Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Geometrické uvažování žáků druhého stupně základní školy

Lower secondary school pupils' geometric reasoning

Bc. Michal Poft

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy

Studijní obor: N M-CH 20

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Geometrické uvažování žáků druhého stupně základní školy* potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 2. 12. 2024

Poděkování:

Rád bych poděkoval prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za odborné vedení při zpracování mé diplomové práce, za cenné rady, připomínky, velkou trpělivost, pečlivost a čas, který věnovala mé práci. Dále bych rád poděkoval žákům ze Základní školy svaté Voršily v Praze za jejich ochotu a přístup k výzkumu.

ABSTRAKT

Cílem diplomové práce je získat vhled do geometrického uvažování žáků druhého stupně základní školy, a to v oblasti geometrických těles. Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část.

Teoretická část obsahuje potřebné teorie týkající se geometrického uvažování, mezi které patří teorie prototypů a van Hielova teorie sloužící k identifikaci úrovně geometrického myšlení. Dále obsahuje očekávané výstupy z okruhu Geometrie v rovině a v prostoru z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání doplněné o indikátory ze Standardů pro základní vzdělávání.

Praktická část je zaměřena na vlastní výzkum, který popisuje různou úroveň geometrického myšlení žáků. Podkladem pro výzkum byla pilotní studie, jejíž výsledky daly základ pro formu výzkumu a, podobu a znění úloh. Výzkum obsahuje sedm úloh a je pro něj využita metoda „think-aloud“ (uvažování nahlas), při které žáci rozdělení do dvojic zaznamenávají své myšlenky na hlasová zařízení. V praktické části jsou uvedeny výsledky výzkumu získané analýzou žákovských řešení úloh. Součástí analýzy jsou ukázky žákovských řešení a přepisy komentářů a rozhovorů mezi žáky. Závěr praktické části práce shrnuje výsledky výzkumu. Dále jsou zde uvedena didaktická doporučení pro rozvoj prostorové představivosti a geometrického uvažování.

Jedním ze závěrů diplomové práce je zjištění, že každý žák má jinou úroveň geometrického myšlení, avšak většina z nich nedosahuje očekávané úrovně uvažování pro druhý stupeň základní školy.

KLÍČOVÁ SLOVA

geometrické uvažování, prostorová představivost, prototyp, van Hielova teorie, základní geometrické pojmy

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to gain insight into the geometric reasoning of lower secondary school pupils in the area of geometric solids. The thesis is divided into a theoretical and a practical part.

The theoretical part includes essential theories related to geometric thinking, such as prototype theory and the van Hiele theory, which serve to identify the level of geometric reasoning. It also outlines the expected outcomes from the Geometry in Plane and Space section of the Framework Educational Program for basic education, supplemented by indicators from the Standards for basic education.

The practical part focuses on original research that describes the different levels of geometric thinking among pupils. A pilot study formed the basis for the research format, task structure, and task content. The research comprises seven tasks and uses the think-aloud method, where pupils, paired in twos, record their thoughts using voice-recording devices. The practical section presents the research findings obtained from the analysis of pupils task solutions. This analysis includes examples of pupils responses and transcripts of pupils commentary and dialogue. The conclusion of the practical part summarizes the research results and provides didactic recommendations for developing spatial visualization and geometric reasoning.

The results of the diploma thesis reveal that each pupil has a different level of geometric thinking, with the majority not reaching the expected level of reasoning for lower secondary school.

KEYWORDS

geometric reasoning, spatial visualization, prototype, van Hiele theory, basic geometric concepts

Obsah

Úvod

Inspirací k tvorbě diplomové práce mi byl článek Ireny Budínové, který se věnoval vytváření představ základních geometrických pojmů v průběhu základní školy. Z výzkumu vyplynulo, že ve vnímání rovinných útvarů se objevují problematické aspekty, se kterými se potýkají žáci základní školy. Tito žáci klasifikují a analyzují rovinné útvary většinou intuitivně a na základě svých zkušeností, což vede k chybným představám. Dalším zjištěním bylo, že žáci mají problémy se správným používáním terminologie, která se vztahuje ke geometrickým útvarům, jako jsou vrchol, strana aj. Tyto poznatky mě přivedly k otázce: Jaké představy si žáci vytvářejí v trojrozměrném prostoru a jak se liší od představ v prostoru?

Cílem práce je získat vhled do geometrického uvažování žáků druhého stupně základní školy, a to v oblasti geometrických těles.

Práci jsem rozdělil na dvě hlavní části – teoretickou a praktickou. Teoretická část je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole popisuji teorii prototypů a vliv kritických a nekritických atributů na geometrické myšlení žáků. Ve druhé kapitole představuji van Hielovu teorii. Jedná se o teorii rozvoje geometrického myšlení, která byla navržena tak, aby pomohla identifikovat úroveň geometrického myšlení žáků. Ve třetí kapitole uvádím očekávané výstupy z okruhu Geometrie v rovině a v prostoru v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání, které se vztahují ke geometrickým tělesům. Jednotlivé očekávané výstupy jsou doplněny o indikátory ze Standardů pro základní vzdělávání.

Praktická část je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola se zaměřuje na pilotní studii. Tato studie měla za cíl nejen upřesnit formu výzkumu, ale také stanovit přesné znění a podobu úloh, které budou žáci řešit. Ve druhé kapitole je didaktická analýza úloh, kde shrnuji úlohy z pohledu možných žákovských chyb a obtíží. Ve třetí kapitole jsou sepsána data a jejich analýza. Čtvrtá kapitola popisuje průběh výzkumu a sběr dat. V poslední kapitole jsou uvedeny výsledky výzkumu. Zaměřuji se na analýzu žákovských řešení úloh, jež je doplněna o ukázky žákovských řešení a o přepisy komentářů a rozhovorů mezi žáky. Popisuji nejčastější chyby a obtíže. Věnuji se rozboru představ, které si žáci vytvářejí v trojrozměrném prostoru, a hodnotím jejich úroveň. V závěru práce shrnuji výsledky výzkumu a uvádím doporučení pro výuku.

1 Teoretická část

V teoretické části představím van Hielovu teorii, teorii prototypů a očekávané výstupy z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání.

Geometrické představy závisí na tom, jak dané útvary vnímáme (Giaquinto, 2007). Giaquinto (2007) rozlišuje mezi schopností porozumět vztahům v krychli a jejich intuitivním chápáním. Schopnost zdůvodňovat vlastnosti krychle vyžaduje, aby žák měl vytvořen pojem krychle. Žáci pozorují zákonitosti kolem sebe, díky čemuž si vytvářejí představu daného pojmu a na základě svých zkušeností pro něj formulují tvrzení. Rozdíl mezi pojmem a představou je složitý, a to zejména kvůli tomu, že představa nemusí odpovídat skutečnosti.

Kuřina (1987) považuje za nejzávažnější nedostatky ve vyučování geometrie nízkou úroveň geometrické představivosti, omezený rozsah a nízkou úroveň praktických geometrických dovedností. Tyto nedostatky se podle něj objevují již na základní škole. Upozorňuje, že prostorová představivost je klíčová pro technickou tvořivost, a proto nedostatky ve výuce geometrie mohou negativně ovlivnit rozvoj technických dovedností. Rozvoj geometrické představivosti je úzce spjat s rozvojem poznávacích schopností žáků, a tak je důležité se této problematice věnovat. Proto tvoří geometrická představivost jeden z pilířů mé práce. Těmi dalšími jsou teorie prototypů a van Hielova teorie. Obě teorie propojuji s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (2017).

1.1 Teorie prototypů

Již od raného dětství si žáci osvojují a rozvíjí pojmy, včetně geometrických pojmů. Ještě před nástupem do školy si začínají všímat vlastností tvarů a těles, aniž by si plně uvědomovali, které z těchto vlastností jsou klíčové pro identifikaci objektů. Pokud čtverec není orientován vodorovně, žáci ho nemusí vnímat jako čtverec. Mohou také vnímat zakřivené strany jako strany v geometrickém smyslu, přestože si stranu na hodině matematiky definovali jako úsečku.

Vnímání objektů je ovlivněno intuicí, zatímco geometrické pojmy vycházejí z přesných definic. To způsobuje, že naše vnímání objektů nemusí vždy odpovídat definicím pojmu. Úkolem učitelů je naučit žáky chápat pojmy tak, aby odpovídaly jejich definicím.

Tvorba geometrických pojmů je složitý proces. Podle psychologů mohou být kategorie pojmů vymezeny různě a každý pojem je souborem charakteristických vlastností. Vlastnosti nového pojmu se pak posuzují porovnáním s typickým zástupcem kategorie, aby se určilo, zda do ní patří. Tento proces popsali Vinner a Hershkowitz (1980), kteří zavedli pojmy „image" („představa") a definice pojmu ve vztahu ke geometrickým pojmům. Obraz pojmu zahrnuje všechny představy o daném konceptu a u každého člověka se může lišit. Definice pojmu je přijatá komunitou matematiků, ale každý člověk si může vytvářet i vlastní definice, které se mohou měnit v průběhu času a v závislosti na okolnostech.

Teorie prototypů popisuje existenci ideálních příkladů (prototypů), které slouží jako vzory pro rozhodování při kategorizaci dalších příkladů. Na základě těchto příkladů se tvoří seznam kritických a nekritických atributů, což umožňuje vytvoření konceptu založeného na charakteristických vlastnostech. Pokud bychom chtěli například zavést pojem rovnoběžník a definovali bychom ho jako čtyřúhelník se dvěma páry protilehlých rovnoběžných stran, pak bychom mohli očekávat, že si žáci představí čtyřúhelník, který má navíc stejně dlouhé protilehlé strany a stejně velké protilehlé úhly. V takovém případu by kritické atributy zahrnovaly pojmy, jako je čtyřúhelník a dva páry rovnoběžných stran. Mezi nekritické atributy by patřila velikost nebo orientace čtyřúhelníku. Kritické atributy jsou nezbytné pro správnou identifikaci objektu, zatímco nekritické atributy identifikaci neovlivňují, ale vedou k tvorbě prototypů. Prototypy mají nejvíce atributů. Například rovnostranný trojúhelník s vodorovnou základnou je pro mnohé žáky prototypem trojúhelníka a krychle je prototypem tělesa (Tsamir et al., 2015, s. 497–499) Když se změní vizuální vlastnosti geometrických tvarů a těles, jako je velikost, orientace, poměr stran či zkosení, mohou mít žáci problémy s jejich rozpoznáním.

Clements a Battista (1992) poukazují na existenci „prekognitivní úrovně" geometrického myšlení, kdy žáci nedokáží spolehlivě rozlišit tvary, které nepatří do stejné skupiny. Jedním z možných problémů je používání aktivit zaměřených na rozpoznávání tvarů a těles pomocí prototypů, namísto toho, aby se žáci učili zkoumat jejich vlastnosti. Učitelé by měli připravovat aktivity, které poskytují příležitosti prozkoumávat vlastnosti geometrických objektů a zároveň obsahují typické i netypické tvary (tvary s různou velikostí, orientací, poměrem stran a šikmostí) (Arnas & Aslan, 2010, s. 264).

1.2 van Hielova teorie

Od narození žijeme v trojrozměrném světě, a proto je důležité ho umět popsat a porozumět mu. K tomu je nezbytná znalost geometrie. Na základě častých problémů s výukou a učením geometrie vytvořil francouzský matematik Pierre van Hiele model výuky geometrie, který je založen na úrovních geometrického myšlení žáků a na řešení úloh, jež napomáhají k přechodu na vyšší úroveň (Dimla & Soriano, 2019, s. 312–313).

Tato teorie je platná jak pro geometrii v rovině, tak v prostoru. Van Hielova teorie má tři hlavní aspekty: existenci úrovní, vlastnosti úrovní a postup z jedné úrovně do další. Podle teorie existuje pět úrovní myšlení či porozumění v geometrii, které van Hiele původně čísloval od nuly do čtyřky.

Úrovně geometrického myšlení podle van Hieleho (Hiele, 1988, s. 4–10):

- Úroveň 0 (Vizualizace): Žáci na této úrovni využívají zrakové vnímání a neverbální myšlení. Žáci jsou schopni pojmenovat vybrané těleso, ale nejsou schopni uvést správný důvod, např. říkají „protože to vypadá jako“. Žáci umí těleso také nakreslit, avšak jejich kresby nejsou podrobné. To znamená, že nezachycují vlastnosti daného tělesa. Geometrická tělesa žáci rozpoznávají podle jejich tvaru, vnímají je jako celek a porovnávají je s jejich prototypy nebo předměty každodenního života. Při kategorizaci těles často říkají „to jsou/nejsou“. Na této úrovni žáci nedokážou identifikovat vlastnosti těles a používají jednoduchý jazyk.
- Úroveň 1 (Analýza): Žáci na této úrovni analyzují a pojmenovávají vlastnosti geometrických těles, ale nevnímají vzájemné vztahy mezi těmito vlastnostmi a považují všechny za stejně důležité. Nerozlišují mezi nutnými a postačujícími vlastnostmi. Jinými slovy, žáci dokážou propojit těleso s jeho vlastnostmi a analyzovat ho na základě těchto vlastností. Při analýze např. říkají „těleso má 6 stěn, 8 vrcholů, 12 hran, má všechny hrany stejně dlouhé a každé dvě sousední hrany svírají pravý úhel atd.“. Nemají potřebu dokazovat objevená fakta. Dokážou měřit, skládat tvary a využívat geometrický software.
- Úroveň 2 (Neformální dedukce): Žáci na této úrovni chápou vztahy mezi vlastnostmi geometrických objektů. Jsou schopni vytvářet smysluplné definice a uvádět jednoduché argumenty k důkazu svých myšlenek.

Jsou schopni klasifikovat a třídit objekty a ukázat vztahy mezi různými skupinami objektů. Při neformální dedukci žáci pravděpodobně říkají „pokud je jedna dvojice protějších stěn hranolu shodná a rovnoběžná, pak každá dvojice protějších stěn hranolu je shodná a rovnoběžná“.

- Úroveň 3 (Dedukce): Žáci jsou na této úrovni schopni provádět deduktivní geometrické důkazy pomocí vět a definic. Dokážou identifikovat, které vlastnosti vyplývají z jiných, a chápou význam definic, axiomů, vět a důkazů. Jsou schopni formálně argumentovat a zdůvodňovat.
- Úroveň 4 (Axiomatizace): Žáci jsou na této úrovni schopni porovnávat různé axiomaticky založené systémy a zkoumat různé typy geometrií bez použití konkrétních modelů. Rozumí, jakým způsobem jsou zavedeny matematické systémy, a dovedou používat všechny typy důkazů. Dokážou také popsat, jak přidání nebo odebrání axiomu ovlivní geometrický systém.

Podle van Hieleho by žáci na konci prvního stupně základní školy měli dosáhnout první úrovně geometrického myšlení. Druhé úrovně geometrického myšlení by měli dosáhnout na konci druhého stupně základní školy.

Úrovně geometrického poznání podle van Hielovy teorie mají pět důležitých vlastností:

- Pořadí: Žáci musí postupně projít jednotlivými úrovněmi. Nemohou přeskočit žádnou úroveň, aby se dostali na vyšší.
- „Adjacency“: To, co bylo podstatné v předchozí úrovni, se stává méně podstatným na aktuální úrovni.
- Rozdíl: Každá úroveň má své symboly a vztahy. To znamená, že správné poznatky na jedné úrovni nemusí platit na jiné.
- Oddělení: Žáci na různých úrovních myšlení si vzájemně nerozumí, což vyžaduje, aby učitel mluvil s žáky na nižší úrovni jiným jazykem.
- Dosažení: K úplnému porozumění na nejvyšší úrovni dochází po splnění všech pěti pět fází. (Crowley, 1987, s. 2–6)

Na vyšší úroveň geometrického myšlení se žák dostane pomocí výuky, která má tyto charakteristiky:

- Dotazování: Žáci dostanou úlohu a učitel vede s žáky diskuzi, při níž žáci pokládají otázky.
- Samostatné řešení: Žáci samostatně řeší zadané úlohy.
- Vysvětlení: Žáci popisují svá zjištění a zavádějí novou terminologii. Sdílejí své názory a učitel dbá na správné používání odborného jazyka.
- Řízená orientace: Žáci experimentálně zkoumají vlastností geometrických objektů a učitel navrhuje aktivity umožňující rozpoznat atributy nového pojmu.
- Integrace: Žáci shrnují své poznatky, začleňují je do již vybudovaného systému poznatků a uchovávají si je v paměti. (Dimla & Soriano, 2019, s. 313)

1.3 Geometrie v prostoru pro 2. stupeň základní školy v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání

Z Rámcového vzdělávacího programu (2017) zmíním pouze očekávané výstupy, které odpovídají zaměření výzkumu.

Okruh Geometrie v rovině a v prostoru v Rámcovém vzdělávacím plánu pro základní vzdělávání (2017, s. 36) obsahuje následující očekávané výstupy: „M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti; M-9-3-11 načrtne a sestrojí sítě základních těles; M-9-3-12 načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině; M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu“.

Ve Standardech pro základní vzdělávání (2013) lze najít k očekávanému výstupu M-9-3-09 následující indikátory:

- Žák rozpozná mnohostěny (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan) a rotační tělesa (válec, kužel a koule).
- Žák používá pojmy podstava, hrana, stěna, vrchol, tělesová a stěnová úhlopříčka.

Pro očekávaný výstup M-9-3-11 lze ve Standardech pro základní vzdělávání (2013) najít tyto indikátory:

- Žák používá pojmy síť tělesa, plášť, podstava.

- Žák rozpozná sítě základních těles (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan, válec, kužel).
- Žák načrtne a sestrojí síť krychle.

Pro očekávaný výstup M-9-3-12 lze ve Standardech pro základní vzdělávání (2013) nalézt tyto indikátory:

- Žák rozpozná, z jakých základních těles je zobrazené těleso složeno.
- Žák načrtne krychli a kvádr ve volném rovnoběžném promítání.
- Žák sestrojí krychli ve volném rovnoběžném promítání.

Pro očekávaný výstup M-9-3-13 můžeme ve Standardech pro základní vzdělávání (2013) najít tyto indikátory:

- Žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy.
- Žák řeší jednoduchou úlohu.
- Žák ověří výsledek úlohy.

Detailnější informace k indikátorům lze najít v Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání (Fuchs et al., 2015)

Podle van Hieleho teorie by žáci měli během druhého stupně základní školy dosáhnout úrovně neformální dedukce. To znamená, že by měli být schopni rozpoznávat vztahy mezi vlastnostmi geometrických objektů a formulovat jednoduché argumenty jako důkazy svých tvrzení. Měli by být schopni geometrické objekty klasifikovat a třídit. Pokud žáci v rámci indikátorů rozpoznají například mnohostěn, jako je hranol, není vždy jasné, zda se rozhodovali jen na základě jeho vizuální podoby, nebo zda zvažovali i jeho vlastnosti a dokážou své rozhodnutí zdůvodnit. Například indikátor, kdy má žák vyhledat potřebné údaje a vztahy v textu, vyžaduje, aby se žáci nacházeli na úrovni neformální dedukce. Přechod z úrovně analýzy na úroveň neformální dedukce vyžaduje, aby žáci dokázali propojit výsledky analýzy jednotlivých těles a na jejich základě třídili tělesa do jednotlivých kategorií a ukazovali vztahy mezi nimi. Pokud toho nejsou schopni, zůstávají na úrovni analýzy.

1.4 Vymezení základních pojmů

V tomto oddílu jsou sepsané základní definice těles a pojmů, s kterými pracují žáci v jednotlivých úlohách výzkumu:

„Plášť jehlanu je složen ze všech jeho bočních stěn.“

(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 250)

„Síť jehlanu je složena ze všech jeho stěn.“ (Odvárko & Kadleček, 2004, s. 251)

„Strana kužele se nazývá úsečka, která spojuje vrchol kužele s bodem kružnice ohraničující podstavu.“ (Odvárko & Kadleček, 2004, s. 257)

„Stěny hranolu se nazývají všechny jeho boční stěny a obě podstavy.“

(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 237)

„Stěny jehlan se nazývají všechny jeho boční stěny a podstava.“

(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 249)

„Stranám podstavy se říká podstavné hrany.“ (Polák, 2008, s. 517)

„Stranám bočních stěn se říká boční hrany.“ (Polák, 2008, s. 517)

„Body se nazývají vrcholy.“ (Polák, 2008, s. 518–519)

„Mnohoúhelník s n vrcholy se nazývá n-úhelník.“ (Odvárko & Kadleček, 2004, s. 173)

„Uzavřená lomená čára, jež leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá mnohoúhelník.“ (Polák, 2008, s. 448)

„Kvádr je čtyřboký hranol, protější stěny jsou shodné obdélníky, nebo čtverce.“ (Odvárko & Kadleček, 2004, s. 241)

„Krychle je pravidelný čtyřboký hranol, všechny stěny krychle jsou shodné čtverce.“

(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 243)

„Trojboký hranol, podstavy jsou shodné trojúhelníky.“

„Čtyřboký hranol, podstavy jsou shodné čtyřúhelníky.“

(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 237)

2 Praktická část

Cílem výzkumu je získat vhled do geometrického uvažování žáků druhého stupně základní školy v prostoru.

2.1 Pilotní studie

Cílem studie bylo zjistit vhodnou formu výzkumu a stanovit znění a podobu úloh. Pilotní studie se uskutečnila na základní škole v Teplicích a probíhala v klidném a bezpečném prostředí. Snažil jsem se vytvořit příjemnou atmosféru, aby žáci nebyli nervózní a nebáli se diskutovat. Studie se zúčastnilo sedm dobrovolníků z řad žáků osmého ročníku rozdělených do čtyř skupin. Každá skupina dostala záznamový arch a byla seznámena s cílem práce. Poté se pustily do řešení. Během řešení jsem u nich seděl a zapisoval si poznámky týkající se formy, obsahu úloh nebo myšlenek žáků.

Pilotní studie se nejdříve zúčastnila dvojice žáků, kteří se museli u každé úlohy shodnout na odpovědi. Pokud měli rozdílné názory, museli se vzájemně přesvědčit o správnosti svého řešení. Tyto momenty byly klíčové pro zachycení geometrického uvažování žáků, protože žáci verbalizovali své znalosti a argumenty. Když jeden žák nevěděl, jak úlohu řešit, ale druhý měl jasnou představu, docházelo k vysvětlování a objasňování geometrických vztahů. Rovněž nastaly situace, kdy ani jeden z žáků neměl představu o řešení úlohy, a tak se snažili společnými silami odpověď vymyslet, nebo ji tipovali. Po dvojici podstoupil pilotní studii jednotlivec, ale ukázalo se, že tato forma nebyla tak efektivní. Žák byl po celou dobu nervózní a jeho aktivita byla při řešení problémů nižší než u dvojice žáků. Všechny myšlenky si nechával pro sebe, a tak nebylo možné je zaznamenat. Následně plnila studii dvojice a poté opět jednotlivec.

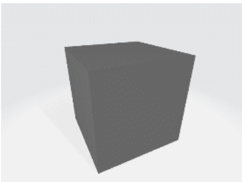
Pilotní studie zahrnovala devět úloh zaměřených na geometrické uvažování žáků v trojrozměrném prostoru a na pochopení základních geometrických pojmů. Všechny úlohy byly založeny na van Hielově teorii a teorii prototypů. Žáci zapisovali své odpovědi do předem připravených záznamových archů. Tělesa, která žáci analyzovali, byla nahrána v počítači ve formátu STL vytvořeném firmou 3D Systems nebo v programu GeoGebra.

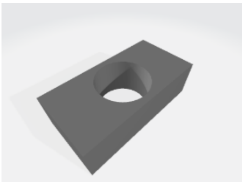
Jedná se o záměrné metodologické omezení. Tělesa byla v programu pevně umístěna, například jehlan byl zobrazen podstavou nahoru, aby se zvýraznily nekritické atributy vedoucí k tvorbě prototypů. Z tohoto důvodu nebyl využit 3D tisk. Program umožňoval těleso libovolně zvětšovat a zmenšovat a libovolně si s ním otáčet, avšak mnou vytvořená poloha byla zachována. Dalším důvodem, proč byla zvolena tato forma, je nákladnost 3D tisku.

