Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

Diplomová práce

Petra Ivaničová

Kompaktnost v neklasických logikách

Compactness in non-classical logics

Praha, 2010 Vedoucí práce: Prof. RNDr. Petr Hájek, DrSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu.

V Praze dne 31.5.2010

Anotace

Práce systematicky studuje pojem kompaktnosti v klasické výrokové logice, dále obecně studuje různé pojmy kompaktnosti a vztah k různým pojmům úplnosti v rámci obecné teorie relace důsledku a zabývá se kompaktností v některých základních neklasických logikách – fuzzy a modálních výrokových logikách.

Abstract

This work systematically studies the concept of compactness in classical propositional logic as well as various concepts of compactness and their relation to different notions of completeness in the framework of the general theory of consequence relations. It also considers the compactness in various basic non-classical logics – fuzzy and modal propositional fuzzy logics.

Obsah

Úvod

Kompaktnost, věta o úplnosti a neklasické logiky

Věta o kompaktnosti patří mezi základní výsledky klasické matematické logiky. V podstatě říká, že množina formulí (teorie) má model (je splnitelná), pokud má model každá její konečná podmnožina, alternativní formulací je tvrzení, že pokud formule φ sémanticky vyplývá z množiny formulí, pak vyplývá i z nějaké její konečné podmnožiny.

Věta o kompaktnosti má celou řadu aplikací, zejména v teorii modelů. Zásadní je také její úzká souvislost s větou o úplnosti: teorie je konzistentní (nedokazuje spor) právě tehdy, když má model. Kompaktnost z této věty jednoduše plyne, protože teorie je konzistentní právě tehdy, když je konzistentní každá její podteorie (což je přímý důsledek faktu, že důkaz je konečná posloupnost formulí). Na druhou stranu lze pomocí kompaktnosti větu o úplnosti dokázat z její slabé verze (která říká, že *formule* φ je konzistentní právě tehdy, když má model).

Neklasické logiky vznikají z různých motivací jako alternativy nebo rozšíření klasické logiky. Při jejich studiu hraje kompaktnost důležitou roli, zejména při zkoumání různých forem úplnosti těchto logik vůči různým sémantikám. V této práci se budeme věnovat dvěma velkým skupinám neklasických logik: fuzzy logikám a modálním logikám. Fuzzy logiky jsou motivovány zejména snahou vyrovnat se s problémem vágnosti přirozeného jazyka, modální logiky byly původně motivovány jako logiky pro práci s modalitami *nutně* a *možná* v přirozeném jazyce, později se okruh motivací značně rozrostl.

Struktura diplomové práce

Práce se omezuje na studium výrokových logik. Jednotlivá témata jsou pojednávána z hlediska sémantického a syntaktického.

První kapitola se poměrně detailně věnuje klasické logice, kromě základních definic jsou ukázány čtyři různé přímé (tj. bez použití věty o úplnosti) důkazy kompaktnosti. Konkrétně jde o

1. důkaz pomocí konstrukce maximální konzistentní množiny, tento důkaz je převzat z [15, Sekce 1.2],

2. důkaz pomocí konstrukce stromu s využitím Königova lemmatu, který je dále zobecněn i pro neklasické logiky,

3. topologický důkaz, jde opět o modifikaci důkazu z [15, Sekce 1.2], jedná se o původní důkaz kompaktnosti, který dal jméno této vlastnosti,

4. důkaz pomocí ultraproduktu, jedná se o modifikaci běžného důkazu kompaktnosti predikátové logiky.

V druhé kapitole je studována kompaktnost ve velmi obecném prostředí teorie relací důsledku. Jsou rozlišeny dvě formy

- finitarita: je-li formule důsledkem teorie, pak je důsledkem i nějaké její konečné podteorie,

- kompaktnost: je-li každá podteorie nějaké teorie bezesporná, pak je bezesporná i teorie sama.

Jsou studovány vzájemné vztahy těchto pojmů, jejich charakterizace v relacích důsledku daných syntakticky (pomocí axiomatických systémů) i sémanticky (pomocí obecného pojmu sémantiky) a jejich vztah k šesti různým obecně definovaným formám vět o úplnosti.

Ve třetí kapitole je studována kompaktnost ve fuzzy logikách, zejména v Łukasiewiczově, Gödelově a produktové logice, kde je demonstrována rozdílnost dvou výše zmíněných forem kompaktnosti (např. je ukázáno, že logika daná standardní sémantikou Łukasiewiczovy logiky je kompaktní, ale není finitární). Dále je zobecněn pojem kompaktnosti na kompaktnost založenou na vícehodnotovosti fuzzy logik. V klasické výrokové logice je ohodnocení modelem teorie, pokud dává všem formulím této teorie hodnotu 1, ve fuzzy logikách jde o pojem K-modelu, ohodnocení, jež dává formulím určité teorie hodnoty z předem dané množiny $K \subseteq [0, 1]$, a pojem K-kompaktnosti na něm založený.

Čtvrtá, závěrečná kapitola, je zaměřena na kompaktnost v modálních logikách. Je ukázáno, že kompaktnost závisí na zvolené sémantice (např. základní normální modální logika K je kompaktní vzhledem k sémantice dané všemi kripkovskými rámci, ale není kompaktní, pokud se omezíme na konečné rámce). V závěru je studována kompaktnost jedné z nejvýznamnějších modálních logik: logiky dokazatelnosti GL.

Kapitola 1

Kompaktnost v klasické výrokové logice

V této části uvedeme potřebné úvodní definice a tvrzení klasické výrokové logiky potřebné pro formulaci a důkaz kompaktnosti. Věta o kompaktnosti (respektive její dvě formy) bude nejdříve formulována jako čistě syntaktické tvrzení (v části 1.1), potom zcela nezávisle jako sémantické tvrzení v části 1.2. V poslední části této kapitoly bude vyslovena věta o úplnosti a ukázána její souvislost se syntaktickou i sémantickou formou vět o úplnosti.

Začneme definicí výrokové formule. Pokud není řečeno jinak, v celém textu předpokládáme nekonečnou spočetnou množinu výrokových atomů Var jejíž prvky máme očíslovány přirozenými čísly.

Definice 1.1. *Množina všech* výrokových formulí *(dále jen formulí) je nejmenší množina splňující následující podmínky:*

- *každý výrokový atom je formule,*
- *jestliže φ je formule, pak $\neg\varphi$ je formule,*
- *jestliže φ a ψ jsou formule, pak jejich konjunkce $(\varphi \wedge \psi)$, disjunkce $(\varphi \vee \psi)$ a implikace $(\varphi \to \psi)$ jsou formule.*

Množinu všech výrokových formulí budeme značit Fm.

Poznámka 1.2. *Závorkování ve formulích není v logických textech striktně dodržováno. Konvence o možnosti vynechávání vnějších závorek a vynechávání závorek v souvislosti s konvencí o nejvyšší prioritě negace a vyšší prioritě spojek konjunkce a disjunkce před spojkou implikace budou používány i v tomto textu.*

1.1 Kompaktnost v syntaxi

Definice 1.3. Axiomatický systém klasické výrokové logiky *je tvořen formulemi (axiomy) některého z následujících tvarů*

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,
(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,
(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$,
(A4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$,
(A5) $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$,
(A6) $\varphi \to \varphi \vee \psi$, $\psi \to \varphi \vee \psi$,
(A7) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$,

kde φ, ψ, χ *jsou libovolné formule výrokového počtu, a odvozovacím pravidlem modus ponens*

(MP) *z dvojice formulí* φ *a* $\varphi \to \psi$ *odvozuje* ψ.

Poznámka 1.4. *Uvedená axiomatika klasické výrokové logiky samozřejmě není jediná možná. Tato je převzata z knihy V. Švejdara [15].*

Definice 1.5. Důkazem *z množiny formulí* T *(hovoříme také o důkazu v teorii* T*) je posloupnost formulí* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$*, kde každá z formulí* φ_i *je prvkem* T *nebo výrokovým axiomem nebo je odvozena z předcházejících členů posloupnosti* φ_k, $k < i$*, pomocí odvozovacího pravidla modus ponens.*

Definice 1.6. *Formule* φ *je* dokazatelná *v teorii* T*, značíme* $T \vdash \varphi$*, jestliže existuje důkaz* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *v* T *takový, že* $\varphi_n = \varphi$*. Pokud* $T = \emptyset$*, používáme značení* $\vdash \varphi$ *a takové formuli říkáme* teorém *klasické výrokové logiky.*

Příklad 1.7. *Posloupnost formulí*

- $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$,
- $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$,
- $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$,
- $\varphi \to \varphi$

je důkazem formule $\varphi \to \varphi$ *z prázdné množiny.*

Poznámka 1.8. *Zápis* $T \cup \{\varphi\}$ *zkracujeme* T, φ.

Věta 1.9 (Věta o dedukci). *Nechť* T *je množina formulí a* φ, ψ *jsou formule. Pak* $T, \varphi \vdash \psi$ *právě tehdy, když* $T \vdash \varphi \to \psi$.

Důkaz. Implikace zprava doleva je jednoduchým důsledkem pravidla modus ponens. Nyní dokážeme opačnou implikaci: Nechť $\psi_1, \ldots, \psi_n$ je důkaz formule ψ z T, φ. Indukcí dle $i, 1 \leq i \leq n$, ukážeme, že $T \vdash \varphi \to \psi_i$: Každá formule ψ_i vyskytující se v posloupnosti $\psi_1, \ldots, \psi_n$ je buď axiomem klasické výrokové logiky, nebo je prvkem množiny T, φ, nebo je z předchozích členů posloupnosti odvozena pravidlem modus ponens. Nechť pro $j < i$ tvrzení platí, rozborem jednotlivých případů ukážeme, že $T \vdash \varphi \to \psi_i$:

Pokud je ψ_i axiomem nebo prvkem množiny T, pak posloupnost formulí $\psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$, ψ_i, $\varphi \to \psi_i$ (vzniklá použitím pravidla modus pones na axiom (A1) $\psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$ a formuli ψ_i) je důkazem formule $\varphi \to \psi_i$ z množiny T.

Pokud je ψ_i formulí φ, pak jelikož $\varphi \to \varphi$ je teorém (viz příklad 1.7), je v T dokazatelná formule $\varphi \to \psi_i$.

Pokud je ψ_i odvozena z předchozích členů posloupnosti ψ_j, ψ_k, $j, k < i$ pomocí pravidla modus ponens, je jedna z těchto formulí tvaru $\chi \to \psi_i$ a druhá χ. Pro obě platí indukční předpoklad, z T jsou dokazatelné formule $\varphi \to (\chi \to \psi_i)$ a $\varphi \to \chi$. Hledaný důkaz dostaneme dvojím použitím pravidla modus ponens na instanci axiomu (A2) $(\varphi \to (\chi \to \psi_i)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi_i))$.

Jelikož posledním členem posloupnosti $\psi_1, \ldots, \psi_n$ je formule ψ, je důkaz hotov.

□

Lemma 1.10. *Následující formule jsou teorémy klasické výrokové logiky:*

- $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$,
- $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

Důkaz. Následující posloupnost je důkazem formule $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ z prázdné množiny předpokladů:

- $\neg\varphi \to \neg\varphi$,
- $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$,
- $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$.

Následující posloupnost je důkazem formule ψ z množiny předpokladů φ, $\neg\varphi$:

- $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$,
- $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$,
- $\varphi \to (\neg\psi \to \varphi)$,
- $\neg\psi \to \neg\varphi$,
- $\neg\psi \to \varphi$,
- $(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$,
- ψ.

Důkaz dokončíme dvojím užitím věty o dedukci, z $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ dostaneme dokazatelnost $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ z prázdné množiny předpokladů.

□

Definice 1.11. *Teorie T je* sporná*, jestliže z T je dokazatelná libovolná formule. Jinak je T* bezesporná (konzistentní)*.*

Následující dvě lemmata, která dávají do souvislosti pojmy spornosti a dokazatelnosti, jsou klíčová pro důkaz syntaktické věty o kompaktnosti. První redukuje pojem spornosti na dokazatelnost a druhé naopak.

Lemma 1.12. *T je sporná právě tehdy, když $T \vdash \varphi$ a zároveň $T \vdash \neg\varphi$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ triviálně plyne přímo z definice sporné teorie. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme $T \vdash \varphi$ a $T \vdash \neg\varphi$. Dvojím použitím pravidla modus ponens na teorém $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ dostaneme $T \vdash \psi$, kde ψ je libovolná formule, což je definice sporné teorie.

□

Lemma 1.13. *$T \vdash \varphi$ právě tehdy, když $T, \neg\varphi$ je sporná.*

Důkaz. Nechť nejprve $T \vdash \varphi$. Pak i $T, \neg\varphi \vdash \varphi$, jelikož důkaz φ v T je důkazem i v $T, \neg\varphi$, a zároveň také platí $T, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$. $T, \neg\varphi$ je tedy dle lemmatu 1.12 sporná.

Předpokládejme nyní, že množina $T, \neg\varphi$ je sporná, tedy je z ní odvoditelná libovolná formule, tedy i φ. Použitím věty o dedukci dostáváme $T \vdash \neg\varphi \to \varphi$. Použitím pravidla modus ponens na teorém $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ dostáváme $T \vdash \varphi$. □

Věta 1.14 (Syntaktická verze věty o kompaktnosti). *Nechť T je teorie, φ výroková formule. Pak platí:*

1. *jestliže $T \vdash \varphi$, pak existuje konečná $F \subseteq T$ taková, že $F \vdash \varphi$.*
2. *jestliže každá konečná $F \subseteq T$ je bezesporná, pak T je bezesporná.*

Důkaz.
1. Důkaz tohoto bodu triviálně plyne přímo z definice důkazu. V důkazu formule φ z T, kterým je konečná posloupnost $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, je použit pouze konečný počet formulí.
2. Nechť T je sporná. Tudíž pro libovolnou formuli φ platí $T \vdash \varphi$ a zároveň $T \vdash \neg\varphi$. Dle prvního tvrzení existují konečné $F_1, F_2 \subseteq T$ takové, že $F_1 \vdash \varphi$ a $F_2 \vdash \neg\varphi$. Sjednocení $F_1 \cup F_2 \subseteq T$ je konečná množina dokazující obě formule φ a $\neg\varphi$ a je tedy dle lemmatu 1.12 sporná.

□

Poznámka 1.15. *Bod 2. předchozí věty byl dokázán pomocí převedení na bod 1.(využitím lemmatu 1.12). Ukážeme, že využitím lemmatu 1.13 lze i platnost bodu 1. převést na platnost bodu 2. Tedy, že body 1. a 2. předchozí věty jsou ekvivalentní.*

Nechť $T \vdash \varphi$. Dle lemmatu 1.13 je $T, \neg\varphi$ sporná, existuje tedy sporná konečná $F \subseteq T, \neg\varphi$. Tudíž je sporná i teorie $F, \neg\varphi$ a tedy $F \vdash \varphi$ (opět dle lemmatu 1.13).

1.2 Kompaktnost v sémantice

Definice 1.16. Pravdivostním ohodnocením *(či ohodnocením) nazveme každou funkci $e\colon Fm \to \{0,1\}$, která pro libovolné formule φ, ψ splňuje následující podmínky:*

- *$e(\neg\varphi) = 1$ právě tehdy, když $e(\varphi) = 0$,*
- *$e(\varphi \wedge \psi) = 1$ právě tehdy, když $e(\varphi) = 1$ a $e(\psi) = 1$,*
- *$e(\varphi \vee \psi) = 1$ právě tehdy, když $e(\varphi) = 1$ nebo $e(\psi) = 1$,*
- *$e(\varphi \to \psi) = 1$ právě tehdy, když $e(\varphi) = 0$ nebo $e(\psi) = 1$.*

Definice 1.17. *Pravdivostní ohodnocení e je* modelem *teorie T, jestliže pro každou formuli $\varphi \in T$ platí, že $e(\varphi) = 1$.*

Definice 1.18. *Formule* φ je splnitelná*, jestliže existuje ohodnocení e takové, že* $e(\varphi) = 1$*. Teorie* T je splnitelná*, pokud existuje ohodnocení e takové, že je modelem teorie* T*.*

Definice 1.19. *Formule* φ je tautologie*, jestliže pro každé ohodnocení e je* $e(\varphi) = 1$*.*

Poznámka 1.20. *Je zřejmé, že výsledkem přidání formule k nesplnitelné teorii je opět nesplnitelná teorie.*

Definice 1.21. *Formule* φ sémanticky vyplývá *(je* sémantickým důsledkem) *z množiny* T*, značíme* $T \models \varphi$*, jestliže* φ *je splněna každým ohodnocením, které je modelem* T*.*

Platnost následujícího lemmatu je zřejmá.

Lemma 1.22. *Nechť* T *je množina formulí,* $S \subseteq T$*. Pak pro každou formuli* φ *platí, že pokud* $S \models \varphi$*, pak také* $T \models \varphi$*.*

Lemma 1.23. *Následující body jsou ekvivalentní:*

- T *není splnitelná,*
- *pro libovolnou formuli* φ *platí* $T \models \varphi$*,*
- $T \models \varphi$ *a zároveň* $T \models \neg\varphi$*.*

Důkaz. Dokážeme postupně tři implikace:

- Nechť T není splnitelná, pak je každá formule jejím sémantickým důsledkem přímo z definice.
- Pokud z T vyplývá libovolná formule, pak samozřejmě z T evidentně vyplývají i formule φ a $\neg\varphi$.
- Nechť $T \models \varphi$ a zároveň $T \models \neg\varphi$. Předpokládejme, že T má model, označme ho e. Pak z $T \models \varphi$, dostáváme $e(\varphi) = 1$ a z $T \models \neg\varphi$ dostáváme $e(\neg\varphi) = 1$, tudíž $e(\varphi) = 0$ a to je vzájemně ve sporu.

□

Všimněme si analogie mezi syntaktickými pojmy sporné teorie a dokazatelnosti a sémantickými pojmy nesplnitelné teorie a vyplývání. První ekvivalence z předchozího lemmatu říká, že teorie není splnitelná právě tehdy, když z ní sémanticky vyplývá jakákoliv formule (viz. pojem sporné teorie). Druhá ekvivalence je pak analogií lemmatu 1.12 o převodu pojmu spornosti teorie na dokazatelnost určitých formulí. Nyní dokážeme analogii lemmatu 1.13 o převodu dokazatelnosti v teorii na spornost určité teorie.

