a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = a$. To znamená, že a je největší minorantou A, $a = \inf(A)$ a zároveň $a = \inf\{a_1, \ldots, a_n\}$. □

Lemma 6.7. *Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je svaz s uspořádáním zavedeným v lemmatu 6.2. $\mathcal{A}$ je úplný $\Leftrightarrow$ pro libovolnou množinu $R \subseteq A$ existuje infimum.*

Důkaz.
$\Rightarrow$ Z definice úplného svazu.
$\Leftarrow$ Potřebujeme dokázat, že $\forall R \subseteq A$ existuje i supremum. Víme, že v A existuje největší prvek, neboť $\inf(\emptyset) = 1$. Nechť M je libovolná podmnožina A. Položme

$$N = \{x \in A;\, x \text{ je horní závora množiny } M\},$$

podle předpokladu existuje infimum množiny N, označme ho n. Chceme ukázat, že n je supremem množiny M. Nechť $x \in M$, pak x je dolní hranicí množiny N. Protože $n = \inf(N)$, musí být $x \leq n$. Potřebujeme ještě ukázat, že n je nejmenší horní závorou množiny M. Nechť prvek n_1 je též horní závorou množiny M, pak $m_1 \in N$. Protože $n = \inf(N)$, musí být $n \leq m_1$. $\square$



Obrázek 7: Distributivní svaz

Příklad 6.3. Svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ na obrázku 7 je úplný díky lemmatu 6.6 a lemmatu 6.7, ale ukážeme, že nesplňuje nekonečný distributivní zákon:

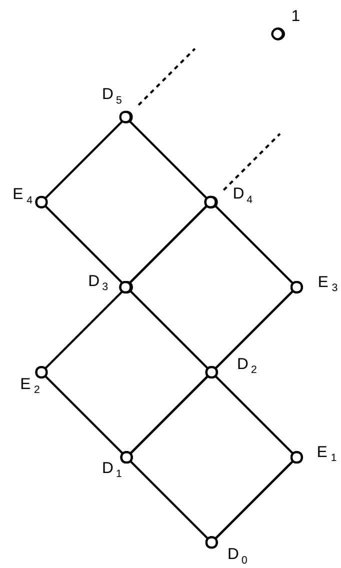
$$a_0 \wedge \bigvee \{b_i;\, i \in \mathbb{N}\} = a_0,$$

zatímco

$$\bigvee \{a_0 \wedge b_i;\, i \in \mathbb{N}\} = 0,$$

a tedy díky bodu 2. lemmatu 6.5 není Heytingovou algebrou. Tento svaz je ale distributivní podle lemmatu 6.3. Když jsme chtěli ukázat, že svaz $\mathcal{L}$ není Heytingova algebra, tak by stačilo uvážit $a_0 \to 0$. Tento prvek není definován, neboť $\forall b_n$ je $a_0 \wedge b_n \leq 0$, ale mezi b_n neexistuje největší prvek.

6.3 Rieger-Nishimurův svaz



Obrázek 8: Rieger-Nishimurův svaz

V této části se budeme zabývat strukturou, která vznikne v intuicionistické logice z jednoho atomu. Ukážeme, že tento svaz je zároveň Heytingovou algebrou. Na obrázku 8 můžete vidět strukturu Rieger-Nishimurova svazu. Dole je nejmenší prvek, který reprezentuje spor, nad nekonečně mnoha prvky je pak největší prvek reprezentující hodnotu pravda. Definici a značení jsme převzali z [2]. Vyjdeme z posloupnosti jednoatomových formulí. Definujme:

$D_0 \equiv \bot$
$E_0 \equiv D_1 \equiv p$
$E_1 \equiv \neg p$
$D_2 \equiv p \vee \neg p$
$E_2 \equiv \neg\neg p$
$\dots$
$D_{n+2} \equiv E_{n+2} = E_{n+1} \Rightarrow D_n$

V Rieger-Nishimurově svazu platí, že níže umístěné formule implikují formule, jež jsou umístěny výše, jestliže mezi nimi existuje jednosměrné spojení po hranách.

