Filosofická fakulta University Karlovy
katedra logiky

Některé sémantické metody v intuicionistické logice

Pavla Burdová

Vedoucí práce: RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

Praha 1998

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen pramenů, které cituji a uvádím v přiloženém seznamu použité literatury. Zároveň vyjadřuji svůj hluboký a upřímný vděk všem, kteří mi svým obdivuhodným přístupem k tvorbě této práce významně pomohli, především však panu RNDr. Vítězslavu Švejdarovi a mému choti Vláďovi.

V Praze 26. dubna 1998

Pavla Burdová

Obsah:

Úvod

Králíček: "Pú, myslíš, že v tomto vrcholu platí atom p?"
Pú:"Možná ano a možná taky ne. V atomech se jeden nevyzná."

volně citováno podle A.A. Milneho, Medvídek Pú

Stručně o intuicionistické logice

Logika jako taková byla původně součástí filosofie a studovala zákonitosti v myšlení a zákonitosti v procesu poznávání. Postupem času se logika jednak osamostatnila a předmět jejího zkoumání se stal bohatší a rozmanitější. Jeden ze směrů soudobé logiky jsou neklasické logiky. Klasická logika se vyznačuje tím, že výroky mohou nabývat právě dvou pravdivostních hodnot a při studování logického vyplývání se naprosto abstrahuje od konkrétního obsahu (smyslu) posuzovaných výroků. Oproti tomu pro neklasické logiky jsou charakteristické alternativními přístupy při vyhodnocování výroků. Některé logiky připouští více pravdivostních hodnot, jiné se při vyhodnocování formulí snaží zohlednit, o čem formule vypovídá. Mezi neklasické logiky můžeme řadit i intuicionistickou logiku, kterou se budeme zabývat v této práci.

Intuicionismu se jako jeden z prvních věnoval Brouwer na počátku dvacátého století, přičemž se orientoval převážně na intuicionismus v matematice. Logikům vyčítal především to, že mají tendenci nadřazovat logiku nad matematiku, kteroužto námitku můžeme považovat spíše za emocionální, ale mimo to jim vyčítal několik věcí odborných, především princip vyloučeného třetího, což už je pro nás velice zajímavé. Dovolím si zde použít příklad, který uvádí Van Dalen [Van Dalen, 1986] v této souvislosti. Jedná se o Goldbachovu doměnku, G, která říká, že každé sudé číslo je součet dvou prvočísel (např. 12=5+7). My sice můžeme pro každé konkrétní sudé číslo najít odpovídající prvočísla, ale současný stav matematických znalostí nám neumožňuje tuto větu potvrdit ani dokázat. Jak se tedy postavit k formuli $(G \vee \neg G)$? Kdybychom ji označili za pravdivou, měli bychom mít v rukou také nástroj, který by ukázal, který z členů této disjunkce platí a ukázat důkaz, že opravdu platí. Vzhledem k tomu, že nemáme nic podobného k dispozici, neměli bychom přijmout formuli $(G \vee \neg G)$ za pravdivou.

Po Brouwerovi se intuicionismu věnovali Glivenko a Kolmogorov, jejichž přístup byl formálnější. První z nich se věnoval výrokové logice, druhý predikátové logice. V roce 1928 Heyting nezávisle na nich formalizoval intuicionistickou predikátovou logiku. Velmi významný počin z hlediska intuicionistické logiky představoval Gentzenův systém přirozené dedukce a kalkulus sekventů, s kterými přišel v roce 1934 a které vystihly podstatu intuicionistické logiky mnohem lépe, než Hilbertova formalizace. Postupem doby se objevovaly různé návrhy na pojetí sémantiky v intuicionistické logice. Ve třicátých letech Tarski představil topologické interpretace a v šedesátých letech Kripke formuloval sémantiku opírající se modely, které představíme na nejbližších stranách této práce[1].

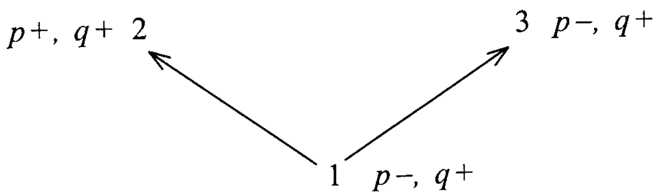
[1] Velice podobné modely zavedl v padesátých letech také Beth.

Kripkovským modelem (nebo jen modelem) budeme rozumět uspořádanou trojici $[W, \Vdash, \leq]$. W je množina bodů (někdy se říká světů, vrcholů), $\leq$ je relace uspořádání definovaná mezi prvky množiny W a $\Vdash$ je pravdivostní relace, která určuje splněnost / nesplněnost atomu či formule ve vrcholu. Vztah relace $\leq$ a relace $\Vdash$ je definován následujícím způsobem:

i) Když $a \Vdash p$ a $a \leq b$, pak $b \Vdash p$.
ii) Platí, že $a \Vdash \varphi \& \psi$ právě když $a \Vdash \varphi$ a zároveň $a \Vdash \psi$.
iii) Platí, že $a \Vdash \varphi \vee \psi$ právě když $a \Vdash \varphi$ nebo $a \Vdash \psi$.
iv) Platí, že $a \Vdash \neg\varphi$ právě když $\forall b\ [(b \geq a) \Rightarrow (b \nVdash \varphi)]$
v) Platí, že $a \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě když $\forall b\ [(b \geq a) \Rightarrow (b \Vdash \varphi \Rightarrow b \Vdash \psi)]$

Snadno lze ověřit, že i) platí i pro formule a ne jen pro atomy a také lze snadno dokázat, že $a \nVdash \neg A$ právě když $\exists b\ [(b \geq a)\ \&\ b \Vdash A]$. Pokud platí, že $a \Vdash p$, tak říkáme, že atom p platí ve vrcholu a, nebo také, že atom p je splněn ve vrcholu a.

Podívejme se na příklad kripkovského modelu:



Zde platí následující fakty:
$W = \{1, 2, 3\}$,
$(1 \leq 2)$ a $(1 \leq 3)$, ale neplatí, že $(2 \leq 3)$ ani $(3 \leq 2)$,
$1 \Vdash q,\ 2 \Vdash q,\ 3 \Vdash q$,
$1 \nVdash p,\ 3 \nVdash p,\ 2 \Vdash p$,
$1 \Vdash p \vee q$,
$2 \Vdash p \& q$,
$1 \nVdash p \& q,\ 3 \nVdash p \& q$,
$1 \Vdash p \rightarrow q,\ 1 \nVdash q \rightarrow p$,
$1 \nVdash \neg p,\ 2 \nVdash \neg p,\ 3 \Vdash \neg p$.

