

Eva Vachková, *Intuicionistická logika jako užitečný nástroj*

(V. Švejdar, posudek vedoucího na diplomovou práci, září 2010)

Předložená diplomová práce je motivována myšlenkou, že intuicionistickou logiku lze chápat jako užitečný nástroj, který se může například uplatnit ve studiu a výkladu metody pro prokazování nezávislosti v teorii množin známé pod jménem *forcing*. Myšlenka vykládat *forcing* jako aplikaci intuicionistické logiky je evidentně jedním z motivů Fittingovy knihy (č. [6] v seznamu literatury). Výklad ve Fittingově knize také naznačuje, že ta pravá logika užitečná v metamatematické teorii množin by mohla být nikoliv intuicionistická logika samotná, nýbrž některé její vhodné rozšíření, např. *logika konstatního univerza* (též známá jako *Grzegorzcykova logika*).

V práci jsou nakonec probrány, prozkoumány a vypracovány některé aspekty intuicionistické logiky, avšak cíl vyložit *forcing* jako přímou aplikaci intuicionistické logiky zůstal plánem pro budoucnost. Kapitoly 1–3 jsou spíše úvodní, v kapitole 4 je vypracován důkaz úplnosti intuicionistického gentzenovského kalkulu vůči predikátové kripkovské sémantice (nikoliv vůči “intuicionistické predikátové logice”, jak omylem stojí v nadpisu), kap. 5 je věnována několika aspektům logiky konstatního univerza, kap. 6 lze označit jako úvod do teorie Heytingových algeber a jejich souvislostí s ostatními sémantikami intuicionistické (převážně výrokové) logiky.

Důkazy úplnosti predikátových kalkulů ve známé literatuře velmi často pracují se silně zjednodušující podmínkou, že v jazyce nejsou žádné funkční symboly. Tak je tomu například v Takeutiho knize *Proof Theory*. Nevím o tom, že by někde byl uveden důkaz pro gentzenovský kalkulus intuicionistické predikátové logiky bez této omezující podmínky. Avšak v Bussově Úvodu ke knize [3] je to uděláno pro klasickou logiku. Kapitola 4 si klade za úkol vyplnit tuto mezeru, tj. vypracovat podrobný důkaz úplnosti gentzenovského kalkulu, přičemž jazyk může obsahovat funkční symboly. Pracuje se přitom s jiným avšak ne tak násilným omezením, že jazyk je nejvýše spočetný. Bussův Úvod přitom posloužil jako návod, jak zacházet s termy; jeho důkaz pro klasickou logiku je reprodukován v kap. 3.

Hlavními poznatky v kap. 5 jsou ekvivalence hilbertovského a gentzenovského kalkulu pro logiku s konstatním univerzem a fakt, že pro gentzenovský kalkulus této logiky neplatí věta o eliminovatelnosti řezů.

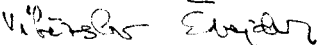
Práce je podle mého názoru psána pěkným jazykem, stylu ani úpravě nelze mnoho vytknout. Snad jen formát některých položek v seznamu literatury, a číslování by bylo lepší nastavit tak, aby věty, lemmata atd. měly stejný čítač. V práci lze ale nalézt řadu menších věcných chyb a nedokonalostí. Někde na konci kap. 2 postrádám zmínku o kalkulu pro klasickou logiku. Zmínka na samém začátku kap. 3, že se připouštějí i nekonečné sekventy, by patřila spíše ke kap. 4. Na str. 14 a ve světle tam uvedeného kroku 4, do kroku 1 nepatří instrukce o volbě libovolného aktivního sekventu. Na str. 21 je nesprávně pojednán případ týkající se implikace. Definice ohodnocení proměnných e v druhém odstavci na str. 23, vzhledem k tomu, že lemma 4.1 správně mluví o libovolném ohodnocení, by asi patřila spíše někam k důkazu věty 4.1. Věta 4.2 by naopak spíše než na str. 26 patřila na začátek kap. 4. Na str. 28 a 29 vzniká nesprávný dojem, že logika s konstatním univerzem má nějakou výrokovou variantu; mělo by být jasně řečeno například to, že gentzenovský kalkulus pro logiku s konstatním univerzem má též výroková pravidla jako intuicionistický kalkulus, a též kvantifikátorová

pravidla jako klasický kalkulus. V definici 5.1 by mělo stát, že “každý pozitivní či negativní výskyt kvantifikátoru \forall v ψ_1 a v ψ_2 je pozitivním resp. negativním výskytem v celé formuli $\psi_1 \& \psi_2$ ”. Podobně by měly být opraveny a doplněny ostatní případy.

Velmi oceňuji, že v kap. 4 autorka vypracovala vlastní důkaz úplnosti getzenovského intuicionistického kalkulu i se všemi podrobnostmi týkajícími se ohodnocení proměnných, termů a jejich hodnot. To je podle mého názoru věc přímo použitelná ve výuce. Dále velmi oceňuji a považuji za podnětnou část týkající se logiky s konstatním univerzem. Existence celkem přirozeného kalkulu, pro který neplatí věta o eliminovatelnosti řezů, je (pokud je důkaz správně) pro mě novým poznatkem. Kapitola 6 s předchozími kapitolami souvisí vlastně jen volně: (i) ultrafiltry v Heytingových algebrách souvisejí se saturovanými množinami v důkazech úplnosti, (ii) řadu pojmů by šlo, ale uděláno to není, zobecnit i na predikátovou logiku. V této kapitole lze pochválit, že autorka si vymyslela řadu jednoduchých příkladů.

Domnívám se, že diplomová práce splňuje požadavky a považuji ji za podnětnou. Nicméně je na ní patrné, že většina textu vznikla až nedlouho před odevzdáním. Navrhuji klasifikovat ji známkou *velmi dobře*, případně, podle výsledku objahoby, i *výborně*.

V Praze 11.9.2010


doc RNDr Vítězslav Švejdar CSc