Lemma 1.24. *$T \models \varphi$ právě tehdy, když $T, \neg\varphi$ není splnitelná (nemá model).*

Důkaz. Obě implikace snadno plynou přímo z definic. Libovolné v, které je modelem teorie T, splňuje formuli φ právě tehdy, když nesplňuje formuli $\neg\varphi$. Teorie $T, \neg\varphi$ tedy nemá model. Pokud φ nevyplývá z teorie T, existuje e takové, že je modelem T a nesplňuje φ, tedy splňuje $\neg\varphi$.

□

Věta 1.25 (**Sémantická verze věty o kompaktnosti**). *Nechť T je teorie, φ formule. Pak:*

1. *pokud každá konečná množina $F \subseteq T$ má model, pak T má model.*
2. *pokud $T \models \varphi$, pak existuje konečná $F \subseteq T$ taková, že $F \models \varphi$.*

Důkaz. Analogicky poznámce 1.15 nejprve ukážeme ekvivalenci obou tvrzení:

Jako první ukážeme implikaci 1. $\Rightarrow$ 2. Nechť $T \models \varphi$. Dle lemmatu 1.24 je podmínka $T \models \varphi$ ekvivalentní s neexistencí modelu množiny $T, \neg\varphi$. Dle prvního tvrzení pak existuje konečná podmnožina $F \subseteq T, \neg\varphi$, která nemá model. Tudíž samozřejmě ani množina $F, \neg\varphi$ nemá model, což opět dle lemmatu 1.24 znamená, že $F \models \varphi$.

Dále ukážeme opačnou implikaci 2. $\Rightarrow$ 1. Nechť teorie T nemá model. Dle bodu 3. lemmatu 1.23 platí $T \models \varphi$ a $T \models \neg\varphi$. Z předpokladu 2. existují konečné $F_1, F_2 \subseteq T$ takové, že $F_1 \models \varphi$ a $F_2 \models \neg\varphi$. Tudíž dle lemmatu 1.22 platí $F_1 \cup F_2 \models \varphi$ a $F_1 \cup F_2 \models \neg\varphi$ a proto je $F_1 \cup F_2$ hledanou konečnou nesplnitelnou množinou (opět viz. lemma 1.23).

Nyní uvedeme 4 různé důkazy bodu 1 a tedy sémantické verze věty o kompaktnosti. V prvních dvou případech budeme předpokládat, že množina výrokových proměnných Var je spočetná. Druhé dva důkazy fungují bez ohledu na mohutnost množiny Var.

Důkaz 1 (pomocí konstrukce maximální konzistentní množiny, tento důkaz je převzat z [15, Sekce 1.2])

Protože předpokládáme nejvýše spočetně mnoho proměnných, je množina všech výrokových formulí spočetná a její prvky lze indexovat přirozenými čísly. Nechť T je teorie taková, že každá konečná $F \subseteq T$ má model. Definujeme posloupnost množin formulí $\{S_i \mid i \in \mathsf{N}\}$, kde každá konečná podmnožina každé množiny S_i má model:

$$S_0 = T$$

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i \cup \{\varphi_i\} & \text{pokud všechny konečné podmnožiny } S_i \cup \{\varphi_i\} \text{ mají model} \\ S_i \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{jinak} \end{cases}$$

a definujeme množinu S:

$$S = \bigcup_{i \in \mathsf{N}} S_i$$

Nyní indukcí dle i ověříme, že všechny konečné podmnožiny takto definované množiny S_i mají modely. Pro konečné podmnožiny T tuto vlastnost předpokládáme. Ověříme, že všechny konečné podmnožiny alespoň jedné z teorií $S_i \cup \{\varphi\}$, $S_i \cup \{\neg\varphi\}$ mají model: Nechť F_1, F_2 jsou konečné podmnožiny S_i takové, že F_1, φ ani $F_2, \neg\varphi$ nemají model. Z indukčního předpokladu má množina $F_1 \cup F_2$ model (protože $F_1 \cup F_2 \subseteq S_i$), označme jej e. Platí buď $e(\varphi) = 1$ nebo $e(\varphi) = 0$. A proto je e buď modelem F_1, φ nebo modelem $F_2, \neg\varphi$, což je ve sporu s naším předpokladem.

Protože každá konečná podmnožina $F \subseteq S$ je konečnou podmnožinou některé z S_i, má tedy model. Zdůrazněme, že jsme v každém kroku přidali právě jednu z formulí $\varphi, \neg\varphi$.

Nyní nadefinujeme pravdivostní ohodnocení e, o kterém ukážeme, že je modelem celé S, tudíž i hledaným modelem T:

$$e(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \varphi \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Dokážeme, že takto definované e je skutečně ohodnocením:

- $\varphi \in S$ právě tehdy, když $\neg\varphi \notin S$. Pokud by obě formule $\varphi, \neg\varphi$ byly prvkem S, byla by prvkem S (a tudíž i některého S_i) i nesplnitelná množina $\{\varphi, \neg\varphi\}$. Je zřejmé, že jako člen posloupnosti formulí se do nějakého S_i a tudíž i do S právě jedna z formulí dostala.

- $\varphi \to \psi \in S$ právě tehdy, když $\varphi \notin S$ nebo $\psi \in S$. Kdyby $\varphi \to \psi \in S$, $\varphi \in S$ a $\psi \notin S$, byla by dle prvního bodu prvkem S i formule $\neg\psi$ a množina $\{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\}$ by byla konečnou nesplnitelnou podmnožinou S. Kdyby $\varphi \to \psi \notin S$ a $\varphi \notin S$ nebo $\varphi \to \psi \notin S$ a $\psi \in S$, dostali bychom stejnou úvahou nesplnitelné množiny $\{\neg(\varphi \to \psi), \neg\varphi\}$, respektive $\{\neg(\varphi \to \psi), \psi\}$.

- $\varphi \vee \psi \in S$ právě tehdy, když $\varphi \in S$ nebo $\psi \in S$. Kdyby $\varphi \vee \psi \in S$, $\varphi \notin S$ a $\psi \notin S$, byly by dle bodu jedna i obě formule $\neg\varphi, \neg\psi$ prvkem S a množina $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ by byla konečnou nesplnitelnou podmnožinou S. Kdyby naopak $\varphi \in S$ a $\varphi \vee \psi \notin S$ nebo $\psi \in S$ a $\varphi \vee \psi \notin S$, dostali bychom analogickou úvahou nesplnitelné množiny $\{\varphi, \neg(\varphi \vee \psi)\}$, respektive $\{\psi, \neg(\varphi \vee \psi)\}$.

- $\varphi \wedge \psi \in S$ právě tehdy, když $\varphi \in S$ a $\psi \in S$. Kdyby $\varphi \wedge \psi \in S$ a $\varphi \notin S$ nebo $\psi \notin S$, byla by dle prvního bodu $\neg\varphi \in S$ respektive $\neg\psi \in S$ a množina $\{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi\}$ respektive $\{\varphi \wedge \psi, \neg\psi\}$ by byla konečnou nesplnitelnou podmnožinou S. Pokud by obě formule φ i ψ byly prvkem S a formule $\varphi \wedge \psi$ v S nebyla, dostali bychom použitím tvrzení jedna opět nesplnitelnou množinu $\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$.

Tímto bylo ukázáno, že e splňuje podmínky pro pravdivostní ohodnocení, je tudíž modelem S a tudíž i hledaným modelem T.

Důkaz 2 (pomocí konstrukce stromu a Königova lemmatu, tento důkaz je inspirován důkazem lemmatu 3.44)

Nechť T je množina formulí, $\mathrm{Var}_{(T)}$ množina proměnných vyskytujících se ve formulích z T. Kdyby $\mathrm{Var}_{(T)}$ byla konečná, existoval by pouze konečný počet ekvivalentních formulí, předpokládejme tedy, že je množina $\mathrm{Var}_{(T)}$ nekonečná spočetná a je indexována přirozenými čísly počínaje jedničkou. Dále definujme podmnožiny T následovně: $T_0 = \emptyset$ a $T_i = \{\varphi \in T \mid \mathrm{Var}_{(\varphi)} \subseteq \{x_1, \ldots, x_i\}\}$. Očividně $T_i \subseteq T_{i+1}$ a $T = \bigcup_{i \in \mathsf{N}} T_i$. Nyní zkonstruujeme úplný binární strom S s následujícími vlastnostmi:

- kořenu je přiřazena prázdná množina, ostatním vrcholům je přiřazena hodnota 0 nebo 1,

- následníci každého vrcholu na i-té hladině mají po řadě zleva doprava hodnoty 0 a 1.

Vrcholy na i-té hladině budeme chápat jako odpovídající i-té proměnné z $\mathrm{Var}_{(T)}$. Z toho, jak je strom zkonstruován a popsán, je zřejmé, že cesta od kořene do vrcholu u na i-té hladině odpovídá částečnému ohodnocení proměnných $x_1, \ldots, x_i$. Každému ohodnocení, které proměnným $x_1, \ldots, x_i$ přiřazuje hodnoty dané cestou od kořene do vrcholu u včetně a ostatním proměnným libovolně, budeme říkat ohodnocení respektující vrchol u.

Nyní postupně zkonstruujeme podstrom S' výše vytvořeného úplného stromu S tak, že kořenem podstromu bude původní kořen a pro libovolný vrchol bude platit následující: Nechť vrchol u je na cestě od kořenu následníkem vrcholu v. Vrchol u bude vrcholem podstromu S', pokud existuje ohodnocení splňující množinu T_i takové, že respektuje vrchol u. Pokud žádné ohodnocení respektující vrchol u nesplňuje množinu T_i, stane se vrchol v listem a podstrom s kořenem ve vrcholu u uřízneme. Všimněme si, že pokud vrchol u je vrcholem podstromu S', pak už *každé* ohodnocení respektující tento vrchol vrchol u splňuje množinu T_i.

Podle Königova lemmatu (viz. např. [12]) má takovýto strom S' buď konečnou hloubku nebo v něm existuje nekonečná větev. Předpokládejme nejprve, že S' má konečnou hloubku i. Ukážeme, že potom konečná množina T_{i+1} není splnitelná. Předpokládejme existenci ohodnocení e, které splňuje T_{i+1}. Na hladině $i+1$ tedy musí existovat vrchol u, jež e respektuje, a tudíž u musí být v podstromu S', což je spor.

Nyní předpokládejme, že ve stromu S' existuje nekonečná větev, nechť e je ohodnocení dané touto větví. Je zřejmé, že pro každé i ohodnocení e respektuje vrchol na i-té hladině této větve a tudíž splňuje T_i. Jelikož $T = \bigcup_{i \in \mathsf{N}} T_i$, důkaz je hotov.

Důkaz 3 (topologický důkaz, jedná se o modifikaci [15, Sekce 1.2], pravděpodobně se jedná o původní důkaz kompaktnosti, který dal jméno této vlastnosti)

Předpokládejme diskrétní topologii na množině $\{0, 1\}$ (každá množina je otevřená i uzavřená) a produktovou topologii na $\{0, 1\}^{\mathrm{Var}}$, jejíž bází je množina σ, pro kterou platí: $(A_v)_{v \in \mathrm{Var}} \in \sigma$ právě tehdy, když existuje pouze konečné množství indexů $v \in \mathrm{Var}$ takových, že $A_v \neq \{0, 1\}$ (v obecné definici je navíc ještě předpoklad, že jsou tyto množiny otevřené v $\{0, 1\}$, v našem případě diskrétní topologie je však toto triviálně splněno). První topologický prostor je kompaktní (neboť každý konečný diskrétní topologický prostor je kompaktní) a proto je kompaktní i druhý (z Tichonovovy věty [16, Věta 17.8]). Prvky $\{0,1\}^{\mathrm{Var}}$ přirozeně odpovídají ohodnocením: pro $x = (a_v)_{v\in\mathrm{Var}} \in \{0,1\}^{\mathrm{Var}}$ definujeme ohodnocení $e_x(v) = a_v$ a pro ohodnocení e definujeme $x_e = (e(v))_{v\in\mathrm{Var}} \in \{0,1\}^{\mathrm{Var}}$.

Pro každou formuli φ definujeme zobrazení $V_\varphi\colon \{0,1\}^{\mathrm{Var}} \to \{0,1\}$ následovně: $V_\varphi(x) = e_x(\varphi)$. Ukážeme, že takto definované zobrazení je spojité (tj. že vzor každé otevřené množiny je otevřená množina). Uvažujme množinu $V_\varphi^{-1}(\{1\}) = \{x \in \{0,1\}^{\mathrm{Var}} \mid e_x(\varphi) = 1\}$. Protože hodnota formule záleží pouze na konečně mnoha proměnných, je tato množina prvkem báze σ. Analogicky můžeme argumentovat pro $V_\varphi^{-1}(\{0\})$ a jelikož vzory $\{0,1\}$ a prázdné množiny jsou triviálně otevřené, je důkaz spojitosti V_φ dokončen.

Jelikož množina $\{1\}$ je i uzavřená a V_φ je spojité zobrazení, její vzor $V_\varphi^{-1}(\{1\})$ je uzavřená množina v $\{0,1\}^{\mathrm{Var}}$. Uvažujme nyní systém uzavřených množin $(V_\varphi^{-1}(\{1\}))_{\varphi\in T}$. Ukážeme, že tento systém je centrovaný (každý jeho konečný podsystém má neprázdný průnik). Nechť je takový systém dán množinou indexů $F \subseteq T$. Pak víme, že existuje ohodnocení e splňující F, pak jistě $x_e \in \bigcap_{\varphi\in F} V_\varphi^{-1}(\{1\}))$. Z kompaktnosti $\{0,1\}^{\mathrm{Var}}$ víme, že každý centrovaný systém uzavřených množin má neprázdný průnik, nechť x je nějaký prvek tohoto průniku. Pak jistě ohodnocení e_x splňuje teorii T.

Důkaz 4 (pomocí ultraproduktu, jedná se o modifikaci běžného důkazu kompaktnosti predikátové logiky)

Nechť $\mathcal{X}$ je množina všech konečných podmnožin množiny T, nechť e_S je ohodnocení splňující množinu $S \in \mathcal{X}$. Pro každou formuli $\varphi \in T$ definujeme $\mathcal{X}_\varphi = \{S \in \mathcal{X} \mid \varphi \in S\}$, tedy množinu všech konečných množin, kterých je φ prvkem. $\{\mathcal{X}_\varphi \mid \varphi \in T\}$ je očividně centrovaný systém (má tzv. finite intersection property), tj. každá její konečná podmnožina má neprázdný průnik (nechť $\{\mathcal{X}_\varphi \mid \varphi \in F\}$ je konečná podmnožina $\{\mathcal{X}_\varphi \mid \varphi \in T\}$ daná konečnou teorií $F \subseteq T$, pak $F \in \bigcup\{\mathcal{X}_\varphi \mid \varphi \in F\}$). Dle věty o ultrafiltrech - každý centrovaný systém lze rozšířit do ultrafiltru - existuje její rozšíření do ultrafiltru $\mathcal{F}$. Vezmeme kartézský součin $A = \prod_{S\in X}\{0,1\}$ Boolových algeber $\{0,1\}$, π_S označíme S-tou projekci z A do $\{0,1\}$. Víme, že A faktorizováno dle ultrafiltru $\mathcal{F}$ je Boolova algebra $\{0,1\}$, označme h kanonický morfismus z A do $\{0,1\}$.

Ukážeme, že $h((e_S(\varphi))_{S\in\mathcal{X}})$ je hledaný model teorie T. Pro každou formuli φ je $h((e_S(\varphi))_{S\in\mathcal{X}}) = 1$ právě tehdy, když $\{S \in \mathcal{X} \mid e_S(\varphi)) = 1\} \in \mathcal{F}$.

Očividně platí $\mathcal{X}_\varphi = \{S \in \mathcal{X} \mid \varphi \in S\} \subseteq \{S \in \mathcal{X} \mid e_S(\varphi) = 1\}$ a $\mathcal{X}_\varphi \in \mathcal{F}$, tedy také $\{S \in \mathcal{X} \mid e_S(\varphi) = 1\} \in \mathcal{F}$ a důkaz je hotov.

$\square$

1.3 Kompaktnost a věta o úplnosti

Věta o úplnosti dává do vztahu syntaktický pojem dokazatelnosti a sémantický pojem vyplývání a také syntaktický pojem bezespornosti (konzistence) a sémantický pojem splnitelnosti. Těmto dvěma formám úplnosti, které budeme v příští kapitole obecně studovat, budeme říkat deduktivní a modelová úplnost. Oba pojmy tedy přirozeně souvisí s dvěma druhy kompaktnosti, které jsme viděli na syntaktické a sémantické rovině. V důkazu obou forem věty o úplnosti může být využita věta o kompaktnosti, umožní nám totiž přechod od slabé formy úplnosti (úplnosti pro jednu formuli) k 'silné' úplnosti pro všechny teorie. Detailnímu studium různých forem věty o úplnosti a kompaktnosti bude věnována příští kapitola.

Věta 1.26 (Věta o úplnosti)**.** *Nechť φ je formule.*

- *φ je bezesporná právě tehdy, když φ má model,*
- *$\models \varphi$ právě tehdy, když $\vdash \varphi$.*

Tyto dvě formy úplnosti jsou ekvivalentní (obecný důkaz této ekvivalence pro velkou třídu logik bude ukázán v příští kapitole) a věta o kompaktnosti nám umožňuje dokázat její silnější formu.

Věta 1.27 (Věta o silné úplnosti)**.** *Nechť T je teorie, φ formule. Pak*

- *T je bezesporná právě tehdy, když T má model,*
- *$T \models \varphi$ právě tehdy, když $T \vdash \varphi$.*

Důkaz. Následující fakta jsou ekvivalentní:

- T je sporná,
- existuje konečná podmnožina $F = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq T$, která je sporná,
- formule $\psi = \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$ je sporná,

- formule $\psi = \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$ nemá model,
- existuje konečná podmnožina $F = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq T$, která nemá model,
- T nemá model.

Postupně byly použity: věta 1.14, vlastnosti spojky $\wedge$ (viz. axiomy výrokové logiky), věta o úplnosti, sémantika spojky $\wedge$, a věta 1.25.