Lemma 6.8. *Rieger-Nishimurův svaz* $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ *je úplný.*

Důkaz. Podle lemmatu 6.6 $\forall R \subseteq L$, $R \neq \emptyset$ platí R má infimum, tudíž podle lemmatu 6.7 je svaz $\mathcal{L}$ úplný. □

Lemma 6.9. *Rieger-Nishimurův svaz je Heytingova algebra.*

Důkaz. Ukážeme rozborem případů, že pro každou dvojici prvků je Heytingova implikace definována. Pokud $x \leq y$, pak $x \to y = 1$. Dále $\forall n \geq 1$ platí $E_n \to D_n = E_{n+1}$, $E_n \to E_{n+1} = E_{n+1}$, $D_n \to E_n = E_n$, $D_{n+1} \to D_n = E_{n+1}$, $E_{n+1} \to E_n = E_n$, $E_{n+1} \to D_n = E_{n+2}$, $D_{n+1} \to E_n = E_n$, $E_{n+2} \to D_n = E_{n+1}$, $D_{n+2} \to D_n = D_n$, $D_{n+2} \to E_n = E_n$, $E_{n+2} \to E_n = E_n$, $E_n \leq E_{n+2}$ a $E_n \leq E_{n+3}$, $E_n \leq D_{n+1}$, dále $\forall n \geq 0$ platí $D_n \leq D_{n+1}$. Díky pravidelné struktuře dostaneme $\forall n \geq 1, \forall m \geq n+3$ platí $E_m \to E_n = E_n$, $D_m \to D_n = D_n$, $E_m \to D_n = D_n$, $D_m \to E_n = E_n$. Vrchol D_0 vyřešíme zvlášť, $D_1 \to D_0 = E_1$, $E_1 \to D_0 = E_2$, $D_2 \to D_0 = D_0$, $E_2 \to D_0 = E_1$, $\forall n \geq 3$ platí $E_n \to D_0 = D_0$, $D_n \to D_0 = D_0$. Protože Heytingova implikace je definována pro každou dvojici, je Rieger-Nishimurův svaz Heytingova algebra. □

Poznámka 6.8. Díky lemmatu 6.8 a bodu 2. lemmatu 6.5 dostáváme, že Rieger-Nishimurův svaz je nekonečně distributivní.

6.4 Vztah Booleových a Heytingových algeber

Definice 6.9. Algebru $\mathcal{B}$ typu $(\wedge, \vee, 0, 1, \neg)$ nazveme *Booleovou algebrou*, jestliže $(B, \wedge, \vee, 0, 1)$ je distributivní $\{0,1\}$-svaz, $\neg$ je unární operační symbol a $\forall x \in B$ platí:

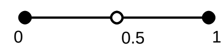
$$x \wedge \neg x = 0 \ \& \ x \vee \neg x = 1$$

$\neg x$ se nazývá komplement prvku x.

Příklad 6.4. Na obrázku 10 jsou Heytingovy algebry, z nichž ani jedna není Booleova, například pro 10a $\neg a = d$ a $a \vee d = 0$, $a \wedge d = 0$, ale $\neg c = a$ a $a \vee c \neq 1$. Booleova algebra je na obrázku 6a, kde $\neg a = b$, $\neg b = a$ a platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, zatímco algebra na obrázku 10b není Booleova, neboť $\neg b = d$, ale $b \vee d = e \neq 1$.

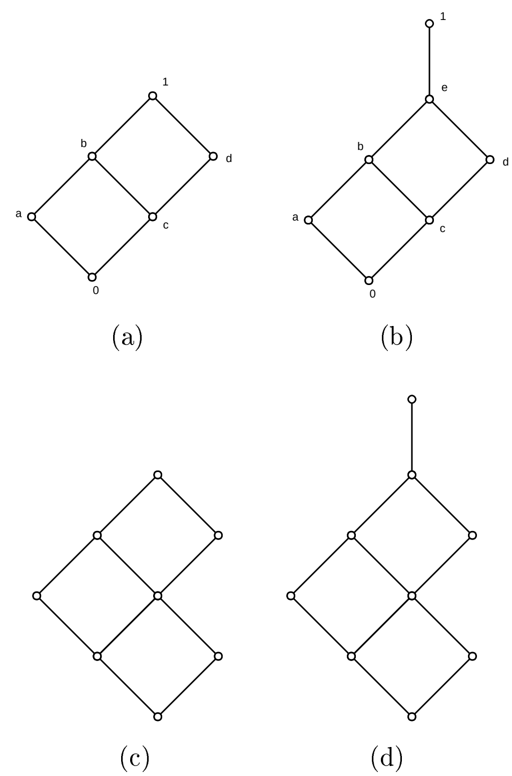
Každý konečný distributivní svaz s nejmenším a největším prvkem je Heytingova algebra. To plyne z 6.5, neboť každý konečný distributivní svaz je úplný a splňuje nekonečný distributivní zákon. Každý řetězec $\mathcal{C}$ s nejmenším a největším prvkem je Heytingova algebra a $\forall a, b \in C$ platí:

$$a \to b = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } a \leq b \\ b & \text{jestliže } a > b \end{cases}$$



Obrázek 9: Neúplná Heytingova algebra

Poznámka 6.9. Každá Booleova algebra $\mathcal{B}$ je Heytingova algebra, definujeme-li $\forall a, b \in B$ platí: $a \to b = \neg a \vee b$, dále definujeme $\neg a$ jako $a \to 0$. Na obrázku 9 je příklad neúplné Heytingovy algebry, jedná se o uzavřený reálný interval $[0, 1]$ bez prvku 0.5.



Obrázek 10: Heytingovy algebry

Lemma 6.10. *Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ je Heytingova algebra. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

1. *$\mathcal{A}$ je Booleova algebra.*
2. *$\forall a \in A$ platí: $a \vee \neg a = 1$.*
3. *$\forall a \in A$ platí: $\neg\neg a = a$.*

Důkaz.
1. $\Rightarrow$ 2. z definice Booleovy algebry.
1. $\Rightarrow$ 3. z definice Booleovy algebry a jednoznačnosti komplementu.
2. $\Rightarrow$ 3. Podle poznámky 6.6 platí

$$a \vee (a \rightarrow 0) = (a \rightarrow 0) \wedge (a \rightarrow 0).$$

Vždy platí $a \vee \neg a \leq \neg\neg a \rightarrow a$. $1 \leq \neg\neg a \rightarrow 1$, tedy $\neg\neg a \rightarrow a = 1$, $\forall c, d$ platí $c \rightarrow d = 1 \Leftrightarrow c \leq d$, $a \leq \neg a \rightarrow b$, tedy $a \wedge \neg a \leq b$ a za b dáme 0. Využijeme ještě $a \leq c \rightarrow d \Leftrightarrow a \wedge c \leq d$. Z výše uvedeného plyne $\neg\neg a \leq a$, vždy platí $a \leq \neg\neg a$, a tudíž $a = \neg\neg a$.
3. $\Rightarrow$ 2. $\forall a$ platí identita $\neg\neg(a \vee \neg a) = 1$, z 3. platí $\neg\neg a = a$. Použijeme předpoklad $\neg\neg b = b$ a za b vezmeme $(a \vee \neg a)$ a dostaneme

$$\neg[(a \vee \neg a) \rightarrow 0] = \neg[(a \rightarrow 0) \wedge (\neg a \rightarrow 0)] = \neg[\neg a \wedge \neg\neg a] = \neg 0 = 1.$$

První rovnost jsme dostali z poznámky 6.6, předposlední rovnost jsme získali díky identitě $c \wedge \neg c = 0$.
2. $\Rightarrow$ 1. Díky definici Heytingovy algebry a předpokladu 2. zbývá ukázat jen platnost identity $a \wedge \neg a = 0$. Z lemmatu 6.4 dostáváme $a \wedge (a \rightarrow 0) = 0$. $\square$

Jak jsme viděli v příkladu 6.4, některé Heytingovy algebry jsou i Booleovými. Zároveň víme, že každá Booleova algebra je Heytingova. Lze se ptát, zda existuje nějaké obecné pravidlo, jak poznat, že daná Heytingova algebra je zároveň Booleova. Zatím můžeme říci, že každá Heytingova algebra, která má pod největším prvkem ještě druhý největší, jako například algebry na obrázcích 10b a 10d, není Booleova.