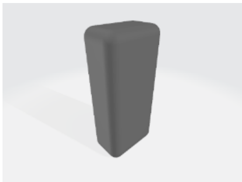
Žáci dostali počítačové složky označené podle čísel úloh. Po jejich otevření se jim zobrazil seznam všech číselně označených těles. K jednotlivým tělesům se mohli kdykoliv vrátit. Záznamový arch obsahoval zadání úlohy a tabulky pro zaznamenání odpovědí. Zpětná vazba od účastníků pilotáže potvrdila, že systém byl pro ně jednoduchý a snadno pochopitelný. V dalším oddíle popíšu jednotlivé úlohy a uvedu zkušenosti z pilotní studie.

2.2 Didaktická analýza úloh a zkušenosti z pilotní studie

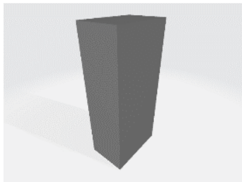
1. Úloha: Je těleso na obrázku kvádr? Zdůvodněte.

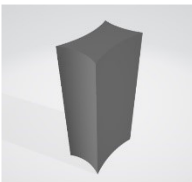

Obrázek 1 Těleso 1

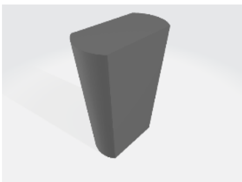

Obrázek 2 Těleso 2


Obrázek 3 Těleso 3

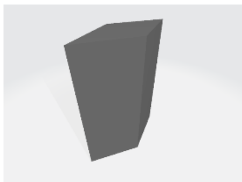

Obrázek 4 Těleso 4


Obrázek 5 Těleso 5


Obrázek 6 Těleso 6


Obrázek 7 Těleso 7


Obrázek 8 Těleso 8


Obrázek 9 Těleso 9

Kvádry jsou na obrázcích 1, 5 a 8.

Úloha 1 byla zaměřena na kvádr. Úkolem bylo rozhodnout a zdůvodnit, zda je předložené těleso kvádrem. Úloha měla za cíl zkoumat míru porozumění základním geometrickým pojmům, jako jsou hrana, stěna či vrchol, které jsou klíčové pro identifikaci geometrických těles.

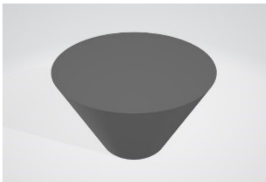
Předpokládal jsem, že rozpoznat prototypy kvádru nebude problém, ale rozhodnout o kvádru, který má zaoblené hrany (obr. 3), vyduté hrany (obr. 6), vypouklé hrany (obr. 7), má v sobě díru (obr. 2) nebo podstavu dosti podobnou obdélníku (obr. 4), bude problém.

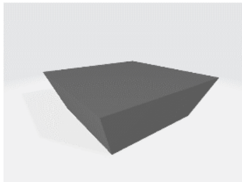
Žáci se seznamují s kvádrem už na prvním stupni, a poznat tak prototyp kvádru nebyl žádný problém. Prototypické kvádry žáci označili za „klasiku“. V ostatních případech následovaly delší diskuze. Některé dvojice se rozhodovaly intuitivně, některé na základě podobnosti s prototypem, ale ani jedna nedokázala zdůvodnit své rozhodnutí. Má očekávání se potvrdila. Žáci intuitivně vnímají pojmy stěna a hrana, ale geometrická podstata jim uniká. Podle van Hieleho teorie odpovídá jejich myšlení úrovni vizualizace. Pravděpodobně se nesetkali s takovými tělesy, a proto jimi byli zaskočení.

Na základě výsledků této úlohy jsem se rozhodl těleso 4 vyřadit a všechny ostatní v úloze ponechat, a to včetně prototypů kvádru z důvodu zvýšení motivace a pocitu úspěchu.

2. Úloha: Je těleso na obrázku hranol? Zdůvodněte.


Obrázek 10 Těleso 1

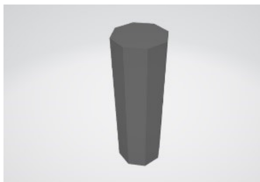

Obrázek 11 Těleso 2

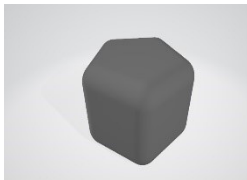

Obrázek 12 Těleso 3

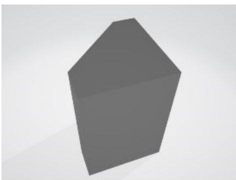

Obrázek 13 Těleso 4

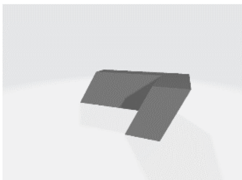

Obrázek 14 Těleso 5

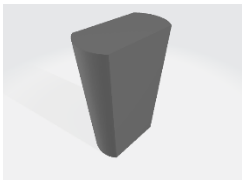

Obrázek 15 Těleso 6

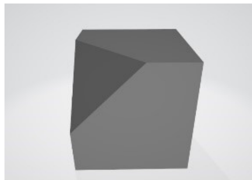

Obrázek 16 Těleso 7


Obrázek 17 Těleso 8


Obrázek 18 Těleso 9


Obrázek 19 Těleso 10


Obrázek 20 Těleso 11


Obrázek 21 Těleso 12

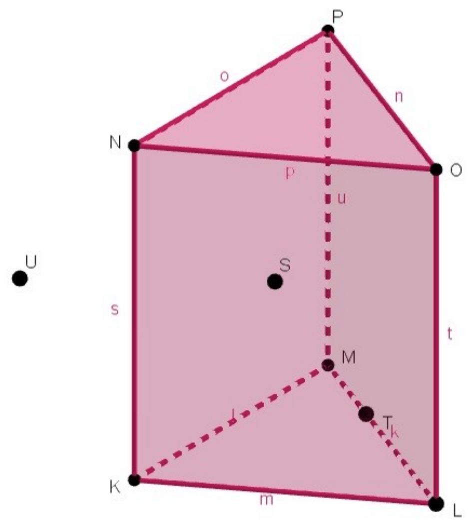
Hranoly jsou na obrázcích 13, 16, 18, 19 a 20.

Úloha 2 byla zaměřena na hranol. Úkolem bylo rozhodnout a zdůvodnit, zda je těleso hranolem. Cílem úlohy bylo zkoumat míru porozumění základním geometrickým pojmům, jako jsou hrana, vrchol a stěna, které jsou klíčové pro identifikaci hranolu.

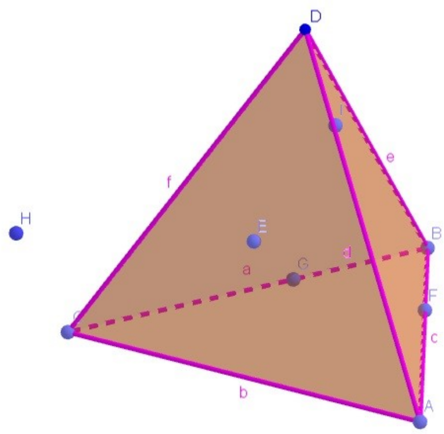
Pro jistotu jsem se informoval u učitelů matematiky, zda se v hodinách zabývali hranoly, a dostal jsem kladnou odpověď. Předpokládal jsem, že žáci budou chápat hranol intuitivně a budou se rozhodovat na základě toho, zda má těleso hrany. Můj předpoklad se potvrdil. Žáci skutečně uvažovali tímto způsobem.

Za zmínku stojí výrok jedné dvojice, která označila nekonvexní tělesa za „divoká“ a usoudila, že nemohou být hranoly. Z této úlohy jsem vyřadil pouze tělesa 2, 5, 8 a 9, která si byla navzájem podobná, abych snížil jejich celkový počet.

3. Úloha: Podle obrázku doplňte do tabulky křížek, pokud objekt splňuje danou vlastnost.



Obrázek 22 Těleso 1



Obrázek 23 Těleso 2

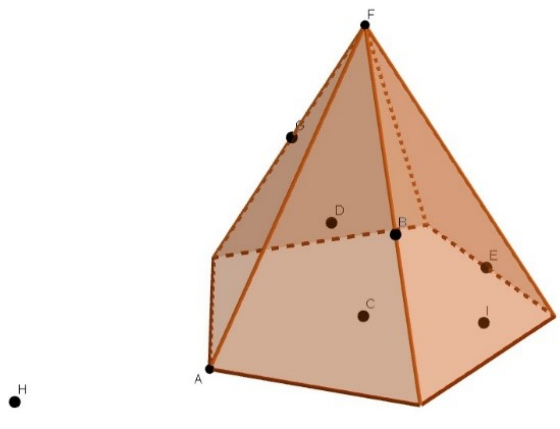
Těleso 1	*K*	k	*L*	l	*M*	m	*N*	n	*O*	o	*P*	p	*S*	s	*T*	t	*U*	u
Body, patřící tělesu	×		×		×		×		×		×		×		×			
Vrcholy tělesa	×		×		×		×		×		×							
Hrany tělesa		×		×		×		×		×		×		×		×		×

Těleso 2	*A*	a	*B*	b	*C*	c	*D*	d	*E*	e	*F*	f	*G*	*H*	*I*
Body, patřící tělesu	×		×		×		×		×		×		×		×
Vrcholy tělesa	×		×		×		×								
Hrany tělesa		×		×		×		×		×		×			

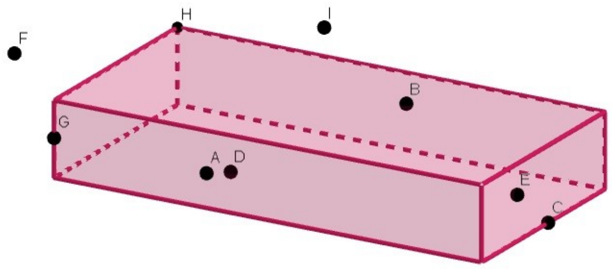
Úloha 3 byla zaměřena na objekty patřící tělesu. Úkolem bylo do tabulky zaznamenat body patřící tělesu, vrcholy tělesa a hrany tělesa. Cílem úlohy bylo ověřit porozumění základním geometrickým pojmům a schopnost vnímat těleso jako celek. Mnoho žáků se setká ve výuce s modelováním tělesa pomocí špejlí a modelíny, což může vést k mylné představě, že tělesa tvoří pouze hraniční čáry. Předpokládal jsem, že žáci nebudou považovat body ve stěně za body patřící tělesu.

Jak se ukázalo, moje domněnka byla nesprávná. Žáci dokonce označili třetí úlohu za nejsnazší, což mě vedlo k závěru, že není potřeba tuto úlohu ve výzkumu nechávat.

Úloha 4: Podle obrázku doplňte do tabulky křížek, pokud body splňují danou vlastnost.



Obrázek 23 Těleso 1



Obrázek 24 Těleso 2

Těleso 1	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
Body patřící podstavě tělesa	×		×		×				
Body patřící plášti tělesa	×	×		×	×	×	×		×
Body patřící povrchu tělesa	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Body patřící síti tělesa	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Těleso 2	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
Body patřící podstavě tělesa		×	×	×	×			×	
Body patřící plášti tělesa	×		×		×	×	×		×
Body patřící povrchu tělesa	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Body patřící síti tělesa	×	×	×	×	×	×	×	×	×

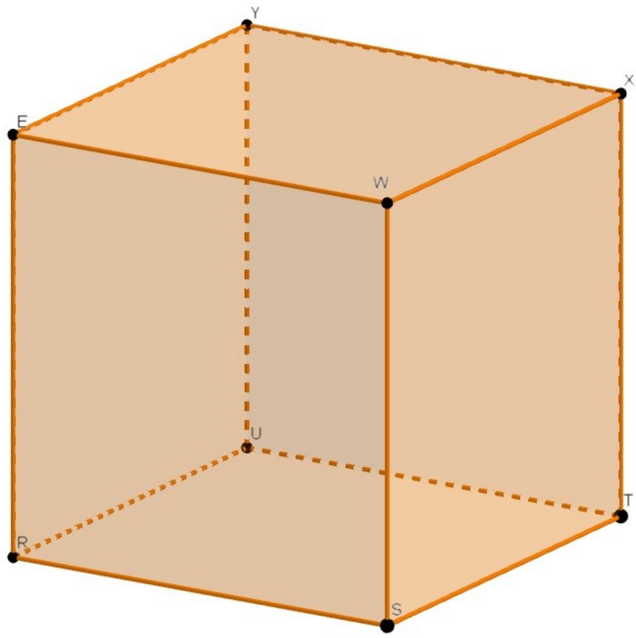
V úloze 4 byla skupinám předložena dvě tělesa a body (obr. 23 a obr 24). Jejich úkolem bylo do tabulky zaznamenat, které body patří podstavě, plášti, povrchu a síti. Cílem úlohy bylo zjistit míru porozumění těmto pojmům, které úzce souvisí s objemem a povrchem těles, dále s řezy, a tak míra jejich porozumění je důležitá. Bod ležící na hraně podstavy tělesa náleží jak do roviny podstavy, tak do roviny pláště.

Podle van Hieleho teorie by tento poznatek měl odpovídat úrovni neformální dedukce, která se rozvíjí na druhém stupni základní školy. Z tohoto důvodu jsem očekával nízkou míru úspěšnosti, což se potvrdilo. Žádná skupina nezahrnula bod ležící na hraně podstavy tělesa do podstavy a zároveň do pláště. To ukazuje, že žáci vnímají plášť a podstavu jako dvě disjunktní roviny bez společné průsečnice.

Překvapilo mě, že žáci měli problém s přiřazením bodů do povrchu. Pravděpodobně se jednalo o terminologickou nejednoznačnost, jelikož žáci chápou povrch jako číslo, zatímco v úloze bylo toto slovo použito v jiném významu. Z tohoto důvodu jsem rozhodl povrch z výzkumu vyřadit. V žákovském řešení mě nejvíce překvapily obtíže s přiřazením bodů do sítě tělesa. Síť tělesa, která představuje rozvinutí tělesa do roviny, je v RVP ZV jedním z očekávaných výstupů a ve Standardech ZV je jedním z indikátorů. Žáci se s tímto pojmem setkávají už na prvním stupni, a proto jsem nečekal tak nízkou úspěšnost.

Jedna dvojice si dokonce představuje síť tělesa jako sjednocení všech hran tělesa. Úloha ukázala, že je důležitá pro pochopení geometrických pojmů, a proto ji ponechávám ve výzkumu.

Úloha 5: Podle obrázku rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.



Obrázek 25 Úloha 5

	ANO/NE
Úsečka SU je hranou tělesa	NE
Úsečka RY je stěnovou úhlopříčkou	ANO
Úsečky RU a WX jsou rovnoběžné	ANO
Úsečky UY a ST jsou na sebe kolmé	ANO
Úsečky XY a YU jsou různoběžné	ANO
Úsečky UW a RX mají různou délku	NE
Úsečky SW a RS jsou na sebe kolmé	ANO
Úsečky SX a RT mají stejnou délku	ANO
Úsečky UT a XY jsou sousední hrany	NE
Úsečka RE je boční hranou tělesa	ANO
Úsečka SU je kratší, než úsečka SW	NE
Úsečky WY a EX jsou na sebe kolmé	ANO

Úloha 5 byla zaměřena na vlastnosti krychle a vzájemné vztahy mezi nimi. Žáci měli v záznamovém archu rozhodnout o pravdivosti tvrzení.

Cílem úlohy bylo zkoumat míru porozumění základním geometrickým pojmům, jako je stěnová úhlopříčka, a zda dokážou analyzovat vztahy objektů v krychli. Předpokládal jsem, že úloha nebude mít vysokou úspešnost, protože je kognitivně náročnější a žáci při jejím řešení musí prokázat dobrou úroveň prostorové představivost. K mému překvapení byla úspěšnost vysoká. Nejčastější chyby nastaly u tvrzení týkajících se sousedních hran a kolmosti dvou hran. Úlohu ponechám ve výzkumu, protože zkoumá míru pochopení vztahů v krychli a vyžaduje vyšší úroveň geometrického myšlení.

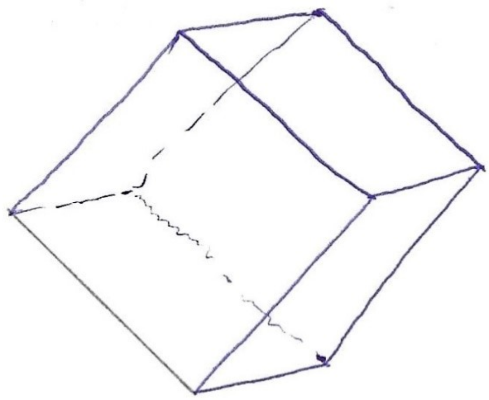
Úloha 6: Dokreslete krychli a kvádr, je-li dána jedna jejich hrana.

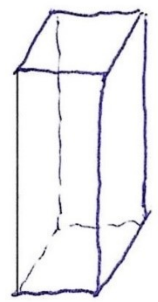
A) KRYCHLE

B) KVÁDR

Úloha 6 byla zaměřena na zkoumání prostorové představivosti žáků a vyžadovala porozumění vlastnostem a vztahům krychle a kvádru.

Správných řešení je mnoho z důvodu různých pohledu na tělesa, a proto uvádím jedno z možných řešení.





Většina žáků neměla problém s dokreslením krychle a kvádru, ale v několika případech žáci dokreslili čtverec a obdélník. To naznačuje, že tito žáci mohou vnímat krychli jako čtverec. Žáci si mohli krychli představit z pohledu zepředu, nebo ji nedokázali nakreslit či krychli mohou vnímat jako čtverec. Úlohu 2 výzkumu nepoužiju, protože zadání bylo příliš konkrétní a žáci měli okamžitou představu o řešení.

Úloha 7: Dokreslete tělesa, která nejsou krychle ani kvádr, je-li dána jedna jejich hrana.

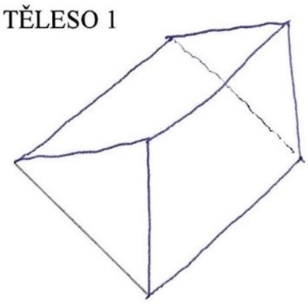
A) TĚLESO 1

B) TĚLESO 2

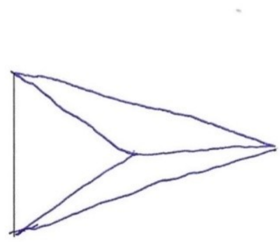
Úloha 7 byla navržena jako gradovaná verze úlohy šest. Gradačním skokem bylo přidání podmínky, která žákům zakazovala nakreslit krychli nebo kvádr. Cílem úlohy bylo zkoumat prostorovou představivost žáků a vyžadovala znalost dalších těles a porozumění jejich vlastnostem a vztahům. První těleso bylo zadáno netypickou polohou. Tato úloha poskytla více možností řešení, čímž podporovala kreativitu žáků a prostorovou představivost.

Úloha nabízí mnoho pohledů a řešení, a proto uvádím pouze jedno z možných řešení.

A) TĚLESO 1



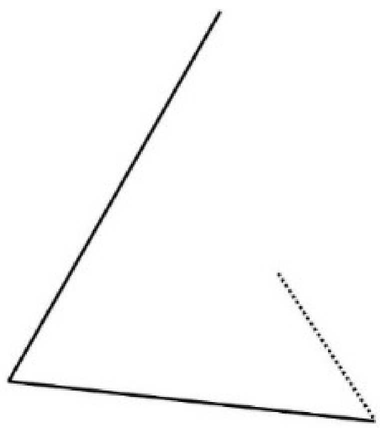
B) TĚLESO 2



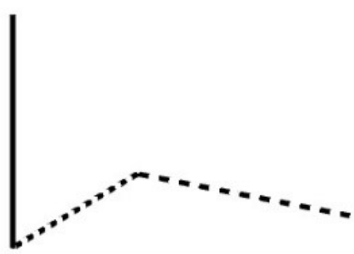
Výsledky pilotní studie ukázaly, že žáci skutečně dokreslovali různá tělesa, například trojboké jehlany nebo čtyřboké jehlany. Cílem úlohy bylo také analyzovat úroveň geometrického myšlení žáků a zjistit, jaké mají znalosti o dalších základních tělesech. Z výše uvedených důvodů úlohu zahrnu do výzkumu.

Úloha 8: Dokreslete tělesa, jsou-li dány jejich hrany.

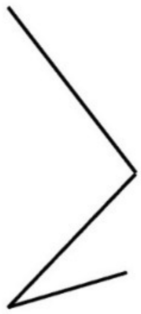
A) TĚLESO 1



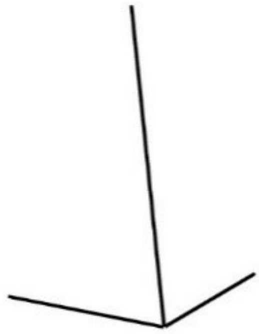
B) TĚLESO 2



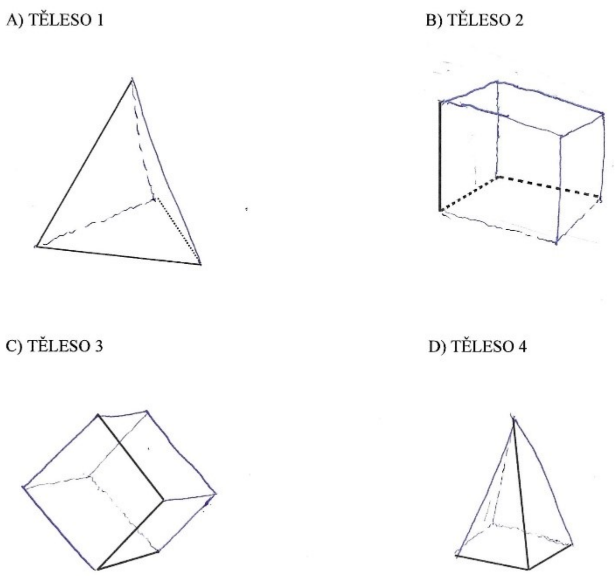
C) TĚLESO 3



D) TĚLESO 4



Úloha nabízí více možných řešení a pohledů, a proto uvádím tělesa, která byla původně navržena.

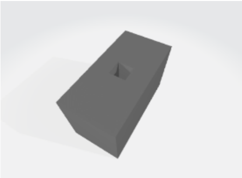


Úloha 8 navazovala na dvě předchozí úlohy, ale jedná se o jejich gradovanou verzi. Gradačním skokem je přidání dalších dvou hran, čímž je určena trojrozměrnost tělesa a zároveň se žákům omezily možnosti řešení. Cílem úlohy bylo zkoumat úroveň prostorové představivost žáků. U těles C a D došlo ke změně orientace hran. Když byla žákům zadána prototypická poloha hran, pak žákům dokreslování těles nečinilo potíže. Situace se zkomplikovala, když byly hrany mírně otočené, a to i v případě krychle. Žákům se v těchto případech tělesa obtížně představovala, a tak hledali různé strategie. Při spolupráci ve dvojicích jsem zaznamenal několik přístupů a odlišné představy. Některé dvojice si nakreslily prototypy geometrických těles, pomocí nichž se snažily odhalit zadaná tělesa.

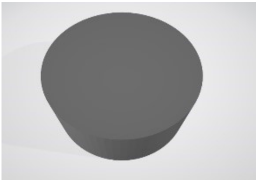
Jiná dvojice pootáčela papír a další žák zkoušel metodu pokus-omyl. Pokud si jeden žák nedokázal těleso představit, druhý se mu to snažil vysvětlit. Nakonec se všem dvojícím podařilo úlohu vyřešit. Za zmínku stojí, že úloha umožňovala více řešení.

V řešeních se objevily krychle, kvádry, trojboké a čtyřboké jehlany a dokonce trojboký hranol. Výsledky ukazují, že každý žák má jinou úroveň vnímání a představivosti, což vede k různým řešením. Vzhledem ke komplexnosti úlohy ji ponechávám ve výzkumu.

Úloha 9: Podle obrázků doplňte tabulku.