Důkaz druhého tvrzení je pak jednoduchou aplikací vět 1.13 a 1.24, dostaneme postupně ekvivalentní podmínky:

- $T \vdash \varphi$,
- $T, \neg\varphi$ je sporná,
- $T, \neg\varphi$ není splnitelná,
- $T \models \varphi$.

$\square$

Větu o silné úplnosti lze dokázat (např. použitím Lindenbaum-Tarského metody) i bez použití věty o sémantické kompaktnosti (věta 1.25). Takový její přímý důkaz by nám umožnil dokázat tuto větu o kompaktnosti (jejíž důkaz, jak jsme viděli v předchozí části této kapitoly, není triviální) jako snadný důsledek jednoduše dokazatelné věty o syntaktické úplnosti (věta 1.14).

Kapitola 2

Kompaktnost a obecný pojem důsledku

V této kapitole zobecníme pojmy zavedené v kapitole o klasické logice, prozkoumáme dva pojmy kompaktnosti – syntaktický a sémantický – a budeme studovat jejich vztah s různými formami vět o úplnosti.

2.1 Relace důsledku: finitárnost vs. kompaktnost

Definice 2.1. *Výrokový jazyk* $\mathcal{L}$ *je dán trojicí* $\langle \mathrm{Var}, C, r\rangle$*, kde* Var *je neprázdná množina výrokových proměnných,* C *je neprázdná množina výrokových spojek a* r *je funkce* $r\colon C \to \mathsf{N}$ *přiřazující každé výrokové spojce její četnost (aritu).*

Opět předpokládáme, pokud není řečeno jinak, nekonečnou spočetnou množinu Var. Jazyk pak budeme chápat jako dvojici $\langle C, r\rangle$, u již známých spojek, kde je jejich četnost zřejmá, budeme jazyk zadávat pouze výčtem spojek.

Příklad 2.2. *Jazyk klasické výrokové logiky je dán nekonečnou spočetnou množinu* Var *a množinou spojek* $\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$*, kde negace je unární spojka (četnosti 1) a ostatní spojky jsou binární (četnosti 2).*

Definice 2.3. *Nechť je dán výrokový jazyk* $\mathcal{L}$*. Množina výrokových formulí v jazyce* $\mathcal{L}$ *(značíme* $Fm_{\mathcal{L}}$*) je nejmenší množina splňující následující podmínky:*

- *každá proměnná z množiny* Var *je výroková formule jazyka* $\mathcal{L}$

- *jestliže* c *je výroková spojka v jazyce* $\mathcal{L}$ *četnosti* n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fm_{\mathcal{L}}$ *,* *pak* $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *je formule v jazyce* $\mathcal{L}$.

Definice 2.4. *Nechť je dán jazyk* $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$*-Substituce je libovolná funkce* $\sigma\colon Fm_{\mathcal{L}} \to Fm_{\mathcal{L}}$ *taková, že komutuje se spojkami jazyka tj. pro každou* c *spojku jazyka* $\mathcal{L}$ *četnosti* n *platí, že* $\sigma(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = c(\sigma(\varphi_1), \ldots, \sigma(\varphi_n))$.

V dalším textu nebude vždy třeba znát strukturu množiny formulí danou jejím jazykem a budeme používat symbol For pro libovolnou množina objektů, kterým budeme říkat formule. Pro zbytek této kapitoly tedy zafixujme množinu formulí For. Řekneme, že množina formulí je *strukturovaná*, pokud $For = Fm_{\mathcal{L}}$ pro nějaký výrokový jazyk $\mathcal{L}$.

Definice 2.5. Konsekuce *formulí je dvojice* $\langle T, \varphi\rangle$*, kde* $T \subseteq For, \varphi \in For$*. Množinu všech konsekucí budeme značit* CON.

Termín konsekuce pochází z práce [1] a je zde použit z důvodu neutrality, další případně použitelné pojmy (jako např. sekvent nebo pravidlo) mají i jiné konfliktní významy.

Místo $\langle T, \varphi\rangle$ budeme psát $T \rhd \varphi$. Nechť L je podmnožina množiny $CON = \mathcal{P}(For) \times For$. L můžeme také chápat jako relaci mezi množinami formulí a formulemi. Místo $T \rhd \varphi \in \mathrm{L}$ budeme psát $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, případně pouze $T \vdash \varphi$, pokud je L zřejmé z kontextu.

Definice 2.6. Relace důsledku *na množině formulí* For *je libovolná množina konsekucí* L *splňující následující vlastnosti:*

- reflexivita: $\varphi \vdash \varphi$,

- tranzitivita: *jestliže* $T \vdash \psi$ *a pro všechny* $\varphi \in T$ *platí* $S \vdash \varphi$*, pak* $S \vdash \psi$,

- monotonie: *jestliže* $T \vdash \varphi$ *a* $T \subseteq S$*, pak* $S \vdash \varphi$.

Relaci důsledku nazveme finitární*, pokud splňuje následující vlastnost:*

- *Pokud* $T \vdash \varphi$*, pak existuje konečná* $T' \subseteq T$ *taková, že* $T' \vdash \varphi$.

Předpokládejme, že For *je strukturovaná množina formulí. Relaci důsledku nazveme* strukturální*, pokud splňuje následující vlastnost:*

- *Pokud* $T \vdash \varphi$*, pak* $\sigma[T] \vdash \sigma(\varphi)$ *pro každou* $\mathcal{L}$*-substituci* σ.

Poznámka 2.7. *Relaci důsledku budeme často nazývat* logikou. *Formulím, pro které je* $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$*, říkáme* teorémy *logiky* L. *Logika je* sporná*, pokud* $\mathrm{L} = CON$.

Definice 2.8. Axiomatický systém $\mathcal{AS}$ *je neprázdná množina* $\mathcal{AS} \subseteq CON$. *Prvkům množiny* $\mathcal{AS}$*, které mají tvar* $\emptyset \rhd \varphi$ *říkáme* axiomy*, někdy axiomy ztotožňujeme přímo s formulí* φ. *Prvkům množiny* $\mathcal{AS}$ *tvaru* $T \rhd \varphi$*, kde mohutnost množiny* T *je* $n \in \mathsf{N}$*, říkáme* n-ární dedukční pravidla*, ostatní nazýváme* infinitární dedukční pravidla.

Axiomatický systém $\mathcal{AS}$ *se nazývá* finitární*, pokud nemá žádná infinitární dedukční pravidla.*

Pokud je For strukturovaná množina formulí, je axiomatický systém obvykle uzavřen na všechny příslušné substituce (tj. zadán pomocí schémat axiomů a pravidel), jak jsme viděli v minulé kapitole u klasické výrokové logiky. Následuje definice důkazu, důkaz je zde definován složitěji pomocí stromové struktury. Tu však lze v klasické logice převést na posloupnost. Tato obecnější formulace nám umožní pracovat i s infinitárními pravidly a podat charakterizaci finitárních logik, což lze chápat jako jednu z forem věty o kompaktnosti.

Definice 2.9. *Nechť je* $\mathcal{AS}$ *axiomatický systém.* Důkaz *formule* φ *z množiny formulí* T *je ohodnocený orientovaný strom takový, že:*

- *ve stromu neexistuje nekonečná větev,*
- *orientace šipek je od listů směrem ke kořenu,*
- *kořen je ohodnocen formulí* φ*, listy jsou ohodnoceny buď axiomy z* $\mathcal{AS}$ *nebo formulemi z* T*,*
- *pokud je uzel ohodnocen* ψ *a* S *je množina ohodnocení jeho předchůdců, pak* $S \rhd \psi \in \mathcal{AS}$.

Existenci důkazu φ *z množiny* T *zapisujeme* $T \vdash_{\mathcal{AS}} \varphi$.

Uspořádání dané důkazovým stromem je dobré, přičemž minimální prvky jsou v listech a maximálním prvkem je kořen, důkazy o formulích mohou být tudíž vedeny indukcí podle složitosti jejich formálních důkazů.

Lemma 2.10. *Nechť je* $\mathcal{AS}$ *axiomatický systém. Potom* $\vdash_{\mathcal{AS}}$ *je nejmenší logika obsahující* $\mathcal{AS}$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\vdash_{\mathcal{A}S}$ je logika. Strom s jedním vrcholem ohodnoceným φ je důkazem $\varphi \vdash_{\mathcal{A}S} \varphi$. Pokud $S \vdash_{\mathcal{A}S} \varphi$ a $S \subseteq T$, je příslušný strom i důkazem $T \vdash_{\mathcal{A}S} \varphi$. Ještě zbývá ověřit tranzitivitu – nechť $T \vdash_{\mathcal{A}S} \psi$ a pro všechny $\varphi \in T$ platí $S \vdash_{\mathcal{A}S} \varphi$, existuje tedy důkazový strom s kořenem ψ a listy ohodnocenými axiomy z $\mathcal{A}S$ nebo formulemi z T a dále pro každý list ohodnocený formulí z T existuje důkazový strom z množiny S. Jejich spojením dostaneme hledaný důkazový strom pro $S \vdash_{\mathcal{A}S} \psi$.

Dále je zřejmé, že $\mathcal{A}S \subseteq \vdash_{\mathcal{A}S}$. Nakonec pro každou logiku L ukážeme, že jestliže $\mathcal{A}S \subseteq \mathrm{L}$, pak $\vdash_{\mathcal{A}S} \subseteq \mathrm{L}$. Předpokládejme tedy $T \vdash_{\mathcal{A}S} \varphi$, což podle definice znamená existenci důkazu φ z množiny T. Indukcí dle složitosti dobře uspořádaného důkazového stromu ukážeme, že pro každou formuli ohodnocující vrchol v důkazovém stromu platí $T \vdash_{\mathrm{L}} \psi$, tudíž i $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$: Pokud ψ ohodnocuje list důkazového stromu, je buď axiomem $\mathcal{A}S$ nebo prvkem T, tedy i prvkem L. Nechť ψ ohodnocuje vrchol důkazového stromu a S je množina jeho předchůdců, z definice důkazu víme, že $S \rhd \psi \in \mathcal{A}S$ a tedy i $S \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ (protože $\vdash_{\mathcal{A}S} \subseteq \mathrm{L}$) a z indukčního předpokladu víme, že pro každou formuli $\chi \in S$ platí $T \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Z tranzitivity relace důsledku L plyne $T \vdash_{\mathrm{L}} \psi$. □

Definice 2.11. *Nechť je $\mathcal{A}S$ axiomatický systém a* L *logika. Řekneme, že $\mathcal{A}S$ je* axiomatický systém logiky L *(nebo že je* prezentací logiky L*), pokud* $\mathrm{L} = \vdash_{\mathcal{A}S}$.

Všimněme si, že každá logika má axiomatický systém (prezentaci) – logika L chápaná jako axiomatický systém je triviálně svou vlastní prezentací.

Lemma 2.12. *Nechť* L *je logika. Logika* L *je finitární právě tehdy, když má finitární prezentaci.*

Důkaz. Pokud je L finitární, pak ukážeme, že množina konsekucí

$$\mathcal{A}S = \{T \rhd \varphi \mid T \text{ je konečná množina a } T \vdash_L \varphi\}$$

je prezentací L. Jelikož očividně $\mathcal{A}S \subseteq \mathrm{L}$, pak i $\vdash_{\mathcal{A}S} \subseteq \mathrm{L}$ (dle předchozí věty). Důkaz druhé inkluze: pokud $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, pak z finitarity L existuje konečná množina $F \subseteq T$ taková, že $F \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a tudíž $F \rhd \varphi \in \mathcal{A}S$ a proto samozřejmě $T \vdash_{\mathcal{A}S} \varphi$ (z monotonie $\vdash_{\mathcal{A}S}$).

Pro důkaz druhého směru nejprve ukážeme, že jakýkoli důkaz ve finitárním axiomatickém systému má pouze konečně mnoho listů. Z definice důkazu nemá důkazový strom nekonečnou větev a z finitarity má každý vrchol konečně mnoho předchůdců, dle Königova lemmatu musí tedy mít konečnou hloubku a proto i konečně mnoho listů. Pokud $T \vdash \varphi$, pak existuje důkaz ve finitární prezentaci, nechť F je množina formulí z T vyskytujících se listech tohoto důkazu. Tato množina je konečná a $T \vdash \varphi$. □

V případě finitární logiky můžeme důkazový strom linearizovat, vezmeme-li vhodně seřazené ohodnocení vrcholů důkazu, dostaneme posloupnost formulí, která je důkazem v klasickém slova smyslu.

V klasické logice jsme viděli dva pojmy vedoucí k definici kompaktnosti. Pro zavedení toho druhého obecně definujme:

Definice 2.13. *Teorie T je* sporná *právě tehdy, když $T \vdash \varphi$ pro každou formuli φ.*

Řekneme, že logika L *je* kompaktní*, pokud pro každou spornou teorii T existuje její sporná konečná podteorie.*

Jelikož množina všech formulí je jistě spornou teorií v každé logice, musí v každé kompaktní logice existovat konečná sporná teorie F_0. Toto je také dostatečná podmínka, aby finitarita dané logiky implikovala její kompaktnost. Jde o abstraktní verzi části poznámky 1.15.

Věta 2.14. *Nechť* L *je relace důsledku taková, že v ní existuje konečná sporná teorie F_0. Jestliže je* L *finitární, pak je i kompaktní.*

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu druhé části věty 1.14. Pokud je T sporná, pak $T \vdash \varphi$ pro každé $\varphi \in F_0$. Z finitarity L víme, že existují konečné teorie $F_\varphi \subseteq T$ takové, že $F_\varphi \vdash \varphi$. Tudíž jejich sjednocení $F = \bigcup_{\varphi \in F_0} F_\varphi$ dokazuje každou formuli $\varphi \in F_0$ a z tranzitivity relace důsledku také $F \vdash \psi$ pro každou formuli ψ. □

Poznámka 2.15. *V klasické logice je takovou množinou $F_0 = \{\varphi, \neg\varphi\}$. Existují finitární logiky, které nejsou kompaktní. V následujícím příkladě toto ukážeme o pozitivním fragmentu klasické logiky.*

Příklad 2.16. *Pozitivní fragment klasické výrokové logiky lze axiomatizovat pomocí axiomů z definice 1.3, ve které nahradíme axiom (A3) tzv. Peircovým zákonem $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$. Tento fragment je zřejmě finitární logikou, k demonstraci její nekompaktnosti použijeme větu 2.14. Předpokládejme tedy existenci konečné sporné teorie F_0. Nechť v je výroková proměnná, která se v F_0 nevyskytuje. Ze spornosti F_0 dostáváme $F_0 \vdash v$ respektive $\bigwedge_{\varphi \in F_0} \varphi \vdash v$, označíme $\psi = \bigwedge_{\varphi \in F_0} \varphi$. Pro pozitivní fragment platí věta o dedukci, tedy $\vdash \psi \to v$. Pro každé ohodnocení e platí $e(\psi) = 0$, což není možné.*

Formulace opačného tvrzení (abstraktní verze druhé části poznámky 1.15) je komplikovanější a vyžaduje jistou znalost struktury množiny formulí. Přesto můžeme formulovat obecné tvrzení, šíře jeho aplikovatelnosti je ovšem diskutabilní.

Věta 2.17. *Nechť* L *je relace důsledku, nechť D je funkce přiřazující každé formuli φ množinu formulí D_φ tak, že pro každou teorii T platí, že $T \vdash \varphi$ právě tehdy, když $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie.*

Pak je-li L *kompaktní, je i finitární.*

Důkaz. Nechť $T \vdash \varphi$, pak ovšem $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie a z definice kompaktnosti existuje její konečná sporná podteorie F. Pak ovšem i teorie $F \cup D_\varphi$ je sporná a tudíž $F \vdash \varphi$. $\square$

Pro klasickou logiku je takovou množinou $D_\varphi = \{\neg\varphi\}$.

V předchozím důkazu nebyl použit předpoklad konečnosti množiny D_φ. Jeho přidání nám ovšem umožní větu zesílit.

Věta 2.18. *Nechť* L *je relace důsledku, nechť D je funkce přiřazující každé formuli φ* konečnou *množinu formulí D_φ tak, že pro každou teorii T platí, že $T \vdash \varphi$ právě tehdy, když $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie.*

Potom platí, že L *je kompaktní právě tehdy, když* L *je finitární.*

Důkaz. Důkaz jedné implikace je důkaz předchozí věty. K důkazu druhé implikace použijeme větu 2.14. Jelikož platí $\varphi \vdash \varphi$, musí $\{\varphi\} \cup D_\varphi$ být sporná množina. Ta je dle předpokladů věty konečná, můžeme tedy použít zmíněnou větu. $\square$

2.2 Obecná sémantika a úplnost

Relaci důsledku lze často zadat pomocí určité sémantiky a relace splňování.

Definice 2.19. Sémantika *S množiny formulí For je dvojice $\langle MOD, \models\rangle$, kde MOD je třída modelů a $\models$ je relace mezi modely a formulemi.*

Řekneme, že M je model teorie *T, pokud $M \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$. Řekneme, že* teorie *T* je splnitelná v *S, pokud existuje její model. Řekneme, že S je* normální sémantika*, pokud množina For není splnitelná.*

Příklad 2.20. *Sémantika klasické logiky je dána množinou všech ohodnocení a relace* $\models$ *je definována:* $e \models \varphi$*, pokud* $e(\varphi) = 1$*. Příkladem nenormální sémantiky je sémantika pozitivního fragmentu klasické logiky (zavedena v příkladu 2.16), které je definována stejně jako pro celou klasickou logiku, ovšem ohodnocení* $e(p) = 1$ *pro každý atom splňuje každou formuli tohoto fragmentu.*

Definice 2.21. Relace vyplývání *daná sémantikou* $S = \langle MOD, \models \rangle$ *je množina konsekucí* $\models$ *definovaná následovně:*

$T \models_S \varphi$*, pokud pro každý model* M *teorie* T *platí, že* $M \models \varphi$*.*

Lemma 2.22. *Pro každou sémantiku* S *je* $\models_S$ *relace důsledku.*

Důkaz. Stačí ukázat, že $\models_S$ je reflexivní (triviální), monotónní (každý model T je jistě i modelem $R \subseteq T$) a tranzitivní (předpokládejme, že $R \models_S \varphi$ a $T \models_S \psi$ pro každou formuli $\psi \in R$; nechť M je model T, pak je i modelem každé formule $\psi \in R$ a tudíž je i modelem φ, tedy $T \models_S \varphi$). $\square$

Poznamenejme, že v případě strukturované množiny formulí bychom nemohli dokázat strukturalitu relace $\models_S$. Výše uvedená definice sémantiky je na to příliš obecná (nezaručuje například, že pokud φ je tautologie, pak i substituční instance $\sigma[\varphi]$ je tautologie), pro potřeby této práci je však postačující.