Prvkům množiny W budeme říkat vrcholy. Vrcholy, které nemají žádného následníka budeme zvát listy. Vrchol, který naopak nemá žádného předchůdce budeme zvát kořen. Časem uvidíme, že model může vypadat i mnohem komplikovaněji než by se zdálo na první pohled. V modelu například může být více kořenů nebo jeden vrchol může mít několik různých přímých předchůdců. A úplně na závěr této práce ukážeme, že pokud se omezíme na modely jednoatomových formulí, pak zjistíme, že přeci jen lze nalézt jistý řád v tom, jak mohou modely vypadat. Vrcholem hloubky n budeme rozumět takový vrchol, nad nímž nejdelší cesta má délku n.

Co je v práci rozebráno?

V práci se podíváme do světa intuicionistické logiky. Zjistíme že v intuicionistické logice nelze definovat logické spojky pomocí jiných logických spojek. Podíváme se, jak je to v intuicionistické logice s jednoatomovými formulemi, ukážeme, že je můžeme vyčerpávajícím způsobem zorganizovat. Také se budeme věnovat kripkovským modelům a uvidíme, že v některých případech lze vydatně zredukovat nosnou množinu kripkovského modelu. Předložíme nástroje, pomocí kterých poznáme, které prvky jsou v modelu jaksi "navíc" a tudíž je můžeme z modelu "vyškrtnout". Na závěr se soustředíme na jednoatomové modely a na to, jak to vypadá s jejich složitostí, když je maximálně redukujeme.

V práci je využito toho, že lze písmem rozlišit dvě implikace $\rightarrow$ a $\Rightarrow$. První z nich je používána jako implikace v rámci diskutovaných formulí, druhá jako prvek metajazyka, kterým si povídáme o této problematice. Při důkazech tvrzení o intuicionistické logice se řídíme pravidly klasické logiky. Písmena A, B, C, ... a χ, φ, ψ, ... představují formule, písmena p, q představují atomy.

KAPITOLA 1

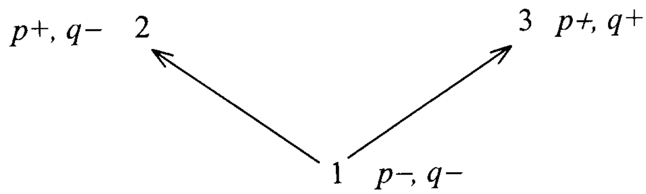
Vzájemná nedefinovatelnost logických spojek

V klasické logice je možné pozorovat ekvivalence, kde formule s jednou logickou spojkou lze napsat pomocí fomulí s jinými logickými spojkami. Například formule $A \rightarrow B$ je ekvivalentní formuli $\neg(\neg B \& A)$. V intuicionistické logice však takovéto ekvivalence pozorovat nemůžeme. Na následujících stranách ukážeme důkaz tohoto tvrzení. Kromě toho, že ukážeme, že to je pravda, poskytneme také čtenáři jakýsi úvod do sémantiky intuicionistické logiky.

Ještě před vyslovením hlavní věty této kapitoly zaveďme tuto formulaci: budeme říkat, že formule φ definuje množinu vrcholů w, pokud platí, že

$$a \Vdash \varphi \Leftrightarrow a \in w.$$

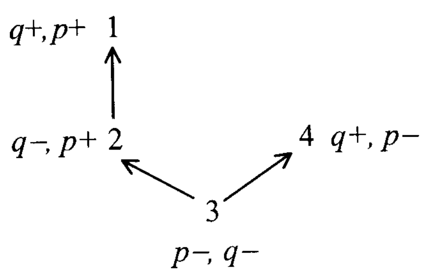
V následujícím obrázku atom p definuje množinu vrcholů $\{2,3\}$, atom q definuje množinu $\{3\}$. A protože platí, že $3 \Vdash p$ a zároveň platí $3 \Vdash q$, tak také platí, že formule $p \& q$ definuje množinu vrcholů $\{3\}$:



Věta 1: Žádná ze čtyř spojek &, $\vee$, $\neg$ a $\rightarrow$ není v intuicionistické logice definovatelná pomocí ostatních.

Důkaz: Pro každou spojku zvlášť najdeme kripkovský model, ve kterém formule s onou spojkou bude definovat jinou množinu vrcholů než jakákoli jiná formule φ, která onu spojku neobsahuje. To se bude dokazovat indukcí podle složitosti formule φ.

I. Model pro spojku "&":



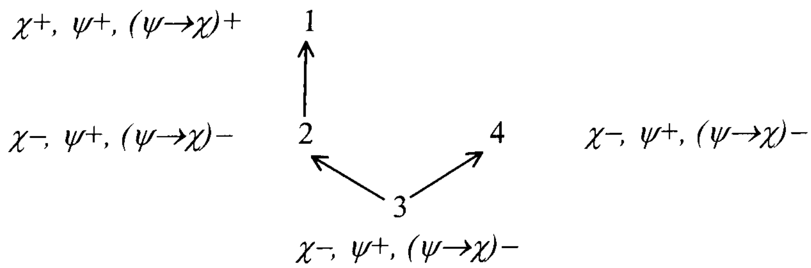
V tomto modelu platí následující fakty:

* $1 \Vdash p \& q$; $\forall i \neq 1$ $i \nVdash p \& q$, tedy formule $p \& q$ definuje množinu vrcholů $\{1\}$
* $1 \Vdash p$, $2 \Vdash p$; $\forall i \neq 1,2$ $i \nVdash p$, tedy p definuje $\{1,2\}$
* $1 \Vdash q$, $4 \Vdash q$; $\forall i \neq 1,4$ $i \nVdash q$, tedy q definuje $\{1,4\}$.

Nyní dokážeme, že pro libovolnou formuli φ sestavenou jen z atomů p, q a logických spojek $\rightarrow$, $\vee$, $\neg$ není pravda, že je splněna právě ve vrcholu 1 (tedy, že φ nedefinuje množinu $\{1\}$). Důkaz provedeme indukcí podle složitosti formule φ.

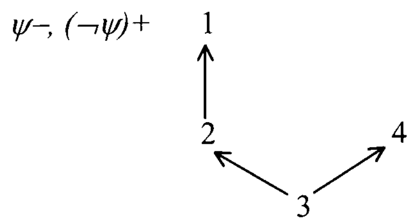
a) Atomy p a q definují jiné množiny než $\{1\}$.

b) Nechť φ má tvar "$\psi\rightarrow\chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.