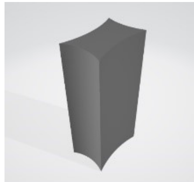


Obrázek 26 Těleso 1

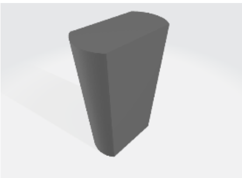


Obrázek 27 Těleso 2

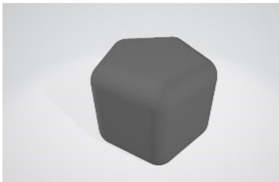
Obrázek 28 Těleso 3



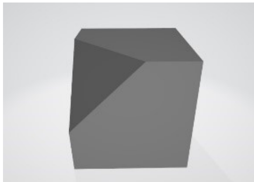
Obrázek 29 Těleso 4



Obrázek 30 Těleso 5



Obrázek 31 Těleso 6



Obrázek 32 Těleso 7

Obrázek 33 Těleso 8

TĚLESO	Počet hran	Počet vrcholů	Počet stěn
1	7	16	8
2	0	0	0
3	24	10	16
4	4	8	6
5	8	21	6
6	0	0	0
7	15	10	7
8	6	4	4

Úloha 9 byla zaměřena na identifikaci a analýzu těles, kde žáci měli určit počet hran, vrcholů a stěn. Cílem úlohy bylo ověřit porozumění těmto pojmům a schopnost analyzovat různá tělesa. Analýza některých těles byla náročnější, což umožnilo zkoumat i systematičnost počítání.

Očekával jsem, že u prototypů nebude problém, ale nastane problém u těles, která mají v sobě díru, nebo mají zaoblené vrcholy či vypouklé hrany. Tento předpoklad se mi potvrdil. Žáci při analýze počítali prohnuté hrany jako hrany, stěnu s dírou počítali jako stěnu, hladký vrchol počítali jako vrchol atd. U většiny žáků nastala situace, kdy v první úloze, kde měli určit, zda je dané těleso kvádrem, správně rozhodli, že se o kvádr nejedná, avšak v této úloze, kdy dostali stejné těleso, řekli, že to je jasné, je to kvádr, proto má dvanáct hran, osm vrcholů a šest stěn. To naznačuje, že změna zadání může ovlivnit geometrické myšlení. Tato úloha měla ze všech nejnižší úspešnost, ale poskytla poznatky o porozumění geometrickým pojmům a myšlení žáků, proto bude použita ve výzkumu.

2.3 Účastníci a průběh výzkumu

Během pilotní studie se ukázalo, že plnění úloh ve dvojicích je efektivnější. Mezi žáky dochází k vzájemné komunikaci, při které lze lépe zachytit jejich myšlenky a způsob uvažování. Při neshodách musí žáci přesvědčit jeden druhého, což podporuje argumentaci a zdůvodňování. Práce v dvojici také poskytuje bezpečnější prostředí, protože žáci nejsou odkázáni jen na sebe, což snižuje jejich nervozitu a obavy z neúspěchu.

Do výzkumu jsem oslovil žáky dvou tříd osmého ročníku, které jsem poznal během souvislé praxe a zároveň jsem se stal jejich učitelem chemie.

Výzkumu se zúčastnilo 22 dvojic žáků pražské základní školy. S žáky máme dobrý vztah, a tak se nám podařilo vytvořit bezpečné prostředí, ve kterém se žáci nebáli udělat chybu. Kvůli ochraně osobních údajů dostal každý žák formulář se souhlasem s použitím výsledků do diplomové práce. Souhlas musel být podepsán samotným žákem i jeho zákonným zástupcem. Bez tohoto souhlasu se žáci nemohli výzkumu zúčastnit. Jména žáků jsou pro zachování soukromí zatajena.

Každá dvojice žáků obdržela před začátkem rozhovoru školní notebook, ve kterém byla připravena složka s tělesy vytvořenými v programech STL nebo GeoGebra. Tělesa byla jasně pojmenována a uspořádána do podsložek podle čísla úlohy. Pilotní studie potvrdila, že tento systém je přehledný a pro žáky snadno pochopitelný. Výzkum byl realizován kvalitativním způsobem, a to prostřednictvím „think-aloud“ (myšlení nahlas) dialogů.

K tomu byly všechny dvojice opatřeny zařízením, na které nahrávaly průběh výzkumu na audiozáznam. Žáci byli vyzváni, aby sdíleli všechny své myšlenky a zblízka je zaznamenávali na zařízení. Kromě toho dvojice obdržely záznamový arch, ve kterém byla uvedena zadání úloh a instrukce k vyplnění.

Před zahájením práce jsem žákům ukázal práci s programy STL a GeoGebra. Ukázal jsem jim, jak mohou tělesa zvětšit, zmenšit nebo otočit. Poté jsem je požádal, aby si všechny funkce samostatně vyzkoušeli. Následně jsme společně prošli záznamový arch, aby žáci věděli, jak do něj zaznamenávat odpovědi.

Žáci mohli úlohy řešit v libovolném pořadí a v případě potřeby se mohli k jednotlivým úlohám vrátit. První dvě vyučovací hodiny plnily výzkum dvojice jedné třídy a následující dvě vyučovací hodiny dvojice druhé třídy. Já jsem byl po celou dobu výzkumu přítomen. Práce žáků nebyla časově omezená, přičemž průměrná doba řešení byla přibližně 55 minut. Dvojice po dokončení všech úloh odeslaly nahrávky na můj disk a odevzdaly vyplněný záznamový arch.

2.4 Data a jejich analýza

Výzkumná data zahrnují žákovská řešení úloh, četnost správných řešení a audiozáznamy rozhovorů. Nejdříve jsem kvantitativně zpracoval výsledky úloh a poté jsem řešení rozdělil na správná a chybná. Ze správných řešení jsem stanovil procentuální úspěšnost. Nahrávky rozhovorů žáků jsem přepsal a přepis podrobil analýze. Analýza se zaměřoval na identifikaci problematických míst v geometrickém uvažování, tvorbě představ, porozumění geometrickým pojmům a vztahům mezi nimi v trojrozměrném prostoru. Evidoval jsem chyby a obtíže, které se objevily už u žáků pilotní studie, i nové.

Výzkumu se zúčastnilo 22 dvojic žáků narozených v letech 2008 až 2010. Tabulka x uvádí přehled žákovských dvojic.

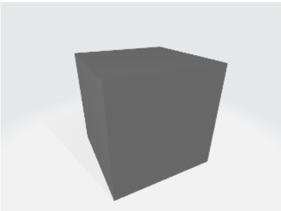
Dvojice	**žák/žákyně (rok narození)**
1	žák 1 (2010) a žák 2 (2010)
2	žákyně 1 (2009) a žákyně 2 (2009)
3	žák 3 (2009) a žák 4 (2009)
4	žák 5 (2010) a žákyně 3 (2009)
5	žák 6 (2008) a žák 7 (2009)
6	žák 8 (2010) a žák 9 (2010)
7	žák 10 (2009) a žák 11 (2009)
8	žákyně 4 (2010) a žákyně 5 (2009)
9	žákyně 6 (2009) a žákyně 7 (2009)
10	žákyně 8 (2010) a žákyně 9 (2009)
11	žákyně 10 (2009) a žákyně 11 (2009)
12	žák 12 (2010) a žákyně 12 (2009)
13	žák 13 (2010) a žák 14 (2010)
14	žák 15 (2010) a žákyně 13 (2010)
15	žák 16 (2009) a žák 17 (2009)
16	žákyně 14 (2009) a žákyně 15 (2009)
17	žákyně 16 (2009) a žákyně 17 (2010)
18	žák 18 (2010) a žák 19 (2009)
19	žákyně 18 (2010) a žákyně 19 (2010)
20	žákyně 20 (2010) a žákyně 21 (2009)
21	žák 20 (2009) a žákyně 22 (2010)
22	žák 21 (2010) a žák 22 (2010)

2.5 Výsledky

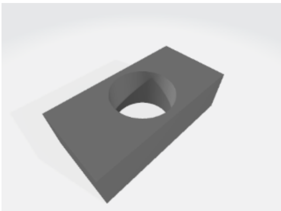
Tento oddíl obsahuje výsledky analýzy žákovských řešení a rozhovorů pro každou úlohu zvlášť. Jsou dokumentovány žákovskými řešeními a promluvami. U každé úlohy jsou shrnuty případné žákovské obtíže a nedostatky v geometrickém uvažování v prostoru.

2.5.1 Úloha 1

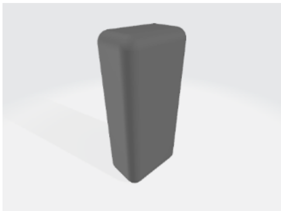
Úloha 1: Je těleso na obrázku kvádr? Zdůvodněte.



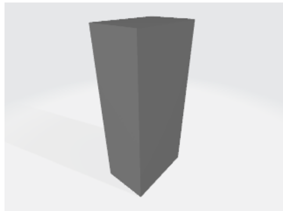
Obrázek 34 Těleso 1



Obrázek 35 Těleso 2

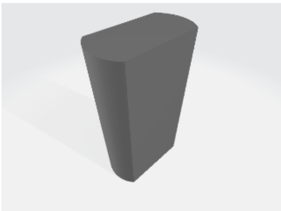


Obrázek 36 Těleso 3



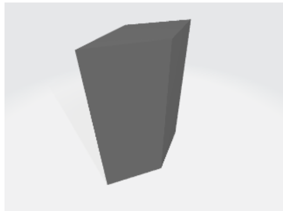
Obrázek 37 Těleso 4

Obrázek 38 Těleso 5



Obrázek 39 Těleso 6

Obrázek 40 Těleso 7



Obrázek 41 Těleso 8

TĚLESO	ANO/NE	ZDŮVODNĚNÍ
1		
2		
…	…	…

Tabulka úspěšnosti:

Těleso	Úspěšnost (v %)	Absolutní četnost
1	76	16
2	57	12
3	81	17
4	100	22
5	95	21
6	90	20
7	86	19
8	76	16

Jednotkou ve výpočtu úspěšnosti byla jedna dvojice a 100 % bylo 22 dvojic. Jedná se tedy o počet všech správných řešení, který je vydělen počtem všech řešení vynásobený stem.

V zadání je jeden prototypický model kvádru, a to na obrázku 37. Žákovská úspěšnost v tomto případě byla 100 %. Takovou úspěšnost jsem očekával, avšak překvapivější jsou zdůvodnění, která žáci uvedli:

Žák 3: „Je to jasný. Šest stran obdélníkové tvaru, to je ono.“

Žák 7: „Určitě je to kvádr, protože to je 3D obdélník.“

Žák 9: „Kvádr na 100 %. Je to ukázkový kvádr. Typický kvádr.“

Žákyně 11: „Je to kvádr, protože splňuje všechny podmínky kvádru.“

Žák 22: „Je to pravý kvádr, protože má 12 stran.“

Zmiňuji výroky pouze několika skupin, protože v případě ostatních se jedná o modifikace výše zmíněných argumentů.

Ve všech případech se ukazuje nesprávné používání geometrických pojmů. Intuitivně rozumíme, co mají žáci na mysli, avšak dochází zde k záměně pojmů hrana a strana nebo strana a stěna. Ve zdůvodněních se ukazuje prototypická představa žáků o kvádru, kterou podtrhují slovy: ukázkový, typický, pravý, na 100 %. Žáci vnímají obrázek 37 jako ideální příklad kvádru. Za zmínku stojí, že většina žáků definuje kvádr jako „3D obdélník“. Rozpoznávají ho podle tvaru, v tomto případě podle obdélníku, a zároveň vědí, že se jedná o těleso, které je trojrozměrné, proto 3D.

Většina skupin se na základě prototypické představy nepouštěla do identifikace vlastností tělesa. Při kategorizaci žáci používali věty „je to/není to“. Jen několik dvojic se snažilo analyzovat těleso na základě jeho vlastností. Ukazuje se, že žáci nerozlišují mezi nutnými a postačujícími podmínkami, protože neuvažují o existenci jiných těles, která mají 12 hran, avšak nejsou kvádry.

Obrázek 40 také zobrazuje kvádr. Ten je na rozdíl od předchozího kvádru na obrázku 37 změněn vizuálním atributem, a to jiným poměrem hran. Úspěšnost byla 86 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 1: „Je to kvádr, jen má jiné rozměry.“

Žák 3: „Myslím, že to je kvádr. Jen je užší, když si představíš širší, pak je to ono.“

Žák 6: „Je to kvádr, protože to vypadá jako kachlička.“

Žákyně 8: „Ano, je to kvádr, má jen prodloužené strany“

Žák 17: „Ano, i když je placatý.“

Z výroků žáků je patrné, že pro rozhodování při kategorizaci tělesa využívají strategii porovnávání s prototypem kvádru. Jinou strategií je přirovnávání k věcem každodenního života, např. kachličce, o níž vědí, že je kvádr. Podstatou obou přístupů je zrakové vnímání a neverbální myšlení žáků. Zmíním, že pouze dvě z dvaceti dvou dvojic se snažily o jednoduchou analýzu tělesa, zbylé se nacházely na úrovni vizualizace. Projevil se vliv vizuálního atributu, jenž zapříčinil snížení úspěšnosti oproti obrázku 37 a obtížnější identifikaci. Opět pozorujeme nesprávné používání geometrických pojmů (záměna pojmu strana a hrana) a používání jednoduchého jazyka pro popsání vlastností tělesa, např. že je placatý.

Těleso (obr. 41) na první pohled vypadá jako kvádr, avšak při detailnějším pohledu zjistíme, že podstavou tělesa je kosočtverec, a tak dané těleso nemůže být kvádrem. Těleso je změněno vizuálním atributem, a to zkosením tvaru podstavy. Úspěšnost byla 76 %. Žákovská zdůvodnění:

Žák 4: „Není to kvádr, protože dole je kosočtverec, takže to je kosokvádr. Určitě to není kvádr.“

Žák 9: „Nahoře nemá tvar obdélníku, to je kosokvádr.“

Žák 11: „Není to kvádr, protože nemá pravé úhly.“

Žákyně 4: „Kosočtverec tam může být, je to kvádr.“

Žákyně 12: „Není to kvádr, protože je to 3D kosočtverec.“

Žákyně 17: „Je to jen zkosený. Je to kvádr, jen má jiný tvar podstavy.“

Žáci se rozhodovali na základě zrakového vnímání a porovnávání s prototypem kvádru.

Pozorujeme, že se žáci snaží o analýzu vlastností daného tělesa, avšak některé dvojice nesprávně používají geometrické pojmy, nebo dokonce nevědí, jak daný objekt pojmenovat. Místo podstavy používají opis: to nahoře, to dole. Pouze jedna dvojice použila správný termín podstava. Častým jevem byla snaha těleso pojmenovat. Žáci tím chtěli pravděpodobně zdůvodnit, že těleso skutečně není kvádr. U tohoto tělesa se ještě více projevil vliv vizuální atributu v podobě zkosení podstavy tělesa, protože ve srovnání s tělesem 7 (obr. 40) má toto těleso nižší procentuální úspěšnost.

Tělesem na obrázku 34 je krychle. S krychlí mají žáci zkušenost už odmalička, kdy stavěli věže z dřevěných kostek nebo v různých stavebnicích. Krychle je většinou prvním tělesem, se kterým se žáci seznámí na prvním stupni základní školy. Už od té doby je dětem nepřímo podsouvané jasné rozdělení krychle a kvádru. Zajímalo mě žákovské uvažování při dotazu, zda je krychle kvádr. Z výzkumu vyplývá, že 76 % dvojic nevnímá krychli jako kvádr. Žáci zdůvodňují:

Žák 3: „Není to kvádr, protože to není obdélníkového tvaru."

Žák 7: „Vypadá to jako krychle, takže to je kvádr."

Žák 8: „Určitě to není kvádr, je to krychle. Má to všechny strany stejně dlouhé"

Žákyně 8: „Není to kvádr, protože to je krychle. Já bych to spočítala, abychom to zdůvodnili."

Žákyně 20: „To není kvádr, protože to říkala paní učitelka, myslím."

Z tvrzení většiny žáků plyne, že skutečně vnímají krychli a kvádr jako dvě rozdílná tělesa s různými vlastnostmi. Podle žáků musí mít kvádr obdélníkové stěny a různě dlouhé dvojice hran. Žádná skupina se nezmínila o úhlech. Nicméně se najdou skupiny, které krychli a kvádr nerozlišují. Není se čemu divit, protože obě tělesa mají stejný počet hran, vrcholů i stěn, jsou si vizuálně podobná, jsou složena z pravoúhelníkových stěn, a tak vnímat krychli jako speciální případ kvádru není špatná představa. Zaujalo mě zdůvodnění žákyně 8, jež chtěla argumentovat tím, že by spočítala všechny stěny, hrany a vrcholy. Bohužel, v nahrávce se žákyně 8 k počítání nedostala, uvedla to spíše jako argument a pokračovala k dalšímu tělesu. Pokud by žákyně 8 správně spočítala všechny vrcholy, stěny a hrany, pak by mě zajímala její reakce, jelikož by došla k stejným počtům jako u kvádru.

Změnila by svoje rozhodnutí? To se, bohužel, nedozvíme. Žákyně 8 zdůvodňovala své rozhodnutí odkazováním se na autoritu v podobě paní učitelky. Žáci na úrovni neformální dedukce by měli být schopni formulovat jednoduché argumenty, k čemuž u této dvojice nedošlo.

Na obrázku 35 je nekonvexní těleso, které je podobné kvádru, ale kvádrem není. Při pozorování žáků během výzkumu bylo patrné, že je těleso zaskočilo. Uváděli, že se s tímhle tělesem v hodinách matematiky nikdy nesetkali. Tento fakt potvrzuje nejnižší úspěšnost v úloze 1, a to 57 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 2: „Záleží to na stranách, a ne na tom obsahu."

Žák 4: „Těleso nemůže mít díru. Jinak to nedává smysl."

Žákyně 3: „Připomíná mi to dřez, takže to není kvádr, a navíc je uvnitř díra."

Žák 7: „Je to cihla s kruhem uprostřed, ale furt je to kvádr. Díra nemění tvar, vypadá to jako kvádr, takže dáme ano."

Žák 11: „To nemůže být kvádr, protože má v sobě díru. I obsah by se špatně počítal."

Žákyně 5: „To je divný. Tam je díra. Nemyslím, že je to kvádr."

Žákyně 7: „Má to tvar kvádru. Ale kvádr je plný. Ale máš ten tvar, na tom záleží."

Žákyně 9: „Má to tvar kvádru, ale ten by neměl mít díru uprostřed, ale vlastně jo. Ta díra nic neznamená."

Většina dvojic přemýšlela, proč má těleso v sobě díru. Domnívám se, že je těleso zaskočilo, protože se s nekonvexními tělesy v hodinách matematiky nesetkali a nepracují s nimi. Podtrhují to výroky žáků, ve kterých nalezneme slova „divný", „nedává smysl". Je zřejmé, že hlavním problémem byl vliv průřezu tělesa na jeho klasifikaci. Některé skupiny průřez nezohledňovaly a spíše se zabývaly vizuální stránkou tělesa. Tvarově je podobné kvádru, a tak ho klasifikovaly jako kvádr. Jiné skupiny průřez zohledňovaly a jako kvádr ho neklasifikovaly. Geometrickým myšlením se nacházíme na úrovni vizualizace, kdy žáci vnímají těleso jako celek a porovnávají ho s prototypem nebo věcmi každodenního života, např. cihlou či dřezem. Ani u jedné dvojice jsem nezaznamenal náznak identifikace vlastností tělesa. Žáci dávali přednost vlastní intuici před formálními aspekty.

V *Přehledu matematiky pro ZŠ a víceletá gymnázia* (Odvárko & Kadleček, 2004) je stěna definovaná jako mnohoúhelník, a je tedy celistvá. Při pohledu na těleso pozorujeme, že stěna má v sobě průřez, což je ve sporu s definicí. Zdá se, že žáci dostatečně nerozumí pojmu stěna.

Na obrázku 36 je těleso velmi podobné kvádru, avšak o kvádr se nejedná. Těleso má zaoblené hrany i vrcholy, a stěny tělesa tak nejsou ohraničené. Navíc zaoblené vrcholy neodpovídají definici hrany tělesa, která hranu definuje jako úsečku. Jinými slovy nevíme, kde jsou krajní body hran. Úspěšnost byla 81 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 1: „Je to strana, ale není tam pravý úhel. Nemá to rohy, takže to není kvádr."

Žák 6: „To nejde, aby měl kvádr zaoblené strany."

Žákyně 5: „Zaoblené hrany nejsou problém. Je to kvádr. Vypadá to jako lednička a lednička je kvádr."

Žákyně 9: „Těleso nemá ostré hrany, ale má tvar kvádru. Na druhou stranu nemá špičaté vrcholy, takže to asi není kvádr."

Rozhodujícím aspektem byla zaoblenost hran a vrcholů. Jedná se o kritický atribut, který závisí na definicích základních geometrických pojmů, v tomto případě hrana, vrchol a stěna. Pokud byla žákům definována hrana tělesa jako úsečka, pak by s rozhodnutím neměl být problém. Z nahrávek je však patrné, že žáci nevyužívali geometrickou definici, ale spíše své zkušenosti. V hodinách matematiky se nesetkávají se zaoblenými tělesy, a tak rozhodli, že dané těleso není kvádr. Podobně jako u předchozích těles docházelo k přirovnání těles k objektům z běžného života. Pokud žáci vnímají ledničku jako kvádr, pak i toto těleso je kvádr. Ve zdůvodňování nedocházelo k hlubší analýze tělesa či využití definice s výjimkou žáka 1. Ten se sice snažil využít vlastnosti kvádru, avšak i u něj se ukazují formální nedostatky v používání geometrických pojmů, kde dochází k nesprávnému používání pojmů strana a roh.

Těleso na obrázku 38 je nekonvexní, a tak není kvádrem. Podstavné hrany tělesa jsou prohnuté. Jedná se o křivky, které ohraničují těleso, ne o úsečky, a tudíž podstavné hrany neodpovídají definici hrany.

V průběhu výzkumu jsem zaznamenal, že je pro žáky těleso netradiční a „divné“, protože se s ním nikdy nesetkali. Toto zjištění mohlo hrát důležitou roli v rozhodování, protože úspěšnost byla 95 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 2: „Není to kvádr, protože nemá rovné strany.“

Žák 4: „Tohle má do půlkruhu zaoblené hrana, a i když je to obdélníkový tvar, tak to má tvar více jako hvězdice, takže to není kvádr.

Žákyně 4: „Podle mojí intuice to není kvádr, protože to nemá rovné strany.“

Žákyně 8: „Vypadá to jako nákupní taška, protože má prohnuté strany. To nemůže být kvádr, protože nákupní taška také není kvádr.“

Žák 17: „Je to polštář, a navíc strany nesvírají pravý úhel, takže to není kvádr.“

Podle žáků má být hrana rovná. Tato představa na úrovni základní školy je zcela v pořádku, protože hrana je definovaná jako úsečka. Žáci už od prvního stupně rýsují úsečku podle pravítka jako rovnou čáru, a tak je tato „vlastnost“ úsečky v nich zakořeněná. Na základě této představy a zkušenosti vytvářeli svá rozhodnutí.

Z nahrávek jsem zaznamenal, že žáci znají a dokáží využít „vlastnost“ hrany a podle toho se většina dvojic se rozhodovala. Opět byly dvojice, které se rozhodovaly na úrovni vizualizace, a to porovnáním s předměty běžného života, v tomto případě s polštářem, nákupní taškou a hvězdicí. Žáci se tedy pohybují na nízké úrovni geometrického myšlení, protože se nerozhodují na základě geometrických souvislostí, ale jen na úrovni vizuální podoby tělesa a jejich intuice. Za zmínku stojí, že žádná dvojice nezdůvodňovala tím, že se jedná o nekonvexní těleso, protože kvádr je konvexní. Rovněž se vyskytují chyby v používání geometrických pojmů.

Těleso na obrázku 39 je na první pohled velmi podobné kvádru, avšak při detailnější analýze vidíme dvě dvojice vypouklých hran. Právě tyto dvojice jsou v rozporu s definicí hrany, a tak se nejedná o kvádr. Zde se žáci setkávají s případem, kdy je jedna dvojice protějších hran tělesa stejně dlouhá a rovnoběžná, ale druhá dvojice taková být nemusí. Úspěšnost byla 90 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 7: „Má vyboulené dvě strany, takže to není kvádr.“

Žákyně 3: „Není to kvádr, protože je to nepravidelné.“

Žák 16: „Strany nesvírají pravý úhel, takže to není kvádr.“

Většina dvojic zdůvodňovala svá rozhodnutí podobně jako u předcházejícího tělesa. Rozhodující vlastností byla rovnost hran. Jiné dvojice se snažily využít vlastnosti kvádru, např.: každé dvě sousední hrany svírají pravý úhel. Takto tuto vlastnost žádná dvojice neformulovala, pravý úhel mezi sousedními hranami vnímají intuitivně. Za zmínku stojí žákyně 3, která své tvrzení zdůvodnila tím, že těleso není pravidelné. Bohužel, její myšlenka dále nepokračovala, a nedozvíme se tak, jak ona vnímá pravidelnost tělesa. Ukazuje se, že žáci používají geometrické termíny, ale nerozumí jim, protože kvádr není pravidelné těleso. Opět vidíme chybné používání a opakované zaměňování geometrických pojmů.