6.5 Spojení Heytingových algeber s topologií

Definice 6.10. Dvojici $\mathcal{X} = (X, \rho)$ nazveme *topologickým prostorem*, pokud $X \neq 0$ a ρ je množina podmnožin X taková, že:

1. $X, \emptyset \in \rho$,
2. ρ je uzavřena na konečné průniky,
3. ρ je uzavřena na libovolná sjednocení.

Pro $Y \subseteq X$ *vnitřek* Y je množina $\mathrm{Int}(Y) = \bigcup \{U \in \rho; U \subseteq Y\}$.

Lemma 6.11. *Nechť $X = (X, \rho)$ je topologický prostor. Pak algebra $\mathcal{H} = (\rho, \cap, \cup, 0, \rightarrow)$ formuje Heytingovu algebru, kde $\forall U, V \subseteq X$ definujeme $U \rightarrow V = Int((X - U) \cup V)$.*

Důkaz. Označme $Z = U \rightarrow V$. Potřebujeme ukázat, že Z je největší takový prvek, pro který platí: $Z \wedge U \leq V$. Sporem: nechť existuje nějaké W takové, že $W \gneq Z$ a $W \wedge U \leq V$, pak existuje prvek $x \in W$ a $x \notin Z$, tedy $x \notin \mathrm{Int}((X - U) \cup V)$, což znamená, že

$$x \notin \bigcup \{G \in \rho; G \subseteq ((X - U) \cup V)\}.$$

Označme $M = \{G \in \rho; G \subseteq ((X - U) \cup V)\}$. Dále $\forall G \in M$ platí $x \notin G$. Rozebereme dva případy:

1. $\forall G \in M$ platí $x \in (((X - U) \cup V) - G)$
2. $x \in (X - ((X - U) \cup V))$

Druhá možnost vede ke sporu, neboť pak by $W \wedge U \nleq V$. Nechť je splněna 1., pak $((X - U) \cup V) \notin \rho$, podle bodu 2. v definici 6.10 $X - U \notin \rho$, $x \in (X - U)$ nebo $x \in V$, nemůže nastat $x \in (X - U) \,\&\, x \notin V$, neboť pak by $W \wedge U \nleq V$. Pokud $x \in V$, pak $W \wedge U \leq V$, ale $W \notin \rho$, což je spor. □

6.6 Souvislost Heytingových algeber s kripkovskými rámci

V této kapitole se budeme věnovat spojení Heytingových algeber a kripkovských rámců. Nejprve ukážeme, že na kripkovských rámcích můžeme definovat Heytingovu algebru, pak za pomoci ultrafiltrů definujeme kripkovské rámce příslušné k dané Heytingově algebře.

6.6.1 Kripkovské rámce

Nechť $\mathcal{L} = (W, R)$ je částečně uspořádaná množina, to jest kripkovský rámec. $\forall w \in W$ a $U \subseteq W$ nechť:
$R(w) = \{v \in W;\, wRv\}$
$R^{-1}(w) = \{v \in W;\, vRw\}$
$R(U) = \bigcup_{w \in U} R(w)$
$R^{-1}(U) = \bigcup_{w \in U} R^{-1}(w)$

Definice 6.11. Podmnožina $U \subseteq W$ se nazývá *horní množinou* (upset), pokud $(w \in U \ \&\ wRv) \Rightarrow v \in U$, tj. pokud $R(U) \subseteq U$.

Lemma 6.12. *Nechť $Up(F)$ je množina všech horních množin množiny F. Pak $\mathcal{H}$ =$(Up(F), \cap, \cup, 0, \rightarrow)$ formuje Heytingovu algebru, kde $U \rightarrow V = \{w \in W; \forall v \in W$ takové, že wRv, jestliže $v \in U$, pak $w \in V\} = W - R^{-1}(U - V)$.*

Důkaz. $U \rightarrow V$ je definováno jako

$$Y = \{x; \neg\exists y(x \leq y \,\&\, y \in U - V)\},$$

potřebujeme ověřit, že Y je největší X takové, že $U \cap X \subseteq V$. $U \cap Y \subseteq V$ plyne z definice Y, neboť Y nemá žádné prvky v $U - V$. To, že Y je největší takové, ukážeme sporem. Nechť existuje $W \gneqq Y$ takové, že $U \cap W \subseteq V$, pak existuje $w \in W$ a $w \notin Y$, w musí splňovat $\exists y(w \leq y \,\&\, y \in U - V)$, neboť jinak by bylo $w \in Y$. W musí být horní množina, a tedy i $y \in W$, pak ale $U \cap W \nsubseteq V$, což je spor. □