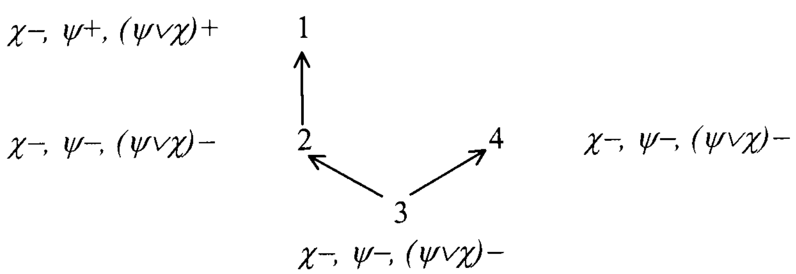
Dokazujeme sporem: předpokládáme, že $(\psi\rightarrow\chi)$ definuje $\{1\}$. Pak v ostatních vrcholech tato formule neplatí, což znamená, že pro ostatní vrcholy neplatí implikace, která říká, že pokud je ve vrcholu splněna formule ψ pak je v tomto vrcholu splněna i formule χ. V ostatních vrcholech tedy musí platit formule ψ a zároveň nesmí platit formule χ. Když tedy platí, že $2\Vdash\psi$, pak musí platit i $1\Vdash\psi$ a protože ve vrcholu 1 je splněna implikace $\psi\rightarrow\chi$, pak v tomto vrcholu musí být splněna i formule χ. Formule χ je tedy splněna právě ve vrcholu 1, což je spor s indukčím předpokladem.

c) Nechť φ má tvar "$\neg\psi$".



Kdybychom chtěli, aby $\neg\psi$ definovala $\{1\}$, pak by v ostatních vrcholech i různých od 1 muselo platit $i\nVdash\neg\psi$. Tedy by to muselo platit i ve vrcholu 2. Jestliže ale $2\nVdash\neg\psi$, pak musí existovat nějaký vrchol $j\geq 2$ takový, že $j\Vdash\psi$. Pro vrchol 1 ale platí, že $1\nVdash\psi$, pak tedy musí platit, že $2\Vdash\psi$, z čehož ale vyplývá, že i $1\Vdash\psi$ a to je ve sporu s $1\Vdash\neg\psi$.

d) Nechť φ má tvar "$\psi\vee\chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.



Kdyby $\psi \vee \chi$ definovala $\{1\}$, pak ohodnocení formulí ψ a χ, které by tomu odpovídalo by vedlo k tomu, že alespoň jedna z formulí ψ nebo χ by také definovala $\{1\}$, což je ve sporu s indukčním předpokladem, že ψ a χ nedefinují $\{1\}$.

II. Model pro spojku "$\neg$":

$$\begin{tikzcd} p-,\ \neg p+ \quad 1 & & 3 \quad p+,\ \neg p- \\ & 2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & p-, \neg p+ & \end{tikzcd}$$

V tomto modelu formule $\neg p$ definuje množinu $\{1\}$.
Tvrdíme, že pro libovolnou formuli φ, která je sestavena z atomu p pomocí spojek &, $\to$ a $\vee$ není pravda, že φ je splněna právě ve vrcholu 1 (tvrdíme tedy, že φ nedefinuje množinu $\{1\}$). Opět dokazujeme indukcí podle složitosti formule φ.

a) Atom p nedefinuje množinu $\{1\}$.

b) Nechť φ má tvar "$\psi \& \chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd} \psi+,\ \chi+,\ (\psi\&\chi)+ \quad 1 & & 3 \quad \psi+,\ \chi-,\ (\psi\&\chi)- \\ & 2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & \psi-,\ \chi-,\ (\psi\&\chi)- & \end{tikzcd}$$

Kdyby $\psi \& \chi$ definovala $\{1\}$, pak by i nejméně jedna z formulí definovala $\{1\}$, což by bylo ve sporu s indukčním předpokladem.

c) Nechť φ je "$\psi \to \chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd} \psi+,\ \chi+,\ (\psi\to\chi)+ \quad 1 & & 3 \quad \psi+,\ \chi-,\ (\psi\to\chi)- \\ & 2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & \psi+,\ \chi-,\ (\psi\to\chi)- & \end{tikzcd}$$

Zde podobnou úvahou jako u modelu I., případu b) dospějeme k tomu, že formule χ definuje $\{1\}$, což je ve sporu s indukčním předpokladem.

d) Nechť φ je "$\psi \vee \chi$".

$$\begin{tikzcd} \psi+,\ \chi-,\ (\psi\vee\chi)+ \quad 1 & & 3 \quad \psi-,\ \chi-,\ (\psi\vee\chi)- \\ & 2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & \psi-,\ \chi-,\ (\psi\vee\chi)- & \end{tikzcd}$$

Alespoň jedna z ψ, χ musí mít plus právě ve vrcholu 1, což je ve sporu s IP.

III. Model pro spojku "$\vee$":

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
p-,\ q+,\ (q\vee p)+ \quad 1 & & 3 \quad p+,\ q-,\ (q\vee p)+ \\
& 2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$p-,\ q-,\ (q\vee p)-$$

Formule $p\vee q$ definuje množinu vrcholů $\{1,3\}$.
Tvrdíme, že pro libovolnou formuli φ sestavenou z p, q pomocí spojek $\&$, $\to$, $\neg$, není pravda, že φ je splněna právě ve vrcholech 1 a 3 (φ nedefinuje množinu $\{1,3\}$).
Důkaz provedeme opět indukcí dle složitosti formule φ.

a) Atomy p a q nedefinují množinu $\{1,3\}$.

b) Nechť φ má tvar "$\neg\psi$" a pro ψ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\psi-,\ (\neg\psi)+ \quad 1 & & 3 \quad \psi-,\ (\neg\psi)+ \\
& 2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\psi-,\ (\neg\psi)-$$

Dokazujeme sporem a předpokládáme, že i formule $\neg\psi$ definuje množinu $\{1,3\}$. Pak by ale muselo platit, že $2\nVdash\neg\psi$, z čehož by vyplývalo, že $\exists i\geq 2$ takové, že $i\Vdash\psi$, což ale neplatí pro žádný z vrcholů 1, 2 a 3. Spor.

c) Nechť ψ má tvar "$\psi\&\chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\psi+,\ \chi+,\ (\psi\&\chi)+ \quad 1 & & 3 \quad \psi+,\ \chi+,\ (\psi\&\chi)+ \\
& 2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\psi+,\ \chi-,\ (\psi\&\chi)-$$

Kdyby "$\psi\&\chi$" byla splněna právě ve vrcholech 1 a 3, pak by i alespoň jedna formule z ψ, χ byla splněna právě ve vrcholech 1 a 3, což je ve sporu s IP.

d) Nechť φ má tvar "$\psi\to\chi$" a pro ψ, χ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\psi+,\ \chi+,\ (\psi\to\chi)+ \quad 1 & & 3 \quad \psi+,\ \chi+,\ (\psi\to\chi)+ \\
& 2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\psi+,\ \chi-,\ (\psi\to\chi)-$$

Nalezli jsme takové ohodnocení, které umožňuje, aby formule χ definovala množinu $\{1,3\}$, což je ve sporu s IP.