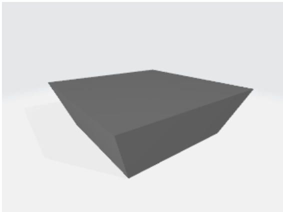
2.5.2 Shrnutí výsledků z úlohy 1

Výsledky úlohy ukázaly, že žáci mají potíže s používáním správné geometrické terminologie. Pravidelně zaměňovali pojmy hrana a strana, roh a vrchol atd. Ukázalo se, že všem těmto pojmům rozumí intuitivně. Mají vybudovanou představu, že hrana je rovná, ale nedokážou ji definovat. Výsledky také ukázaly, že změna kritických a nekritických atributů má vliv na obtížnost úlohy, a tím se snižuje její úspěšnost. Úspěšnost klesla například po změně poměru délek hran prototypického kvádru. Nejčastějším způsobem, jak žáci analyzovali těleso, byla jejich vizualizace porovnání s prototypem nebo předměty každodenního života. Na základě výsledků lze říct, že žáci zatím nedosahují požadované úrovně geometrického myšlení, kterou by na druhém stupni základní školy měli mít. Více manipulace s geometrickými tělesy by pomohlo předejít vzniku prototypů. Během práce s tělesy bych kladl důraz na správnou geometrickou terminologii, protože výsledky ukazují, že žáci ji využívají nepřesně.

2.5.3 Úloha 2

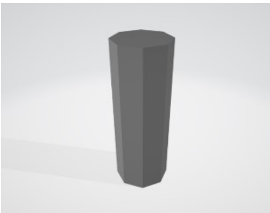
Úloha 2: Je těleso na obrázku hranol? Zdůvodněte.

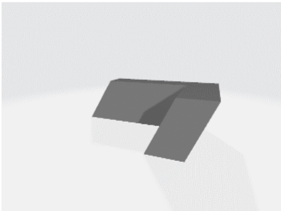

Obrázek 42 Těleso 1

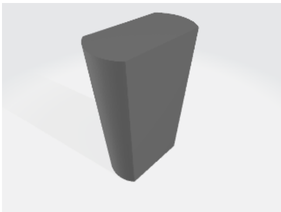

Obrázek 43 Těleso 2

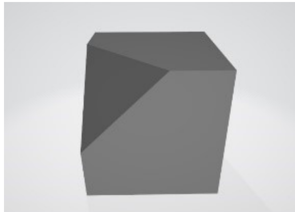

Obrázek 44 Těleso 3


Obrázek 45 Těleso 4


Obrázek 46 Těleso 5


Obrázek 47 Těleso 6


Obrázek 48 Těleso 7


Obrázek 49 Těleso 8

TĚLESO	ANO/NE	ZDŮVODNĚNÍ
1		
2		
…	…	….

Tabulka úspěšnosti:

Těleso	Úspěšnost (v %)	Absolutní četnost
1	75	16
2	70	15
3	25	6
4	70	15
5	65	14
6	10	3
7	30	7
8	90	20

Očekával jsem, že žáci klasifikují těleso jako hranol, protože jejich intuitivní představa by mohla být, že hranol je těleso, která má hrany. To se mi u některých těles potvrdilo.

Na obrázku 42 je trojboký jehlan neboli čtyřstěn neboli tetraedr. Je zřejmé, že se nejedná o hranol. Těleso bylo zobrazeno v atypické poloze. Úspěšnost byla 75 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 3: „Je to trojúhelníkový tvar, takže je to jehlan, a ne hranol."

Žák 7: „Je to 3D trojúhelník, proto je to hranol.“

Žák 9: „Je to určitě hranol, protože má tvar hranolu.“

Žákyně 5: „Hranol. Co je hranol? Hranol bude asi jako hranolka. Tohle je podle mě klasický hranol.“

Žákyně 8: „Hranol má mít dvě podstavy, ne? To není hranol, protože to musí mít dvě podstavy.“

Žákyně 11: „Tohle je trojúhelník. Není hranol do špičky? Z každé strany musí mít stěnu, ne špičku. Navíc nemá daný počet vrcholů. Na každé straně má mít stejný počet vrcholů. Má to být jako hranatá kláda.“

Žák 22: „Nejedná se o hranol, protože nemá shodné protější strany.“

Některé dvojice se rozhodovaly na základě vizuální podoby s jejich myšleným prototypem či na základě podoby s věcmi z běžného života, o kterých se domnívají, že jsou hranoly. Zmínil bych žákyni 5, která očividně nevěděla, co hranol je, ale dokázala si představit hranolek, a jak už název naznačuje, tak hranolek je skutečně hranolem. Zvláštní je, že žákyně 5 ví, jak vypadá hranolek, a její představa není špatná, avšak těleso přesto klasifikovala jako hranol. Další dvojice vnímaly trojúhelníkové stěny tělesa, podle nichž se rozhodovaly. Zatímco několik dvojic správně určilo, že se jedná o jehlan, některé dvojice řekly, že těleso je hranol. Ukazuje se, že někteří žáci neví, co je hranol a jaké má vlastnosti, a nedokáží identifikovat jehlan. Opět se vyskytují nedostatky v používání geometrických pojmů. O tělesu hovoří jako o trojúhelníku, což je rovinný útvar.

Žáci nevnímají hranol tak intuitivně jako kvádr, a tak se těleso snažili více analyzovat a pomocí jeho vlastností se pokoušeli přijít na to, jaké náležitosti hranol má. Z výroků žáků je patrné, že se našly dvojice, které si částečně vybavily definici hranolu jakožto tělesa s dvěma podstavami. Je to však pouze jedna z nutných vlastností hranolu, která na správnou klasifikaci nestačí. Žákyně 11 zmínila, že těleso nemá daný počet vrcholů, aby mohlo být hranolem. Zajímalo by mě, kolik vrcholů podle ní hranol má, protože hranolů je nekonečně mnoho, a tak i těchto čísel je nekonečně mnoho. Zde můžeme sledovat porovnání tělesa s jejím myšleným prototypem.

Úrovní geometrického myšlení se nacházíme na úrovni vizualizace, protože žáci svá rozhodnutí zdůvodňovali zejména podobností s prototypem či objekty každodenního života.

Těleso na obrázku 43 není hranolem, protože podstavy nejsou shodné. Jedná se o komolý jehlan. S tímto tělesem nemají žáci zkušenost, a tak jsem neočekával, že by nějaká dvojice správně těleso pojmenovala. Žákovská úspěšnost byla 70 %. Žáci zdůvodňují:

Žák 2: „Není to hranol, protože nemá špičku.“

Žák 3: „Není to hranol, protože hranol je více do čtverce.“

Žák 10: „Tohle není hranol, protože nemá strany v pravém úhlu a nemá všechny strany stejně dlouhé.“

Žákyně 8: „Nejedná se o hranol, protože podstavy by měly být stejné.“

Na první pohled by se mohlo zdát, že úspěšnost u tohoto tělesa není špatná, avšak je to způsobeno formou otázky, kdy žáci mají výběr ze dvou možností, buď těleso je, nebo není hranol. Při pohledu na žákovská tvrzení je zřejmé, že jejich rozhodnutí je správné, ale zdůvodnění, která tomu předcházela, nejsou zcela správná. Například žák 2 se domnívá, že hranol musí mít špičku. Když budeme chápat, že špičkou myslí vrchol, pak většina těles má vrchol, a pak by téměř všechna tělesa měla být hranolem. Jestli myslí špičku jako hlavní vrchol jehlanu, pak jeho představa je opět chybná, protože jehlan není hranol. Na základě špatné představy rozhodnul správně. Žák 3 správně určil, že těleso není hranol, avšak jeho zdůvodnění není také správné. Pro žáka 3 je pravděpodobně prototypem hranolu krychle, a tak říká, že kdyby bylo těleso více podobné krychli, pak by se jednalo o hranol. Krychle je hranolem, ale stačí těleso mírně zkosit a jeho strategie selže. Žák 3 vizuálně porovnává těleso s jeho vybraným typickým příkladem hranolu. Neuvádí pokročilejší zdůvodnění na základě vlastností hranolu. Stejně žák 10 správně rozhodl o tělesu, avšak zdůvodnění je chybné. Obecný hranol nemusí mít hrany v pravém úhlu a není nutnou podmínkou, aby měl všechny hrany stejně dlouhé. Opět žák rozhodl správně na základě špatného zdůvodnění. Žákyně 8 správně rozhodla, že těleso není hranol, a uvedla správný důvod, avšak její podmínka o shodnosti obou podstav není jedinou nutnou podmínkou pro to, abychom mohli o tělesu tvrdit, že je hranolem.

Z žákovských tvrzení vyplývá, že žáci mají intuitivní představu hranolu, která nemusí být vždy správná, a pokud správná je, pak ji v rozhovorech nevyužili.

Na obrázku 44 je nekonvexní těleso, které má dvě shodné rovnoběžné podstavy, a tak se jedná o hranol. Úspěšnost byla 25 %. Žáci zdůvodňují následovně:

Žák 4: „Je to nepravidelná hvězdice a hranol je více pravidelný. Tohle není tak pravidelné. To nebude hranol."

Žákyně 5: „To je úplně random. Připomíná mi to Patrika ze Spongeboba, a to přeci není hranol. Je to úplně divný tvar. To nemůže být hranol."

Žákyně 12: „Hranol má krátké hrany v podstavě a dlouhé boční hrany. To je hranol, protože má podlouhlé hrany."

Žák 18: „To hranol určitě není, protože je to divná hvězda. Má strany do prostoru."

Nízká úspěšnost u tohoto tělesa je pravděpodobně způsobena nejen neznalostí vlastností hranolu, ale také tím, že těleso je nekonvexní. Sami žáci označují těleso za divné, a je to z toho důvodu, že v hodinách matematiky nepracují s nekonvexními tělesy, a proto s nimi nemají dostatečné zkušenosti. Z nahrávek jsem evidoval, že většina dvojic na základě nekonvexnosti tělesa ihned rozhodla, že těleso není hranol, aniž by se na něj dostatečně podívaly. Těleso žákům připomínalo hvězdici nebo známou animovanou postavičku z dětského seriálu a postavička podle nich nemůže být hranol. Žák 4 zdůvodnil své rozhodnutí na základě pravidelnosti tělesa. Z nahrávky je však patrné, že žák 4 nepoužívá pravidelnost tělesa v kontextu všech shodných stěn a stejného počtu hran vycházejících z každého vrcholu, ale ve smyslu symetrie podstavy. Dochází k tomu, že žáci používají geometrickou terminologie, ale dostatečně ji nerozumí. Žákyně 12 správně označila těleso za hranol, avšak její zdůvodnění je chybné. Stačilo by pouze změnit poměr délek hran a žákyně 12 by nemusela těleso klasifikovat jako hranol. Žákyně 12 si pravděpodobně vytvořila vlastní kritérium pro určování hranolu, které však není správné.

Těleso na obrázku 45 je pravidelný osmiboký jehlan, a tudíž těleso není hranol. Jehlan je navíc doplněn o nekritický atribut v podobně změněné orientace. Žákovská úspěšnost byla 70 %. Žáci zdůvodňují následovně:

Žákyně 3: „Je to jako diamant podobný jehlanu, takže to není hranol."

Žákyně 6: „To je hranol, protože to má jednu velkou špičku."

Žák 17: „Má to hrany, takže je to hranol."

Žák 21: „Je to jehlan, takže ne hranol."

Žákyně 22: „Hranol nemá špičku, proto to není hranol."

Většina dvojic snadno rozpoznala jehlan na základě hlavního vrcholu a podle jeho vlastností dokázaly správně rozhodnout. Dvojice to často zdůvodňovaly tím, že těleso je jehlanem, a proto nemůže být hranolem. Z toho lze usoudit, že žáci vnímají jehlany a hranoly jako dvě rozdílné kategorie těles s různými vlastnosti, což je v pořádku. Nedostatky jsou opět v používání geometrických pojmů, kdy místo vrchol žáci používají slovo špička. Žákyně 6 pravděpodobně zaměňuje hranol s jehlanem, a tak je její rozhodnutí chybné. Za zmínku stojí výrok žáka 17. Ten tvrdí, že hranol je těleso, které má hrany. Na základě této definice by téměř každé těleso bylo hranolem. Tato představa není správná, avšak je nám jasné, proč se tato představa utvořila. Slovo hranol v žákovi 17 pravděpodobně evokuje hranu.

Na obrázku 46 je osmiboký hranol. Těleso je umístěno do prototypické polohy bez přidaných atributů. Úspěšnost byla 65 %. Žáci zdůvodňují následovně:

Žák 4: „Je to pravidelné těleso, takže to bude hranol."

Žák 5: „Určitě, to je hranol, protože je to dřevo z Hornbachu, kde prodávají hranoly, a navíc je to pravidelné těleso, které dává smysl."

Žákyně 6: „To je na 100 % hranol, protože je to všude stejné."

Žákyně 11: „Je to určitě hranol, protože má stejné podstavy."

Žák 17: „To těleso má osm hran, ale tím myslím jako podstavné hrany. Osmiboký hranol neexistuje, takže to není hranol."

Mnoho žáků se opět rozhodovalo na základě vizuální stránky a podoby s prototypem. Žáci vnímají hranol jako pravidelné těleso a těleso na obrázku 46 je takovým příkladem. Z tohoto důvodu většina žáků považuje těleso na obrázku za hranol. Taková představa není špatná, ale není zcela správná, protože hranol nemusí být pravidelné těleso. Žák 5 se rozhodoval na základě vlastní zkušenosti a spojuje hranol s výrobky z Hornbachu.

Žák vnímá hranol více jako objekt běžného života než geometrické těleso. Zmínil bych žáka 17, který vnímá osmiúhelník jako netradiční útvar, a proto rozhodl, že těleso není hranolem. Žák není schopný rozpoznat těleso, které se odchyluje od běžně vnímaných atributů hranolu. Žákyně 11 zmiňuje jednu část definice hranolu, a to že hranol má dvě shodné podstavy. Výrok ukazuje, že žákyně vnímá geometrické vlastnosti tělesa, ale nedokáže je spojit s definicí hranolu. Žáci neuvádí definici hranolu ani jednoduché argumenty, kterými by podpořili své rozhodnutí. Mají pouze jeden aspekt, podle něhož se rozhodují, a tím je pravidelnost tělesa.

Na obrázku 47 je kosý hranol s nekonvexními rovnoběžnými podstavami. Těleso je upraveno dvěma kritickými atributy. Prvním je zkosení tělesa a druhým je nekonvexnost obou podstav tělesa. Tyto atributy měly velký vliv na úspěšnost, která byla 10 %. Žáci zdůvodňovali:

Žákyně 7: „To není hranol, protože to jde do šikma."

Žákyně 12: „Nemá podstavy proti sobě. To nebude hranol."

Žák 16: „Vypadá to jako 3D elko. Hranol není do elka."

Nejnižší procentuální úspěšnost byla způsobena nezkušeností s tímto tělesem. Jejich prototyp hranolu je odlišný od předloženého tělesa. Žákyně 7 vnímá hranol jako kolmé těleso. To je pravda, ale tato představa nezahrnuje kosé hranoly, kterým je právě předložené těleso. Vnímání hranolů je u žákyně značně omezená. Žákyně 12 si představuje hranol jako těleso s podstavami proti sobě. Rovnoběžnost podstav je jedním z nutných předpokladů pro klasifikaci hranolu. Žák 16 se rozhoduje pouze na základě vizuální stránky a přirovnání k písmenu L. Podstava ve tvaru písmena L je nekonvexní. Pro žáka je nekonvexní tvar podstavy netradičním, a proto těleso nemůže být hranolem

Na obrázku 48 je těleso s jedním kritickým atributem, a tím je tvar podstavy. Podstava má jednu dvojici protějších zakřivených stran. Obě podstavy jsou shodné a vzájemně rovnoběžné, proto se jedná o hranol. Úspěšnost byla 30 %. Žáci zdůvodnili následovně:

Žák 1: „To není hranaté, takže to nebude hranol."

Žákyně 9: „To těleso má zaoblené strany, takže to není hranol."

Žák 10: „Vypadá jako zaoblený hranol na rozích. Nejedná se o hranol."

Žáci zaměňují pojmy roh a vrchol nebo strana a hrana. Z výpovědí je zřejmé, že žáci si představují hranol jako hranaté těleso. Z nahrávek není jasné, co tím žáci myslí, ale někteří uvedli, že hranol musí mít hrany, což podle tohoto kritéria by těleso splňovalo. Žáci se pravděpodobně nesetkali se zaoblenou hranou a na základě toho určili, že těleso nemůže být hranol. Tento fakt není nutnou podmínkou pro klasifikaci tělesa. Nutnými podmínkami jsou shodné podstavy, jejich rovnoběžnost a rovnoběžníkové boční stěny. Žák 10 označil těleso jako zaoblený hranol, ale neklasifikoval ho tak. Opět se jedná o kritický atribut, s kterým se žáci pravděpodobně nesetkali.

Těleso na obrázku 49 je část krychle. Kritický atribut změnil jednu podstavu, a tak těleso na obrázku není hranolem. Úspěšnost byla 90 %.

Žák 4: „Má oříznutý roh. Není to hranol."

Žák 8: „Ano, je to hranol, protože je to hranaté."

Žákyně 8: „Má zkosenou stranu, asi to nebude hranol."

Žáci zaměňují pojmy roh a vrchol či strana a hrana. Žáci nemají dostatečně ukotvené termíny pro geometrii v prostoru. Z výroků je patrné, že žáci správně klasifikovali těleso, ale pouze na základě vizuální stránky. Všechna zdůvodnění se týkala zkosení hrany či uříznutého vrcholu. Žáci se rozhodli pouze na základě podoby s jejich myšleným prototypem. V žádné nahrávce nezazněl důvod, který by se týkal dvou shodných podstav. To ukazuje, že žáci nedokáží přesně definovat hranol, a zdůvodňují tak na základě prototypu na úrovni vizualizace. Žák 8 zdůvodnil, že se jedná o hranol, protože těleso má hrany. Toto zdůvodnění nesouvisí s geometrickou představou tělesa, nýbrž se slovní podobou.

Domnívám se, že žák vnímá stejný kořen slova u slov hrana a hranol, a proto tak zdůvodňuje své rozhodnutí.

2.5.4 Shrnutí výsledků z úlohy 2

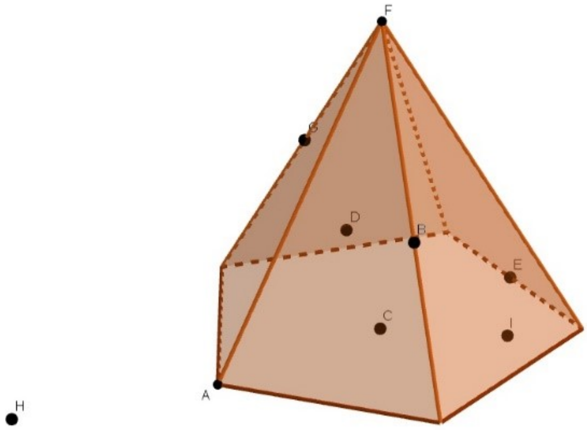
Úloha ukázala, že žáci mají nedostatky v geometrických termínech. Nerozlišují pojmy strana a hrana nebo roh a vrchol. Ve většině případů se žáci rozhodovali na základě vizuální podoby tělesa, kterou porovnávali se svým myšleným prototypem či s předměty z běžného života. Prototypem hranolu je pro žáky kolmé těleso s hranami a pravidelným tvarem podstav.

Pokud má těleso nekonvexní podstavu, pak ho žáci označují za netradiční až divné. Nepřipouští, že by tělesa s takovými podstavami mohly být hranoly. Někteří žáci ví, že hranol má dvě podstavy, ale o jejich rovnoběžnosti se v nahrávkách nezmínili. Celkově žáci zřejmě neznají definici hranolu a jejich představy o něm jsou omezené.

2.5.5 Úloha 3

Úloha 3: Doplňte podle obrázku do tabulky křížek, pokud body splňují danou vlastnost.

TĚLESO 1



Obrázek 50 Těleso 1

Tabulka úspěšnosti (výsledky jsou uvedeny v %):

TĚLESO 1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Body patřící podstavě tělesa	95	100	95	86	100	95	100	100	95
Body patřící plášti tělesa	5	76	90	76	10	29	81	95	95
Body patřící síti tělesa	48	52	14	24	38	81	52	62	14

Tabulka absolutní četnosti:

TĚLESO 1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Body patřící podstavě tělesa	21	22	21	19	22	21	22	22	21
Body patřící plášti tělesa	1	17	20	17	2	6	18	21	21
Body patřící síti tělesa	10	12	3	5	8	18	12	14	3

Očekával jsem, že úloha bude mít vysokou úspěšnost, což se v případě bodů patřící podstavě potvrdilo. Zároveň jsem předpokládal, že žáci budou mít potíže se zařazením bodu ležícího na podstavné hraně jak do roviny podstavy, tak do roviny pláště. Rovněž se tento předpoklad potvrdil.

Žáci definují podstavu jako „to dole“ nebo „to na čem to stojí“. Jedná se o intuitivní chápání pojmu podstava. Žádná dvojice žáků nedefinovala, co to je podstava, pouze se vzájemně ujistili, že ví, o čem mluví.

Žákům nedělalo problém označit body patřící podstavě tělesa. Nejnižší procentuální úspěšnost měl bod D. Tato úspěšnost je způsobena neotočením si tělesa, aby se podívali, zda bod D náleží, nebo nenáleží podstavě tělesa.

Plášť definují jako „je to to na straně“, „všechno kromě podstavy“ nebo „to je jenom ta plocha, ty strany nejsou plášť“. Podobně jako podstavu vnímají i plášť. Žáci nejsou schopni si ho správně definovat, a tak plášť popisují intuitivně. Někteří žáci dokonce vnímají plášť jen jako sjednocení bočních hran, což je špatná představa. Přehled matematiky pro základní školy a gymnázia (Odvárko & Kadleček, 2004) uvádí:

„Plášť jehlanu je složen ze všech jeho bočních stěn.“

(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 250)

Označit body patřící plášti byl pro žáky náročnější úkol. Největší chybovost byla u bodů A, E a F. Chybovost u bodů B a D je způsobena tím, zda žáci vnímají plášť jen jako plochu bez bočních hran, či jako sjednocení bočních hran bez plochy mezi nimi. Bod E leží na podstavné hraně. Žáci si myslí, že každý bod může patřit pouze do jedné roviny. Podstavu a plášť vnímají jako dvě disjunktní roviny. Tomu tak není, protože podstavná hrana je společná hrana pro plášť i podstavu, a proto tento bod náleží jak do roviny podstavy, tak do roviny pláště. U bodů A a F docházelo k podobným zdůvodněním. V nahrávkách navíc zmiňovali, nemůžou patřit plášti, protože to jsou vrcholy jehlanu. Pravděpodobně vrcholy jehlanu vnímají jako další množinu bodů, jenž nenáleží ani do roviny podstavy, ani do roviny pláště.