6.6.2 Filtry a ultrafiltry na Heytingových algebrách

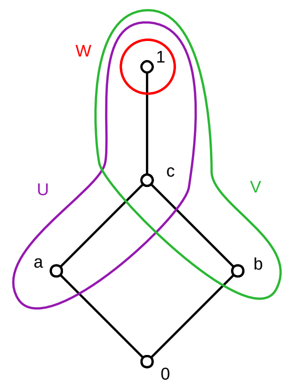
Definice 6.12. Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ je Heytingova algebra. Řekneme, že $F \subseteq A$ je *filtr*, pokud $\forall a, b \in A$ platí:

1. $0 \notin F$,
2. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$,
3. $(a \in F \ \&\ a \leq b) \Rightarrow b \in F$.

Filtr F nazveme *ultrafiltr*, jestliže $\forall a, b \in F$ navíc platí

4. $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ nebo $b \in F$.

V Booleově algebře je každý ultrafiltr maximální, což neplatí v Heytingových algebrách, jak si ukážeme na následujícím příkladě. Na obrázku 11 jsou vyznačeny ultrafiltry na Heytingově algebře, která není Booleova, W je ultrafiltr, ale není maximální, zároveň $\{1, c\}$ je filtr, který není ultrafiltrem.



Obrázek 11: Ultrafiltry na Heytingově algebře

Definice 6.13. Nechť $W := \{F;\ F$ je ultrafiltr na Heytingově algebře $A\}$. Pro $F, F' \in W$ položíme FRF', jestliže $F \subseteq F'$.

Poznámka 6.10. Je zřejmé, že právě definovaná relace R je částečné uspořádání, a tedy $\mathcal{L} = (W, R)$ je intuicionistický kripkovský rámec.

Než přejdeme přímo ke kripkovským rámcům, potřebujeme nejprve dokázat několik vět o filtrech a ultrafiltrech.

Lemma 6.13. *Nechť $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ je Heytingova algebra a $F \subseteq A$ je maximální filtr na A. Pak F je ultrafiltr.*

Důkaz. Ukážeme obměnou. Nechť F není ultrafiltr, pak $\exists a, b \in A$ takové, že $a \vee b \in F$ a zároveň $a \notin F$ a $b \notin F$. Zároveň pro každé x, které splňuje $a \vee b \leq x$ platí $x \in F$. Protože F je filtr, musí platit $x \wedge (a \vee b) \neq 0$. Z definice 6.6 Heytingovy algebry dostáváme $x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \neq 0$, a tedy víme, že $x \wedge a \neq 0$ nebo $x \wedge b \neq 0$. Jeden z prvků a, b můžeme přidat a vlastnost filtru bude zachována, $F' = F \cup \{a\}$ nebo $F' = F \cup \{b\}$. V obou případech $F \subsetneq F'$, tudíž F není maximální. $\square$

Poznámka 6.11. Pokud v lemmatu 6.13 předpokládáme místo Heytingovy algebry Booleovu, pak platí dokonce ekvivalence.

Lemma 6.14. *Nechť F je filtr na Heytingově algebře $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ a předpokládejme, že $a \rightarrow b \notin F$. Pak existuje filtr F' takový, že $F \subseteq F'$ a $a \in F'$, $b \notin F'$.*