IV. Model pro spojku "$\to$":

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overset{p+,\ q+,\ (p\to q)+}{1} & \\
p-,\ q-,\ (p\to q)+ \quad 2 \arrow[ur] & & 3 \quad p+,\ q-,\ (p\to q)- \arrow[ul] \\
 & \underset{p-,\ q-,\ (p\to q)-}{4} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

V tomto modelu definuje formule "$p\to q$" množinu $\{1,2\}$. Atom p definuje množinu $\{1,3\}$ a atom q definuje množinu $\{1\}$.
Tvrdíme, že pro libovolnou formuli φ sestavenou z atomů p, q a spojek $\&$, $\vee$, $\neg$ platí, že nedefinuje množinu vrcholů $\{1,3\}$. Opět dokazujeme indukcí podle složitosti formule φ.

a) Žádný z atomů p a q nedefinuje množinu $\{1,2\}$.

b) Nechť φ je tvaru "$\neg\,\psi$" a pro ψ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overset{\neg\psi+,\ \psi-}{1} & \\
\neg\psi+,\ \psi- \quad 2 \arrow[ur] & & 3 \quad \neg\psi-,\ \psi- \arrow[ul] \\
 & \underset{\neg\psi-,\ \psi-}{4} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

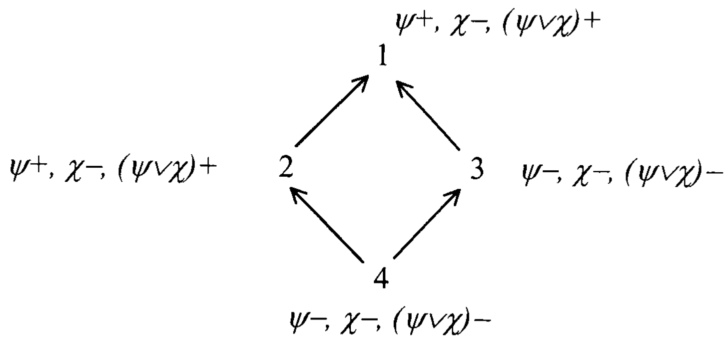
$4 \nVdash \neg\,\psi$ právě tehdy když $\exists i\ (i\geq 4\ \&\ i\Vdash \psi)$, což ale nelze splnit. Spor.

c) Nechť φ je tvaru "$\psi\&\chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overset{\psi+,\ \chi+,\ (\psi\&\chi)+}{1} & \\
\psi+,\ \chi+,\ (\psi\&\chi)+ \quad 2 \arrow[ur] & & 3 \quad \psi+,\ \chi-,\ (\psi\&\chi)- \arrow[ul] \\
 & \underset{\psi+,\ \chi-,\ (\psi\&\chi)-}{4} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Při tomto ohodnocení formule χ definuje množinu $\{1,2\}$, což je ve sporu s IP.

d) Nechť ψ má tvar " $\psi \vee \chi$" a pro ψ a χ již tvrzení platí.



Při tomto ohodnocení formule ψ definuje množinu vrcholů $\{1,2\}$, což je ve sporu s IP.

Konec důkazu Věty 1.

KAPITOLA 2

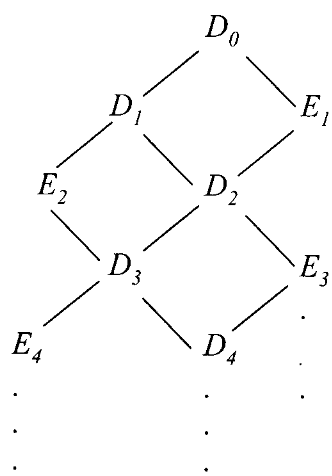
Rieger-Nishimurův diagram

V této kapitole se budeme věnovat jednoatomovým[2] formulím v intuicionistické logice. Ukážeme posloupnost, kterou Van Dalen uvádí pod jmény Riegera a Nishimury. O této posloupnosti dokážeme, že obsahuje všechny jednoatomové formule v intuicionistické logice a že obsahuje právě všechny, tedy, že žádné dvě z nich nejsou navzájem ekvivalentní.

Rieger-Nishimurův diagram je definován takto:
Mějme následující posloupnost jednoatomových formulí:

$$
\begin{aligned}
D_0 &\equiv \bot \\
E_0 &\equiv D_1 \equiv p \\
E_1 &\equiv \neg p \\
D_2 &\equiv p \vee \neg p \\
E_2 &\equiv \neg\neg p \\
&\vdots \\
D_{n+2} &\equiv E_{n+1} \vee E_n \qquad \text{(K1)} \\
E_{n+2} &\equiv E_{n+1} \rightarrow D_n \qquad \text{(K2)}
\end{aligned}
$$

Takto definované formule lze sestavit do následující struktury (Rieger-Nishimurův diagram):



V této struktuře platí, že formule, které jsou umístěny výše implikují formule, které jsou umístěny níže, pokud mezi nimi existuje jednosměrné spojení po hranách. Například pokud platí formule D_1, pak platí formule E_3. Pokud platí formule E_1, pak platí i formule D_2 a všechny, které jsou pod D_2, ale neplatí formule E_2. Obecněji řečeno,

[2] Jednoatomová formule je taková formule, ve které se vyskytuje kromě logických spojek pouze jediný atom.

pokud platí nějaká formule D_n pak platí všechny, které jsou níže než ona. Pokud platí nějaká E_n pak kromě E_{n+1} platí také všechny formule, které jsou v tomto diagramu umístěny níže než E_n. V tomto způsobu zachycení vztahů mezi členy posloupnosti tedy můžeme spatřovat uspořádání (ve smyslu relace uspořádání). Ve smyslu tohoto uspořádání pak nějaká formule A je větší než nějaká formule B, pokud platí, že $A \to B$. Pak můžeme v rámci tohoto uspořádání hovořit také o supremech a infimech. V dalším textu ukážeme, že konjunkce dvou formulí z této posloupnosti je ekvivalentní s jejich supremem a disjunkce dvou formulí je ekvivalentní s jejich infimem,