Nejobtížnější úkol byl označit body patřící síti tělesa, protože většina žáků neví, co to je. Žáci popisovali síť tělesa následovně:

Žák 4: „Síť tělesa je kostra tělesa, takže se nezapočítávají plochy stěn.“

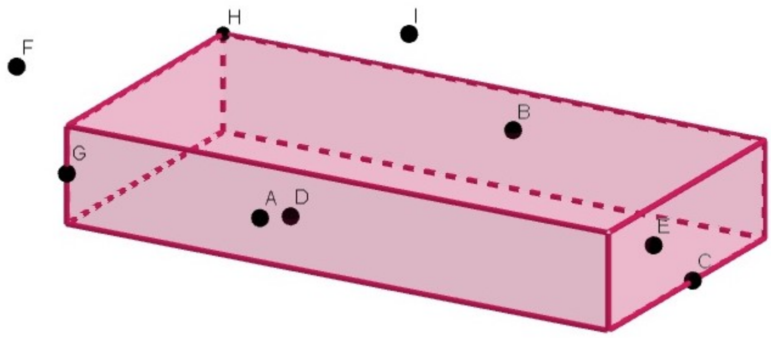
Žák 7: „Síť, to jsou jen ty čáry.“

Žák 10: „Síť. To je bod H, protože je to jediné pryč. Body patřící síti tělesa, to budou asi všechny body mimo.“

Žákyně 9: „To je všechno kromě bodu H, protože když to rozložíš, tak je to všechno.“

Síť tělesa je jinými slovy rozvinuté těleso do roviny, tudíž síti náleží všechny stěny včetně všech vrcholů a všech hran tělesa. Nízká úspěšnost u všech bodů je způsobena neporozumění pojmu síť tělesa. Důsledkem byly různé strategie jako např. tipování nebo označení bodů, které jsme zatím neoznačili.

TĚLESO 2



Obrázek 51 Těleso 2

Tabulka úspěšnosti (výsledky jsou uvedeny v %):

TĚLESO 2	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Body patřící podstavě tělesa	90	24	86	90	95	90	100	0	86
Body patřící plášti tělesa	90	29	10	76	81	90	48	33	100
Body patřící síti tělesa	19	24	57	10	19	76	67	71	81

Tabulka absolutní četnosti:

TĚLESO 2	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Body patřící podstavě tělesa	20	5	19	20	21	20	22	0	19
Body patřící plášti tělesa	20	6	2	17	18	20	10	7	22
Body patřící síti tělesa	4	5	13	2	4	17	15	16	18

Žáci se podobně jako u tělesa 1 na obrázku 50 potýkali s definicí podstavy. Navíc u tělesa 2 na obrázku 51 diskutovali, kolik má těleso podstav. Taková diskuze probíhala mezi žákem 6 a žákem 7:

Žák 6: „A nemyslíš si, že to béčko je taky v podstavě?“

Žák 7: „Podstava je to na čem to stojí.“

Žák 6: „A to nahoře může taky být.“

Žák 7: „Ale přeci to nestojí na stropě.“

Žák 6: „Ale když to otočíš?“

Žák 7: „Když to otočíš, tak ano, jenže ty jsi to neotočil.“

Žák 6: „Ale já to můžu otočit.“

Žák 7: „Takže i béčko?“

Žák 6: „Ano.“

Žák 7: „Tak dobře.“

Z rozhovoru mezi žákem 6 a žákem 7 lze říct, že uvažují o dvou podstavách tělesa. Žáci na základě rozhovoru uvažují na úrovni vizualizace, protože nepoužívají žádné argumenty podepřené geometrickými pojmy či jejich vlastnostmi. Výsledek diskuze je správný bez ohledu na úroveň geometrického myšlení. Těleso na obrázku 51 má dvě podstavy, což většina žáků neuvažovala. Opět se ukazuje, že žáci nerozumí pojmu podstava, a tudíž nedokážou správně označit body patřící podstavě tělesa. To je důvod, proč u bodů B a H byla nízká úspěšnost.

Nízká úspěšnost u označení bodů patřící plášti byla způsobena nejen nedostatečným porozuměním pojmu plášť, ale také tím, že vrcholy a body na hranách nevnímají jako součást pláště. Záleží, jak se společně domluví, zda je pro ně plášť pouze ohraničená plocha mezi hranami, nebo pouze hrany bez plochy mezi nimi. Další nedostatek pramení z představy, že každý bod patří pouze do jedné roviny, a tudíž podle nich neexistuje bod, který by patřil do roviny podstavy a zároveň do roviny pláště. Žáci se domnívají, že obě roviny nemají společný průnik. Žáci nechápou jejich vzájemné propojení a prostorové vztahy mezi nimi.

Nejnižší úspěšnost byla u určení bodů patřících síti. Ukazuje se, že žáci neví, co je síť tělesa. Nejnižší úspěšnost označení byla u bodu D. Většina žáků zdůvodnila, že pokud je bod D v plášti tělesa, pak nemůže být v síti tělesa. Žáci nerozumí základním geometrickým pojmům. Možná používají strategii, kdy každý bod musí náležet do nějaké roviny a když bod nezahrnuli ani do roviny podstavy či do roviny pláště, tak bude patřit do sítě tělesa. Tato strategie je nevhodná a opět ukazuje neporozumění základním geometrickým pojmům a nepochopením vztahů mezi nimi.

2.5.6 Shrnutí výsledků z úlohy 3

Úloha přináší zjištění o intuitivním, a tedy nedostatečném porozumění základních geometrických pojmů: podstava, plášť a síť tělesa. Žáci vnímají podstavu a plášť jako dvě rozdílné roviny bez společného průniku, a mají tak špatně vybudovanou představu, která je způsobena neschopností sjednotit obě roviny do tělesa jako jednoho celku. V navazujícím studium by pak mohli mít problémy s rýsováním řezů těles, kde je tato představa klíčová. Velký nedostatek je v porozumění pojmu síť tělesa, kdy žáci neví, co to je a dokonce si budují představu, že je to něco mimo těleso. Jedná se o jeden z očekávaných výstupů ve Standardech pro základní vzdělání (2013), a tak by mělo dojít k reedukaci těchto pojmů. Doporučuji, aby žáci v hodinách matematiky více pracovali s modely těles. Manipulace s tělesy jim pomůže lépe pochopit vztahy v tělesech. Žáci by v hodinách mohli pracovat se sítěmi těles, zkoumat jednotlivé části tělesa, a ukotvit si tak základní geometrické pojmy. V rámci práce s modely a sítěmi by učitel mohl rozvinout diskuzi zaměřenou na podstavné hrany jako společné průsečnice podstavy a pláště.

2.5.7 Úloha 4

Úloha 4: Dokreslete tělesa (dvě různá), která nejsou krychle, nebo kvádr, je-li dána jedna jejich hrana.

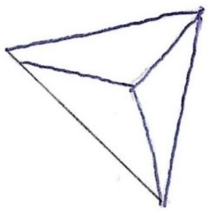
TĚLESO 1

Obrázek 51 Hrana pro těleso 1

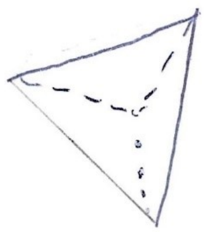
V řešení této úlohy se objevovala nejrůznější tělesa. Tělesa byla různě orientována, což mohla ovlivnit nestandardně zadaná hrana tělesa.

Všechna řešení naznačují, že každý žák má jiné geometrické uvažování, a to i přesto, že mají stejnou paní učitelku na matematiku. Široká paleta řešení ukazuje, že každý žák preferuje jiné těleso, což může být ovlivněno vizuálním vzhledem, jinými osobními zkušenostmi či rozborem těles z předchozích úloh.

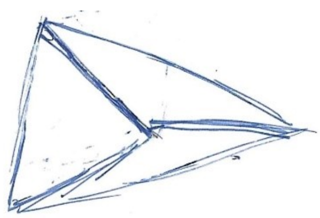
Žáci nejčastěji dokreslovali trojboký, nebo čtyřboký jehlan. Důvodem může být větší osobní zkušenost s jehlanem a nedostatečnou prací s nepravidelnými tvary v hodinách matematiky. Žáci preferují tato tělesa i z důvodu učiva matematiky, kde se obvykle pravidelná tělesa představují jako základní geometrické tvary.



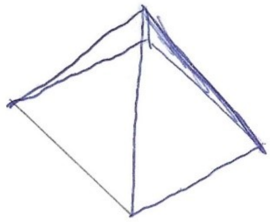
Obrázek 52 Dokreslení 1



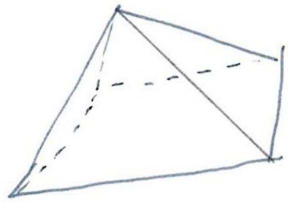
Obrázek 53 Dokreslení 2



Obrázek 54 Dokreslení 3



Obrázek 55 Dokreslení 4



Obrázek 56 Dokreslení 5

Z žákovských řešení lze pozorovat, že i když žáci dokreslili trojboký či čtyřboký jehlan, tak každé dokreslení je jiné. Každý žák dokreslil jiný pohled na těleso. Na obrázku 52 je pohled na trojboký jehlan při pohledu z vrchu. V průběhu dokreslování docházelo ve dvojicích k diskuzím, zda je těleso nakresleno správně a z jakého pohledu. U dokreslování tělesa na obrázku 52 probíhalo vysvětlování mezi žákem 8 a žákem 9:

Žák 8: „Možná to dělej tečkované, protože tečkované čáry nejsou vidět."

Žák 9: „Vždyť je tady všechno vidět, tak je to jedno."

Žák 8: „Co?"

Žák 9: „Fakt, koukej, tady jde všechno vidět."

Žák 8: „Jo takhle, jakože je to ze shora, že tady je špička. Dobře."

Žák 9: „ Ty jsi myslel, že je to pohled zezdola?"

Žák 8: „Ano."

Žák 9: „Možná by to vypadalo lépe, ale je to jedno. Já právě myslel, že je to špička."

Žák 8: „Ne, už to v tom vidím. Můžeme dále."

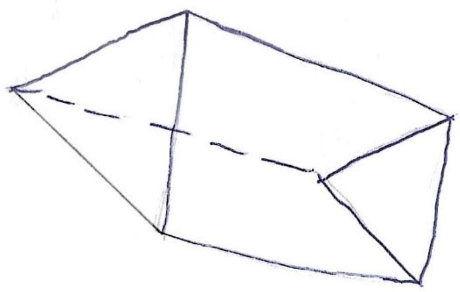
Žák 8, který dokresloval těleso, vysvětloval, jak na těleso nahlíží. Žák 9 se díval na těleso jinak, a tak došlo k vzájemnému vysvětlení. Je patrné, že každý preferuje jiný pohled na těleso, ale po vysvětlení jsou žáci schopni nahlížet na těleso stejným způsobem. Žáci jsou schopni si těleso představit jinak, což ukazuje flexibilitu v geometrické představivosti žáků.

Zde se ukazuje, jak je spolupráce mezi žáky přínosná, protože rozvíjí jejich schopnost zdůvodňovat své řešení.

Na obrázku 53 je pohled zespodu. Na obrázku 54 je pohled z vrchu stejně jako na obrázku 52, avšak s rozdílnými poměry délek hran a jiným tvarem. Na obrázcích 55 a 56 jsou dokresleny čtyřboké jehlany, které se liší svou orientací v prostoru. Z obrázků je zjevné, že žáci dokreslovali pravidelná tělesa. Na úrovni vizualizace žáci spíše volí symetrická a snadno představitelná tělesa, a to možná i proto, že se tato tělesa snáze kreslí. Na začátku jim byla zadána jedna hrana a snažili se její délku zachovat i pro všechny ostatní hrany. Tato úloha potvrzuje zjištění z předchozích úloh, kdy nekonvexní a nepravidelné útvary vnímají jako divná, nejsou jim blízká a nemají s nimi zkušenost. Výuka by se tak mohla rozšířit o nepravidelná a nekonvexní tělesa, aby se žákům rozvinulo geometrické uvažování.

Do výuky bych doplnil i kreslení těles z různých pohledů, díky čemu by se jim rozvinula prostorová představivost.

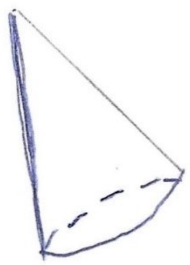
Dále se v žákovských řešeních objevil trojboký hranol.



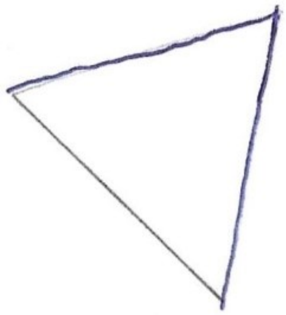
Obrázek 57 Dokreslení 6

Domnívám se, že žáci nakreslili trojboký hranol, protože jeho podstava má tvar trojúhelníku. Při pohledu na obrázek 57 lze říct, že se jedná dokonce o rovnostranný trojúhelník, jenž je prototypem trojúhelníku. Žáci vnímají trojúhelník jako pravidelný útvar, a tak zvolili trojúhelníkovou podstavu, kterou „vytáhli“ do prostoru.

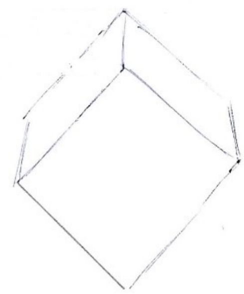
Objevila se i chybná řešení v podobě kuželu, trojúhelníku a krychle.



Obrázek 58 Dokreslení 7



Obrázek 59 Dokreslení 8



Obrázek 60 Dokreslení 9

Někteří žáci dokreslili kužel. Žáci se zaměřili na splnění úkolu, kterým bylo dokreslit těleso. Těleso dokreslili, avšak si neuvědomili, že kužel nemá žádné hrany. Tím nesplnili zadání úlohy. Ani jeden žák si těleso nepředstavil, aby si řešení zkontroloval. Při představě kužele jako trojrozměrného tělesa by došli k závěru, že kužel nemá hrany. Ukazuje se, že žáci nejsou schopni si představit těleso a spojit ho s jeho náčrtkem, a tudíž nedokáží přecházet mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Dále se projevuje nedostatečné porozumění geometrickým pojmům a jejich vztahům v tělesech.

Náčrtek kuželu se kreslí tak, jak je ukázáno na obrázku 58, avšak to, co žáci považují za hrany, jsou správně strany.

Dalším chybným řešením byla krychle (obr. 60), čímž nesplnili podmínku v zadání. Pravděpodobně si špatně přečetli zadání nebo je krychle pro ně prototypem tělesa, protože se s ní seznamují již na první stupni základní školy, a tak s ní mají nejvíce zkušeností. Dalším důvodem může být i to, že se jedná o pravidelné těleso a dobře se kreslí.

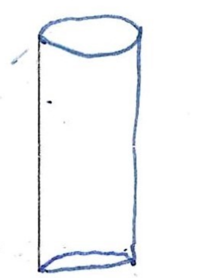
Někteří žáci nakreslili trojúhelník (obr. 59). V tomto případě jsem si znovu poslechl nahrávku, zda se nejedná o půdorys trojbokého jehlanu či trojbokého hranolu, ale žáci skutečně nakreslili trojúhelník. Dochází k tomu, že žáci nerozumí pojmu těleso. Těleso je trojrozměrný objekt, zatímco trojúhelník je dvourozměrný útvar. Je možné, že žáci nechápou rozdíl mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Doporučoval bych, aby v hodinách matematiky žáci více pracovali s rovinnými útvary a geometrickými tělesy a učili se je rozlišovat, protože v navazujícím učivu by jim tyto nedostatky mohli zkomplikovat další porozumění geometrii.

Na základě těchto řešení lze říct, že žáci nevnímají rozdíl mezi pojmy strana a hrana. Bylo by vhodné do hodin matematiky zařadit analýzu geometrických útvarů a těles, aby si žáci správně vštípili geometrickou terminologii. Žáci nakreslili trojúhelník možná i z důvodu, že ho vnímají jako prototyp. Při pohledu na obrázek 59 je zjevné, že se pravděpodobně jedná o rovnostranný trojúhelník. Jedná se o útvar, se kterým žáci přijdou do kontaktu už v předškolním vzdělávání, a tak s ním mají bohaté zkušenosti.

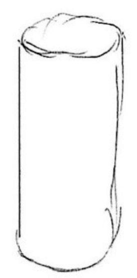
TĚLESO 2

Obrázek 61 Hrana pro těleso 2

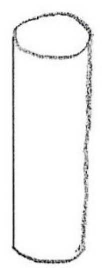
U tělesa 2 byla zadána hrana tělesa ve svislé poloze, jak ukazuje obrázek 61. Žáci nejčastěji dokreslovali válec. Všichni žáci ho nakreslili ve stejné poloze, protože jiná poloha není možná. Jedná se však o chybná řešení.



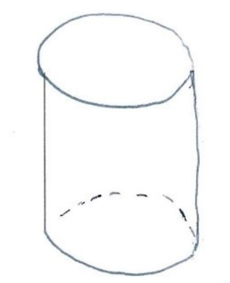
Obrázek 62 Dokreslení 1



Obrázek 63 Dokreslení 2



Obrázek 64 Dokreslení 3

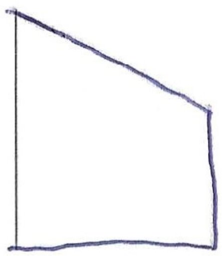


Obrázek 65 Dokreslení 4

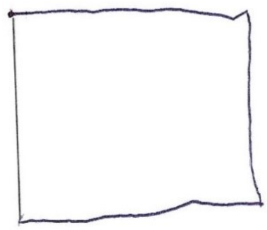
Žáci se pravděpodobně více soustředili na splnění úkolu, kterým bylo dokreslit těleso. Těleso dokreslili, ale už si neověřili správnost svého řešení. Z nahrávek vyplývá, že žáci byli se svým splněním úkolu spokojení a těleso si nepředstavili v trojrozměrném prostoru.

Náčrtky válců jsou správné, ale kdyby si dokreslené těleso představili v trojrozměrném prostoru, zjistili by, že válec nemá žádné hrany. Ukazuje se, že žáci nedokáží přecházet mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Dále nerozumí základním geometrickým pojmům a nejsou schopni je popsat v tělese. Stejně jako u kužele, tak i u válce zadaná hrana není v případě válce hranou, ale stranou, tudíž žáci nesplnili zadání úlohy. Je to podobně definované jako u válce, protože obě tělesa patří mezi rotační tělesa.

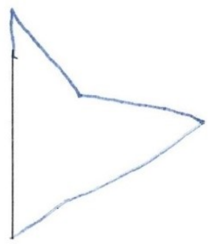
Žáci dále dokreslili různé rovinné útvary jako například lichoběžník, čtverec či překvapivě nekonvexní mnohoúhelníky. Všechna tato řešení jsou chybná.



Obrázek 66 Dokreslení 5



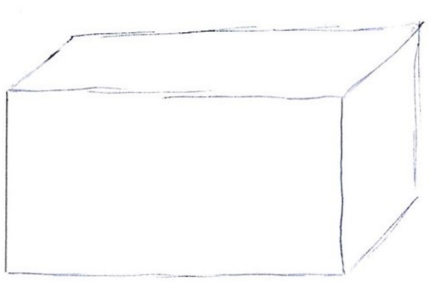
Obrázek 67 Dokreslení 6



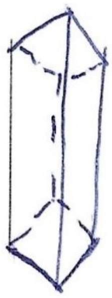
Obrázek 68 Dokreslení 7

V těchto případech nastala chyba v řešení úlohy, protože žáci dostatečně nerozumí pojmu těleso. Nerozlišují mezi pojmy útvar a těleso. Útvar je dvojrozměrný a těleso trojrozměrný objekt. Domnívám se, že žáci chápou rozdíl mezi dvojrozměrným a trojrozměrným prostorem intuitivně, ale v geometrii je rozlišit nedokážou. Dále nerozlišují pojmy hrana a strana. Hrana je pojem pro prostorovou geometrii nikoliv pro rovinnou geometrii. Doporučoval bych, aby žáci pracovali více s modely útvarů a těles, ale ne izolovaně, nýbrž kombinovaně, aby docházelo k budování vzájemných vztahů mezi nimi a zavedení správné terminologie. Žáci nakreslili lichoběžník a čtverec, což není nijak překvapivé, protože se jedná o útvary, se kterými mají zkušenosti a vyskytují se všude kolem nás. Na obrázku 68 je nekonvexní čtyřúhelník. Žáci na základě rozboru předchozích vnímají nekonvexní útvary jako divné, a proto je překvapivé, že tento útvar nakreslili. Domnívám se, že se inspirovali nekonvexními tělesy v předchozích úlohách.

Žáci rovněž dokreslili kvádry. Tato řešení jsou chybná.



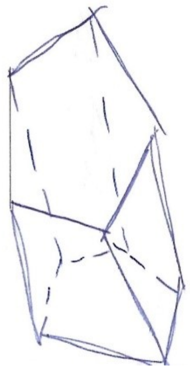
Obrázek 69 Dokreslení 8



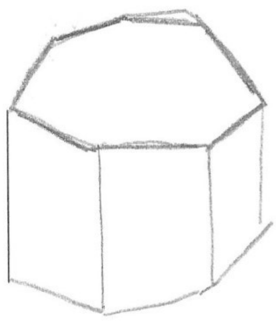
Obrázek 70 Dokreslení 9

Je možné, že žáci dostatečně neporozuměli zadání. Nicméně tímto řešením žáci nesplnili podmínku v zadání, kdy dokreslená tělesa nesmí být krychle nebo kvádr. I když se jedná o chybná řešení, pozorujeme, že žáci nakreslili kvádry jinak. Kvádr na obrázku 69 je jinak orientován, než kvádr na obrázku 70. To ukazuje, že každý žák má jinou prototypickou polohu. Pokud bychom žákům zadali jednoduchý úkol, aby načrtli kvádr, pak by nastala buď orientace na obrázku 69, nebo na obrázku 70. S velkou pravděpodobností by žádná jiná nenastala. Doporučuji, aby žáci více pracovali s modely těles a mohli s nimi manipulovat, aby nedocházelo k tvorbě prototypických poloh. Tyto představy mohou narušit vnímání vztahů v tělesech.

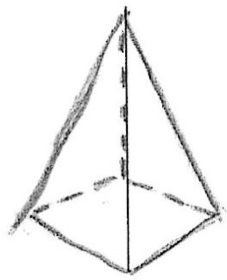
Žáci v ostatních případech dokreslili nejčastěji hranoly nebo jehlany. Tato řešení splňují zadání a jsou správnými řešeními.



Obrázek 71 Dokreslení 10



Obrázek 72 Dokreslení 11



Obrázek 73 Dokreslení 12

Žáci byli v úloze omezení tím, že nesměli nakreslit krychli ani kvádr. Nejčastější dvojící byl hranol a jehlan.

Na obrázku 71 je pětiboký hranol a na obrázku 72 je sedmiboký hranol. Žáci se snažili být originální a kreativní při dokreslování druhého tělesa. Zaměřovali se především na vizuální stránku, a proto volili mnohoúhelníkové podstavy hranolů. I přes jejich volbu tvaru podstavy vnímáme znaky pravidelnosti. Podstavy jsou konvexní a stále se projevuje snaha o dodržení délky zadané hrany pro všechny hrany podstavy. Je zjevné, že pravidelné tvary jsou žákům bližší, protože s nimi mají více zkušeností ať už z běžného života či z hodin matematiky, kde se o nich učí a rýsují je v konstrukčních úlohách. Je možné, že je to způsobeno i snazší kresbou náčrtku.

V případě n-bokých hranolů je kresba náčrtků složitější, což lze pozorovat na obou hranolech. Náčrtky nejsou dokonalé jako v případě krychle či kvádru.

Na obrázku 73 je čtyřboký jehlan. Jedná se o pravidelné těleso, které se skládá ze čtvercové podstavy a pláště složeného ze čtyř rovnoramenných trojúhelníků. Těleso je snadné na kresbu, a proto ho pravděpodobně žáci zvolili jako jedno z možných řešení.

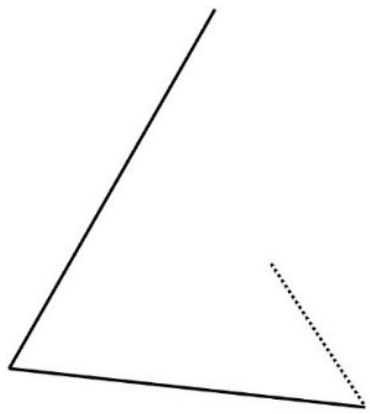
2.5.8 Shrnutí výsledků z úlohy 4

Na základě žákovských řešení lze říct, že každý žák má jinou úroveň geometrického myšlení. Každý žák preferuje jiné těleso, avšak všechna tělesa jsou pravidelná a lehce se kreslí. Důvodem je větší zkušenost s pravidelnými tělesy ze života či z hodin matematiky, kde se o pravidelných tělesech učí. Každý z nich preferuje jiný pohled na těleso. Při dokreslování docházelo k tomu, že nakreslili stejné těleso, ale z jiného pohledu. Žáci mají vybudované prototypické polohy těles, což lze pozorovat na chybných řešeních kvádru. Žáci si nekontrolují svá řešení, pravděpodobně je to v geometrii nenapadne. Kdyby provedli kontrolu, zjistili by, že řešení nedává smysl. V případě válce nebo kužele splnili zadání, ale už si těleso nepředstavili v trojrozměrném prostoru, jinak by přišli na to, že ani jedno z těles nemá hranu. V náčrtku to tak vypadá, ale ve skutečnosti tomu tak není. Podle chybných řešení mají žáci potíže s myšlenkovým přecházením mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Oba chápou intuitivně, ale geometricky jim nerozumí. Problém může být i v porozumění geometrickým pojmům. Žáci nerozlišují pojmy útvar a těleso nebo hrana a strana. Z tohoto důvodu žáci dokreslili rovinné útvary na místo trojrozměrných těles.