Lemma 2.23. *Nechť* S *je normální sémantika. Pak teorie* T *je sporná v* $\models_S$ *právě tehdy, když* T *není splnitelná v* S*.*

Důkaz. Sporná teorie nemá model, implikace zleva doprava tedy platí. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že T má model M. Protože S je normální, existuje formule φ taková, že $M \not\models \varphi$ a tudíž $T \not\models_S \varphi$ a T není sporná v $\models_S$. $\square$

Příklad 2.24. *Vezměme stejně jako v příkladu 2.20 pozitivní implikační fragment klasické logiky. Množina všech formulí je splnitelná, ale zároveň je sporná.*

Na základě předchozího lemmatu nebudeme v normálních sémantikách rozlišovat mezi splnitelností v S a bezesporností $\models_S$.

Definice 2.25. *Sémantika* S *je* finitární*, pokud* $\models_S$ *je finitární. Sémantika* S *je* kompaktní*, pokud* $\models_S$ *je kompaktní.*

Důsledek 2.26. *Nechť S je kompaktní normální sémantika. Pak teorie T je splnitelná, pokud je každá její konečná podteorie splnitelná.*

Nyní definujeme šest pojmů úplnosti. V klasické logice tyto pojmy splývají. Jejich zaměňování v neklasických logikách vede k terminologickým problémům. V kapitolách o fuzzy a modálních logikách ukážeme konkrétní běžně používané logiky demonstrující různost většiny těchto pojmů.

Definice 2.27. *Nechť* L *je logika a S normální sémantika, Řekneme, že*

- L *je* modelově úplná *vůči sémantice S, pokud každá formule φ je bezesporná v* L *právě tehdy, když φ je splnitelná v S.*
- L *je* deduktivně úplná *vůči sémantice S, pokud pro každou formuli φ platí: $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když $\models_S \varphi$.*
- L *je* silně modelově úplná *vůči sémantice S, pokud každá teorie T je bezesporná v* L *právě tehdy, když T je splnitelná v S.*
- L *je* konečně silně modelově úplná *vůči sémantice S, pokud každá konečná teorie T je bezesporná v* L *právě tehdy, když T je splnitelná v S.*
- L *je* silně deduktivně úplná *vůči sémantice S, pokud pro každou teorii T a formuli φ platí: $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když $T \models_S \varphi$.*
- L *je* konečně silně deduktivně úplná *vůči sémantice S, pokud pro každou konečnou teorii T a formuli φ platí: $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když $T \models_S \varphi$.*

Právě definované pojmy nejsou zcela nezávislé. Je zřejmé, že že silná deduktivní/modelová úplnost implikuje konečně silnou deduktivní/modelovou úplnost a ta implikuje deduktivní/modelovou úplnost.

V kontextu této práce bude nejdůležitější vztah konečně silných a silných verzí obou pojmů, ten totiž souvisí se zkoumanými pojmy kompaktnosti a finitarity.

Věta 2.28. *Nechť* L *je finitární logika* konečně silně deduktivně úplná *vůči normální sémantice S. Pak* L *je silně deduktivně úplná vůči S právě tehdy, když S je finitární.*

Důkaz. $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když existuje konečná podteorie $F \subseteq T$ taková, že $F \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ (z finitarity L). To je podle konečné silné deduktivní úplnosti vůči sémantice S ekvivalentní s existencí konečné podteorie $F \subseteq T$ takové, že $F \models_S \varphi$ a to je dle finitarity S ekvivaletní s $T \models_S \varphi$.

Pro důkaz druhé implikace předpokládejme, že $T \models_S \varphi$. Pak dle silné deduktivní úplnosti vůči sémantice S také $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a z finitarity L existuje konečná podteorie $F \subseteq T$ taková, že $F \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Konečná silná deduktivní úplnost vůči sémantice S dává $F \models_S \varphi$. □

Věta 2.29. *Nechť* L *je kompaktní logika* konečně silně modelově úplná *vůči normální sémantice S. Pak* L *je silně modelově úplná vůči S právě tehdy, když S je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu předchozího tvrzení: T je sporná právě tehdy, když existuje konečná sporná podteorie $F \subseteq T$ (z kompaktnosti L). To je podle konečné silné modelové úplnosti vůči sémantice S ekvivalentní s existencí nesplnitelné konečné podteorie $F \subseteq T$ a to je dle kompaktnosti S ekvivaletní s nesplnitelností T.

Pro důkaz druhé implikace předpokládejme, že je T nesplnitelná. Pak dle silné modelové úplnosti vůči sémantice S je T sporná a z kompaktnosti L existuje konečná sporná podteorie $F \subseteq T$, která je dle (konečné) silné modelové úplnosti také nesplnitelná. □

Předpoklady obou vět o finitaritě/kompaktnosti logiky L se mohou zdát silné. Ovšem v případech, kdy zjišťujeme úplnost nějaké konkrétní logiky vůči nějaké sémantice, máme tuto logiku většinou zadanou syntakticky pomocí finitárního axiomatického systému, který dle věty 2.14 implikuje kompaktnost.

Pro přechod od konečně silné k silné úplnosti je tedy třeba předpokládat finitaritu/kompaktnost. Nyní ukážeme podmínky pro přechod od úplnosti ke konečně silné úplnosti, budeme ale muset předpokládat strukturovanost množiny formulí.

Věta 2.30. *Nechť* L *je strukturální logika modelově úplná vůči normální sémantice S a $\wedge$ binární spojka s následujícími vlastnostmi:*

- $\varphi, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \wedge \psi$, $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *a* $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$,
- $\varphi, \psi \models_S \varphi \wedge \psi$, $\varphi \wedge \psi \models_S \varphi$ *a* $\varphi \wedge \psi \models_S \psi$.

Pak L *je konečně silně modelově úplná vůči S.*

Důkaz. Pro každou konečnou teorii T jsou následující fakta ekvivalentní:

- T je sporná,
- formule $\psi = \bigwedge_{i\leq n} \varphi_i$ je sporná,
- formule $\psi = \bigwedge_{i\leq n} \varphi_i$ nemá model,
- T nemá model.

Prostřední ekvivalence je modelová úplnost a krajní ekvivalence jsou snadné důsledky předpokladů. □

Věta 2.31. *Nechť* L *je strukturální logika deduktivně úplná vůči normální sémantice S a $\to$ binární spojka taková, že pro každou konečnou teorii T a formule φ a ψ platí:*

- *$T, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ právě tehdy, když $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$,*
- *$T, \varphi \models_S \psi$ právě tehdy, když $T \models_S \varphi \to \psi$.*

Pak L *je konečně silně deduktivně úplná vůči S.*

Důkaz. Pro každou konečnou teorii $T = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ jsou následující fakta jsou ekvivalentní:

- $T \vdash \varphi$
- $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots)$
- $\models \psi_1 \to (\psi_2 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots)$
- $T \models \varphi$ nemá model.

Prostřední ekvivalence je deduktivní úplnost a krajní ekvivalence jsou snadné důsledky našich předpokladů. □

Nyní ukážeme ještě vztahy mezi modelovou a deduktivní úplnosti:

Lemma 2.32. *Nechť S je normální sémantika. Pak (konečně) silná deduktivní úplnost implikuje (konečně) silnou modelovou úplnost.*

Důkaz. T je bezesporná právě tehdy, když $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ pro nějaké $\varphi \in F_0$, což je dle (konečně) silné deduktivní úplnosti ekvivalentní s $T \not\models_S \varphi$, t.j. T je splnitelná v $\models_S$. □

Tento důkaz by nefungoval pro prokázání, že deduktivní úplnost implikuje modelovou úplnost. Všimněme si souvislosti předpokladů následující věty, s předpoklady věty 2.17 pojednávající o přechodu mezi kompaktností a finitaritou.

Věta 2.33. *Nechť S je normální sémantika a* L *je relace důsledku, nechť D je funkce přiřazující každé formuli φ (konečnou) množinu formulí D_φ tak, že pro každou teorii T platí:*

- *$T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie,*
- *$T \models_S \varphi$ právě tehdy, když $T \cup D_\varphi$ je nesplnitelná teorie.*

Pak L *je (konečně) silně modelově úplná vůči S, pokud* L *je (konečně) silně deduktivně úplná vůči S.*

Pokud je navíc množina D_φ vždy jednoprvková a L *je modelově úplná vůči S, pak je i deduktivně úplná vůči S.*

Důkaz. Jedna implikace byla dokázána v předchozím lemmatu. Víme, že $T \not\models_S \varphi$ právě tehdy, když $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie. To je podle (konečně) silné modelové úplnosti ekvivalentní nesplnitelnosti $T \cup D_\varphi$, což dle předpokladu znamená, že $T \not\models_S \varphi$. □

Na závěr zformulujeme důsledek předchozích vět ukazující, jak definované pojmy splývají v běžných logikách (klasické nebo modálních).

Důsledek 2.34. *Nechť* L *je strukturální logika, S normální sémantika, a $\to$ binární spojka taková, že pro každou konečnou teorii T a formule φ a ψ platí:*

- *$T, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ právě tehdy, když $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$,*
- *$T, \varphi \models_S \psi$ právě tehdy, když $T \models_S \varphi \to \psi$,*

a $\perp$ je nulární spojka taková, že

- *$\vdash_{\mathrm{L}} \perp \to \varphi$,*
- *$\vdash_{\mathrm{L}} ((\varphi \to \perp) \to \perp) \to \varphi$,*
- *$\models_S ((\varphi \to \perp) \to \perp) \to \varphi$.*

Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. L *je modelově úplná vůči S.*

2. L *je deduktivně úplná vůči S.*

3. L *je konečně silně deduktivně úplná vůči S.*

4. L *je konečně silně modelově úplná vůči S.*

Pokud L *je finitární nebo kompaktní logika splňující jednu z předchozích ekvivalentních vlastností, pak platí ekvivalence následujících podmínek:*

1. L *je silně deduktivně úplná vůči S.*

2. L *je silně modelově úplná vůči S.*

3. *S je kompaktní.*

4. *S je finitární.*

Důkaz. Pro důkaz první implikace použijeme větu 2.33. Ukážeme, že množina $D_\varphi = \{\varphi \to \bot\}$ splňuje předpoklady této věty. Nejprve si všimněme, že z $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$ dostaneme $\varphi \to \psi, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$, tedy že logika splňuje modus ponens. Z předpokladů o spojce $\bot$ tedy plyne, že $\{\bot\}$ je sporná teorie a z modelové úplnosti je i nesplnitelná.

Pokud $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, použitím modus pones dostáváme, že $T, \varphi \to \bot \vdash \bot$ a tedy $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie. Pokud $T \cup D_\varphi$ je sporná teorie, tak $T, \varphi \to \bot \vdash \bot$, a tedy i $T \vdash (\varphi \to \bot) \to \bot$. Modus ponens a druhý předpoklad o $\bot$ dává $T \vdash \varphi$. Důkaz obdobného faktu pro $\models_S$ je analogický.

Druhá implikace plyne přímo z věty 2.31, třetí z lemmatu 2.32 a poslední je triviální.

Dále se věnujme druhé skupině vlastností. Nejprve si uvědomme, že finitarita a kompaktnost logiky L i sémantiky S jsou ekvivalentní (podle věty 2.18, jejíž předpoklady jsme dokázali v první části tohoto důkazu.) Čtyři potřebné implikace dostaneme následovně: první plyne přímo z věty 2.31, druhá z věty 2.29, třetí z pozorování na začátku důkazu této části a poslední z věty 2.28.

□

Kapitola 3

Kompaktnost ve fuzzy logikách

Fuzzy logiky jsou neklasické vícehodnotové logiky, místo dvou klasických pravdivostních hodnot v nich pracujeme s hodnotami z reálného intervalu $[0, 1]$. Budeme studovat tři základní fuzzy logiky – Łukasiewiczovu, Gödelovu a produktovou logiku, které dostaneme rozšířením tzv. basic logic, kterou definoval Petr Hájek ve své knize [11]. Všechny definice a výsledky v první části této kapitoly jsou převzaty z této knihy. V druhé části se budeme věnovat studiu kompaktnosti a finitárnosti v těchto třech hlavních fuzzy logikách a jejich běžných sémantikách, ukážeme mimo jiné, že tyto logiky mají přirozené sémantiky, které jsou kompaktní, ale ne finitární, a tudíž jsou tyto logiky vůči těmto sémantikám pouze *konečně* silně úplné. V třetí části zobecníme pojem sémantiky: budeme studovat kompaktnost tříd sémantik indexovaných podmnožinami intervalu $[0, 1]$.

3.1 Basic Logic a její axiomatická rozšíření

Axiomy basic logic jsou definovány v jazyce $(\&, \to, \overline{0})$, kde $\&$ a $\to$ jsou binární spojky a $\overline{0}$ je konstanta (spojka četnosti 0). Další spojky, se kterými budeme pracovat i v Łukasiewiczově, Gödelově a produktové logice, budou pomocí těchto spojek definovatelné:

- $\varphi \wedge \psi$ je definována $\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)$,
- $\varphi \vee \psi$ je definována $((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$,
- $\neg\varphi$ je definována $\varphi \to \overline{0}$,

- $\varphi \equiv \psi$ je definována $(\varphi \to \psi)\ \&\ (\psi \to \varphi)$.

Definice 3.1. Logika BL *(basic logic) je dána axiomatickým systémem s axiomy*

(A1)	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(A2)	$(\varphi \& \psi) \to \varphi$
(A3)	$(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$
(A4)	$\varphi \& (\varphi \to \psi) \to \psi \& (\psi \to \varphi)$
(A5a)	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$
(A5b)	$((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
(A6)	$((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
(A7)	$\overline{0} \to \varphi$

a dedukčním pravidlem modus ponens.

Ve smyslu předchozí kapitoly budeme logikou BL rozumět relaci důsledku s prezentací danou výše uvedeným axiomatickým systémem, stejně tak i pro další logiky, které nyní zavedeme.

Definice 3.2. Axiomatické rozšíření logiky BL *je logika vzniklá přidáním axiomů k axiomatickému systému BL.*

Jak už bylo napsáno v úvodu kapitoly, v této práci se budeme zabývat třemi základními fuzzy logikami:

- Łukasiewiczova logika ([13]), značíme Ł, je rozšířením logiky BL o axiom dvojité negace

  $(\neg\neg)\ \neg\neg\varphi \to \varphi$

- Gödelova logika ([9]), značíme G, je rozšířením logiky BL o axiom idempotence

  $(G)\ \varphi \to (\varphi \& \varphi)$

- Produktová logika ([10]), značíme Π, je rozšířením logiky BL o axiom

  $(\Pi)\ \neg\neg\varphi \to ((\varphi \to \varphi \& \psi) \to \psi \& \neg\neg\psi)$

Dále se budeme zabývat sémantikou logiky BL – tzv. BL-algebrami. Lze ukázat (viz Hájek [11]), že logika BL je úplná vůči třídě BL-algeber a vůči třídě lineárních BL-algeber. Zvlášť se budeme zabývat standardními BL-algebrami.

Definice 3.3. BL-algebra *je struktura* $\mathbf{A} = (A, \cup, \cap, *, \Rightarrow, 0_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}})$*, kde* $0_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}}$ *jsou konstanty a* $\cup, \cap, *, \Rightarrow$ *jsou binární operace, takové, že:*

(1) $(A, \cup, \cap, 0_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}})$ je svaz,

(2) $(A, *, 1_{\mathbf{A}})$ je komutativní monoid,

(3) $z \leq (x \Rightarrow y)$ právě tehdy, když $x * z \leq y$,

(4) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,

(5) $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1_{\mathbf{A}}$.

BL-algebra je *lineární*, pokud je svazové uspořádání lineární. BL-algebra je *standardní*, pokud je jejím nosičem interval $[0, 1]$ a $\cup$ a $\cap$ jsou interpretovány jako max a min.

Poznámka 3.4. *Jednoprvková množina se zřejmě definovanými operacemi také splňuje definici BL algebry. Předpokládejme však od této chvíle, že všechny BL-algebry, se kterými budeme dále pracovat, jsou alespoň dvouprvkové (tento předpoklad zaručí normalitu sémantik příslušných logik, sémantika pro jednoprvkový případ normální není).*

Standardní BL-algebry budeme nyní nahlížet jako algebry založené na tzv. spojitých t-normách. Uveďme nejprve definici t-normy a jejího rezidua.

Definice 3.5. *T-norma* $*$ *je binární operace na intervalu* $[0, 1]$ *s následujícími vlastnostmi: Pro libovolné* $x, y, z \in [0, 1]$

- *(komutativita* $*$*)* $x * y = y * x$
- *(asociativita* $*$*)* $x * (y * z) = (x * y) * z$
- *(*$*$ *je neklesající v obou argumentech)* $x \leq y$*, pak* $x * z \leq y * z$
  $x \leq y$*, pak* $z * x \leq z * y$
- *(1 je neutrální prvek)* $1 * x = x$ *a* $x * 1 = x$

Pokud je funkce $*$ *spojitá, hovoříme o spojité t-normě.*

Důležitými (a lze ukázat, že v jistém smyslu základními) příklady t-norem jsou následující funkce

- Gödelova t-norma: $(x *_G y) = \min(x, y)$
- Łukasiewiczova t-norma: $(x *_{\text{Ł}} y) = \max(x + y - 1, 0)$
- produktová t-norma: $(x *_\Pi y) = x.y$

Definice 3.6. *Nechť $*$ je spojitá t-norma. Reziduum t-normy $*$ je funkce $\Rightarrow$ na intervalu $[0, 1]$ definovaná vztahem $x \Rightarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$.*

Poznámka 3.7. *Reziduum příslušné t-normy je určeno jednoznačně.*

Rezidua výše uvedených základních t-norem jsou:

$$
\begin{aligned}
x \Rightarrow_G y &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \leq y\ , \\ y & \text{jinak}\ , \end{cases} \\
x \Rightarrow_{\,L} y &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \leq y\ , \\ 1 - x + y & \text{jinak}\ . \end{cases} \\
x \Rightarrow_\Pi y &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \leq y\ , \\ \dfrac{y}{x} & \text{jinak}\ . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Reziduum $x \Rightarrow_{\text{Ł}} y$ je spojité, $x \Rightarrow_\Pi y$ není spojité v bodě $(0, 0)$ a $x \Rightarrow_G y$ není spojité v bodech (x, x), $0 \leq x < 1$.