Z prvních dvou ekvivalencí, které vypovídají obecně o vztahu mezi formulemi v diagramu navzájem ((K1) a (K2)), můžeme odvodit i některá další "pravidla" pro zacházení s formulemi:

z (K1) plyne:	$E_n \to D_{n+2}$	(K3)
	$E_{n+1} \to D_{n+2}$	(K4)
	$E_n \to D_{n+1}$	(K5)[3]
z (K2) plyne:	$D_n \to E_{n+2}$	(K6)

Pomocí (K1) až (K6) můžeme dokázat některá další tvrzení o vztazích mezi formulemi v diagramu. Jednak dokážeme to co jsme výše řekli o supremech a infimech v tomto uspořádání. K tomu potřebujeme ověřit především tyto vztahy:

$$D_n \vee E_n \equiv D_{n+1} \qquad \text{(A)}$$
$$D_{n+1} \mathbin{\&} E_{n+1} \equiv D_n \qquad \text{(B)}$$
$$E_{n+1} \mathbin{\&} E_{n+2} \equiv D_n \qquad \text{(C)}$$

Vedle toho musíme ověřit ještě jiné vztahy, jejichž platnost využijeme při důkazu skutečnosti, že každá jednoatomová formule intuicionistické logiky je ekvivalentní s jednou z formulí v této posloupnosti. Tyto vztahy vypadají takto:

$$D_{n+1} \to D_n \equiv E_{n+1} \qquad \text{(D)}$$
$$E_n \to D_n \equiv E_{n+1} \qquad \text{(E)}$$
$$D_n \to E_n \equiv E_n \qquad \text{(F)}$$

Věta 2A: Mezi členy Rieger-Nishimurovy posloupnosti platí následující ekvivalence:

$$D_n \vee E_n \equiv D_{n+1} \qquad \text{(A)}$$
$$D_{n+1} \mathbin{\&} E_{n+1} \equiv D_n \qquad \text{(B)}$$
$$E_{n+1} \mathbin{\&} E_{n+2} \equiv D_n \qquad \text{(C)}$$

Důkaz: Každá z těchto ekvivalencí je vlastně konjunkcí tří implikací. Postupovat budeme tedy tak, že si rozepíšeme tyto ekvivalence na implikace a tyto implikace dokážeme zároveň indukcí podle n.

[3] (K5) je jednodušeji vyjádřený vztah (K4).

Každou z ekvivalencí (A) až (C) si napišme jako konjunkci tří implikací:

$D_n \to D_{n+1}$	(A1)	$D_n \to D_{n+1}$	(B1)
$E_n \to D_{n+1}$	(A2)	$D_n \to E_{n+1}$	(B2)
$D_{n+1} \to D_n \vee E_n$	(A3)	$D_{n+1} \,\&\, E_{n+1} \to D_n$	(B3)

$D_n \to E_{n+1}$ (C1)

$D_n \to E_{n+2}$ (C2)

$E_{n+1} \,\&\, E_{n+1} \to D_n$ (C3)

Vidíme, že (A1)≡(B1) a (B2)≡(C1), stačí, když dokážeme jedno z těch tvrzení, která jsou navzájem ekvivalentní (bez použití toho druhého, tedy vlastně sama sebe). Také si všimněme, že implikace (A2) je totožná s (K5) a implikace (C2) je totožná s (*K*6). Vyplývají přímo z definice posloupnosti a nemusíme je tedy dokazovat.

Snadno lze dokázat, že tyto implikace platí pro n=0, n=1 a n=2. Souběžnou indukcí dokážeme, že pokud tyto implikace platí pro n, pak platí i pro $n+1$.

Důkaz implikace (A1) (tedy i (B1)):
Indukční předpoklad zní: $D_n \to D_{n+1}$ a my chceme dokázat, že: $D_{n+1} \to D_{n+2}$. Předpokládejme, že platí D_{n+1}. Dle (A3) víme, že $D_{n+1} \to D_n \vee E_n$. Platí tedy i disjunkce $(D_n \vee E_n)$. Když platí díky E_n, pak dle (K3) platí i D_{n+2}. Když disjunkce platí díky D_n, pak dle (B2) odvodíme E_{n+1} a dle (K4) odvodíme D_{n+2}. Z předpokladu D_{n+1} jsme odvodili D_{n+2}, tedy platí implikace (A1) i (B1).

Důkaz implikace (A3):
Indukční předpoklad zní: $D_{n+1} \to D_n \vee E_n$. Chceme odvodit $D_{n+2} \to D_{n+1} \vee E_{n+1}$. Z předpokladu, že platí D_{n+2} dle definice posloupnosti plyne disjunkce $(E_{n+1} \vee E_n)$. Je-li tato disjunkce splněna díky E_{n+1}, pak je splněna i disjunkce, ke které chceme dospět. Je-li disjunkce $E_{n+1} \vee E_n$ splněna díky E_n, pak z (K5) plyne D_{n+1} a je tedy splněna disjunkce, ke které chceme dospět. Tedy platí (A3), tedy platí (A).

Důkaz implikace (C3):
Chceme dokázat, že $E_{n+1} \,\&\, E_{n+2} \to D_n$. Jestliže dle (K2) napíšeme E_{n+2} jako $(E_{n+1} \to D_n)$, pak dokazujeme implikaci $[E_{n+1} \,\&\, (E_{n+1} \to D_n) \to D_n]$, která zřejmě platí.

Důkaz implikace (B3):
Indukční předpoklad zní: $D_{n+1} \,\&\, E_{n+1} \to D_n$, chceme odvodit $D_{n+2} \,\&\, E_{n+2} \to D_{n+1}$. Když D_{n+2} a E_{n+2} napíšeme pomocí definice, tak dokazujeme implikaci:
$[(E_{n+1} \vee E_n) \,\&(E_{n+1} \to D_n)] \to D_n$, která zřejmě platí.

Důkaz implikace (B2*)* (a tedy i (C1)):

Indukční předpoklad je: $D_n \rightarrow E_{n+1}$, chceme dokázat $D_{n+1} \rightarrow E_{n+2}$. D_{n+1} si můžeme rozepsat podle (A) jako $(D_n \vee E_n)$ a E_{n+2} můžeme napsat pomocí definice, takže nás zajímá implikace: $(D_n \vee E_n) \rightarrow (E_{n+1} \rightarrow D_n)$. Když v antecendtu platí D_n, tak platí i succedent a tedy i celá implikace, když platí E_n, tak dle (K5) platí i D_{n+1} a z toho a z předního členu succedentu (E_{n+1}) podle (B3) vyplývá D_n, takže platí celá implikace.

Konec důkazu Věty 2A.