2.5.9 Úloha 5

Úloha 5: Dokreslete tělesa, jsou-li dány jejich hrany (přerušované hrany nejsou vidět).

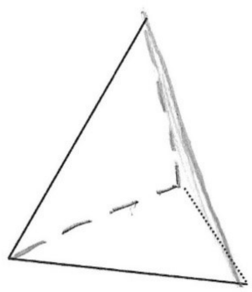
TĚLESO 1



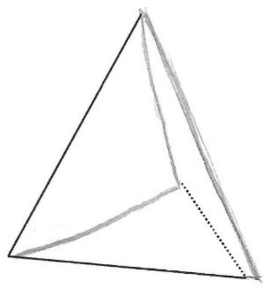
Obrázek 74 Hrany pro těleso 1

Těleso 1 bylo v programu GeoGebra navrženo jako trojboký jehlan, který byl otočený o malý úhel. V programu byly skryty dvě boční hrany a jedna podstavná hrana.

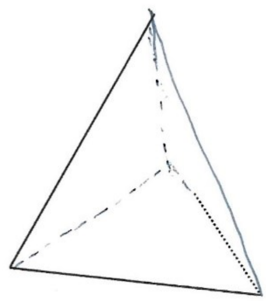
Nejčastějším řešením žáků byl v případě tělesa 1 na obrázku 74 trojboký jehlan.



Obrázek 75 Dokreslení 1



Obrázek 76 Dokreslení 2



Obrázek 77 Dokreslení 3

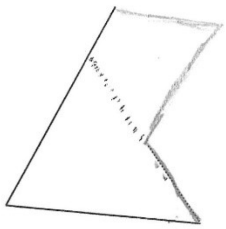
Na obrázcích 75, 76, 77 jsou tři žákovské vizualizace trojbokého jehlanu. Na první pohled jsou trojboké jehlany stejné, ale není tomu tak. Obrázky ukazují různou úroveň geometrického myšlení a prostorové představivosti.

Na obrázku 75 je správně dokreslený trojboký jehlan. Jsou správně dokreslené právě tři hrany včetně jejich viditelnosti. Žáci, kteří takto dokreslili trojboký jehlan, mají dobrou prostorovou představivost a jsou na vyšší úrovni geometrického myšlení, protože vnímají vztahy v dokresleném tělesu.

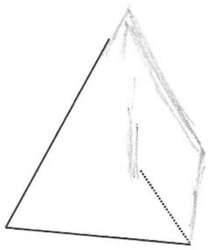
Na obrázku 76 jsou správně dokreslené právě tři hrany, ale chyba je v zakreslení jejich viditelnosti. Žáci si dokáží představit vizuální podobu tělesa, ale už si ji nedokáží představit v trojrozměrném prostoru. Nerozlišují viditelnost hran.

Na obrázku 77 je správně zakreslená viditelnost hran, ale dochází zde k prodloužení zadané hrany, která není vidět. K tomu dochází, protože těleso je mírně otočené a tak se neviditelná hrana zdá opticky kratší. Žáci na základě zjištění z předchozích úloh preferují pravidelné útvary. Podstavou trojbokého jehlanu je trojúhelník, a žáci si tímto prodloužením doplňují trojúhelník na rovnostranný, který je pro ně prototypem. Žáci splnili zadání, protože v zadání nebyla podmínka, která by jim zakazovala si hrany prodlužovat, nicméně to potvrzuje, že žákům nekritické atributy v podobě změny orientace dělají problémy.

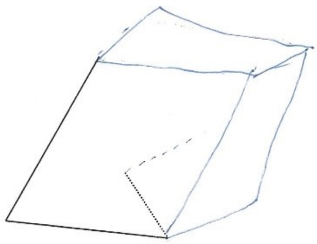
Pokud žáci nedokreslili trojboký jehlan, pak se snažili kreslit nejrůznější tělesa. Všechny jejich pokusy o dokreslení tělesa byly chybné.



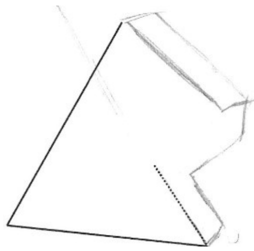
Obrázek 78 Dokreslení 4



Obrázek 79 Dokreslení 5



Obrázek 80 Dokreslení 6



Obrázek 81 Dokreslení 7

Z obrázků 78, 79, 80, 81 je patrné, že žáci nemají rozvinutou prostorou představivost. V každém tělese je chyba, která odhaluje, že žáci nevnímají vztahy v daném tělese. V každém tělese chybí několik hran, aby své řešení dokončili. Z nahrávek není jasné, zda nevěděli, jak své těleso dokreslit nebo byli přesvědčeni, že je jejich řešení správné.

Zmínil bych, že pokud žáci nevěděli, jak těleso dokreslit, uchylovali se k nekonvexním tělesům, jak ukázáno na obrázcích 78 a 81. Žáci mají v sobě pravděpodobně vybudovanou strategii, že pokud neodhalí jednoduší řešení hned, začínají vymýšlet komplikovanější řešení.

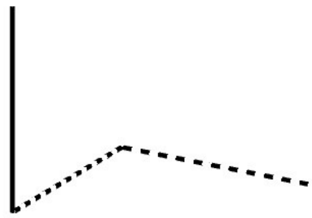
Na obrázku 79 by stačilo dokreslit pouze jednu hranu, opravit viditelnost hran a vznikl by otočený čtyřboký jehlan.

Změna orientace pravděpodobně způsobila, že si žáci čtyřboký jehlan nepředstavili. Pokud žákům není předloženo těleso v prototypické poloze, pak je pro ně obtížnější ho identifikovat. Opět doporučuji v hodinách zařadit více manipulace s modely těles, aby změna orientace tělesa neměla vliv na prostorovou představivost žáků.

Na obrázku 80 je pokus o dokreslení čtyřbokého hranolu. V tomto případě jsou žákům hranoly bližší, a tak se snažili hranol dokreslit. Při dokreslování nebrali zřetel na neviditelnou hranu a po dokreslení hranolu se snažili neviditelnou hranu nějakým způsobem začlenit do tělesa. To jim nepovedlo. V tomto případě se jedná o omezené geometrické uvažování, protože tito žáci i v následujících tělesech doplňovali tři zadané hrany na hranoly.

Toto uvažování je důsledkem nezkušenosti s jinými tělesy a nedostatečnou prací v hodinách s různými typy těles.

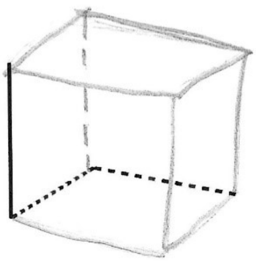
TĚLESO 2



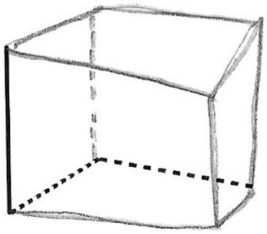
Obrázek 82 Hrany pro těleso 2

Těleso 2 bylo v programu GeoGebra navrženo jako kvádr v prototypické poloze. V programu bylo skryto osm viditelných a jedna neviditelná hrana.

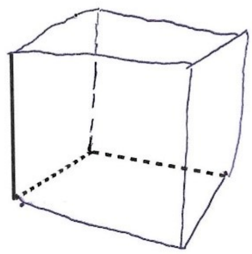
Nejčastějším řešením žáků byl v případě tělesa 2 na obrázku 82 kvádr.



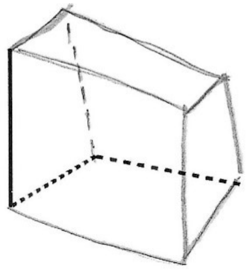
Obrázek 83 Dokreslení 1



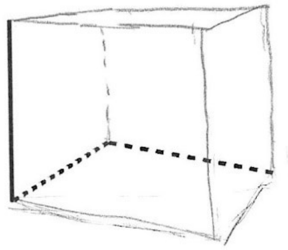
Obrázek 84 Dokreslení 2



Obrázek 85 Dokreslení 3



Obrázek 86 Dokreslení 4



Obrázek 87 Dokreslení 5

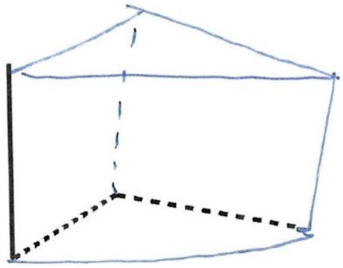
Žáci dokreslili kvádr, ale když se podíváme na obrázky 83, 84, 85, 86 a 87, tak v nich jsou patrné rozdíly. I když se jedná o náčrtky, které nejsou rýsovány podle pravítka, měly by být dodrženy vztahy, které v kvádru platí. To ukazuje na rozdílné geometrické uvažování žáků.

Na obrázku 83 jsou správně dokreslené všechny hrany včetně jejich viditelnosti. Zároveň jsou dodržena rovnoběžnost protějších hran a kolmost sousedních hran.

Žáci, kteří takto dokreslili kvádr, jsou na vyšší úrovni geometrického myšlení, protože si dokáží představit vizuální podobu tělesa a v kresbě dodržet vztahy, které v něm platí. V případě ostatních obrázků dochází k tomu, že žáci dokreslili těleso, čímž splnili zadání, ale dokáží si pouze představit vizuální podobu tělesa. Nejsou schopni v náčrtku dodržet vztahy, které v něm platí.

V obrázcích 84, 85, 86 a 87 zejména nedodržují rovnoběžnost všech protějších hran. Bylo by vhodné do hodin matematiky zařadit více manipulace s modely těles a překreslovat je na papír. Učitelé by měli být více důslední na přesnost náčrtků, aby se v nich promítly všechny platné vztahy v tělesu. V opačném případě může dojít k tvorbě mylných představ a problémů v navazujícím studiu, např. při rýsování řezů těles.

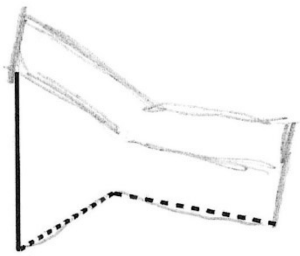
V žákovských řešeních se dále objevil trojboký hranol.



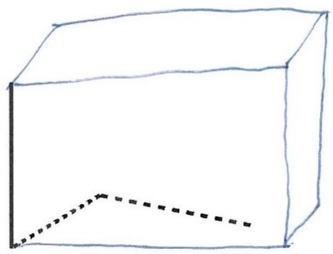
Obrázek 88 Dokreslení 6

Když jsem v programu GeoGebra vytvořil kvádr a poté jsem zakryl devět jeho hran s cílem, že žáci budou dokreslovat těleso, nepředpokládal jsem, že dokreslí jiné těleso než kvádr. Trojboký hranol je překvapivé řešení, protože zadání hran na obrázku 82 nebylo pro něj navrženo. Ukazuje se, že absence většiny hran dokáže ovlivnit geometrické myšlení natolik, že si každý žák dokáže představit jiné těleso. Chybějící hrany můžou ovlivnit i to, jak žáci vnímají rozměry tělesa a jeho orientaci. Roli může hrát i větší zkušenost s daným tělesem. Na obrázku 88 vidíme žákovské řešení, které splňuje zadání. Žáci jsou schopni si představit těleso, které je zadané třemi hranami, ale jak je na obrázku 88 patrné, nejsou schopni dodržet vztahy, které pro něj platí. Žáci nedodrželi rovnoběžnost všech protějších hran. Nákres není podrobný, protože nedodržuje všechny vztahy v tělesu, což může být dopad na jeho pochopení.

Pokud žáci nedokreslili kvádr nebo trojboký hranol, pak se snažili nakreslit nejrůznější tělesa. Všechny jejich pokusy o dokreslení tělesa byly chybné.



Obrázek 89 Dokreslení 7



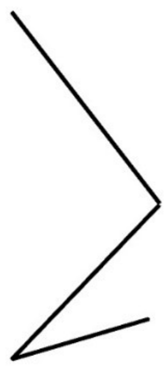
Obrázek 90 Dokreslení 8

Z obrázků 89, 90 a 91 je patrné, že žáci nemají dostatečně rozvinutou prostorou představivost.

Na obrázku 89 se žáci snažili dokreslit nekonvexní těleso. Žáci si pravděpodobně nedokázali představit jim známá tělesa, a tak se uchýlili k alternativnímu řešení v podobě nekonvexního tělesa. Pokud by se jim podařilo nekonvexní těleso dokreslit tak, že by odpovídalo zadaným hranám, pak by řešení bylo v pořádku. V tomto případě se jim to nepodařilo, protože hrany, které nejsou vidět, si dokreslili na ty, které jsou vidět. Tím nesplnili zadání. Žáci v řešení ukázali, že dokážou vnímat vztahy v tělesu, protože jimi dokreslené protější hrany jsou rovnoběžné, ale nemají dobře vybudovanou prostorovou představivost, jelikož nedokázali správně dokreslit těleso.

Na obrázku 90 je snaha o dokreslení kvádru. Žáci na jeho dokreslení použili pouze jednu ze tří zadaných hran. Žáci si takový kvádr nedokázali představit, protože mají vybudovanou prototypickou polohu kvádru, která se v jejich řešení projevuje, proto nakreslili neúplný kvádr, jelikož zjistili, že podstavu nemůžou s takovou polohou kvádru dokreslit. Doporučuji, aby žáci měli v hodinách více příležitostí s manipulací modelů těles. Učitelé mohou zároveň kreslit náčrtky těles v různých polohách, aby se žákům nevybudovala jedna prototypická poloha. K tvorbě prototypických poloh dochází, když kreslíme útvary a tělesa vždy v jedné poloze. To může mít za následek vytvoření prototypické polohy, která může žákům výrazně ovlivnit jejich prostorovou představivost.

TĚLESO 3



Obrázek 91 Hrany pro těleso 3

Těleso 3 bylo v programu GeoGebra navrženo jako krychle.

Když žáci viděli nekompletní těleso 3, museli si představit, jak by mohlo vypadat, což vyžadovalo schopnost prostorové představivosti, porozumění vztahům mezi jednotlivými hranami, a to bylo doplněno o nekritický atribut v podobě změněné orientace. Z těchto důvodů byla tato úloha pro žáky nejobtížnější. Takto reagovali žáci na zadání:

Žákyně 3: „To je docela složité. Nevím, co tam mám domalovat. V těch čárách se nevyznám.“

Žák 8: „To třetí těleso je jako co? Asi to bude to divný ze cvičení 1. To je těžké.“

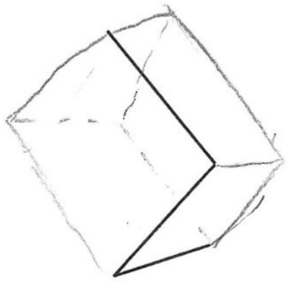
Žák 11: „Tak těleso 3. Co by to mohlo být? Uděláme z toho nějakou úplně divnou krychli.“

Žákyně 12: „Co by mohlo být to třetí těleso? Navíc tam jsou všechny hrany vidět. Asi to bude něco z této úlohy.“

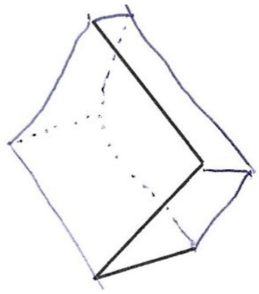
Z reakcí žáků je zřejmé, že změněná orientace tělesa výrazně komplikuje geometrické myšlení žáků. Dochází k tomu, že si žáci nedokážou představit žádné těleso s takto zadanými hranami. Ukazuje se, že žáci nejsou zvyklí pracovat v hodinách matematiky s modely těles, a to i v případě krychle, se kterou mají zkušenosti už z předškolního vzdělávání. Z tvrzení všech žáků lze usoudit, že se nezamýšleli nad tím, že těleso může být otočené. To potvrzuje, že všichni žáci mají vybudovanou prototypickou polohu tělesa. Podle žákyně 11 jsou jinak orientovaná tělesa divná.

U žákyně 11 se lze jen domnívat, zda odhalila, že takto zadanými hranami je určena krychle, nebo si jen řekla, že nakreslí krychli. Z tvrzení ostatních žáků je zřejmé, že pokud neodhalili těleso hned, uchylovali se k alternativním řešením. Řešení hledali v přechozích úlohách a nejčastěji vybírali nekonvexní tělesa či tělesa s mnohoúhelníkovými podstavami. Připomínám, že všechna tato tělesa žáci označovali za divná a za ty, které jim nedávají smysl.

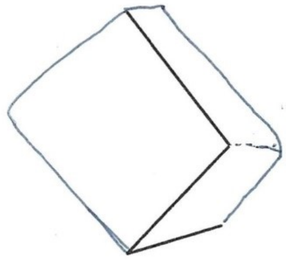
Kvádr se objevil v žákovských řešeních.



Obrázek 92 Dokreslení 1



Obrázek 93 Dokreslení 2



Obrázek 94 Dokreslení 3

Žáci nedokreslili krychli, protože proporčně nedodrželi zadané hrany. Žáci jsou schopni si těleso představit, což ukazuje na dobrou prostorovou představivost, ale nejsou schopni dodržet vztahy v tělesu. V tomto případě se jedná o shodnost protilehlých hran. Na obrázcích 92, 93 a 94 jsou tři vizualizace kvádru.

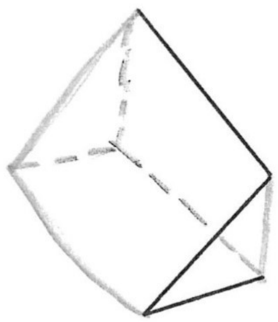
Kvádr na obrázku 92 se nejvíce podobá krychli. Jsou správně doplněné všechny hrany včetně jejich viditelnosti. Je dodržená rovnoběžnost protilehlých hran a kolmost vedlejších hran. Žáci mají vyšší úroveň geometrického myšlení, protože vnímají vztahy v tělese i s tím, že je různě orientované a mají rozvinutou geometrickou představivost, jelikož si dokázali těleso představit a správně ho nakreslit.

U kvádru na obrázku 93 jsou dodržené vztahy v tělese a správně dokreslené hrany včetně jejich viditelnost podobně jako na obrázku 92, avšak toto těleso je více podobné kvádru, protože nejsou dodržené délky hran určené zadanými hranami. Žáci nevnímají rozměry tělesa, protože si ho nepředstavili v trojrozměrném prostoru. Kdyby to udělali, nakreslili by těleso přesněji. Ukazuje se, že žáci nejsou zvyklí si v geometrii ověřovat svá řešení. Pravděpodobně si ani neuvědomují, že i v geometrii lze dělat ověření řešení. Příčinou může být neschopnost libovolně přecházet mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem.

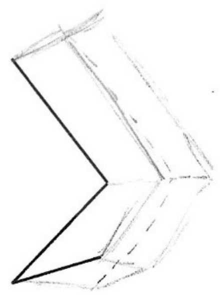
U kvádru na obrázku 94 nejsou dokreslené všechny hrany. Žáci nedokreslili hrany, které nejsou vidět. Žáci nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost, a proto si nejsou schopni těleso představit z různých úhlů pohledu v trojrozměrném prostoru.

Nemusí rozpoznat, které hrany nejsou vidět, a tudíž je v náčrtku vynechají. Je možné, že žáci vnímají tělesa jako dvourozměrný obrazec. Toto vnímání může omezit jejich schopnost dokreslit hrany, které nejsou vidět.

Když žáci nedokreslili krychli, nebo kvádr, pak se v řešeních objevila různá tělesa.



Obrázek 95 Dokreslení 4



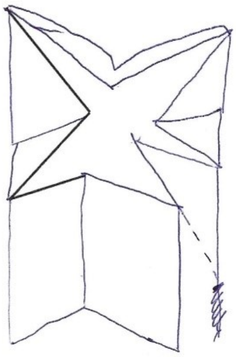
Obrázek 96 Dokreslení 5

Když se žáci snažili dokreslit těleso, které by odpovídalo zadaným hranám, představili si trojboký hranol na obrázku 95. Žáci už od malička vnímají různé geometrické útvary a jedním z nich je trojúhelník. Stačilo jim doplnit jednu hranu ke dvěma sousedním hranám a vznikla jim trojúhelníková podstava. Kvůli poloze třetí zadané hrany jim došlo, že musí dokreslit trojboký hranol. Taková myšlenka je správná. Trojboký hranol odpovídá zadání. Všechny hrany jsou správně dokreslené včetně jejich viditelnosti a náčrtek splňuje platné vztahy v trojbokém hranolu. Ukazuje se, že chybějící hrany mohou ovlivnit geometrické myšlení žáků. Žáci nakreslili trojboký hranol kvůli větší zkušenosti s trojúhelníkem, který následně doplnili na trojboký hranol či pouze neodhalili otočenou krychli.

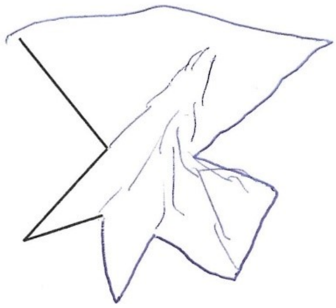
Na obrázku 96 je nekonvexní těleso. V tomto případě se jedná o strategii, kdy žáci neodhalili, jaké těleso mají dokreslit, a tak hledali inspiraci u těles z předchozích úloh. Na základě výsledků z předchozích úloh je to překvapivé řešení. Žáci označují nekonvexní útvary za divné a říkají, že jim nedávají smysl. Žáci v případech, kdy nedokážou odhalit jednoduchá řešení, hledají řešení v pro ně složitějších tvarech. Tento přístup ukazuje na omezené myšlení žáků. Žáci nepředpokládají, že by tělesa mohla být různě otočena, což dokazuje, že nekritické atributy mají vliv na geometrické myšlení žáků.

Doporučuji, aby v hodinách geometrie docházelo k častější manipulaci s modely. Do hodin lze zařadit i práci se softwarem, např. programem GeoGebra, kde si žáci můžou vytvořit různá tělesa, otáčet s nimi a zkoumat jejich vlastnosti. Program donutí žáky vnímat tělesa v různých polohách, a rozvine tak flexibilitu uvažování.

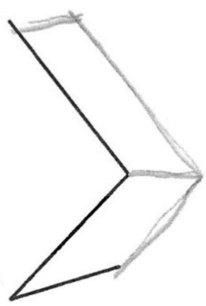
V ostatních případech se jednalo o chybná řešení, která nabízela různé útvary a tělesa.



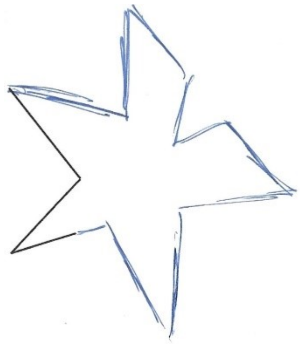
Obrázek 97 Dokreslení 6



Obrázek 98 Dokreslení 7



Obrázek 99 Dokreslení 8



Obrázek 100 Dokreslení 9

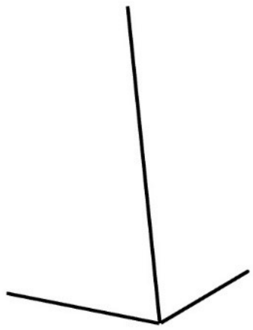
Z obrázků 97, 98, 99 a 100 je zřejmé, že žáci nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost. Opět se ukazuje, že pokud žáci neodhalili vizuální podobu tělesa, hledali řešení v pro ně složitějších útvarech, kterými jsou nekonvexní obrazce. Vztahy mezi zadanými hranami jim v představě nepomohly, nejspíše je ani nevnímali. Všechny kresby jsou nedokončené, což způsobila náročnost zvoleného tvaru. Na obrázku 97 je nedokončené těleso s hvězdicovitou podstavou. Žáci se nejspíše inspirovali u těles z předchozích úloh. Žáci bez problémů nakreslili podstavu ve tvaru hvězdy, ale už ho nedokázali nakreslit v trojrozměrném prostoru. Příčinou byl složitější tvar podstavy a nižší úroveň geometrické představivost. Pokud by žáci zvolili nekonvexní jehlan, možná by těleso zvládli dokreslit. To žáky nenapadlo, protože mají pravděpodobně větší zkušenosti s hranoly než s jehlany.