Poznámka 3.8. *Operace $*$ a jejich příslušná residuua odpovídají sémantické definici spojky konjunkce & ve třech základních fuzzy logikách a rezidua odpovídají příslušným implikacím $\Rightarrow$.*

Věta 3.9. *Nechť $*$ je spojitá t-norma a $\Rightarrow$ je její reziduum. Struktura $[0, 1]_* = ([0, 1], \max, \min, *, \Rightarrow, 0, 1)$ je standardní BL-algebra, označíme ji $*$-standardní BL-algebra.*

Naopak v každé standardní BL-algebře $([0, 1], \max, \min, *, \Rightarrow, 0_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}})$, je $*$ spojitá t-norma a $\Rightarrow$ je její reziduum.

Pro tři základní t-normy tak dostaneme tři rozšíření BL-algeber:

Definice 3.10. *MV-algebra je standardní BL-algebra, ve které platí identita*

$$x = ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0).$$

Definice 3.11. *G-algebra je standardní BL-algebra, ve které platí identita*

$$x = x * x.$$

Definice 3.12. Π*-algebra (produktová algebra) je standardní BL-algebra, ve které platí:*

$$\neg\neg x \leq ((x \Rightarrow x * y) \Rightarrow (y * \neg\neg y)).$$

Tyto definice můžeme zobecnit pro libovolné axiomatické rozšíření BL. Nejprve definujme:

Definice 3.13. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je BL-algebra.* $\mathbf{A}$*-ohodnocení výrokových proměnných je zobrazení* $e\colon \mathrm{Var} \to A$.

Ohodnocení proměnných obvyklým způsobem rozšíříme na ohodnocení formulí:

- $e(0_{\mathbf{A}}) = 0$
- $e(\varphi \& \psi) = e(\varphi) * e(\psi)$
- $e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)$,

pro ostatní spojky je hodnota e dána na základě jejich definovatelnosti. Řekneme, že formule φ je $\mathbf{A}$-tautologie, pokud pro každé A-ohodnocení e platí $e(\varphi) = 1_{\mathbf{A}}$.

Definice 3.14. *Nechť* L *je axiomatické rozšíření BL. Řekneme, že BL-algebra* $\mathbf{A}$ *je* L*-algebra, pokud každý teorém* L *je* $\mathbf{A}$*-tautologie.*

Poznámka 3.15. *V případě Łukasiewiczovy logiky Ł mluvíme z historických důvodů o MV-algebrách místo o Ł-algebrách. Pomocí vlastností BL-algeber lze snadno ukázat, že definice MV-algeber, G-algeber a* Π*-algeber jsou jen speciálním případem této obecné definice.*

Poznámka 3.16. *Existuje pouze jedna standardní G-algebra (daná minimovou t-normou a jejím reziduem) a každá standardní MV-algebra (*Π*-algebra) je izomorfní se standardní MV-algebrou (*Π*-algebrou) danou Łukasiewiczovou (produktovou) t-normou a jejím reziduem. Tyto tři speciální standardní algebry budeme značit* $[0,1]_G$, $[0,1]_Ł$, *a* $[0,1]_\Pi$ *a dále budeme tyto algebry považovat za jediné standardní algebry příslušných logik.*

Definice 3.17. *Pro každé* L *axiomatické rozšíření BL definujeme tři různé sémantiky*

- *obecná:* $\langle\{(\mathbf{A}, e) \mid \mathbf{A}$ *je* L*-algebra, e je* $\mathbf{A}$*-ohodnocení*$\}, \models\rangle$
- *lineární:* $\langle\{(\mathbf{A}, e) \mid \mathbf{A}$ *je lineární* L*-algebra, e je* $\mathbf{A}$*-ohodnocení*$\}, \models\rangle$
- *standardní:* $\langle\{(\mathbf{A}, e) \mid \mathbf{A}$ *je standardní* L*-algebra, e je* $\mathbf{A}$*-ohodnocení*$\}, \models\rangle$

a relace $\models$ *je vždy definována jako* $(\mathbf{A}, e) \models \varphi$ *pokud* $e(\varphi) = 1_{\mathbf{A}}$.

Připomeňme, že díky úmluvě v poznámce 3.4 jsou tyto sémantiky normální.

Poznámka 3.18. *Dále si všimněme, že ve smyslu poznámky před touto definicí je např. standardní sémantiku Łukasiewiczovi logiku možno zjednodušit následujícím způsobem:* $\langle\{e \mid e$ *je* $[0,1]_Ł$*-ohodnocení*$\}, \models\rangle$*, kde* $e \models \varphi$ *pokud* $e(\varphi) = 1_{\mathbf{A}}$*, což mnohem více připomíná sémantiku klasické logiky.*

Tvrzení o deduktivní úplnosti v následující větě jsou dokázány v [11], tvrzení o modelové úplnost jsou pak důsledkem lemmatu 2.32.

Věta 3.19.

- *Nechť* L *je axiomatické rozšíření BL. Pak* L *je silně deduktivně i modelově úplná vůči obecné i lineární sémantice.*
- *Łukasiewiczova a produktová logika jsou konečně silně deduktivně i modelově úplné vůči standardní sémantice.*
- *Gödelova logika je silně deduktivně i modelově úplná vůči standardní sémantice.*

Silná modelová a deduktivní úplnost vůči standardní sémantice souvisí s finitaritou a kompaktností a bude obsahem příští kapitoly, kde také ukážeme, že Łukasiewiczova a produktová logika jsou silně modelově, ale ne deduktivně, úplné vůči své standardní sémantice, protože jejich standardní sémantika je kompaktní, ale ne finitární.

3.2 Finitarita a kompaktnost

Lemma 3.20. *Nechť* L *je axiomatické rozšíření BL. Teorie* $\{\overline{0}\}$ *je v* L *sporná.*

Důkaz. Použitím pravidla modus ponens na axiom (A7) $\overline{0} \to \varphi$ dostáváme dokazatelnost libovolné formule v $\{\overline{0}\}$. □

Chápeme-li logiku BL jako relaci důsledku danou výše uvedeným axiomatickým systémem lemma 2.12 a věta 2.14 říkají:

Věta 3.21. *Každé axiomatické rozšíření BL je finitární a kompaktní relace důsledku.*

To samé platí o obecné a lineární sémantice těchto logik (viz. věty 3.19, 2.28 a 2.29). Nyní ukážeme, jak je to s kompaktností standardní sémantiky. Důkaz pro Łukasiewiczovu logiku je z článku [3] (všimněme si, že jde o přímou analogii topologického důkazu kompaktnosti klasické logiky), pro druhé dvě logiky lze důkaz nalézt v [11].

Věta 3.22. *Standardní sémantika Łukasiewiczovy, produktové i Gödelovy logiky je kompaktní.*

Důkaz. Nechť L je produktová nebo Gödelova logika. Nechť formule φ' vznikla z formule φ nahrazením všech výrokových proměnných v formulí $\neg\neg v$. Dvojitá negace v obou logikách má následující standardní sémantiku:

$$e(\neg\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } e(\varphi) > 0\ , \\ 0 & \text{pokud } e(\varphi) = 0\ . \end{cases}$$

Indukcí dokážeme, že $e(\neg\neg\varphi) = e(\varphi')$.

Pokud φ je výroková proměnná, je rovnost zřejmá.

a) Pokud $\varphi = \psi \mathbin{\&} \chi$, platí $e(\varphi) = e(\psi) \mathbin{\&} e(\chi)$. Dále platí následující ekvivalence: $e(\neg\neg\varphi) = 1$ právě tehdy, když $e(\psi) > 0$ a zároveň $e(\chi) > 0$ právě tehdy, když $e(\neg\neg\psi) = 1$ a zároveň $e(\neg\neg\chi) = 1$ právě tehdy, když $e(\psi') = 1$ a zároveň $e(\chi') = 1$ právě tehdy, když $e(\varphi') = e(\psi' \mathbin{\&} \chi') = 1$.

b) Pokud $\varphi = \psi \to \chi$, platí následující ekvivalence: $e(\neg\neg\varphi) = 0$ právě tehdy, když $e(\psi \to \chi) = 0$ právě tehdy, když $e(\psi) > 0$ a zároveň $e(\chi) = 0$ právě tehdy, když $e(\neg\neg\psi) = 1$ a zároveň $e(\neg\neg\chi) = 0$ právě tehdy, když $e(\psi') = 1$ a zároveň $e(\chi') = 0$ právě tehdy, když $e(\varphi') = e(\psi' \to \chi') = 0$.

Dále ukážeme, že formule φ je splnitelná v klasické logice právě tehdy, když je standardně splnitelná v L: Implikace zleva doprava je zřejmá. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že φ je standardně splnitelná, tj. existuje ohodnocení e takové, že $e(\varphi) = 1$. Pak ale i $e(\neg\neg\varphi) = 1$ a dle výše dokázaného tvrzení je také $e(\varphi') = 1$. Definujme klasické ohodnocení $e'(v) = e(\neg\neg v)$ a všimněme si, že $e'(\varphi) = 1$. Tento argument lze rozšířit na množiny formulí (tj. teorie T je splnitelná v klasické logice právě tehdy, když je standardně splnitelná v L). Tudíž kompaktnost standardní sémantiky produktové i Gödelovy logiky přímočaře plyne z kompaktnosti klasické logiky.

Nyní ukážeme kompaktnost Łukasiewiczovy logiky. Jak již bylo řečeno, důkaz je zcela analogický topologickému důkazu kompaktnosti klasické logiky, pro úplnost ho však uvedeme.

Předpokládejme na množině $[0,1]$ běžnou topologii (otevřené množiny jsou sjednocení otevřených intervalů tvořících bázi této topologie) a na $[0,1]^{\mathrm{Var}}$ produktovou topologii, jejíž bází je množina σ, pro kterou platí: $(A_v)_{v\in\mathrm{Var}} \in \sigma$ právě tehdy, když existuje pouze konečný počet indexů $v \in \mathrm{Var}$ takových, že $A_v \neq [0,1]$, a tyto množiny jsou otevřené v $[0,1]$. Je známé, že první topologický prostor je kompaktní a proto je kompaktní i ten druhý (z Tichonovovy věty [16, Theorem 17.8]). Prvky $[0,1]^{\mathrm{Var}}$ přirozeně odpovídají ohodnocením: pro $x = (a_v)_{v\in\mathrm{Var}} \in [0,1]^{\mathrm{Var}}$ definujeme $e_x(v) = a_v$ a pro ohodnocení e definujeme $x_e = (e(v))_{v\in\mathrm{Var}} \in [0,1]^{\mathrm{Var}}$. Pro každou formuli φ definujeme zobrazení $V_\varphi\colon [0,1]^{\mathrm{Var}} \to [0,1]$ následovně: $V_\varphi(x) = e_x(\varphi)$. Takto definované zobrazení je spojité, protože hodnota formule záleží pouze na konečně mnoha proměnných a funkce interpretující spojky v Łukasiewiczově logice jsou spojité a složení spojitých funkcí je spojité.

Jelikož množina $\{1\}$ je uzavřená, je její vzor $V_\varphi^{-1}(\{1\})$ uzavřená množina v $[0,1]^{\mathrm{Var}}$. Uvažme systém uzavřených množin $(V_\varphi^{-1}(\{1\}))_{\varphi\in T}$ a ukážeme, že tento systém je centrovaný (každý jeho konečný podsystém má neprázdný průnik). Nechť je takový systém dán množinou indexů $F \subseteq T$. Pak víme, že existuje ohodnocení e splňující F a jistě $x_e \in \cap_{\varphi\in F} V_\varphi^{-1}(\{1\}))$. Z kompaktnosti $[0,1]^{\mathrm{Var}}$ víme, že každý centrovaný systém uzavřených množin má neprázdný průnik, nechť x je nějaký prvek tohoto průniku. Pak jistě ohodnocení e_x splňuje teorii T. □

Nyní ukážeme, že standardní sémantiky Łukasiewiczovy a produktové logiky nejsou finitární, a tudíž jsou tyto sémantiky příkladem kompaktních nefinitárních sémantik. V následující větě použijeme pro n-násobnou konjunkci stejných formulí zkratku φ^n, můžeme ji induktivně definovat jako $\varphi^1 = \varphi$ a $\varphi^{n+1} = \varphi \& \varphi^{n+1}$.

Věta 3.23. *Standardní sémantika Łukasiewiczovy a produktové logiky není finitární.*

Důkaz. Pro Łukasiewiczovu logiku ukážeme:

1. $\{\neg q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, p \to q \models q$

2. pro každé $k \in \mathsf{N}$ platí $\{\neg q \to p^n \mid n \leq k\}, p \to q \not\models q$

Protože každá konečná podteorie $\{\neg q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, p \to q$ je podteorií teorie $\{\neg q \to p^n \mid n \leq k\}, p \to q$ pro nějaké k, bude finitarita standardní sémantiky pro Łukasiewiczovu logiku vyvrácena.

Pro každé ohodnocení e budeme v této části předpokládat $e(p) = x$ a $e(q) = y$. Nejprve spočítejme sémantiku x^n Pro $x = 1$ máme samozřejmě $x^n = 1$, pro $x < 1$ máme:

$$x^n = \begin{cases} nx - n + 1 > 0 & \text{pokud } x > \frac{n-1}{n} \text{ ,} \\ 0 & \text{jinak ,} \end{cases}$$

Pro bod 1 platí: Nechť e je ohodnocení takové, že $y < 1$. Pokud ukážeme, že e není model $\{\neg q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, p \to q$ je důkaz této části hotov. Budeme postupovat sporem: nechť e je model $\{\neg q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, p \to q$. Z $x \to y = 1$ a $y < 1$ víme, že $x < 1$. Pro libovolné n dále víme, že $\neg y \to x^n = 1$ a $\neg y > 0$ (protože $y < 1$) dostaneme $x^n > 0$, což dle sémantiky x^n pro $x < 1$ znamená $x > \frac{n-1}{n}$ pro každé n. Tudíž $x = 1$ což je hledaný spor.

Pro bod 2. definujeme ohodnocení e, které bude protipříkladem: $x = y = \frac{2k-1}{2k}$. Všimněme si, že stačí ukázat $x \leq y < 1$ a $1 - y \leq x^k$ (což samozřejmě implikuje $1 - y \leq x^n$ pro každé $n \leq k$). Protože $\frac{2k-1}{2k} > \frac{k-1}{k}$ máme $x^k = \frac{2k-1}{2} - k + 1 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2k} = 1 - \frac{2k-1}{2k} = 1 - y$.

Pro produktovou logiku použijeme analogickou úvahu pro následující protipříklad:

1. $\{q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, \neg\neg q \models p$

2. pro každé $k \in \mathsf{N}$ platí $\{q \to p^n \mid n \leq k\}, \neg\neg q \not\models p$

Opět označíme $e(p) = x$ a $e(q) = y$. Sémantika x^n pro produktovou logiku vychází prostá algebraická mocnina $e(p^n) = x^n$.

Pro bod 1 platí: Nechť e je ohodnocení takové, že $x < 1$. Opět ukážeme, že e není model $\{q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, \neg\neg q$. Znovu dokazujeme sporem: nechť e je model $\{q \to p^n \mid n \in \mathsf{N}\}, \neg\neg q$. Z $\neg\neg y = 1$ dostáváme $y > 0$. Pro libovolné n dále víme, že $y \to x^n = 1$. Dostaneme tedy $y \leq x^n$ pro každé n, což (protože $x < 1$) splňuje jen $y = 0$ a to je hledaný spor.

Stejně jako pro Łukasiewiczovu logiku pro bod 2. definujeme ohodnocení e, které bude protipříkladem. Stačí, aby takové ohodnocení splňovalo $0 < y$

$\leq x^n < 1$ pro každé $n \leq k$, tedy stačí vzít libovolné x takové, že $0 < x < 1$ a definovat $y = x^k$.

□

Z věty 2.17 dostáváme následující zajímavý důsledek.

Důsledek 3.24. *Nechť S je standardní sémantika Łukasiewiczovy nebo produktové logiky. Neexistuje žádná funkce D přiřazující každé formuli φ množinu formulí D_φ taková, že pro každou teorii T platí, že $T \models_S \varphi$ právě tehdy, když $T \cup D_\varphi$ je nesplnitelná teorie v S.*

Nyní použijeme obecné věty z předchozí kapitoly (věty 2.28 a 2.29) a větu o úplnosti pro fuzzy logiky z předchozí sekce (věta 3.19) a odvodíme:

Důsledek 3.25.

- *Łukasiewiczova a produktová logika nejsou silně deduktivně úplné vůči standardní sémantice.*
- *Łukasiewiczova, produktová a Gödelova jsou silně modelově úplné vůči standardní sémantice.*
- *Standardní sémantika Gödelovy logiky je finitární.*

3.3 Zobecněná kompaktnost: K-kompaktnost

Další možné zobecnění pojmu kompaktnost vychází z vícehodnotovosti fuzzy logik. V klasické výrokové logice je sémantická kompaktnost pro množinu formulí T a formuli φ formulována (viz.věta 1.25, bod 1) následovně: Pokud každá konečná množina $F \subseteq T$ má model, pak T má model. Tedy pokud pro každou konečnou $F \subseteq T$ existuje ohodnocení e takové, že $e[F] = 1$, pak existuje i ohodnocení e takové, že $e[T] = 1$. Pojem K-kompaktnosti toto zobecňuje a to rozšířením splnitelnosti z jedné na více pravdivostních hodnot (na množinu hodnot K), klasická logika je pak speciálním případem a její pojem kompaktnosti odpovídá $\{1\}$-kompaktnosti.

V této části se omezíme na studium Łukasiewiczovy, produktové nebo Gödelovy logiky. Dále se omezíme na standardní sémantiku těchto logik (která je, jak víme, jednoznačně určena) a budeme volit $K \subseteq [0, 1]$.

Důkazy tvrzení v této části jsou převzaty z článků [8] (pro Łukasiewiczovu a produktovou logiku) a [6] (pro Gödelovu logiku, zde ovšem došlo ke značným úpravám, článek se totiž soustředí na komplikovanější formu Gödelovy logiky, proto došlo k přeformulaci a transformaci důkazů a tvrzení na naši úroveň).