Důkaz. Vezměme $F' = \{x;\ a \rightarrow x \in F\}$. O F' potřebujeme ukázat, že je filtr a splňuje požadované vlastnosti. Nejprve ukážeme, že $0 \notin F'$, tedy je nutné, aby $a \rightarrow 0 \notin F$. Označme $c = a \rightarrow 0$, tedy $c \wedge a \leq 0$, to znamená, že $c \wedge a = 0$, kdyby $c \in F$, tak musí být i $c \wedge a \in F$, ale 0 není prvkem žádného filtru. Nyní ukažme, že $\forall c, d \in F'$ platí $a \wedge b \in F'$, $a \rightarrow c \in F$ a $a \rightarrow d \in F$. Potřebujeme $a \rightarrow (c \wedge d) \in F$, $a \rightarrow (c \wedge d) = (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow d)$ díky bodu 4. lemmatu 6.4, a tedy $c \wedge d \in F'$. Nyní musíme ověřit, že F' je horní množina. Nechť $c \in F'$ a $d \geq c$, pak $a \rightarrow c \in F$, díky monotonii $a \rightarrow d \geq a \rightarrow c$, a tedy $a \rightarrow d \in F$, z čehož plyne, že $d \in F'$. Dále chceme ukázat, že $F' \subseteq F$. Nechť $c \in F$, označme $d = a \rightarrow c$, z vlastnosti Heytingovy implikace je $d \geq c$ nebo $d \geq a$, a tedy $d \in F$, neboť F je filtr, pak $c \in F'$. Zbývá ukázat, že $a \in F'$ a $b \notin F'$, $a \rightarrow b \notin F$, proto $b \notin F'$, $a \rightarrow a = 1$ a $1 \in F$, a tedy $a \in F'$. □

Lemma 6.15. *Nechť F je filtr na Heytingově algebře $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ a předpokládejme, že $d \notin F$. Pak F může být rozšířen do ultrafiltru U takového, že $d \notin U$.*

Důkaz. Díky principu maximality můžeme za U vzít některý z maximálních filtrů takových, že $F \subseteq U$ a $d \notin U$. Potřebujeme ověřit, že U je ultrafiltr. Nechť $a \notin U$ a $b \notin U$, ukážeme, že pak ani $a \vee b \notin U$. Definujme

$$F_1 = \{x;\ \exists y \in U\ \&\ a \wedge y \leq x\}.$$

F_1 je nahoru uzavřen a také je uzavřen na průniky, navíc $U \subseteq F_1$. Pokud F_1 není filtr, je roven celé nosné množině, pak $d \in F_1$. Pokud F_1 je filtr, pak vzhledem k maximalitě U máme $d \in F_1$. Tedy existuje $y \in U$ takové, že $a \wedge y \leq d$, ze stejných důvodů existuje i $x \in U$ takové, že $b \wedge x \leq d$. Vezměme $z = x \wedge y$, z vlastnosti filtru plyne, že $z \in U$, dále $a \wedge z \leq d$, $b \wedge z \leq d$, tedy $(a \vee b) \wedge z = (a \wedge z) \vee (b \wedge z) \leq d$. Z toho $a \vee b \notin U$, jinak by z vlastnosti filtru $d \in U$, což by byl spor. □

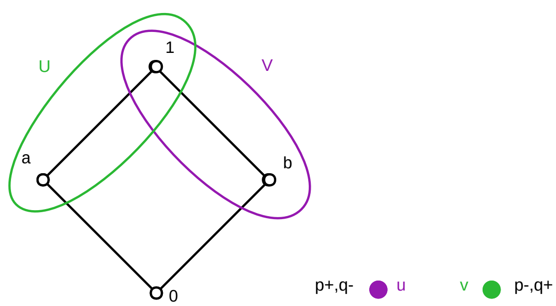
Definice 6.14. Nechť B je formule, $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ Heytingova algebra. Označme At_B množinu všech atomů v B. Definujeme pravdivostní ohodnocení u takové, že nejprve každou podformuli tvaru $\neg C$ převede na $C \rightarrow \perp$ a pak každému prvku At_B přiřazuje jeden prvek A, konstantě pro spor $\perp$ přiřadí 0 a zároveň všem spojkám v B přiřazuje operace na $\mathcal{A}$ následujícím způsobem:

- Konjunkci v B přiřadí průsek v $\mathcal{A}$,
- Disjunkci v B přiřadí spojení v $\mathcal{A}$,
- Implikaci v B přiřadí Heytingovu implikaci v $\mathcal{A}$,

Řekneme, že formule B *platí* v Heytingově algebře $\mathcal{A}$, pokud pro všechna výše definovaná pravdivostní ohodnocení u je $u(B) = 1$.

Definice 6.15. Řekneme, že Heytingova algebra $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ je *protipříklad* na formuli B, jestliže B neplatí v $\mathcal{A}$.