Na obrázku 98 je podobně jako na obrázku 97 nekonvexní podstava. Žáci se snažili dokreslit trojrozměrné těleso. Obrázek naznačuje, že se snažili dokreslit jehlan, avšak nevěděli jak.

Obrázky 99 a 100 zachycují nekonvexní obrazce. V obou případech nedošlo k náznaku dokončení tělesa jako trojrozměrného objektu.

Žáci v nahrávkách nezmínili, že se jedná pohled z boku, ze shora ani zezdola. Zde došlo k tomu, že žáci nakreslili podstavu tělesa, ale nedokázali si ho představit v trojrozměrném prostoru. Žáci si možná těleso dokážou představit, ale jejich geometrická představivost ještě nedosahuje na takovou úroveň, aby ho byli schopni nakreslit. Žáci nejsou schopni přecházet mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Do hodin matematiky bych zařadil více práce s nekonvexními útvary, aby žákům nepřišli divné. Když budou mít s nimi více zkušeností, pak jim začnou dávat větší smysl. Zařadil bych aktivitu, kdy by žáci kreslili tělesa z různých pohledů v libovolných orientacích. Tím by se žákům rozvíjela geometrická představivost.

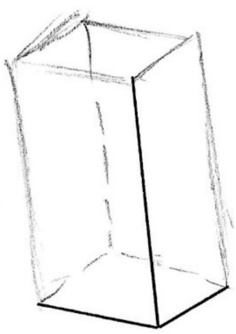
TĚLESO 4



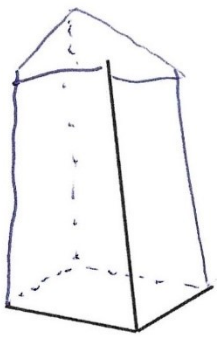
Obrázek 101 Hrany pro těleso 4

Těleso 4 bylo v programu GeoGebra navrženo jako pravidelný čtyřboký jehlan v prototypické poloze. V programu byly skryty dvě podstavné a tři boční hrany. V žákovských řešeních se objevila pouze dvě tělesa, a to čtyřboký jehlan a kvádr.

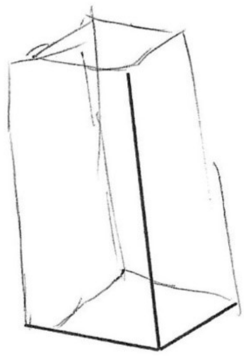
Kvádr byl častějším řešením.



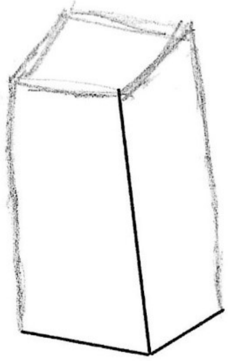
Obrázek 102 Dokreslení 1



Obrázek 103 Dokreslení 2



Obrázek 104 Dokreslení 3



Obrázek 105 Dokreslení 4

Na obrázcích 102, 103, 104 a 105 jsou dokresleny kvádry, avšak ve všech případech se jedná o chybné řešení. Chybná řešení ukazují, že žáci dostatečně nevnímají vztahy, které platí v kvádru. Zadaná boční hrana není kolmá na dvě podstavné hrany. Chybějící hrany mají vliv na geometrickou představivost žáků a v případě takto zadaných hran se žákům představí kvádr. Žáci jsou pravděpodobně zvyklí takto kvádr kreslit a jejich zkušenost jim ovlivnila myšlení. Poté už nevnímali, že takto zadané hrany nesplňují vztahy v kvádru. Žáci si nejsou schopni představit zadané hrany v trojrozměrném prostoru. Pokud by toho byli schopni, zjistili by, že zadané hrany nesvírají pravý úhel, a proto těmito hranami nemůže být kvádr určen. Učitelé by měli do hodin geometrie zařazovat rozbory modelů těles a jejich kresbu do dvourozměrného prostoru. Žáci by určovali jejich vlastnosti, vztahy, které pro ně platí a všechno by museli dodržet při jejich kresbě do dvourozměrného prostoru.

I když se jedná o chybná řešení, tak se kvádry liší. Na obrázku 102 je kvádr, ve kterém jsou dodržené všechny platné vztahy včetně viditelnosti hran. Žáci vnímají vztahy mezi hranami v kvádru. To ukazuje na vyšší úroveň geometrického myšlení. Kdyby si těleso představili v trojrozměrném prostoru, pak by zjistili, že jedna boční hrana není kolmá na podstavy, a tudíž zbylé boční hrany také nemohou být kolmé na podstavy. Žáci ví, jaké vztahy platí pro hrany v kvádru a dokážou ho nakreslit, ale jejich prostorová představivost není na takové úrovni, aby si ověřili správnost řešení.

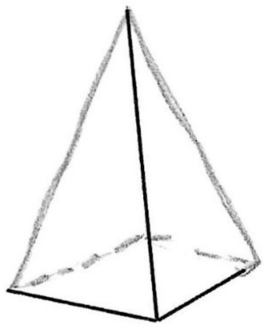
Z řešení na obrázku 103 je zřejmé, že si žáci dokážou představit těleso z různých pohledů a správně zakreslit viditelnost hran, ale nejsou schopni dodržet vztahy pro hrany v kvádru. Žáci nedodržují rovnoběžnost protějších hran a rozměry tělesa. Hrany jsou různě dlouhé, a tak stěny kvádru netvoří obdélníky. Může to být způsobeno nedostatečnými zkušenostmi s modely kvádru a rozborem jeho vlastností. Žáci tuší, jak kvádr vypadá, ale nedokážou ho správně nakreslit.

Žáci v řešení na obrázku 104 dodržují vztahy platné pro kvádr, což ukazuje na dobrou úroveň geometrického myšlení, ale nedokážou si ho představit z různých pohledů. Žáci nerozlišují viditelnost hran. Příčinou je omezená geometrická představivost. Doporučoval bych více pracovat s modely těles a kreslit je z různých úhlů pohledu.

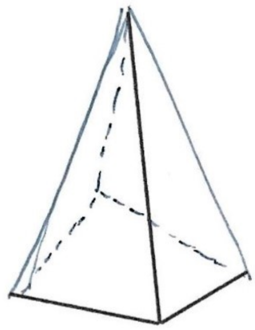
Vhodné je zapojení softwaru, kde by si s tělesy mohli libovolně otáčet, a ověřovat si tak správnost svých náčrtků těles, protože viditelnost hran se v těchto programech automaticky mění.

V řešení na obrázku 105 nejsou dokreslené hrany, které nejsou vidět. Je to pravděpodobně způsobené nedostatečně rozvinutou prostorovou představivostí. Nedokáží si představit těleso v různých polohách v trojrozměrném prostoru, a zaznamenat tak viditelnost hran. Je možné, že žáci nemusí rozpoznat hrany, které nejsou vidět, a tak je v náčrtku záměrně vynechají. Příčinou může být vnímání tělesa jako dvourozměrného objektu. To znamená, že nerozlišují dvourozměrný a trojrozměrný prostor. V takovém případě je vhodné zařadit do výuky více manipulace s modely a žákům vysvětlit, co to je geometrické těleso.

Druhým žákovským řešením byl čtyřboký jehlan. Jedná se o správné řešení.



Obrázek 106 Dokreslení 5



Obrázek 107 Dokreslení 6

Na obrázcích 106 a 107 jsou dokreslené čtyřboké jehlany, ale na první pohled se řešení liší.

Ve čtyřbokém jehlanu na obrázku 106 jsou správně dokreslené hrany včetně jejich viditelnosti. Žáci mají dobrou úroveň geometrické představivosti, protože si dokázali těleso představit v trojrozměrném prostoru a převést ho do dvourozměrného prostoru. Žáci odhalili orientaci jehlanu, protože správně vyznačili viditelné hrany. Úroveň geometrického uvažování mají na vyšší úrovni, protože si jsou vědomi vztahů mezi hranami ve čtyřbokém jehlanu.

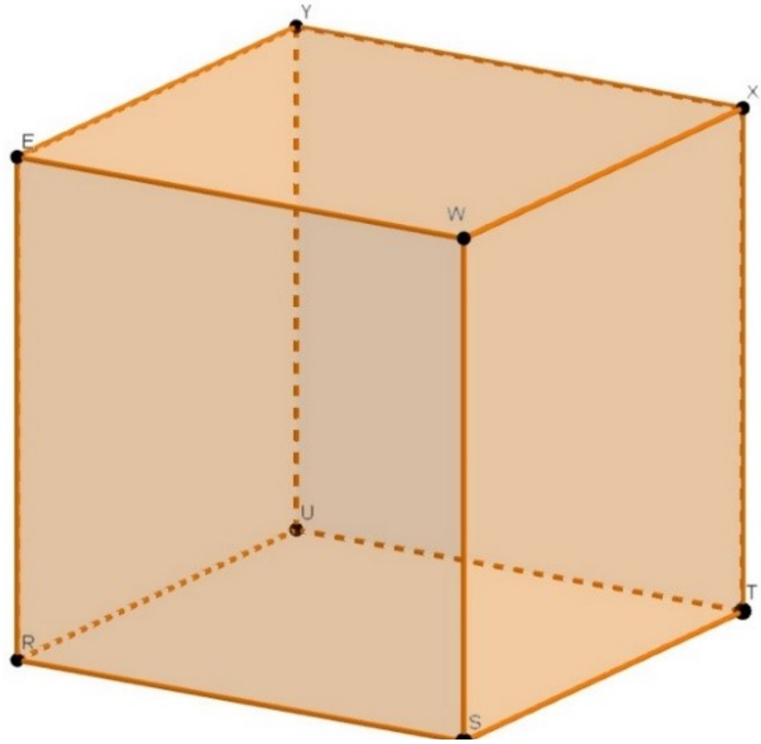
V řešení na obrázku 107 je správně zakreslena viditelnost hran, avšak není dodržena rovnoběžnost protějších hran podstavy. Žáci si dokázali představit těleso v trojrozměrném prostoru, ale nedokázali ho správně překreslit do dvourozměrného prostoru. Žáci nevnímají vztahy, které platí pro podstavu pravidelného čtyřbokého jehlanu, protože protilehlé podstavné hrany jsou rovnoběžné, což v jejich řešení chybí. Naopak, správně vnímají boční hrany, které spojují hlavní vrchol jehlanu s vrcholy podstavy. Žáci mají dobrou prostorovou představivost, protože si dokázali těleso představit a zakreslit ho tak, že je možné z jejich řešení čtyřboký jehlan rozpoznat, ale bylo by vhodné více vnímat vztahy, které v tělesech platí, čemuž může pomoct práce s 3D modely těles.

2.5.10 Shrnutí výsledků z úlohy 5

Žákovská řešení nám ukázala, že každý žák má jinou úroveň geometrického myšlení a prostorové představivosti. To se projevilo při dokreslování těles. Když měli zadány tři hrany, dokázali dokreslit různá tělesa z různých pohledů. Ukazuje se, že každý žák preferuje jiné těleso na základě svých zkušeností. V případě, že si žáci nedokázali představit těleso, které by odpovídalo zadaným hraná, hledali tak řešení v nekonvexních tvarech. Jedná se o překvapivý přístup. Tyto tvary v předchozích úlohách označili za divné a za ty, které jim nedávají smysl. Lze říct, že absence většiny hran tělesa výrazně ovlivní geometrické myšlení žáků. Těleso, které bylo původně hranolem, mohou žáci po odstranění většiny hran vnímat jako hranol. V úloze se objevovala i chybná řešení. Žáci byli schopni nakreslit těleso, ale nedodrželi vztahy a vlastnosti, které pro něj platí. To svědčí o dobré geometrické představivosti, ale o nižší úrovni geometrického myšlení. V některých případech žáci nerozlišovali viditelnost hran či některé hrany vynechali. To ukazuje, že dokážou vnímat vztahy v tělese, ale nedokážou si ho představit v trojrozměrném prostoru. Můžou mít problémy s přechodem mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Příčinou může být i vybudovaná prototypická poloha pro dané těleso, která omezuje geometrickou představivost žáků. U tělesa 3 se prokázalo, že žáci mají potíže s vnímáním otočených těles. Jedná se o nekritický atribut, který zvyšuje obtížnost úlohy a má vliv na geometrické myšlení žáků. V některých případech došlo k tomu, že žáci nebyli schopni těleso dokreslit, protože nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost.

2.5.11 Úloha 6

Úloha 6: Podle obrázku rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.



Obrázek 108 Těleso pro úlohu 6

Tabulka úspěšnosti:

	Úspěšnost v procentech
Úsečky UY a ST jsou na sebe kolmé.	**38**
Úsečka RS náleží do dvou stěn.	86
Úsečky RX a ET svírají pravý úhel.	**19**
Těleso na obrázku má 6 stěnových úhlopříček.	76
Úsečky UW a ET se neprotínají.	**33**
Vzdálenost úsečky WX a EY je rovna délce úsečky WY.	81
Těleso na obrázku je čtyřboký hranol.	**33**

Nejnižší úspěšnost řešení se ukázala u vyznačených tvrzení v tabulce.

Tabulka absolutní četnosti:

Úsečky UY a ST jsou na sebe kolmé.	8
Úsečka RS náleží do dvou stěn.	19
Úsečky RX a ET svírají pravý úhel.	4
Těleso na obrázku má 6 stěnových úhlopříček.	17
Úsečky UW a ET se neprotínají.	7
Vzdálenost úsečky WX a EY je rovna délce úsečky WY.	18
Těleso na obrázku je čtyřboký hranol.	7

Úsečky UY a ST jsou na sebe kolmé.

Tvrzení je pravdivé, protože rovnoběžnost přímek se přenáší. Když se úsečka ST posune na úsečku RU, pak se jedná o sousední hrany ve čtvercové stěně, a tudíž jsou na sebe kolmé.

Nízká úspěšnost byla způsobena neznalostí pojmu kolmost. Jedná se o základní geometrický pojem, který je součástí očekávaných výstupů v Rámcovém vzdělávacím plánu pro základní vzdělávání (2017). Doporučuji reedukaci základních geometrických pojmů například u konstrukčních úloh, kde si mohou žáci pojem vštípit a následně ho využít při rýsování.

Žáci neuvažovali situaci, kdy si mohou jednu hranu posunout, aby obě hrany měly společný bod, a mohli se tak rozhodnout o jejich odchylce. Toto vysvětlení proběhlo mezi žákem 13 a žákem 14:

Žák 13: „Ty nejsou na sebe kolmé."

Žák 14: „Podle mě ano, protože kdyby ses podíval takhle. Jako když to posuneš, tak jsou na sebe kolmé, protože ST a UR jsou stejné."

Žák 13: „Jak stejné?“

Žák 14: „No, jsou to rovnoběžky, takže když to posuneš, tak to je stejné. Pak jsou na sebe kolmé.“

Žák 13: „Jo takhle, už to chápu. Tak dáme ano.“

Žák 14 správně vysvětlil a zdůvodnil, že si hranu mohou posunout, protože se tím nic nezmění. Rovnoběžnost je tranzitivní vlastnost.

Ostatní žáci si tuto vlastnost neuvědomili a zdůvodňovali následně:

Žák 16: „Nejsou na sebe kolmé, protože jednu máš tady a druhou tady. Nejsou u sebe, takže nejsou na sebe kolmé.“

Žákyně 17: „Nejsou. To by muselo být XT a ST. Ty jsou na sebe kolmé, protože mají aspoň jeden společný bod.“

Z tvrzení žáků je zřejmé, že rozumí pojmu kolmost, avšak ho dokážou použít jen v určitých situacích. Kolmost vnímají pouze mezi úsečkami ležících v jedné rovině. Pokud úsečky leží ve dvou různých rovinách, pak nemohou být kolmé. Pojem nedokážou aplikovat v jiných situacích, což ukazuje na omezené geometrické uvažování. Povrchové pochopení pojmu kolmost může žákům způsobit problémy v navazujícím studiu, kdy se budou učit o mimoběžkách. Doporučuji, aby základní geometrické pojmy byly využívány v nestandardních situacích. Žákům se tím rozvine geometrické uvažování a pojmy budou používat s hlubším porozuměním.

<u>Úsečky RX a ET svírají pravý úhel.</u>

Tvrzení není pravdivé. Obě úsečky jsou zároveň tělesovými úhlopříčkami ležící v jedné rovině, která má tvar obdélníku. Úhlopříčky v obdélníku nesvírají pravý úhel.

Žáci svá rozhodnutí zdůvodňovali následovně:

Žák 1: „RX a ET svírají pravý úhel, protože je to čtverec. Tam je všechno pravý úhel.“

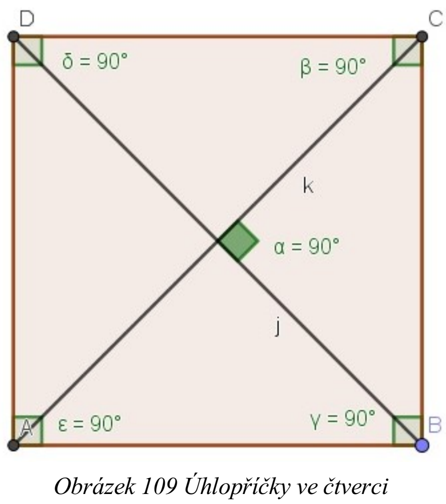
Žák 10: „To jsou úhlopříčky. Ve čtverci svírají pravý úhel, ale já nevím, jestli i v krychli. Asi ano, protože má všechny strany stejné.“

Žákyně 10: „Jsou to úhlopříčky, takže svírají pravý úhel.“

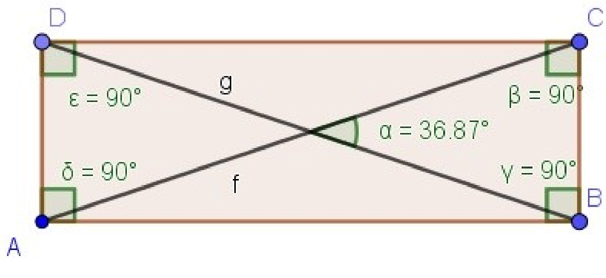
Žák 15: „Určitě svírají pravý úhel, protože to jsou úhlopříčky.“

Z tvrzení žáků je zřejmé, že mají špatně vybudované představy o vztazích v geometrii. Žáci předpokládají, že v krychli jsou všechny úsečky včetně úhlopříček stejně dlouhé, a proto vnímají rovinu určenou tělesovými úhlopříčkami jako čtverec. To není pravda. Z Pythagorovy věty vyplývá, že úhlopříčka musí být delší než zbývající dvě strany trojúhelníku, a proto rovina, kterou určují tělesové úhlopříčky RX a ET, nemá tvar čtverce. Žáci předpokládají, že když má krychle všechny stěny čtvercové, tudíž všechny hrany jsou stejně dlouhá, tak i všechny úsečky v krychli mají stejnou délku. Obecně platí, že pokud má krychle délku hrany a, pak délka tělesové úhlopříčky je $a \cdot \sqrt{3}$. Tento předpoklad ovlivňuje jejich geometrické uvažování a buduje jim mylnou představu o vztazích v krychli.

Dále předpokládají, že úhlopříčky všech geometrických útvarů jsou na sebe kolmé. Žáci mají silně vybudovanou představu o odchylce úhlopříček ve čtverci, kde úhlopříčky svírají pravý úhel (obr. 109).



Obrázek 109 Úhlopříčky ve čtverci



Obrázek 110 Úhlopříčky v obdélníku

Obecně to není pravdivé tvrzení. Čtverec je speciální případ čtyřúhelníku, ve kterém kolmost úhlopříček platí. Žáci nevnímají rozdíl ve vztazích mezi úhlopříčkami v závislosti na tom, zda se nacházejí v dvourozměrném či trojrozměrném prostoru.

Ukazuje se, že žáci chápou geometrické pojmy v prostoru, ve kterém jim byly definovány, ale pokud mají pojem a jeho vztahy aplikovat v jiných situacích či v jiném prostoru, mají s tím problémy.

Doporučoval bych, aby žáci pracovali se sítěmi geometrických těles. Sítě těles mohou rýsovat ve mřížové síti, kde se jim ukážou vztahy v krychli. V mřížové síti poznají, že úhlopříčka není stejně dlouhá jako strana čtvercové stěny. V této síti mohou odhalit, že kolmost úhlopříček je případ, který platí pouze ve čtverci a kosočtverci. Do hodin matematiky bych zařadil modelování těles ze špejlí a modelíny. Tato aktivita pomůže žákům v budování představ o vztazích v krychli. Pokud by chtěli vytvořit tělesovou úhlopříčku, museli by použít delší špejli než na sestavení hran krychle. Bylo by vhodné aplikovat pojmy zavedené v rovině i v prostoru. Žáci by mohli pojem pochopit konceptuálně a použít ho i v jiném prostředí.

<u>Úsečky UW a ET se neprotínají.</u>

Tvrzení není pravdivé. Vyplývá to ze symetrie krychle. Krychle je symetrické pravidelné těleso, jenž má všechny hrany stejně dlouhé, všechny stěny čtvercové, a proto mají všechny tělesové úhlopříčky stejnou délku a protínají se ve středu krychle, který je stejně vzdálen od všech vrcholů. U tohoto tvrzení museli žáci prokázat dobrou prostorovou představivost a vyšší úroveň geometrického uvažování. Museli vnímat zákonitosti v krychli a ukázat, jak se vztahy v ní vzájemně ovlivňují.

Žáci se rozhodovali následovně:

Žák 4: „To je lež. Ty se protínají.“

Žák 8: „Ty se vůbec nepotkají. Je to pravda.“

Žákyně 16: „Ty se protínají na 100 %. Jsou to úsečky a navíc úhlopříčky a ty se vždycky protínají.“

Z tvrzení žáků je patrné, že své rozhodnutí nebyli schopni zdůvodnit. Ukazuje to na nižší úroveň geometrického myšlení. Žáci si snažili situaci představit a pouze na základě vizualizace se rozhodli o pravdivost tvrzení.

V žádné nahrávce nebylo deduktivní zdůvodnění, kde by se projevila analýza vztahů a jejich pochopení v krychli. Žákyně 16 má vybudovanou představu, že úhlopříčky se vždycky protínají, a to bez ohledu na prostor. Představy, které si vybudovala v dvourozměrném prostoru, považuje za univerzální a platné v ostatních prostorech. Pravděpodobně si neuvědomuje, že v trojrozměrném prostoru fungují jiné vztahy než v dvourozměrném a zákonitosti platné v rovině nemusí obecně platit v prostoru. Ukazuje se, že žáci chápou základní pojmy v rovině, ale pokud dojde k aplikaci těchto pojmů na trojrozměrné objekty, pak může být jejich uvažování chybné. V tomto případě žáci ví, že úhlopříčky ve čtverci jsou na sebe kolmé, ale nepřemýšlejí o tom, že se mohou lišit vztahy tělesových a stěnových úhlopříček.

Doporučoval bych, aby si žáci vymodelovali krychli pomocí drátků nebo špejlí včetně tělesových úhlopříček. Poté by viděli, že se tělesové úhlopříčky protínají v jednom bodu. Na základě modelu by zjistili, že to souvisí s pravidelností a symetrií krychle. K odhalení vztahů v geometrickém tělesu je možné využít software, například program GeoGebra. V něm si mohou žáci vymodelovat krychli a zkoumat zákonitosti, které v ní platí. Domnívám se, že se s prostorou geometrií setkávají pozdě. Žáci si myslí, že to co platí v rovině, musí platit také v prostoru, což není vždy pravda. Doporučuji, aby při zavádění geometrických pojmů docházelo k přecházení mezi rovinnou a prostorovou geometrií, byť jen u základních těles jako je krychle. Žáci tím lépe porozumí danému pojmu a budou vnímat vztahy mez dvourozměrným a trojrozměrným prostorem.