Ne všechny výsledky v těchto článcích jsou původní, u takových budeme uvádět odkazy na originální práce, nebude-li žádný odkaz uveden, jedná se o výsledky příslušného ze dvou zmíněných článků.

Definice 3.26. *Nechť T je množina formulí a $K \subseteq [0,1]$. Řekneme, že T je* K-splnitelná, *jestliže existuje ohodnocení e takové, že pro všechny $\varphi \in T$ platí $e(\varphi) \in K$. Množina T je* konečně K-splnitelná, *jestliže je každá konečná podmnožina množiny T K-splnitelná.*

Definice 3.27. *Řekneme, že logika je* K-kompaktní, *jestliže pro ní platí ekvivalence pojmů K-splnitelnosti a konečné K-splnitelnosti.*

Ve smyslu předchozí kapitoly je K-kompaktnost např. Łukasiewiczovy logiky kompaktností následující sémantiky: $\langle\{e \mid e \text{ je } [0,1]_{\mathrm{L}}\text{-ohodnocení}\}, \models\rangle$, kde $e \models \varphi$, pokud $e(\varphi) \in K$ (viz. poznámka 3.18). Pro K neobsahující současně 0 a 1 (viz. následující poznámka) je tato sémantika normální. Z historických důvodů budeme ale hovořit o K-kompaktnosti Łukasiewiczovy logiky místo o kompaktnosti výše zmíněné sémantiky. Také se budeme zabývat pouze pojmem kompaktnosti (ve smyslu kapitoly 2), protože relace vyplývání indukované většinou těchto sémantik nejsou *strukturální* relace důsledku.

Poznámka 3.28. *Pokud jsou současně 0 i 1 prvky K, platí ekvivalence K-splnitelnosti a konečné K-splnitelnosti pro libovolnou množinu T vždy. Při každém ohodnocení všech atomů vyskytujících se ve formulích z T hodnotami 0 nebo 1, bude totiž i hodnota každé formule z T 0 nebo 1 (viz. sémantika spojek ve standardních sémantikách všech tří logik).*

Budeme proto uvažovat pouze taková K, která současně 0 a 1 neobsahují.

Łukasiewiczova logika

Začneme modifikací důkazu věty 3.22 pro Łukasiewiczovu logiku. Symbolem $\mathbb{N}_1$ označuje množinu kladných přirozených čísel.

Věta 3.29 ([3]). *Łukasiewiczova logika je K-kompaktní pro všechny uzavřené $K \subseteq [0,1]$.*

Důkaz. Topologie na množinách $[0,1]$ a $[0,1]^{\mathrm{Var}}$ a funkce $V_\varphi\colon [0,1]^{\mathrm{Var}} \to [0,1]$ definujeme jako v důkazu věty 3.22 pro Łukasiewiczovu logiku. Připomeňme, že oba prostory jsou kompaktní, funkce V_φ jsou spojité a prvky $[0,1]^{\mathrm{Var}}$

přirozeně odpovídají ohodnocením: pro $x = (a_v)_{v\in\mathrm{Var}} \in [0,1]^{\mathrm{Var}}$ definujeme $e_x(v) = a_v$ a pro ohodnocení e definujeme $x_e = (e(v))_{v\in\mathrm{Var}} \in [0,1]^{\mathrm{Var}}$.

Jelikož množina K je uzavřená, je její vzor $V_\varphi^{-1}(\{1\})$ uzavřená množina v $[0,1]^{\mathrm{Var}}$. Stejně jako předtím je systém uzavřených množin $(V_\varphi^{-1}(K))_{\varphi\in T}$ centrovaný. Z kompaktnosti $[0,1]^{\mathrm{Var}}$ tedy víme, že každý centrovaný systém uzavřených množin má neprázdný průnik, nechť x je nějaký prvek tohoto průniku. Pak jistě ohodnocení $e_x[T] \subseteq K$. □

Bez předpokladu uzavřenosti množin K by důkaz nefungoval; ukážeme, že pro množiny K, které nejsou uzavřené, K-kompaktnost v Łukasiewiczově logice neplatí.

K důkazu využijeme následující dvě lemmata a McNaughtonovu větu (viz. např. [5]).

Lemma 3.30. *Nechť $a, b \in [0,1], a \leq b$. Pak existuje formule $\psi_{a,b}$ s jedním atomem v, pro kterou v Łukasiewiczově logice platí:*

$$\begin{aligned} e(v) < a &\implies e(\psi_{a,b}) = 0\ , \\ e(v) > b &\implies e(\psi_{a,b}) = 1\ . \end{aligned}$$

Důkaz. V důkazu použijeme McNaughtonovu větu. Podle ní existuje formule $\psi_{a,b}$ s jedním atomem v popisující spojitou po částech lineární funkci f danou pomocí racionálních čísel $c, d \in (a,b)$, $c < d$, a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \leq c\ , \\ \frac{x-c}{d-c} & \text{pokud } c \leq x \leq d\ , \\ 1 & \text{pokud } x \geq d\ . \end{cases}$$

□

Formule $\psi_{a,b}$ v předchozím lemmatu není dána jednoznačně.

Lemma 3.31. *Nechť $a, a', b', b \in [0,1]$, $a < a' < b' < b$. Pak existuje formule φ s jedním atomem v v Łukasiewiczově logice taková, že:*

$$e(\varphi) = \begin{cases} 0 & \textit{pokud } e(v) \leq a\ , \\ e(v) & \textit{pokud } a' \leq e(v) \leq b'\ , \\ 0 & \textit{pokud } e(v) \geq b\ . \end{cases}$$

Důkaz. Uvažme $\varphi = v \wedge \psi_{a,a'} \wedge \neg\psi_{b',b}$, kde $\psi_{a,a'}, \psi_{b',b}$ jsou formule zkonstruované v předchozím lemmatu 3.30. Pak φ je hledanou formulí. $\square$

Věta 3.32. *Łukasiewiczova logika není K-kompaktní pro žádnou neuzavřenou množinu $K \subseteq [0,1]$.*

Důkaz. Připomeňme, že pracujeme pouze s takovými množinami K, které neobsahují současně 0 i 1.

Protože K není uzavřená, v K existuje posloupnost bodů jdoucí k $b \notin K$. Vyberme z této posloupnosti monotónní podposloupnost, označme ji $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_1}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je tato posloupnost ostře rostoucí, pro případ ostře klesající bychom příslušnou část důkazu modifikovali tak, že bychom použili negace formulí. Dále předpokládejme, že $b \neq 1$. Vezměme libovolnou ostře klesající posloupnost $(b_i)_{i \in \mathbb{N}_1}$ jdoucí k b. Předpokládejme nejdříve, že $0 \notin K$. Nechť v je libovolný pevně zvolený atom. Dle lemmatu 3.31 pro každé i zkonstruujeme formuli φ_i s jedním atomem v takovou, že

$$e(\varphi_i) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } e(v) \leq a_i \ , \\ e(v) & \text{pokud } a_{i+1} \leq e(v) \leq b_{i+1} \ , \\ 0 & \text{pokud } e(v) \geq b_i \ . \end{cases}$$

Uvažme množinu obsahující v a všechny formule φ_i, označme ji $T = \{v\} \cup \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}_1\}$. Každá konečná podmnožina T je K-splnitelná: pro každou konečnou podmnožinu vezmeme j největší index formule φ_i se v ní vyskytující a definujeme $e(v) = a_{j+1}$, pak jistě $e(\varphi_i) = a_{j+1}$ pro každé $i \leq j$ a jelikož $a_{j+1} \in K$ je důkaz této části hotov.

Ukážeme, že T není K-splnitelná. Každá formule φ_i je K-splnitelná jen pro $e(v) \in (a_i, b_i)$, jinak je $e(\varphi_i) = 0$ a výše předpokládáme, že $0 \notin K$. Pro K-splnitelnost celé množiny T tedy musí být $e(v)$ z průniku všech intervalů (a_i, b_i), $i \in \mathbb{N}_1$. Průnik všech intervalů však obsahuje pouze b, které není prvkem K.

Důkaz pro ostře klesající posloupnost a pro K takové, že $1 \notin K$, je analogický. $\square$

Věta 3.33. *Nechť $K \subseteq [0,1]$ neobsahuje současně 0 i 1. Pak je Łukasiewiczova logika K-kompaktní právě tehdy, když K je uzavřená množina.*

Pro Łukasiewiczovu logiku máme tedy úplnou charakterizaci K-kompaktnosti pro různé množiny K. Všimněme si, že tento výsledek nezávisí na kardinalitě množiny výrokových proměnných, důkaz pozitivních případů funguje obecně a pro konstrukci protipříkladu v negativních případech nám stačí jediná výroková proměnná.

Produktová logika

Začneme modifikací důkazu věty 3.22 pro produktovou a Gödelovu logiku.

Lemma 3.34. *Nechť $K \subseteq (0,1]$ a $1 \in K$. Potom je produktová i Gödelova logika K-kompaktní. Obě tyto logiky jsou také $\{0\}$-kompaktní.*

Důkaz. Jako v důkazu věty 3.22 definujeme formuli φ', která vznikla z formule φ nahrazením všech výrokových proměnných v formulí $\neg\neg v$ a víme, že $e(\neg\neg\varphi) = e(\varphi')$.

Nyní ukažme, že formule je splnitelná v klasické logice právě tehdy, když je K-splnitelná v produktové nebo Gödelově logice: Implikace zleva doprava je zřejmá, neboť z klasických pravdivostních hodnot je $1 \in K$. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že φ je K-splnitelná, nechť e je takové ohodnocení. Pak ale $e(\neg\neg\varphi) = 1$ (protože $0 \notin K$) a dle výše dokázaného tvrzení je také $e(\varphi') = 1$. Definujme klasické ohodnocení $e'(v) = e(\neg\neg v)$ a všimněme si, že $e'(\varphi) = 1$. Tento argument lze rozšířit na množiny formulí (tj. teorie T je splnitelná v klasické logice právě tehdy, když je K-splnitelná). Tudíž K-kompaktnost produktové i Gödelovy logiky přímočaře plyne z kompaktnosti klasické logiky.

Pro důkaz druhého tvrzení nahlédněme, že formule φ je $\{0\}$-splnitelná právě tehdy, když je formule $\neg\varphi$ $\{1\}$-splnitelná. Tento argument lze opět rozšířit na množiny formulí a tudíž $\{0\}$-kompaktnost přímočaře plyne z $\{1\}$-kompaktnosti. □

Úplná charakterizace množin K, pro které je produktová logika K-kompaktní, není známa. V následující větě pouze ukážeme příklad uzavřené množiny K takové, že pro ni produktová logika není K-kompaktní (narozdíl od Łukasiewiczovy logiky; ještě poznamenejme, že analogie důkazu věty 3.29 v produktové logice nefunguje, protože funkce V_φ zde nejsou spojité). Pro konstrukci této množiny budeme potřebovat následující technické lemma o níže definované množině M

$$M = \{i - \frac{1}{j} \mid 2 \leq j \leq i\} \ ,$$

dále označíme $\frac{1}{n}M = \{\frac{1}{n}x \mid x \in M\}$.

Lemma 3.35. *Systém množin* $\{\frac{1}{n}M \mid n \in \mathbb{N}_1\}$ *má následující vlastnosti:*

1. $\bigcap\limits_{n \in F} \frac{1}{n}M \neq \emptyset$ *pro každou konečnou* $F \subseteq \mathbb{N}_1$,
2. $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{1}{n}M = \emptyset$.

Důkaz. 1. Nechť F je konečná podmnožina $\mathbb{N}_1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že má alespoň dva prvky větší než 1.

Ukážeme, že průnik $\bigcap_{n \in F} \frac{1}{n}M$ obsahuje prvek $m - \frac{1}{m}$, kde $m = \prod\limits_{i \in F} i$. Pro každé $n \in F$ je

$$\frac{m}{n} = \prod_{i \in F \setminus \{n\}} i$$

celé číslo větší než 1. Tedy $\frac{m}{n} \geq 2$, $\frac{m}{n} \leq mn$, a

$$mn - \frac{1}{\frac{m}{n}} \in M \ .$$

což je ekvivalentní

$$m - \frac{1}{m} \in \frac{1}{n}M \ .$$

2. Nechť $x \in M$. Potom existují $i, j \geq 2$ taková, že $x = i - \frac{1}{j} \in M$. Potom $jx = ij - 1 \in \mathbb{N}$, a tudíž $jx \notin M$ a

$$x \notin \frac{1}{j}M \ .$$

□

Věta 3.36. *Existuje K uzavřená podmnožina intervalu* $[0,1]$ *taková, že produktová logika není K-kompaktní.*

Důkaz. Vezměme atomickou formuli p. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, definujeme formuli φ_n:

$$\varphi_n = p \to p^{n+1} \ .$$

a funkci $f_n \colon e(p) \mapsto e(\varphi_n)$ Pro funkci f_n platí:

$$f_n(x) = (x \Rightarrow_\Pi x^{n+1}) = \begin{cases} x^n & \text{pokud} \quad x > 0 \ , \\ 1 & \text{pokud} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Definujeme množinu

$$K = \exp(-M) \cup \{0\} = \{\mathbf{e}^{-z} \mid z \in M\} \cup \{0\} \ .$$

K je podmnožinou $[0,1]$ a je uzavřená, neboť 0 je její jediný hromadný bod. Použitím lemmatu 3.35 ukážeme, že množina $T = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}_1\}$ je konečně K-splnitelná, ale ne K-splnitelná. Pro $n \in \mathbb{N}$ je množina vzorů

$$f_n^{-1}(K) = f_n^{-1}(\exp(-M)) = \Big\{\mathbf{e}^{-\frac{z}{n}} \mid z \in M\Big\} = \exp\Big(-\frac{1}{n}M\Big) \ .$$

Nechť F je konečná podmnožina $\mathbb{N}_1$ a $S = \{\varphi_n \mid n \in F\} \subseteq T$. Lemma 3.35 zaručuje existenci

$$z \in \bigcap_{n \in F} \frac{1}{n} M \ .$$

Pro ohodnocení e takové, že $e(p) = \mathbf{e}^{-z}$ dostaneme

$$e(p) \in \bigcap_{n \in F} f_n^{-1}(K) \ .$$

Pak $e(\varphi_n) = f_n(e(p)) \in K$ pro každé $n \in F$, tudíž S je K-splnitelná. Protože to platí pro každou $S \subseteq T$, je T konečně K-splnitelná.

Sporem dokážeme, že T není K-splnitelná. Nechť e je takové ohodnocení, že $e(\varphi_n) \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}_1$. Potom

$$e(p) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(K) \ ,$$

a $e(p) \in (0,1)$. Což lze vyjádřit jako $e(p) = \mathbf{e}^{-z}$ pro nějaké $z \in (0,\infty)$. Pak ale dostaneme

$$z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} M$$

což je spor s druhou částí lemmatu 3.35. □

Gödelova logika

Nejprve zavedeme následující třídy:

Definice 3.37.

- **FIN** $= \{K \subseteq [0,1] \mid K$ *je konečná*$\}$,

- $\mathbf{C}_1 = \{K \in \mathbf{C} \mid 1 \in K\} = \{K \subseteq [0,1] \mid 1 \in K \text{ } a \text{ } 0 \notin K\}$,
- $\mathbf{D} = \{K \subseteq [0,1] \mid \exists A \subseteq K(A \text{ } je \text{ } hust\acute{a} \text{ } mno\check{z}ina)\}$,

Připomeňme, že množina je hustá, pokud pro každé dva prvky $a, b \in A$ takové, že $a < b$, existuje $c \in A$ takové, že $a < c < b$. Připomeňme, že předpokládáme, že K neobsahuje současně 0 i 1. Nechť množina VAR je libovolné mohutnosti a je indexována ordinálními čísly (od jedné), $VAR_n = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ a VAR_φ je množina proměnných vyskytujících se ve formuli φ. Pokud není řečeno jinak, předpokládejme, že VAR je nekonečná spočetná množina.

Z technických důvodů je třeba pro každé reálné číslo $r \in [0,1]$ zavést pravdivostní konstantu $\mathbf{r}$. Nebude třeba mít tyto konstanty přímo v jazyce, bude stačit příslušným způsobem modifikovat definici ohodnocení a to tak, že e je funkce $VAR \cup \{\mathbf{r} \mid r \in [0,1]\} \to [0,1]$, taková, že $e(\mathbf{r}) = r$.

Definice 3.38. *Nechť $P = \{0, p_1, p_2, \dots, p_n, 1\}$. Posloupnost dvojic $((\overline{0}, <), (\mathbf{p_1}, <), (\mathbf{p_2}, <), \dots (\mathbf{p_n}, <), (\overline{1}, =))$ nazveme valuačním P-prototypem řádu 0. Pokud je posloupnost S valuačním P-prototypem řádu l pak posloupnost S' je valuačním P-prototypem řádu $l+1$ právě tehdy, pokud S' dostaneme z S přidáním dvojice $(v_{l+1}, *)$, kde $* \in \{<, =\}$ na libovolnou pozici v posloupnosti S.*

Pokud je S valuačním P-prototypem, označíme S_i jeho i-tý člen, S_i^1 první prvek dvojice S_i a S_i^2 druhý prvek dvojice S_i. $|S|$ označíme délku posloupnosti S.

Definice 3.39. *Nechť e je ohodnocení a S je valuační P-prototyp. Řekneme, že ohodnocení e respektuje S, pokud pro každé $i < |S|$ platí $e(S_i^1)\ S_i^2\ e(S_{i+1}^1)$. Množinu valuačních P-prototypů řádu n označíme EP_n^P.*

Každá množina EP_n^P je konečná, EP_0^P je dokonce jednoprvková, ztotožníme proto značení pro ni a pro její prvek. Dále si všimněme, že pokud e respektuje S, pro $i \leq j$ platí $e(S_i^1) \leq e(S_j^1)$.

Lemma 3.40. *Nechť φ je formule taková, že $VAR_\varphi \subseteq VAR_n$ a $S \in EP_n^P$. Pak existuje index i takový, že pro každé ohodnocení e respektující S platí $e(\varphi) = e(S_i^1)$.*

Důkaz. Lemma dokážeme indukcí podle složitosti formule φ.

Nechť v, $v \in VAR_\varphi$, je výroková proměnná. Protože $VAR_\varphi \subseteq VAR_n$, existuje index i takový, že $v = S_i^1$.