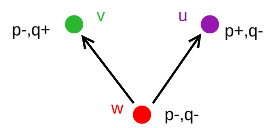
Definice 6.16. Nechť U je ultrafiltr a p je atom. Definujeme, že U *splňuje* atom p (značíme $U \Vdash p$), jestliže $v(p) \in U$.



Obrázek 12: Ultrafiltry na jednoduché Booleově algebře

Příklad 6.5. Na obrázku 12 je Booleova algebra a na ní vyznačené ultrafiltry, které nejsou srovnatelné, proto mezi příslušnými možnými světy není relace dosažitelnosti. V této algebře platí identita $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$. Prvek a koresponduje s atomem p a b koresponduje s atomem q. Protože $b \notin U$, tak $u \nVdash q$, $a \notin V$, tedy $v \nVdash p$. Platí $u \Vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ a $v \Vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.

Na obrázku 13 jsou kripkovské rámce k algebře z obrázku 11. V této algebře $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \neq 1$, ukážeme, že toto nebude splněno ani v příslušných kripkovských rámcích. Prvek a koresponduje s atomem p a prvek b s atomem q. Platí $a, b \notin W$, a tedy $w \nVdash p$ a $w \nVdash q$, $a \notin V$ a $b \notin U$, tudíž $v \nVdash p$ a $u \nVdash q$. Zároveň ještě $u \Vdash p$ a $v \Vdash q$. Ze světa w je dosažitelný jak svět u, tak svět v, a tedy $w \nVdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.



Obrázek 13: Kripkovské rámce

Lemma 6.16. *Nechť $\mathcal{H} = (H, \wedge, \vee, 0, \rightarrow)$ je Heytingova algebra. Pak pro každý ultrafiltr U na $\mathcal{H}$ a pro každou formuli A platí: $U \Vdash A \Leftrightarrow v(A) \in U$.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle počtu logických spojek ve formuli A.

Nechť $A = B \Rightarrow C$.

$\Rightarrow$ Předpokládáme $U \Vdash B \Rightarrow C$ a potřebujeme ukázat, že $v(B \Rightarrow C) \in U$. Ukážeme pomocí obměněné věty, $v(B \Rightarrow C) = v(B) \rightarrow v(C)$ (druhá šipka je implikace v Heytingově algebře). Když $v(B) \rightarrow v(C) \notin U$, tak si musíme opatřit ultrafiltr $V \supseteq U$ takový, že $v(B) \in V$ a $v(C) \notin V$. Podle lemmatu 6.14 si opatříme filtr W takový, že $W \supseteq U$, $v(B) \in W$ a $v(C) \notin W$. Nyní podle lemmatu 6.15 rozšíříme filtr W do ultrafiltru V takového, že $v(C) \notin V$. Nyní víme, že $V \supseteq U$ a podle indukčního předpokladu $v(B) \in V$ a $v(C) \notin V$.

$\Leftarrow$ $(B \Rightarrow C) \in U$ a chceme ukázat, že $\forall V \supseteq U$ $V \Vdash B$, pak $V \Vdash C$. $v(B \Rightarrow C) \in U$, pak pro $\forall V \supseteq U$ platí: $v(B \Rightarrow C) \in V$, $v(B) \rightarrow v(C) \in V$, $v(B) \in V$, tudíž z indukčního předpokladu $v(C) \in V$. Poznamenejme, že tomuto se někdy říká algebraická verze modus ponens.

Nechť $A = B \,\&\, C$.

$\Rightarrow$ Ultrafiltr splňuje $U \Vdash B \,\&\, C$ a potřebujeme ukázat $v(B \,\&\, C) \in U$. $U \Vdash B \wedge A$, tedy $U \Vdash B$ a $U \Vdash C$, z toho plyne $v(B) \in U$ a $v(C) \in U$, z vlastnosti filtru dostáváme $v(B \,\&\, C) \in U$.

$\Leftarrow$ Máme $v(B \,\&\, C) \in U$ a chceme $U \Vdash B \wedge C$. $v(B \,\&\, C) \in U$, z vlastnosti filtru je $v(B) \in U$ a $v(C) \in U$, neboť $v(B) \geq v(B \,\&\, C)$ a $v(C) \geq v(B \,\&\, C)$, tedy $U \Vdash B$ a $U \Vdash C$, tudíž $U \Vdash B \,\&\, C$.