Těleso na obrázku je čtyřboký hranol.

Toto tvrzení je pravdivé. Krychle je hranol, protože má dvě shodné podstavy, které jsou rovnoběžné a její stěny jsou mnohoúhelníky. Má dvě podstavy a čtyři boční stěny, proto se jedná o čtyřboký hranol.

Žáci zdůvodňovali následovně:

Žák 3: „To není hranol. Podle mě je to krychle, takže to není čtyřboký hranol. Hranol je takový úzký.“

Žákyně 5: „Podle mě ne. To není hranol ale krychle.“

Žákyně 8: „To nebude čtyřboký hranol. Nemá čtyři boky.“

Žák 13: „Ne, je to krychle.“

Žák 16: „To není hranol. To je krychle. Čtyřboký hranol by měl být delší a užší.“

Žáci dostatečně nerozumí pojmu hranol, což je ovlivněno jejich úrovní geometrického myšlení. Neví, jak je hranol v geometrii definován a jaké vztahy v něm platí. Ukazuje se, že hranol vnímají intuitivně a rozhodují se pouze na základě vizualizace. V nahrávkách nedošlo k žádnému rozboru tělesa ani k analýze vlastností tělesa. Na základě výroků je zřejmé, že krychle tvoří jednu skupinu těles a hranoly tvoří další skupinu těles. Žáci neuvažovali situaci, kdy by geometrické těleso mohlo mít více pojmenování. To ukazuje na omezené geometrické myšlení. Pro hranol mají vytvořený prototyp, který je podle žáka 3 úzký a podle žáka 16 je hranol delší a užší. Žákyně 8 nerozumí pojmu čtyřboký, protože nezná terminologii používanou pro tělesa. Nerozlišuje boční a podstavnou stěnu. To je způsobeno nedostatečným ukotvením geometrických pojmů.

Doporučuji, aby při práci s modely těles docházelo k jejich pojmenování a rozboru. Žáci budou objevovat nejen vztahy, které v tělesech platí, a vštípí si geometrickou terminologii. Při práci s různými modely těles by mohli žáci jednotlivá tělesa rozdělit do skupin podle určitých kritérií, a tím by objevovali jejich společné vlastnosti. Tím by se předešlo špatné kategorizaci těles. Naučili by se rozlišovat hranoly, jehlany nebo rotační tělesa. Zařadil bych více terminologických úloh, aby si žáci pojmy procvičili a lépe rozuměli rozdílům mezi nimi. Naučili by se rozlišovat například podstavnou a boční stěnu

2.5.12 Shrnutí výsledků z úlohy 6

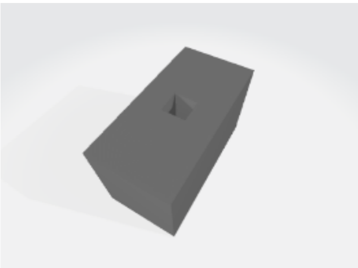
Výsledky z úlohy 6 ukázaly, že žáci nemají požadovanou úroveň geometrického myšlení, aby byli schopni vnímat vztahy v geometrickém tělese.

Žáci rozumí základní pojmům jako je úhlopříčka a základním vztahům jako je kolmost, ale jejich vnímání je omezené. Žáci mají tendenci předpokládat, že geometrické vlastnosti, které znají z roviny, platí i v prostoru. Pokud dojde na aplikaci pojmů a vlastností na trojrozměrné objekty, pak je jejich uvažování chybné.

Důvodem, proč k tomu dochází, může být i výuka geometrických pojmů. Žáci se učí základní pojmy v rovině, a když přecházejí na prostorovou geometrii, tak je nedokážou aplikovat. Žáci si neumí dostatečně představit trojrozměrné objekty, a proto mají problémy s vnímání vztahů mezi geometrickými pojmy v prostoru. Učitelé by měli na základě těchto zjištění klást větší důraz na srovnávání a analýzu rozdílů mezi objekty v dvourozměrném a trojrozměrném prostoru. Například při probírání úhlopříček by mohli ukázat úhlopříčky ve čtverci a probrat jaké vztahy mezi nimi platí a porovnat to s tělesovými úhlopříčkami krychle. Došlo by k tomu, že ve čtverci úhlopříčky svírají pravý úhel, ale tělesové úhlopříčky v krychli nikoliv. Žáci by tento objev museli zdůvodnit, čímž by rozvíjeli schopnost argumentace.

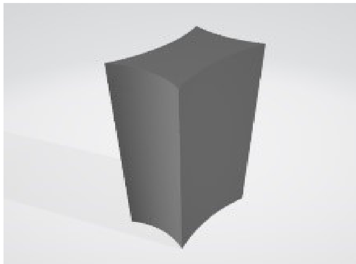
2.5.13 Úloha 7

Úloha 7: Podle obrázku doplňte tabulku.

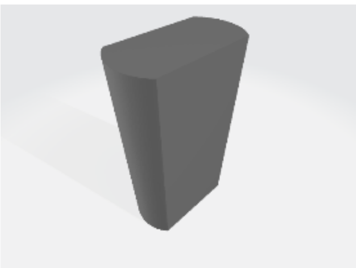


Obrázek 111 Těleso 1

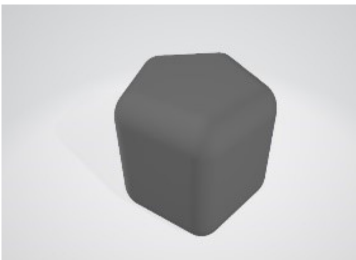
Obrázek 112 Těleso 2



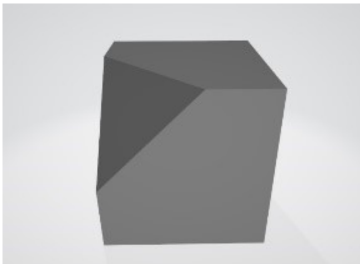
Obrázek 113 Těleso 3



Obrázek 114 Těleso 4



Obrázek 115 Těleso 5



Obrázek 116 Těleso 6

Tabulka úspěšnosti (výsledky jsou uvedené v procentech):

TĚLESO	Počet hran	Počet vrcholů	Počet stěn
1	33	19	10
2	67	67	81
3	10	100	86
4	24	100	90
5	81	86	10
6	67	76	81
Celková úspěšnost	**47**	**75**	**60**

Tabulka absolutní četnosti:

TĚLESO	Počet hran	Počet vrcholů	Počet stěn
1	7	4	3
2	14	14	18
3	2	22	19
4	5	22	20
5	18	19	2
6	14	17	18

Podstava je definovaná jako mnohoúhelník, boční stěna hranolu jako rovnoběžník a boční stěna jehlanu jako trojúhelník.

V Přehledu (Polák, 2008) je uvedena Základní věta o přímce:

„Dvěma různými body prochází právě jedna přímka." (Polák, 2008, s. 414)

Ze Základní věty o přímce vyplývá, že se jedná o rovnou čáru. Důkladné pochopení základních geometrických pojmů jakou jsou hrany, stěny a vrcholy, je pro žáky důležité. Ukazuje se, že v učebních materiálech nejsou tyto pojmy dostatečně vysvětlené a jejich definice mohou působit nejasně. Z toho plyne, že žáci chápou pojmy intuitivně, a proto si o nich mohou vytvořit mylné představy.

Žáci měli největší problém s identifikací hran tělesa. Úspěšnost poukazuje na to, že hrana je pro žáky nejméně jasným pojmem. Rozboru podrobím geometrické pojmy u jednotlivých těles, kde byla úspěšnost menší než 50 %.

TĚLESO 1

Těleso 1 na obrázku 111 má 24 hran, 16 vrcholů a 8 stěn. Žáci analyzovali těleso následovně:

Žák 5: „Má to 20 hran, protože vevnitř nemůžeš mít hrany. Ty jsou vždycky zvenku a ne zevnitř.“

Žák 14: „Tohle nemůže být vrchol, protože to musí být vystouplé.“

Žákyně 15: „Počítají se i ty vnitřní hrany? Normální krychle má 12 hran, plus 8 to je 20.“

Žák 16: „Nemyslím si, že se počítají ty hrany uvnitř, tak dáme 12.“

Z výroků žáků je patrné, že jim díra v tělese výrazně změnila vnímání tělesa. Ukazuje se, že žáci mají vytvořenou představu o tom, co to je hrana, ale pokud mají analyzovat pro ně nestandardní objekt, jejich představa se naruší. Je to způsobené neznalostí definic základních geometrických pojmů, a proto nemůžou své myšlenky zdůvodnit. Žáci měli největší problém s tím, zda hrany, které jsou vytvořené dírou v tělesu, se počítají jako hrany. Z definice hrany je zřejmé, že hrany uvnitř tělesa počítají jako hrany. Žáci vnímají hranu jako objekt, který musí být vidět. Taková představa je mylná. Žáci nemají zkušenosti s nekonvexními tělesy, což jim omezuje jejich geometrické uvažování. Doporučuji, aby žáci kromě pravidelných těles pracovali i s nekonvexními tělesy a analyzovali je. V životě se setkáme s mnoha nekonvexními tělesy, a proto by se učitelé měli snažit o to, aby je žáci pochopili, vnímali jejich vztahy a měli s nimi zkušenost.

S počtem vrcholů měli žáci podobný problém. Nevěděli, zda vrcholy vytvořené dírou v tělesu se počítají jako vrcholy. Definice vrcholu je nejasná, protože pouze říká, že vrchol je bod. Žáci na základě svých zkušenosti s pravidelnými tělesy mohli odvodit, že vrchol v prostoru je určen třemi hranami. Na základě této úvahy by vrcholy vytvořené dírou v tělesu počítali jako vrcholy. Toto zdůvodnění vyžaduje vyšší úroveň vnímání vztahů v tělesech, což žádný žák neprokázal. Možnou příčinou je špatné vnímání pojmu hrana, a když nevnímali hrany vytvořené dírou v tělesu jako hrany, pak vrcholy nemohli vnímat jako vrcholy. Z tabulky úspěšnosti je jasné, že žáci intuitivně chápou, co je vrchol a u tohoto tělesa se jednalo o specifický případ, protože u ostatních těles bylo procento úspěšnosti vysoké.

Nejnižší úspěšnost u tělesa 1 na obrázku 111 měl počet stěn. Těleso má 8 stěn, protože podstavy s dírou se nepočítají jako stěny. Podle definice je stěna mnohoúhelník, což není splněno. Nejčastějším žákovským řešením bylo 10 stěn. To znamená, že žáci započítali všechny boční stěny, stěnu s dírou počítali jako stěnu a všechny čtyři stěny vytvořené dírou v tělesu. Žáci neznají definici stěny tělesa, a proto ji vnímají intuitivně. Nezamýšleli se nad tím, že by stěny s dírou neměly být počítány jako stěny.

Překvapivé je, že hrany, které byly vytvořeny dírou v tělesu, nepočítali jako hrany, ale stěny vytvořené dírou v tělesu, počítali jako stěny. Potvrzuje se, že žáci mají lepší představu a více chápou pojem stěna, než hrana.

TĚLESO 3

Těleso 3 na obrázku 113 má 4 hrany. Důsledkem Základní věty o přímce je, že hrana je rovná čára spojující dva vrcholy. Prohnuté spojnice bodů v tělesu 3 nepočítáme jako hrany. Žáci zdůvodňovali následovně:

Žák 7: „Za mě to jsou hrany, jen jsou prohnuté.“

Žák 9: „Já si myslím, že jsou to hrany, i když nejsou rovné.“

Žákyně 12: „Vypadá to jako kvádr, jen má ty hrany prohnuté. Bude to mít stejný počet hran jako kvádr.“

Žáci nedokázali zdůvodnit, proč počítají prohnuté hrany jako hrany. Důvodem je neznalost definice hrany, a proto se rozhodovali pouze na základě své intuice. Bylo by vhodné, aby základní geometrické pojmy byly jasně definovány. Žáci by se na ně mohli odkazovat, tím lépe zdůvodnit své myšlenky a nedocházelo by k mylným představám o základních pojmech jako v případě žáka 7 a žáka 9, kteří počítají prohnuté hrany jako hrany.

Žákyni 12 připomínalo těleso 3 kvádr. Pravděpodobně nevnímá vztahy v tělesech a rozhoduje se pouze na základě vizuální podoby tělesa. V kvádru jsou sousední hrany na sebe kolmé. To v tělese 3 neplatí z důvodu prohnutí hran. Je možné, že si žákyně 12 uvědomuje vztahy v kvádru, ale neznalostí definice hrany a špatně vybudovanou představou, považuje prohnuté hrany za hrany se stejnými vlastnostmi, jako mají hrany v kvádru.

Doporučuji, aby byly do hodin zařazovány nekonvexní a netradiční tělesa, a to ve formě 3D modelů nebo pomocí digitálního softwaru.

Je důležité, aby žáci získali zkušenosti s těmito tělesy a dokázali je správně analyzovat. Tím se rozvíjí geometrické myšlení. Tato tělesa se vyskytují kolem nás, a proto by učitelé měli žáky seznámit s těmito tělesy a společně odhalit, jaké mají vlastnosti.

TĚLESO 4

Těleso 4 na obrázku 114 má 8 hran. Podobně jako u tělesa 3, tak i u tělesa 4 je hrana považována za rovnou čáru, což je důsledek Základní věty o přímce. Žáci svá řešení zdůvodňovali následovně:

> Žák 4: „To bude mít úplně stejně hran jako to těleso předtím, jen tady jsou ty hrany vypouklé."
>
> Žákyně 7: „Já bych řekla, že má osm hran. Ty zaoblený budou asi taky hrany."
>
> Žákyně 13: „Já bych to dala jako hranu. Předtím jsme to taky dali jako hranu, tak tady je to jen vypouklé."

Žáci nebyli schopni zdůvodnit svá tvrzení. Hranu tělesa chápou intuitivně a nemají ji jasně definovanou. Každý žák si může vybudovat vlastní představu hrany a vnímat ji jinak. To může způsobit, že žáci mají jinou úroveň geometrického uvažování.

Žák 4 se nad počtem hran u tělesa 4 nezamyslel a zdůvodnil své tvrzení na základě podobnosti s předchozím tělesem. Toto zdůvodnění je chybné, protože obě tělesa jsou vizuálně odlišná. Těleso na obrázku 113 je nekonvexní a těleso na obrázku 114 konvexní. Žák se s takovými tělesy pravděpodobně nesetkal a jeho nezkušenost mu natolik ovlivnila myšlení, že tělesa vnímá podobně. Nezkušenost a intuitivní chápání může vést k budování špatných představ o vztazích mezi tělesy.

Doporučuji do hodin matematiky zařazovat více nekonvexních a nepravidelných útvarů. Mohli by pracovat s jejich 3D modely nebo si je vytvářet v digitálním softwaru pro tvorbu těles. Při práci s modely by žáci zkoumali jejich vlastnosti a porovnávali by, v čem se tělesa odlišují a v čem jsou podobná.

Žákyně 7 a žákyně 13 vnímají zaoblené hrany jako hrany, což je důsledek neznalosti definice hrany. U žákyně 13 dochází, podobně jako u žáka 4, k porovnání s předchozím tělesem.

Žákyně 13 nevěděla, jak své tvrzení zdůvodnit, a tak se odkázala na předchozí těleso. Nerozlišuje vypouklé a prohnuté hrany, vnímá je stejně. Toto uvažování je chybné, protože v jednom případě se jedná o nekonvexní útvar a ve druhém o konvexní útvar.

Oba útvary mají jiný počet hran. Stejně jako u žáka 4, tak u žákyň 7 a 13 dochází k budování mylných představ kvůli nezkušenosti s těmito útvary. Pravděpodobně se s nimi nikdy nesetkali, a proto je klasifikují podobně.

TĚLESO 5

Těleso 5 na obrázku 115 nemá ani jednu stěnu. Stěna je definována jako mnohoúhelník. Mnohoúhelník je v Přehledu matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia definován takto:

„Mnohoúhelník s n vrcholy se nazývá n-úhelník."
(Odvárko & Kadleček, 2004, s. 173)

Tato definice není vhodná, protože nic neříká o vizuální podobě mnohoúhelníku. V Přehledu středoškolské matematiky je mnohoúhelník definován takto:

„Uzavřená lomená čára, jež leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá mnohoúhelník." (Polák, 2008, s. 448)

Tato definice je přesnější a pro žáky vhodnější, protože by mohli intuitivně pochopit, co je to uzavřená lomená čára. Žáci by mohli podle definice namalovat několik mnohoúhelníků. Došli by k tomu, že mnohoúhelníků je nekonečně mnoho. Domnívám se, že by se objevil žák, který by nakreslil nekonvexní mnohoúhelník, a tak by si mohli zavést nekonvexní útvary. Je vhodné zařadit takovou aktivitu do hodin, kdy by žáci kreslili útvary podle definice. Žáci se učí nejen novým tvarům a pojmům, ale učí se analyzovat text.

Žáci zdůvodňovali svá řešení následovně:

Žák 8: „To nemá vrcholy a má to sedm stěn."

Žák 11: „Je to celé oblé, ale má to jednu stěnu."

Žák 15: „Stěna je jedna. Celý to je jedna stěna, protože nemá vrcholy a je to celé zakulacené."

Žákyně 15: „Je to jedna velká stěna."

Žáci zdůvodnili řešení na základě vizuální podoby tělesa. Nedokázali své myšlenky podpořit jednoduchými argumenty, protože neznají definici stěny. Žáci chápou stěnu intuitivně, ale v geometrii nejsou schopni pojem vymezit. Ukazuje se, že každý žák vnímá stěnu jinak. Žák 8 vnímá stěnu jako ohraničenou plochu. Ohraničení jsou pro žáka zaoblení, což není správná myšlenka. Stěna je vymezena hranami, které těleso 5 na obrázku 115 nemá.

Žák 11, žák 15 a žákyně 15 chápou, že stěna musí být ohraničená a při absenci hran vnímá celé těleso jako jednu stěnu.

Z definice vyplývá, že stěna je mnohoúhelník, což je dvourozměrný útvar. Těleso je trojrozměrný útvar. Žáci mají vybudovanou představu, že stěna tělesa je trojrozměrný objekt, což není pravda. Nevnímají rozdíly mezi dvourozměrnými a trojrozměrnými objekty. Doporučuji, aby základní geometrické pojmy jako je například stěna tělesa, byly žákům jasně definovány. Každý žák má jiné geometrické uvažování a při intuitivním chápání geometrických pojmů si mohou vybudovat špatné představy.

2.5.14 Shrnutí výsledků z úlohy 7

Výsledky z úlohy 7 ukázaly, že žáci chápou základní geometrické pojmy intuitivně, protože je nemají jasně definované. To vede žáky k vytváření různých představ o těchto pojmech, a proto je každý vnímá jinak. Někteří žáci počítají vypouklé hrany jako hrany, někteří ne. Někteří počítají stěnu s dírou jako stěnu, někteří ne. Důsledkem může být jiná úroveň geometrického myšlení. Doporučuji, aby učitelé základní geometrické pojmy jasně definovali, a tak žákům sjednotili jejich představy. Na základě stejných představ mohou žáci budovat vztahy mezi těmito pojmy v tělesech a nebude docházet k chybným tvrzením. Ukazuje se, že žáci nemají zkušenosti s nekonvexními a nepravidelnými útvary. Nezkušenost způsobuje podobné vnímání těchto útvarů. Toto zjištění naznačuje, že výuka na základní škole klade důraz na pravidelná tělesa, což může omezit uvažování žáků a způsobit potíže při analýze složitějších objektů.

Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo získat vhled do geometrického uvažování žáků druhého stupně základní školy v oblasti geometrických těles. Výsledky výzkumu odhalily několik poznatků, na které by se měl brát zřetel ve výuce geometrie.

Výsledky výzkumu ukázaly, že žáci intuitivně rozumí základním geometrickým pojmům, jako jsou vrchol, hrana, stěna, podstava, plášť nebo síť. Pokud však tyto pojmy nejsou jasně definované, dochází k jejich rozdílnému chápání, což může vest k nesprávným představám o geometrických objektech. Například někteří žáci považují prohnuté hrany za hrany, zatímco jiní ne, nebo někteří považují stěnu s dírou za stěnu, zatímco jiní ne. Neznalost formálních definic vede k nesprávnému používání geometrické terminologie a zaměňování pojmů, jako jsou hrana a strana, roh a vrchol.

Vnímání geometrických těles je u žáků často intuitivní. Pří identifikaci těles se žáci rozhodují především na základě jeho vizuální podoby, jelikož nejsou schopni své myšlenky podpořit jednoduchými argumenty. Často zdůvodňují přirovnáním k předmětům každodenního života nebo k prototypům těles. Příkladem je vnímání hranolu jako kolmého tělesa s pravidelnou podstavou a hranami. To ukazuje, že žáci pracují v hodinách matematiky především s pravidelnými tělesy, a proto jim nekonvexní tělesa připadají divná a nepochopitelná.

Při kreslení těles do roviny jsou patrné rozdíly v úrovni geometrického uvažování. Když mají žáci za úkol dokreslit těleso zadané třemi hranami, vyskytují se v řešeních různá tělesa, což je způsobeno různými zkušenostmi žáků. Žáci mohou vnímat stejné těleso z různých úhlů pohledu. Někdo preferuje pohled shora, jiný z boku nebo zdola. Většina žáků dokáže těleso nakreslit, ale často nedodrží vztahy, které v tělesu platí jako například rovnoběžnost nebo kolmost hran, což poukazuje na rozdíly v jejich úrovni uvažování.

Výzkum ukázal, že žáci mají problémy s rozlišováním a přechodem mezi dvourozměrným a trojrozměrným prostorem. Oba prostory chápou intuitivně, ale geometricky jim nerozumí. Důsledkem je omezené vnímání vztahů mezi geometrickými objekty.

Žáci předpokládají, že vztahy v dvourozměrném prostoru, platí i v trojrozměrném prostoru. Myslí si, že když jsou úhlopříčky ve čtverci na sebe kolmé, pak všechny úhlopříčky v krychli jsou na sebe kolmé, protože krychli vnímají jako 3D čtverec.

Na základě těchto zjištění lze konstatovat, že se žáci seznamují s prostorovou geometrií příliš pozdě. Žáci se učí základní pojmy v rovině, a když přecházejí na prostorovou geometrii, nedokážou je aplikovat. Žáci nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost, a proto mají problémy s vnímáním vztahů mezi geometrickými objekty v prostoru. Učitelé by proto měli klást větší důraz na srovnávání a analýzu rozdílů mezi objekty v dvourozměrném a trojrozměrném prostoru. Například při výuce úhlopříček je vhodné ukázat, jaké vztahy platí pro úhlopříčky ve čtverci, a porovnat je s úhlopříčkami v krychli. Důležité je zařadit do výuky více práce s modely různých těles, včetně jejich manipulace a dbát na důslednost při kreslení těchto těles do roviny. Takto se u žáků rozvíjí geometrická představivost a větší porozumění vztahům v tělesech. Doporučuji do výuky zahrnout digitální software, ve kterém mohou žáci vytvářet a libovolně otáčet tělesa různých tvarů, což zabrání vzniku prototypických poloh těles.

Seznam použitých informačních zdrojů

Arnas, Y. A., & Aslan, A. G. D. (2010). Children's classification of geometric shapes. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *19*(1), 254-270.

Budínová, I. (2017). Vytváření představ základních geometrických útvarů u žáků prvního stupně základní školy. Učitel matematiky, 25(2), 65–82.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. *VA: National Council of Teachers of Mathematics, Reston*, 420–464.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and Teaching Geometry, K-12*, *1*, 16.

Dimla, R. B., & Soriano, D. M. (2019). Integration of Spatial Visualization Tasks to Enhance Students' Levels of Geometric Thinking following the Van Hiele Model: A Basis for the Development of a Definitive Guide in Geometry. *Religación: Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, *4*(17), 311-320.

Fuchs, E., & Zelendová, E. (2015). Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání–Matematika. *Proceedings*, 91.

Hiele, V. A. N. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. *National Council of Teachers of Mathematics, 1988*.
Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford University Press.

Kuřina, F. (1987). Začarovaný kruh školské geometrie. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *32*(5), 290-295.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2017). Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dostupné z https://msmt.gov.cz/file/41216_1_1/

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2013). Standardy pro základní vzdělávání: Matematika a její aplikace. Dostupné z http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/opatreni-ministra-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-kterym-se

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Prometheus.

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, *47*, 497–509.