Věta 2B: Mezi členy Rieger-Nishimurovy posloupnosti platí následující ekvivalence:

$$D_{n+1} \rightarrow D_n \equiv E_{n+1} \qquad \text{(D)}$$
$$E_n \rightarrow D_n \equiv E_{n+1} \qquad \text{(E)}$$
$$D_n \rightarrow E_n \equiv E_n \qquad \text{(F)}$$

Důkaz: Každou z těchto ekvivalencí dokážeme zvláště, přičemž využijeme některé ekvivalence a implikace, které jsme dokázali v předchozí větě.

Důkaz implikace (D), která zní: $D_{n+1} \rightarrow D_n \equiv E_{n+1}$.
Snadno lze ukázat, že pro n=0 tato implikace platí.
Indukční předpoklad je: $D_{n+1} \rightarrow D_n \equiv E_{n+1}$ a my chceme dokázat ekvivalenci $[D_{n+2} \rightarrow D_{n+1}] \equiv E_{n+2}$. Důkaz implikace „$\leftarrow$": Předpokládáme, že platí E_{n+2} a D_{n+2} a chceme odvodit D_{n+1}, což vyplývá z (B). Důkaz implikace „$\rightarrow$": Rozepišme si D_{n+2} a E_{n+2} podle definice a D_{n+1} podle (A):

$$[(E_{n+1} \vee E_n) \rightarrow (D_n \vee E_n)] \rightarrow (E_{n+1} \rightarrow D_n).$$

Když chceme dokázat tuto implikaci, předpokládáme, že platí antecedent (hranatá závorka) a přední člen succedentu (E_{n+1}) a chceme odvodit zadní člen succedentu (D_n). Když platí E_{n+1}, platí tedy přední člen v hranaté závorce a tedy platí i zadní člen hranaté závorky $(D_n \vee E_n)$. Když tato disjunkce platí díky D_n, tak platí to, co jsme chtěli odvodit. Když tato disjunkce platí díky E_n, tak dle (A2) platí i D_{n+1}. A dle (B3) platí $(D_{n+1} \,\&\, E_{n+1}) \rightarrow D_n$, což je to, co jsme chtěli odvodit.

Důkaz implikace (E), která zní: $E_n \rightarrow D_n \equiv E_{n+1}$.
Snadno lze ukázat, že pro n=0 tato implikace platí.
Indukční předpoklad je: $E_n \rightarrow D_n \equiv E_{n+1}$. A my chceme s využitím platnosti IP odvodit $E_{n+1} \rightarrow D_{n+1} \equiv E_{n+2}$. Formuli E_{n+2} si můžeme rozepsat podle definice jako $E_{n+1} \rightarrow D_n$ a chceme tedy ukázat, že platí ekvivalence: $E_{n+1} \rightarrow D_{n+1} \equiv E_{n+1} \rightarrow D_n$. Nejprve dokážeme implikaci $(E_{n+1} \rightarrow D_{n+1}) \leftarrow (E_{n+1} \rightarrow D_n)$: Předpokládáme, že platí antecedent a první člen succedentu a chceme odvodit zadní člen succedentu (E_{n+1}). Když tedy platí $(E_{n+1} \rightarrow D_n)$ a E_{n+1} můžeme odvodit D_n. Z toho a z (A1) odvodíme D_{n+1}, což jsme chtěli. Důkaz pro obrácenou implikaci $(E_{n+1} \rightarrow D_{n+1}) \rightarrow (E_{n+1} \rightarrow D_n)$ provedeme analogickým postupem: nechť platí $(E_{n+1} \rightarrow D_{n+1})$ a E_{n+1}. Můžeme odvodit D_{n+1}, což si můžeme dle (A) rozepsat jako $(D_n \vee E_n)$. IP zní $E_{n+1} \equiv E_n \rightarrow D_n$ a předpokládáme, že platí E_{n+1}. Můžeme tedy uvažovat, že platí zároveň $(D_n \vee E_n)$ a $(E_n \rightarrow D_n)$. Vzhledem k tomu, že platí disjunkce, tak buď platí to, co jsme chtěli odvodit tedy D_n nebo platí E_n a s použitím implikace $(E_n \rightarrow D_n)$ opět odvodíme to, co jsme potřebovali.

Důkaz implikace (F), která zní: $D_n \to E_n \equiv E_n$.
Důkaz provedeme indukcí podle n. Protože budeme chtít, aby indukční předpoklad zněl $D_{n+1} \to E_{n+1} \equiv E_{n+1}$ a my dokazovali $D_{n+2} \to E_{n+2} \equiv E_{n+2}$, dokážeme tvrzení nejprve pro n=0 a pro n=1. Nechť n=0. pak $D_0 \to E_0 \equiv \bot \to p \equiv \top$. Nechť n=1, pak $D_1 \to E_1 \equiv p \to \neg p \equiv \neg p \equiv E_1$.
Indukční předpoklad tvrdí: $D_{n+1} \to E_{n+1} \equiv E_{n+1}$ a my chceme odvodit, že platí $D_{n+2} \to E_{n+2} \equiv E_{n+2}$. Postupně upravíme levou stranu implikace:
$D_{n+2} \to E_{n+2} \equiv (E_{n+1} \vee E_n) \to E_{n+2} \equiv (E_{n+1} \to E_{n+2})$ & $(E_n \to E_{n+2})$, kde druhý člen konjunkce je $\top$, takže se můžeme zabývat jen prvním členem.
$(E_{n+1} \to E_{n+2}) \equiv E_{n+1} \to (E_{n+1} \to D_n) \equiv (E_{n+1} \to D_n)$, což je podle definice ekvivalentní s E_{n+2}, což jsme chtěli ovodit.

Konec důkazu Věty 2B.

Nyní, když máme zmapovány poměry mezi formulemi v tomto diagramu ukážeme, že každá formule φ sestavená z jednoho atomu a logických spojek je ekvivalentní s jednou z formulí v digramu. Důkaz provedeme indukcí podle složitosti formule φ. Všimněme si v tomto důkazu situace, kdy ukazujeme případ, že φ je konjunkce (resp. disjunkce) dvou členů posloupnosti. Pak totiž dojdeme k závěru, že φ je ekvivalentní se supremem (resp. infimem) těchto dvou členů posloupnosti.

Věta 3: Pro každou formuli φ, sestavenou z jednoho atomu a &, $\to$, $\vee$ a $\neg$ existuje v našem diagramu vrchol D_i nebo E_i takový, že $D_i \equiv \varphi$ (resp. $E_i \equiv \varphi$).

Důkaz: bude proveden indukcí podle složitosti formule φ.