Nechť $A = B \vee C$.

$\Rightarrow$ Předpokládáme $U \Vdash B \vee C$ a potřebujeme ukázat $v(B \vee C) \in U$. Protože $U \Vdash B \vee C$, tak $U \Vdash B$ nebo $U \Vdash C$, a tedy $v(B) \in U$ nebo $v(C) \in U$, proto z vlastnosti filtru a indukčního předpokladu $v(B \vee C) \in U$.

$\Leftarrow$ Předpokládáme $v(B \vee C) \in U$ a chceme $U \Vdash B \vee C$, z vlastnosti ultrafiltru $v(B) \in U$ nebo $v(C) \in U$, tedy $U \Vdash B$ nebo $U \Vdash C$, z indukčního předpokladu $U \Vdash B \vee C$. $\square$

Ukázali jsme, že intuicionistická logika má několikerou sémantiku. Zaměřili jsme se především na Heytingovy algebry, nicméně je třeba připomenout, že i topologická sémantika intuicionistické logiky je neméně významná, ačkoliv jsme jí nevěnovali tolik prostoru.

7 Závěr

V práci jsme se zabývali intuicionistickou logikou, první kapitoly byly věnovány úplnosti. Nejprve jsme uvedli úplnost gentzenovského kalkulu vůči klasické logice a pak analogickou metodou dokázali úplnost GJ vůči logice intuicionistické. V kapitole 5 jsme se věnovali dosud nepříliš prozkoumanému rozšíření intuicionistické logiky – Grzegorczykově logice neboli intuicionistické predikátové logice s konstantním univerzem. Nepodařilo se nám dokázat úplnost GJC vůči Grzegorczykově sémantice, ale zjistili jsme, že pro toto rozšíření neplatí bezřezová úplnost kalkulu GJC, neboť Markovův princip, který platí ve všech modelech s konstantním univerzem, nemá bezřezový důkaz v kalkulu GJC. V této oblasti je jistě velký prostor pro další bádání. Stále zůstává nezodpovězena otázka, zda pro Grzegorczykovu logiku platí věta o interpolaci. V poslední kapitole jsme se zabývali především algebrou, nicméně například v [7] nalezneme právě algebraický důkaz úplnosti pro logiku s konstantním univerzem, navíc Heytingovy algebry mohou sloužit jako jedna ze sémantik intuicionistické výrokové logiky.

Reference

[1] N. Bezhanishvili, D. de Jongh. *Intuitionistic logic*. Skriptum. http://www.cs.le.ac.uk/people/nb118/Publications/ESSLLI%2705.pdf

[2] P. Burdová. Některé sémantické metody v intuicionistické logice. Diplomová práce, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky 1998.

[3] S. R. Buss. An Introduction to Proof Theory. In *Handbook of proof theory*, S.R. Buss, ed., č. 137 řady Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, Amsterdam, 1998, str. 1-78.

[4] B. A. Davey, H. A. Priestley. *Introduction to lattices and order.* Cambridge university press, 2002.

[5] C. Fiorentini, P. Miglioli. A *Cut-free Sequent Calculus for the Logic of Constant Domains with a Limited Amount of Duplications.* Logic Journal of the IGPL. Oxford university press, 1999.

[6] M. C. Fitting. *Intuitionistic logic, Model Theory and Forcing.* North-Holland, Amsterdam, 1969.

[7] S. Görnemann. A logic stronger than intuitionism. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 36, No. Association for Symbolic logic, 1971.

[8] G. Grätzer. *General Lattice Theory.* Birkhäuser, Stuttgart, 1978.

[9] B. Kozlíková. Sémantické metody v intuicionistické predikátové logice. Diplomová práce, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky 2004.

[10] M. Matoušek. *Booleovské struktury.* Neoficiální učební text katedry logiky, 2006.

[11] M. Peliš. Počátky sémantiky intuicionistické logiky. Diplomová práce, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky 2001.

[12] G. Szász. *Introduction to lattice theory.* Akadémiai Kiadó, Budapešť, 1963.

[13] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha, 2002.

[14] G. Takeuti. *Proof Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1975.