Nechť φ je tvaru $\psi \wedge \chi$. Z indukčního předpokladu existují indexy i a j takové, že pro každé ohodnocení e respektující S platí $e(\psi) = e(S_i^1)$ a $e(\chi) = e(S_j^1)$.

Předpokládejme, že $i \leq j$ (pro $j \leq i$ je důkaz analogický). Pro každé ohodnocení e respektující S platí $e(\psi) = e(S_i^1)$ a $e(\chi) = e(S_j^1)$. Protože $i \leq j$, je také $e(S_i^1) \leq e(S_j^1)$ a tudíž $e(\varphi) = e(S_i^1)$.

Nechť $\varphi = \psi \to \chi$. Indukční předpoklad nám dává indexy i a j takové, že pro každé ohodnocení e respektující S platí $e(\psi) = e(S_i^1)$ a $e(\chi) = e(S_j^1)$. Předpokládejme nejprve, že $i \leq j$. Pak $e(S_i^1) \leq e(S_j^1)$ a tudíž je $e(\varphi) = 1 = e(S_{|S|})$ Nyní předpokládejme $i > j$. Pak mohou nastat dva případy: Pro každý index k takový, že $j \leq k < i$, platí, že S_k^2 je $=$. Protože ohodnocení e respektuje S platí $e(S_i^1) = e(S_j^1)$ a tedy $e(\varphi) = 1 = e(S_{|S|})$. V druhém případě existuje index k, $j \leq k < i$, takový, že S_k^2 je $<$. Protože ohodnocení e respektuje S, platí $e(S_i^1) > e(S_j^1)$ a tudíž $e(\varphi) = e(S_j^1)$.

$\square$

Důsledek 3.41. *Nechť jsou $p \in P$, $S \in EP_n^P$, e ohodnocení respektující S, a φ formule taková, že $VAR_\varphi \subseteq VAR_n$.*

1. *Pokud $e(\varphi) = p$, pak pro každé ohodnocení f respektující S platí rovnost $f(\varphi) = p$.*
2. *Pokud $e(\varphi) < 1$, pak pro každé ohodnocení f respektující S platí nerovnost $f(\varphi) < 1$.*
3. *Pokud $e(\varphi) > 0$, pak pro každé ohodnocení f respektující S platí nerovnost $f(\varphi) > 0$.*

Platnost následujícího tvrzení je zřejmá.

Tvrzení 3.42. *Nechť je $n \in \mathsf{N}$ a e je ohodnocení. Potom existuje $S \in EP_n^P$ tak, že e respektuje S.*

Následující lemma je zásadní pro důkaz třetí části věty 3.47, v podstatě říká, že pro konečnou množinu výrokových proměnných existuje pouze konečně mnoho vzájemně neekvivalentních formulí sestavených z těchto proměnných.

Lemma 3.43. *Definujme množinu $Form_n = \{\varphi \mid VAR_\varphi \subseteq VAR_n\}$ a ekvivalenci $\simeq$ na množině $Form_n$ následovně: položme $\varphi \simeq \psi$ právě tehdy, když pro každé ohodnocení e platí $e(\varphi) = e(\psi)$. Pak rozklad množiny $Form_n$ podle $\simeq$ je konečný.*

Důkaz. Nechť f je libovolné ohodnocení. Definujeme ekvivalenci $\simeq_f$ na množině $Form_n$: $\varphi \simeq_f \psi$ právě tehdy, když $f(\varphi) = f(\psi)$. Podle předchozího tvrzení existuje valuační prototyp $S \in EP_n$ tak, že f respektuje S a použitím lemmatu 3.40 dostaneme pro každou formuli φ index i_φ takový, že pro každé ohodnocení e respektující S platí $e(\varphi) = e(S^1_{i_\varphi})$.

Protože posloupnost S je konečná a pro každou formuli φ platí $f(\varphi) = f(S^1_{i_\varphi})$ dostáváme, že rozklad $Form_n$ podle $\simeq_f$ je konečný.

Pokud obě ohodnocení e a f respektují S, pak očividně $\simeq_e = \simeq_f$.

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že platí rovnost $\simeq = \bigcap_e \simeq_e = \bigcap_{S\in EP_n} \simeq_{e_S}$, kde e_S je libovolné ohodnocení respektující S. Protože umíme $\simeq$ vyjádřit jako konečný průnik tříd ekvivalence, pro které je rozklad $Form_n$ konečný, důkaz je hotov.

$\square$

Lemma 3.44. *Pro $K \in \mathbf{D} \cup \mathbf{FIN} \cup \mathbf{C}_1$ je Gödelova logika K-kompaktní.*

Důkaz. Pokud je $K \in \mathbf{C}_1$, důkaz plyne z lemmatu 3.34. Předpokládejme tedy, že $1 \notin K$. Oba případy ($K \in \mathbf{D}$ a $K \in \mathbf{FIN}$) ukážeme najednou. Nejprve však definujeme množiny P a V.

1. Pokud $K \in \mathbf{D}$ položíme $V = A \cup \{0,1\}$, kde A je otevřená hustá podmnožina A a $P = \{0,1\}$.

2. Pokud $K \in \mathbf{FIN}$ položíme $V = [0,1]$ a $P = K \cup \{0,1\}$.

V obou případech je V hustá množina. Řekneme, že ohodnocení e je V-ohodnocením pokud ohodnocuje všechny výrokové proměnné prvky z množiny V. Ze sémantiky spojek okamžitě plyne, že pro každé V-ohodnocení e a každou formuli φ platí $e(\varphi) \in V$.

Vezměme nyní množinu formulí T. Předpokládejme, že množina proměnných vyskytujících se ve formulích z T je nekonečná (v opačném případě důkaz plyne z předchozího lemmatu). Ukážeme, že buď je T K-splnitelná nebo existuje konečná podmnožina taková, že není K-splnitelná.

Definujeme $T_0 = \emptyset$ a $T_i = \{\varphi \in T \mid \mathrm{Var}_\varphi \subseteq VAR_i\}$. Očividně $T_i \subseteq T_{i+1}$ a $T = \bigcup_{i\in\mathsf{N}} T_i$

Zkonstruujeme konečný strom S. Vrcholy na i-té hladině jsou ohodnoceny valuačními P-prototypy řádu i, kořen je ohodnocen EP^P_0.

Pro každý vrchol n na i-té hladině ohodnocený S_n přidáme následníka $H \in EP^P_{i+1}$ získaného z S_n (ve smyslu definice 3.38) a ohodnotíme jej H.

Z tohoto stromu S zkonstruuujeme (prořezáním) podstrom S' . Vrchol n bude vrcholem stromu S' pokud existuje ohodnocení e respektující S_n které K-splňuje množinu T_i). Z Königova lemmatu je takovýto strom S' konečný nebo v něm existuje nekonečná větev.

Před dokončením důkazu dokážeme následující pomocné lemma:

Fakt Pokud vrchol n stromu S nebyl uříznut, pak každé V-ohodnocení e respektující S_n K-splňuje T_i.

Důkaz faktu. Případ 1.: Předpokládáme, že $1 \notin K$. Dále předpokládáme, že $0 \notin K$ (pokud $0 \in K$, je důkaz analogický). Pokud vrchol n stromu S nebyl uříznut, existuje ohodnocení e respektující S_n, které je K-splňujícím ohodnocením T_i.

Protože $0, 1 \notin K$, je pro každou formuli ψ z T_i $0 < e(\psi) < 1$. Nechť f je libovolné V-ohodnocení. Víme, že $f(T_i) \subseteq V \subseteq K \cup \{0, 1\}$, Dále z druhé a třetí části lemmatu 3.41 víme, že pokud f respektuje S_n, platí pro každou ψ z T_i $0 < f(\psi) < 1$, tudíž $f(T_i) \subseteq K$.

Případ 2.: Opět předpokládejme, že e je V-ohodnocení respektující S_n a K-splňující T_i. Tudíž pro každé $\varphi \in T_i$ existuje $t_\varphi \in P$ tak, že $e(\varphi) = t_\varphi$. Dle části 1 důsledku 3.41 platí tato rovnost pro každé ohodnocení, které respektuje S_n. $\square$

[*Dokončení důkazu lemmatu 3.44.*] Pokud strom S' obsahuje nekonečnou větev, zkonstruujeme V-ohodnocení e, které K-splňuje T. Protože je V hustá množina, platí pro každý vrchol n', který je následníkem vrcholu n na i-té hladině, a V-ohodnocení e respektující S_n, že existuje V-ohodnocení e' respektující $S_{n'}$ takové, že pro $j \leq i$ $e(v_j) = e'(v_j)$. Toto použijeme při postupné konstrukci V-ohodnocení. Začneme od prázdného V-ohodnocení a postupně pro každý uzel nekonečné větve postupně dostáváme hledaná částečná V-ohodnocení e'. Výsledné V-ohodnocení e respektuje S_n pro každý vrchol n nekonečné větve, tedy pro každé i V-ohodnocení e K-splňuje T_i (viz. výše dokázaný fakt). Tedy e K-splňuje T.

Nyní předpokládejme, že S' je konečný strom hloubky i. Sporem dokážeme, že v tomto případě není S_i K-splnitelná. Nechť tedy e je ohodnocení K-splňující T_i. Z tvrzení 3.42 ve stromu S existuje vrchol n na hladině i takový, že e respektuje S_n. Ve stromu S' vezměme list n' takový, že ve stromu S existuje cesta z n' do n. Označme i' hladinu, na které se n' nachází. Protože $T_{i'} \subseteq T_i$ a e K-splňuje T_i, e K-splňuje i $T_{i'}$. Ohodnocení e také respektuje $S_{n'}$.

Protože je ale strom S ve vrcholu n' uříznut, žádné ohodnocení respektující $S_{n'}$ K-nesplňuje $T_{i'}$, což je spor.

$\square$

Poznámka 3.45. *V následujícím důkazu použijeme tzv. Fareyovy posloupnosti F (Fareyovy zlomky), jde o induktivně definované konečné posloupnosti racionálních čísel z intervalu $[0,1]$. Definujeme $F_0 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$, posloupnost F_{n+1} získáme, tak že mezi každé dva po sobě jdoucí prvky $\frac{a}{b}$ a $\frac{a'}{b'}$ z posloupnosti F_n vložíme prvek $\frac{a+a'}{b+b'}$. Např. $F_1 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1})$, $F_2 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1})$. Délka posloupnosti F_n je $2^n + 1$.*

Lemma 3.46. *Nechť $K \notin \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{D} \cup \mathbf{FIN}$. Pak Gödelova logika není K-kompaktní.*

Důkaz. Definujme ternární spojku $sh(\varphi, \psi, \delta) = \psi \vee (\psi \to \varphi) \vee (\delta \to \psi)$. Pro sh platí :

$$e(sh(\varphi, \psi, \delta)) = \begin{cases} e(\psi) & \text{pokud } e(\varphi) < e(\psi) < e(\delta)\ , \\ 1 & \text{jinak}\ . \end{cases}$$

Vezměme soubor $(v_{a,b})_{a>0,\ b>1}$ navzájem různých proměnných indexovaných prvky některé Fareyovy posloupnosti (viz komentář 3.45, přičemž index a odpovídá čitateli a b jmenovateli prvku): $v_{0,1} = \overline{0}$ a $v_{1,1} = \overline{1}$. Označíme $V^1 = (v_{0,1}, v_{1,2}, v_{1,1})$, V^{i+1} vznikne z V^i přidáním prvků tvaru $v_{a+a',b+b'}$ mezi každé dva po sobě jdoucí prvky $v_{a,b}$ and $v_{a',b'}$.

Definujeme množinu formulí $T^1 = \{sh(v_{0,1}, v_{1,2}, v_{1,1})\}$ a pro každé i definujeme $T^{i+1} = \{sh(v_{a,b},\ v_{a+a',b+b'},\ v_{a',b'}) \mid v_{a',b'}$ je následníkem $v_{a,b}$ ve $V^i\}$. Nakonec položíme $T = \bigcup_i T^i$.

Každá z množin T^i pro $i \in \mathbb{N}_1$ je K-splnitelná právě tehdy, když existuje ohodnocení e přiřazující prvkům V^i hodnoty tvořící ostře rostoucí posloupnost v K (připomeňme, že z podmínky $K \notin \mathbf{C}_1$ plyne, že $1 \notin K$). To samé platí i pro $\bigcup_{j \leq i} T^j$.

Protože K není konečná, obsahuje konečné řetězce libovolné délky a tudíž každá konečná podmnožina množiny T je K-splnitelná.

Předpokládejme, že T je K-splnitelná, tedy že existuje ohodnocení e takové, že pro každé i tvoří hodnoty proměnných V^i ostře rostoucí posloupnost v K. Je zřejmé, z konstrukce množin T_i a sémantiky spojky sh, že hodnoty všech prvků $\bigcup_i V^i$ tvoří hustou podmnožinu K. To je ale ve sporu s předpokladem, že $K \notin \mathbf{D}$.

$\square$

Na závěr zformujeme větu, která shrnuje dosažené výsledky o Gödelově logice a zároveň přidává výsledky pro konečné a nespočetné množiny výrokových proměnných.

Věta 3.47. *Nechť $K \subseteq [0, 1]$ a K neobsahuje zároveň 0 a 1.*

1. *Pro nekonečnou spočetnou množinu VAR: Gödelova logika je K-kompaktní právě tehdy, když $K \in \mathbf{FIN} \cup \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{D}$.*

2. *Pro konečnou množinu VAR : Gödelova logika je K-kompaktní pro libovolnou konečnou množinu K.*

3. *Pro nespočetnou množinu VAR: Gödelova logika je K-kompaktní právě tehdy, když $K = \{0\}$ nebo $K \in \mathbf{C}_1$.*

Důkaz. První část plyne z předchozích dvou lemmat (3.44 a 3.46). Druhá část plyne z lemmatu 3.43.

Implikace zprava do leva v třetí části plyne lemmatu 3.34. Předpokládejme nyní, že K není typu $\mathbf{C}_1$ ani $K \neq \{0\}$. Existuje tedy prvek $k \in K$, $0 < k < 1$ Protože je VAR nespočetná, obsahuje vlastní spočetnou množinu proměnných VAR' mohutnosti ω_1. Očíslujme proměnné z množiny VAR' ordinálními čísly $\nu < \omega_1$. Vezměme proměnnou $k \notin VAR'$ a definujme množinu formulí $T = \{(v_\nu \to v_\mu) \vee k \mid \mu < \nu < \omega_1\}$. Nahlédněme, že $e((v_\nu \to v_\mu) \vee k) = 1$ právě tehdy, když $e(v_\nu) \leq e(v_\mu)$ nebo $e(k) = 1$. Nechť $T_0 \subseteq T$ je konečná množina, definujme ohodnocení $e(k) = k$ a $e(k) \geq e(v_\nu) > e(v_\mu)$ pro každé v_μ, v_ν které se objevují ve formulích teorie T_0, takové ohodnocení určitě existuje protože $e(k) > 0$. Předpokládejme, že T je K-splnitelná ohodnocením e. Pak pro každé $\mu < \nu$ platí $e(v_\nu) > e(v_\mu)$ a tedy $e(VAR')$ je ostře rostoucí řetězec délky ω_1, což vzhledem k tomu, že $e(VAR') \subseteq [0, 1]$ není možné. □

Kapitola 4

Kompaktnost v modálních logikách

Druhým typem neklasických logik, kterými se v tomto textu budeme zabývat, jsou modální (výrokové) logiky. Stejně jako ve fuzzy logikách, kde tři základní fuzzy logiky vznikly jako axiomatická rozšíření logiky BL, budeme zde pracovat s logikami rozšiřujícími logiku K, těmto logikám se říká normální modální logiky. V sekci o sémantice pak uvidíme, že K je nejslabší možný systém pro práci s relačními strukturami pro modální logiku - tzv. kripkovskými rámci. Tvrzení, která v této kapitole pouze vyslovíme bez důkazu, jsou převzata z knihy [2].

4.1 Syntax

Definice 4.1. *Modální výrokový jazyk je dán množinou výrokových proměnných* Var*, konstantou pro spor* $\perp$*, binárními výrokovými spojkami* $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ *a unárním modálním operátorem* $\Box$*.*

Poznámka 4.2. *Druhý modální operátor* $\Diamond$ *je pomocí operátoru* $\Box$ *definovatelný, formuli* $\Diamond\varphi$ *můžeme chápat jako zkratku za formuli* $\neg\Box\neg\varphi$*.*

Definice formule modální logiky je analogická klasické definici, jedná se samozřejmě o speciální případ obecné definice z kapitoly 2.

Definice 4.3. *Množina všech* modálních výrokových formulí *(dále jen formulí) je nejmenší množina splňující následující podmínky:*

- *každý výrokový atom je formule, konstanta $\perp$ je formule,*
- *jestliže φ je formule, pak $\neg\varphi$ a $\Box\varphi$ jsou formule,*
- *jestliže φ a ψ jsou formule, pak $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$ a $(\varphi \to \psi)$ jsou formule.*

Množinu všech modálních výrokových formulí budeme značit Fm.

Pro každou normální modální logiku definujeme dvě různé relace důsledku, globální a lokální.

Definice 4.4. Globální *relace důsledku pro modální logiku K má axiomatický systém s axiomy:*

- *teorémy klasické výrokové logiky,*
- *K: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,*

a dedukčními pravidly:

- *modus ponens*
- *necesitace: z formule φ odvozuje formuli $\Box\varphi$.*

Lokální *relace důsledku pro modální logiku K má axiomatický systém, jehož axiomy jsou všechny teorémy globální relace důsledku pro modální logiku K a dedukčním pravidlem je modus ponens.*

Poznámka 4.5. *Všimněme si, že globální i lokální verze relace důsledku pro logiku K mají stejné teorémy.*

Alternativní axiomatizace lokální relace důsledku pro modální logiku K by mohla obsahovat pouze axiomy globální relace důsledku pro modální logiku K a být uzavřena na pravidlo necesitace, tj. s každým axiomem φ obsahovat i axiom $\Box\varphi$.

Normální modální logiky jsou axiomatická rozšíření logiky K, musíme opět rozlišit globální a lokální verzi.