I. Nechť $\varphi \equiv \boldsymbol{p}$. Pak tvrzení platí, neboť $p \equiv D_1$.

II. Nechť $\varphi \equiv A \vee \boldsymbol{B}$ a pro A a B již tvrzení platí, tedy platí následující dvě disjunkce:
$(A \equiv D_j) \vee (A \equiv E_j)$
$(B \equiv D_k) \vee (B \equiv E_k)$

Vzhledem k tomu, že spojka pro disjunkci je symetrická, stačí, když rozebereme tři případy. Formule φ může mít tvar buď $(D_j \vee D_k)$ nebo $(D_j \vee E_k)$ a nebo $(E_j \vee E_k)$.

Když $\varphi \equiv D_j \vee D_k$, tak lze zkoumat zvlášť dvě možnosti:
i. Pokud $j=k$, pak $\varphi \equiv D_j \vee D_j$, tedy $\varphi \equiv D_j$
ii. Pokud $j< k$, pak $\varphi \equiv D_j \vee D_k$, tedy $\varphi \equiv D_k$:
Důkaz implikace "$\leftarrow$" je jednoduchý.
Důkaz implikace $D_j \vee D_k \to D_k$. Když platí D_k pak platí D_k.. Když platí D_j, tak dle (A1) platí i D_{j+1} a opakovaným použitím implikace (A1) se dostaneme opět k D_k, což jsme chtěli odvodit.

Když $\varphi \equiv E_j \vee E_k$ pak mohou nastat tři případy:
i. Pokud $j=k$, pak $\varphi \equiv E_k$.
ii. Pokud $j+1=k$, pak $\varphi \equiv E_j \vee E_{j+1}$ a z definice, že $\varphi \equiv D_{j+1}$.

iii. Pokud j+1< k, pak $\varphi \equiv E_j \vee E_k$. Dokažme, že pak $E_j \vee E_k \equiv E_k$. Platnost implikace "←" je zřejmá. Důkaz implikace "→": Pokud platí E_k, je situace vyřešena. Pokud platí E_j, pak postupnou aplikací tautologií ukážeme, že platí E_k ($E_j \rightarrow D_{j+1} \ldots D_{k-1} \rightarrow E_k$).

Když $\varphi \equiv D_j \vee E_k$, tak se opět podívejme zvláště na různé vztahy mezi j a k.
i. Pokud j=k, pak $D_j \vee E_j \equiv D_{j+1}$ (to vyplývá z (A))
ii. Pokud j<k, potom $\varphi \equiv D_j \vee E_k$. Ukažme, že v tomto případě $D_j \vee E_k \equiv E_k$.
Platnost implikace "←" je zřejmá. Důkaz implikace "→": pokud v succedentu platí E_k, pak je jasné, že platí i antecedent E_k. Pokud platí D_j, pak buď přímo (pro $j+1 = k$) nebo potřebným počtem kroků (pro j+1< k) odvodíme, že E_k.
iii. Pokud j>k, tak $\varphi \equiv D_j \vee E_k$. Ukažme, že pak $D_j \vee E_k \equiv D_j$. Implikace "←" je zřejmá. Důkaz implikace "→": pokud platí D_j, pak je vše jasné. Pokud platí E_k, pak opět postupnou aplikací tautologií $E_k \rightarrow D_{k+1} \ldots D_{j-1} \rightarrow D_j$ dokážeme, že platí i D_j, což jsme chtěli dokázat.

III. Nechť $\varphi \equiv \neg A$ a pro A již tvrzení platí.
Ukážeme, že od jistého vrcholu je negace příslušné formule spor.

Když $A \equiv D_0$, tak $\neg A \equiv \top$
Když $A \equiv D_1$, tak $\neg A \equiv E_1$
Když $A \equiv E_1$, tak $\neg A \equiv E_2$
Když $A \equiv E_2$, tak $\neg A \equiv E_1$
Když $A \equiv D_2$, tak $\neg A \equiv \neg (p \vee \neg p) \equiv \neg p \ \& \ \neg\neg p \equiv \bot$

Pokud $A \equiv D_i$, pak pro $i \geq 2$ platí, že $\neg A \equiv \bot$.
Implikace "←" je jasná. Dokažme opačnou implikaci "→". Víme, že ($D_{i-1} \rightarrow D_i$), z čehož plyne, že ($\neg D_i \rightarrow \neg D_{i-1}$). Opakováním této úvahy dospějeme k tomu, že $\neg D_3 \rightarrow \neg D_2$. A když budeme předpokládat, že platí antecedent úplně první implikace $\neg D_i$, tak můžeme odvodit, že platí $\neg D_2$. Víme ale, že $\neg D_2 \rightarrow \bot$.

Pokud $A \equiv E_i$, a i>2, pak $\neg A \equiv \neg E_i$.
i. Když i=3, tak $\neg A \equiv \neg E_3$. Když $\neg E_3$ a zároveň dle (B2) ($D_2 \rightarrow E_3$), tedy ($\neg E_3 \rightarrow \neg D_2$), tak můžeme odvodit $\neg D_2$, z čehož plyne spor.
ii. Když i>3, tak postupnou aplikací implikací odvodíme spor
($\neg E_i \rightarrow \neg D_{i-1} \ldots \neg D_3 \rightarrow \neg D_2 \rightarrow \bot$)

IV. Nechť $\varphi \equiv \boldsymbol{A} \ \& \ \boldsymbol{B}$ a pro A, B již tvrzení platí, tedy platí následující disjunkce:
$(A \equiv D_j) \vee (A \equiv E_j)$
$(B \equiv D_k) \vee (B \equiv E_k)$

Pak mohou nastat tři možnosti, jak vypadá φ. Buď $\varphi \equiv D_j \ \& \ D_k$, nebo $\varphi \equiv D_j \ \& \ E_k$ a nebo $\varphi \equiv E_j \ \& \ E_k$.

Když $\varphi \equiv D_j \ \& \ D_k$, tak rozeberme zvláště tyto dva případy:
i. Pokud $j = k$, pak $\varphi \equiv D_k$.
ii. Pokud $j < k$, pak $\varphi \equiv D_j$ a my chceme ukázat, že $D_j \ \& \ D_k \equiv D_j$. Implikace "→" je zřejmá. Důkaz implikace "←": Platí, že $D_j \rightarrow D_j$. Zbývá dokázat, že $D_j \rightarrow D_k$, což lze snadno dokázat postupnou aplikací implikací $D_n \rightarrow D_{n+1}$.