Definice 4.6. *Globální relace důsledku pro normální modální logiku* L *je axiomatizována přidáním axiomů k axiomatickému systému globální relace důsledku pro modální logiku K. Lokální relace důsledku pro modální logiku* L *má axiomatický systém, jehož axiomy jsou všechny teorémy globální relace důsledku pro modální logiku* L *a dedukční pravidlo je modus ponens.*

Ačkoliv globální relace důsledku mají přirozenější axiomatický systém, z historických důvodů a z hlediska sémantiky jsou více používány lokální verze. Pro jednoduchost budeme místo lokální relace důsledku pro modální logiku L říkat pouze modální logika L a s globálními logikami nebudeme pracovat vůbec. Mezi nejznámější přidávané axiomy patří následující schémata:

(T)	$\Box\varphi \to \varphi$,
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$,
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$,
(D)	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$,
(5)	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$,
(Löbův axiom)	$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Nyní uvedeme seznam několika často používaných normálních modálních logik:

logika T	je rozšířením K o axiom T,
logika K4	je rozšířením K o axiom 4,
logika S4	je rozšířením K o axiomy T a 4,
logika S5	je rozšířením K o axiomy T,4 a 5 (ekvivalentně také T, 4 a B),
logika GL	je rozšířením K o Löbův axiom a axiom 4.

Věta 4.7. *Každá normální modální logika je finitární a kompaktní.*

Důkaz. Finitarita plyne přímo z definice axiomatik jednotlivých normálních modálních logik. K důkazu kompaktnosti stačí dle věty 2.14 existence konečné sporné teorie. Takovou je například teorie $\{\bot\}$. □

V normálních modálních logikách platí věta o dedukci ve stejném tvaru jako pro logiku klasickou (všimněme si, že pro globální relaci důsledku tato věta neplatí, protože z $\varphi \vdash \Box\varphi$ by plynulo $\vdash \varphi \to \Box\varphi$, což se dá sémanticky snadno vyvrátit).

Věta 4.8. *Nechť* L *je normální modální logika, T je množina formulí a* φ, ψ *jsou formule. Pak* $T, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ *právě tehdy, když* $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$.

4.2 Sémantika

Definice 4.9. Kripkovský rámec *je dvojice* $\langle W, R\rangle$*, kde* W *je neprázdná množina a* $R \subseteq W^2$ *je tzv. relace dosažitelnosti.*

Poznámka 4.10. *Pro prvky množiny W se používají různé názvy - (možné) světy, stavy, situace, vrcholy apod.*

Definice 4.11. Kripkovský model $\mathcal{M}$ *je trojice* $\langle W, R, V\rangle$*, kde* $\langle W, R\rangle$ *je kripkovský rámec a* V *(valuace) je funkce* $V\colon \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(W)$*.*

Definice 4.12. *Nechť* $\mathcal{M}$ *je kripkovský model,* $w \in W$*.* Platnost formule φ ve světě w modelu $\mathcal{M}$ *(značíme* $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$*)je induktivně definována následovně:*

- *pro* $p \in \mathrm{Var}$*:* $\mathcal{M}, w \Vdash p$ *právě tehdy, když* $p \in V(p)$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \perp$ *nikdy*
- $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\varphi$ *právě tehdy, když neplatí* $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi$ *právě tehdy, když* $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ *a zároveň* $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$ *právě tehdy, když* $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ *nebo* $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \to \psi$ *právě tehdy, když neplatí* $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ *nebo platí* $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$ *právě tehdy, když pro každé* $w' \in W$ *takové, že* wRw' *platí* $\mathcal{M}, w' \Vdash \varphi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ *právě tehdy, když existuje* $w' \in W$ *takové, že* wRw' *tak, že platí* $\mathcal{M}, w' \Vdash \varphi$*.*

Definice 4.13. *Nechť* $K = \langle W, R\rangle$ *je kripkovský rámec. Řekneme, že formule* φ *je* tautologie *v* K*, pokud pro každý kripkovský model* $\langle W, R, V\rangle$ *a pro každý svět w platí* $w \Vdash \varphi$*.*

Definice 4.14. *Nechť* L *je normální modální logika. Řekneme, že kripkovský rámec* K *je* rámec pro logiku L*, pokud je každý teorém logiky* L *tautologií v rámci* K*.*

Lemma 4.15. *Každý kripkovský rámec je rámec pro logiku K.*

Důkaz. Nechť K je libovolný rámec, $\mathcal{M}$ libovolný kripkovský model nad K, $w \in W$ libovolný možný svět.

Ověříme platnost schématu K ve w. Pokud $w \nVdash \Box(p \to q)$, K ve w platí. Pokud $w \Vdash \Box(p \to q)$, sporem ukážeme, že pak i $w \Vdash \Box p \to \Box q$. Nechť tedy $w \not\Vdash \Box p \to \Box q$, tedy $w \Vdash \Box p$ a $w \not\Vdash \Box q$. Nejprve předpokládejme, že neexistuje $w^{'}$, takové, že $wRw^{'}$, pak ovšem z definice 4.12 musí ve w platit (bez ohledu na to, zda ve $w \Vdash q$ nebo $w \not\Vdash q$) $\Box q$, což je ve sporu s předpokladem $w \not\Vdash \Box q$). Nyní předpokládejme, že existuje $w^{'}$, takové, že $wRw^{'}$. Aby $w \Vdash \Box p$ a $w \not\Vdash \Box q$, musí existovat svět $w^{''}$ takový, že $wRw^{''}$ a platí $w^{''} \Vdash p$ a zároveň $w^{''} \not\Vdash q$, tedy $w^{''} \not\Vdash p \to q$. To je ovšem ve sporu s $w \Vdash \Box(p \to q)$. Platnost všech výrokových tautologií a uzavřenost množiny formulí platných v rámci na modus ponens je zřejmá.

$\Box$

Třída rámců pro logiku je často popsána pomocí vlastnosti relace. Příkladem jsou následující logiky.

Věta 4.16.

logika L	$\langle W, R\rangle$ *je rámec pro logiku* L *právě tehdy, když*
T	*R je* reflexivní *relace,*
S4	*R je* reflexivní *a* tranzitivní *relace,*
S5	*R je relace* ekvivalence,
GL	*R je* obráceně fundovaná tranzitivní *relace*

Definujeme obecnou modální sémantiku:

Definice 4.17. *Pro každou normální modální logiku* L *a libovolnou neprázdnou třídu rámců $\mathcal{K}$ pro logiku* L *definujeme sémantiku*

$$\mathcal{SK} = \langle\{(\langle W, R, V\rangle, w) \mid \langle W, R\rangle \in \mathcal{K} \text{ a } w \in W\}, \models\rangle,$$

kde relace $\models$ je definována jako $(\langle W, R, V\rangle, w) \models \varphi$, pokud $w \Vdash \varphi$.

Pokud $\mathcal{K}$ je třída všech rámců pro logiku L*, říkáme že $\mathcal{SK}$ je* lokální sémantika *pro logiku* L*.*

Jelikož sémantika je zcela určena třídou rámců, budeme tyto dva pojmy volně zaměňovat, např. budeme hovořit o úplnosti vůči třídě rámců $\mathcal{K}$ místo o úplnosti vůči sémantice $\mathcal{SK}$. Všimněme si, že protože je $\mathcal{K}$ neprázdná množina, je sémantika $\mathcal{SK}$ vždy normální.

Ukážeme, že normální logiky a sémantiky splňují podmínky důsledku 2.34.

Lemma 4.18. *Nechť* L *je normální modální logika a S jedna z výše definovaných sémantik. S je normální sémantika a pro každou konečnou teorii T a formule φ a ψ platí:*

- *$T, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ právě tehdy, když $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$,*
- *$T, \varphi \models_S \psi$ právě tehdy, když $T \models_S \varphi \to \psi$.*

Dále také platí:

- $\vdash_{\mathrm{L}} \bot \to \varphi$,
- $\vdash_{\mathrm{L}} ((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \varphi$,
- $\models_S ((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \varphi$.

Důkaz. Syntaktická verze věty o dedukci byla obsahem minulé části, důkaz sémantické verze je velmi jednoduchý. Dokazatelnost formulí $\bot \to \varphi$ a $((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \varphi$ je zřejmá. Zbytek důkazu plyne z lemmatu 4.15. $\square$

Důsledek 4.19. *Nechť* L *je normální modální logika a S jedna z výše definovaných sémantik.*

1. L *je modelově úplná vůči S.*
2. L *je deduktivně úplná vůči S.*
3. L *je konečně silně deduktivně úplná vůči S.*
4. L *je konečně silně modelově úplná vůči S.*

Definice 4.20. *Normální modální logika je* kripkovsky úplná, *pokud je modelově úplná vůči třídě všech svých rámců.*

Předchozí důsledek ukazuje, že tento pojem je ekvivalentní se třemi dalšími zmíněnými výše. Pro běžné modální logiky platí:

Věta 4.21. *Logiky T, $S4$, $S5$ a GL jsou kripkovsky úplné.*

Důsledek 4.22. *Nechť* L *je modelově úplná modální logika a S jedna z výše definovaných sémantik. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. L *je silně deduktivně úplná vůči S,*
2. L *je silně modelově úplná vůči S,*
3. *S je kompaktní,*

4. S je finitární.

Definice 4.23. *Logikám splňujícím výše zmíněné ekvivalentní podmínky pro třídu všech svých rámců se říká* kompaktní *nebo* modálně-sémanticky kompaktní *logiky.*

Předchozí důsledek ukazuje možné zdůvodnění právě definované terminologie, ačkoliv tato vlastnost je běžně definována jako silná modelová úplnost, viz. [4]. Důkaz následujícího lemmatu je triviální.

Lemma 4.24. *Logika, která není modálně-sémanticky kompaktní, není silně deduktivně úplná vůči $\mathcal{SK}$ pro jakoukoliv třídou rámců $\mathcal{K}$ pro tuto logiku.*

Následují věta ukazuje, že logika K je silně deduktivně/modálně úplná vůči třídě všech kripkovských rámců (je tedy modálně-sémanticky kompakní). Ovšem vůči třídě *konečných* kripkovských rámců je pouze *konečně* silně deduktivně/modálně úplná. Na vyvrácení její silné deduktivní/modální úplnosti použijeme důsledek 4.22, ukážeme totiž, že sémantika konečných rámců není kompaktní.

Věta 4.25.

- *Modální logika K je silně deduktivně úplná vůči třídě kripkovských rámců.*
- *Modální logika K je konečně silně deduktivně úplná vůči třídě konečných kripkovských rámců.*
- *Modální logika K není silně deduktivně úplná vůči třídě konečných kripkovských rámců.*

Důkaz. První dvě tvrzení jsou dobře známá, viz. např. [2]. Pro důkaz třetího tvrzení ukážeme, že tato sémantika není kompaktní. Definujme $p^1 = p$ a $p^{-1} = \neg p$. Pro každé $x = (x_i)_{i\leq n} \in \{-1,1\}^n$ definujme $\varphi_n^x = \bigwedge_{i\leq n} p_i^{x_i}$, kde p_i jsou výrokové proměnné. Zafixujme kripkovský rámec $\langle W, R, V\rangle$ a všimněme si, že pro každé n a pro každý svět existuje $x \in \{-1,1\}^n$ tak, že $w \Vdash \varphi_n^x$ a pokud také $w \Vdash \varphi_n^y$ pro nějaké $y \in \{-1,1\}^n$ pak $x = y$. Definujme formuli $\varphi_n = \bigwedge_{x\in\{-1,1\}^n} \Diamond\varphi_n^x$. Proto ovšem také $w \Vdash \varphi_n$ implikuje existenci aspoň 2^n různých světů dosažitelných z w.

Definujme teorii $T = \{\varphi_n \mid n \in \mathsf{N}\}$. Tato teorie není v sémantice konečně lokálních rámců splnitelná (ve splňujícím světě by muselo pro každé n existovat aspoň 2^n *různých* dosažitelných světů, což vzhledem ke konečnosti uvažovaného rámce není možné). Ukážeme-li, že pro každé $k \in \mathsf{N}$ je formule φ_k splnitelná, pak je splnitelná i teorie $T_k = \{\varphi_n \mid n \leq k\}$ a důkaz hotov.

Definujme kripkovský model $\langle W, R, V\rangle$, kde $W = \{-1, 1\}^k$, $R = W \times W$ a $V(v_i) = \{(x_i)_{i\leq k} \mid x_i = 1\}$. Všimněme si, že $z \Vdash \varphi_k^x$ a protože každý svět je dosažitelný z každého světa, máme $x \Vdash \varphi_k$ pro každý svět $x \in W$. □

Následující věta ukazuje, že logika GL je vůči třídě *všech* svých rámců pouze *konečně* silně deduktivně/modálně úplná (logika GL tedy není modálně-sémanticky kompaktní). Jako v předchozím případě použijeme důsledek 4.22 na vyvrácení silné deduktivní/modální úplnosti, ukážeme totiž, že sémantika konečných rámců není kompaktní.

Věta 4.26.

- *Modální logika GL je konečně silně deduktivně úplná vůči třídě všech svých rámců.*
- *Modální logika GL není silně deduktivně úplná vůči třídě všech svých rámců (není tedy modálně-sémanticky kompaktní).*

Důkaz. První tvrzení je opět dobře známé, viz. např. [2]. Pro důkaz druhého tvrzení definujme množinu $T = \{\Diamond q_1\} \cap \{\Box(q_i \to \Diamond q_{i+1}) \mid i \in \mathsf{N}\}$. Zafixujme k a definujeme kripkovský model $\langle W, R, V\rangle$, v jehož některém jeho světě bude platná teorie $\{\Diamond q_1\} \cap \{\Box(q_i \to q_{i+1}) \mid i \leq k\}$. Definujeme $W = \{0, 1, \ldots n\}$, $R = \{(i, j) \mid i \leq j\}$ a $V(q_i) = \{i\}$. Jelikož relace R je tranzitivní a neexistuje nekonečná rostoucí posloupnost, je $\langle W, R\rangle$ rámec pro logiku GL. Očividně $0 \Vdash \Diamond q_1$. Ukažme, že $0 \Vdash \Box(q_i \to \Diamond q_{i+1})$ pro každé $i \leq k$: pro $j \neq i$ očividně $j \Vdash q_i \to \Diamond q_{i+1}$ (protože $j \nVdash q_i$), a také $i \Vdash q_i \to \Diamond q_{i+1}$ (protože $i \Vdash \Diamond q_{i+1}$).

Nyní předpokládejme, že v modelu $\langle W, R, V\rangle$ a světě w je splněna teorie T. Nechť w_1 je svět dosažitelný ze světa w, kde $w_1 \Vdash q_1$ (ten existuje, protože $w \Vdash \Diamond q_1$). Proto ale také $w_1 \Vdash q_1 \to \Diamond q_2$ (protože $w \Vdash \Box(q_1 \to \Diamond q_2)$ a $\langle w, w_1\rangle \in R$) a protože $w_1 \Vdash q_1$, musí existovat svět w_2 takový, že $w_2 \Vdash q_2$ a $\langle w_1, w_2\rangle \in R$. Z tranzitivity ale dostaneme také $\langle w, w_2\rangle \in R$. Proto z $w \Vdash \Box(q_2 \to \Diamond q_3)$ dostaneme existenci světa w_3 takového, že $w_3 \Vdash q_3$ a $\langle w_2, w_3\rangle \in R$. Takto můžeme pokračovat dále a dostaneme nekonečnou rostoucí (v R) posloupnost světů a proto $\langle W, R\rangle$ nemůže být rámec pro logiku GL. □

Závěr

Práce představuje systematické studium pojmu kompaktnosti ve výrokových logikách, od detailního rozboru pojmu kompaktnosti v klasické výrokové logice přes studium v obecném prostředí logických systémů až k formulaci kompaktnosti pro některé neklasické logiky. Přesto, že práce neobsahuje důkazy zcela nových tvrzení, představuje ucelený a poměrně detailní přístup k tomuto tématu. Mnohé definice, tvrzení a jejich důkazy musely být modifikovány tak, aby zapadly do obecného rámce práce.

Zaměření se na studium kompaktnosti ve fuzzy a modálních logikách bylo obsahem zadání práce. Omezili jsme se zde pouze na zkoumání nejběžnějších a základních systémů - ve fuzzy logikách na základní logiku BL a její tři rozšíření a pro modální logiky na běžně používané normální modální logiky a to tak, aby bylo možno názorně demonstrovat různost a vzájemné vztahy obecných pojmů zavedených v obecné části. Práce může být základem pro další zkoumání v jiných neklasických systémech. Dalším zobecněním by bylo studium pro prvořádové logiky a to jak klasickou, tak neklasické.

Literatura

[1] Alan Ross Anderson, Nuel D. Belnap. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity.* Princeton University Press, Princeton, 1975.

[2] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema. *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2002.

[3] Dan Butnariu, Erich Peter Klement, Samy Zafrany. *On triangular norm-based propositional fuzzy logics.* Fuzzy Sets and Systems 69:241–255, 1995.

[4] Walter Carnielli, Claudio Pizzi. *Modalities and Multimodalities.* Springer, Berlin 2008.

[5] Roberto Cignoli, Itala M.L. D'Ottaviano, Daniele Mundici. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning.* Kluwer, Dordrecht, 1999.

[6] Petr Cintula. Two notions of compactness in Gödel logics. *Studia Logica*, 81:99–122, 2004.

[7] Petr Cintula. Weakly implicative (fuzzy) logics I: Basic properties. *Archive for Mathematical Logic*, 45:673–704, 2006.

[8] Petr Cintula, Mirko Navara. Compactness of fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 143:59–73, 2004.

[9] Kurt Gödel. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzieger Akademie der Wissenschaften Wien, Math. - naturwissensch. Klasse*, 69:65–66, 1932.

[10] Petr Hájek, Lluis Godo, Francesc Esteva. *A complete many-valued logic with product conjunction.* Archive for Mathematical Logic 35:191–208, 1996.

[11] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordercht, 1998.

[12] Stephen Cole Kleene. *Mathematical Logic.* Dover, New York, 2002.

[13] Jan Łukasiewicz. O logice trójwartościowej (On three-valued logic). *Ruch filozoficzny*, 5:170–171, 1920.

[14] Greg Restall. *An Introduction to Substructural Logics.* Routledge, New York, 2000.

[15] Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost.* Academia, Praha, 2002.

[16] Stephen Willard. *General Topology.* Dover, New York, 2004.

[17] Ryszard Wójcicki. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 1988.