Když $\varphi \equiv D_j$ & E_k. Pak musíme prozkoumat zvláště všechny případu vztahu j a k.
i. Pokud $j = k$, pak E_j & $D_j \equiv D_{j-1}$ (z definice).
ii. Pokud $j + 1 = k$, pak D_j & $E_k \equiv D_j$. Implikace "$\rightarrow$" je zřejmá. Implikace "$\leftarrow$": pokud platí D_j, tak platí D_j, zbývá ukázat, že pak platí i E_k, což ovšem platí podle (B2)
iii. Pokud j+1< k, tak: D_j & $E_k \equiv D_j$. Implikace "$\rightarrow$" je jasná. Implikace "$\leftarrow$" je také zřejmá, neboť $D_j \rightarrow D_j$ a zároveň $D_j \rightarrow D_{j+1} \ldots D_{k-1} \rightarrow E_k$.
iv. Pokud $k<j$, tak D_j & $E_k \equiv E_k$. Implikace "$\rightarrow$" je evidentní. Implikace "$\leftarrow$": Platí, že $E_k \rightarrow E_k$ a dále když $k+1=j$, tak využijeme toho, že $E_k \rightarrow D_j$. Když $k+1<j$, tak D_j odvodíme postupně ($E_k \rightarrow D_{k+1} \ldots D_{j-1} \rightarrow D_j$).

Když $\varphi \equiv E_j$ & E_k, tak se opět podívejme zvláště na tři různé případy:
i. Pokud $j=k$, tak je evidentní, že $\varphi \equiv E_k$.
ii. Pokud $j+1=k$, tak platí, že E_j& $E_{j-1} \equiv D_{j-2}$ (podle (C)).
iii. Pokud $j+1<k$, tak ukažme, že E_j & $E_k \equiv E_j$. Implikace "$\rightarrow$" je zřejmá. Implikace "$\leftarrow$" je také jednoduchá, neboť $E_j \rightarrow E_j$ a zároveň postupným použitím dokázaných implikací ukážeme, že platí i $E_j \rightarrow E_k$ ($E_j \rightarrow D_{j+1} \ldots D_{k-1} \rightarrow E_k$).

V. Nechť $\varphi \equiv \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ a pro A, B již tvrzení platí, tedy platí následující disjunkce:
$(A \equiv D_j) \vee (A \equiv E_j)$
$(B \equiv D_k) \vee (B \equiv E_k)$

Mohou nastat tedy čtyři případy, jak vypadá formule φ. Buď $\varphi \equiv D_j \rightarrow D_k$, nebo $\varphi \equiv D_j \rightarrow E_k$, nebo $\varphi \equiv E_j \rightarrow D_k$ a nebo $\varphi \equiv E_j \rightarrow E_k$. My se ale budeme odděleně zabývat pouze dvěma různými případy podle toho, zda v succedentu stojí D_k nebo E_k. Budeme tedy zkoumat, jak situace vypadá, když $\varphi \equiv A_j \rightarrow D_k$ a když $\varphi \equiv A_j \rightarrow E_k$.

Když tedy $\varphi \equiv A_j \rightarrow D_k$, tak může situace vypadat různě podle toho, v jakém poměru jsou vůči sobě j a k.
i. Pokud $j<k$, tak vhodným postupným použitím implikací (A1) a (A2) z A_j odvodíme D_k.
ii. Pokud $j=k$, tak buď $A=D$ a pak $D_k \rightarrow D_k \equiv \top$, nebo $A=E$ a pak $E_k \rightarrow D_k \equiv E_{k+1}$ (podle(E))
iii. Pokud $j>k$, tak $A_j \rightarrow D_k \equiv D_k$, kromě případu, kdy $\varphi \equiv E_{j+1} \rightarrow D_j$ (pak totiž $\varphi \equiv E_{j+2}$, což vyplývá z definice). Z (D) víme, že $D_{j+1} \rightarrow D_j \equiv D_j$, chceme tedy dokázat ekvivalenci $D_{j+1+x} \rightarrow D_j \equiv D_j$ (respektive $E_{j+2+x} \rightarrow D_j \equiv D_j$). Implikace "$\leftarrow$" je jasná. Důkaz implikace "$\rightarrow$" : Předpokládáme, že platí $D_{j+1+x} \rightarrow \mathrm{D_j}$, dále víme že $D_{j+1} \rightarrow D_{j+1+x}$ a z těchto dvou předpokladů můžeme odvodit implikaci $D_{j+1} \rightarrow D_j$, o které dle (D) víme, že je ekvivalentní s D_j. Pro případ, že dokazujeme ekvivalenci $E_{j+2+x} \rightarrow D_j \equiv D_j$ je implikace "$\leftarrow$" také jasná a obrácená implikace se dokáže analogickým způsobem z předpokladů $E_{j+2+x} \rightarrow D_j$ a $D_{j+1} \rightarrow E_{j+2+x}$.

Když naopak $\varphi \equiv A_j \rightarrow E_k$, tak se opět podívejme na tři různé případy:
i. Pokud $j<k$, tak buď dokazujeme $D_{k-x} \rightarrow E_k \equiv E_k$ (tuto ekvivalenci dokážeme postupným vhodným použitím ekvivalencí (A1) a (B2)), nebo dokazujeme, že $E_{k-1-x} \rightarrow E_k \equiv E_k$ (implikace "$\leftarrow$" je jasná a obrácenou implikaci dokážeme postupným vhodným použitím implikací (A2), (A1) a (B2)) a nebo dokazujeme že $E_{k-1} \rightarrow E_k \equiv E_k$. Tato implikace popisuje obecně poměr mezi stejnými formulemi jako ekvivalence $E_{n+1} \rightarrow E_{n+2} \equiv E_{n+2}$ a dokázat ji tedy můžeme tak, že: implikace "$\leftarrow$" je evidentní a "$\rightarrow$"

tak, že si rozepíšeme E_{n+2} podle definice jako $(E_{n+1} \to D_n)$ a dokazujeme tedy implikaci $[E_{n+1} \to (E_{n+1} \to D_n)] \to (E_{n+1} \to D_n)$. Antecedent si můžeme napsat jako $[(E_{n+1} \,\&\, E_{n+1}) \to D_n]$ a vidíme, že dokazovaná implikace platí.

ii. pokud $j=k$, tak buď $E_k \to E_k \equiv \top$, nebo $D_k \to E_k \equiv E_k$ (podle (F)).

iii. Pokud $j>k$, tak má smysl uvažovat tři případy. Když hledáme ekvivalent k formuli $E_{n+1} \to E_n$, zjistíme, že je to formule E_n. Pokud platí E_n, pak je vidět, že platí ona implikace. Ukázat, že z platnosti této implikace plyne platnost E_n je poněkud složitější: napišme si implikaci jako $E_{n+3} \to E_{n+2}$ a ukažme že z ní vyplývá E_{n+2}.

Podle definice si můžeme E_{n+2} napsat jako $E_{n+1} \to D_n$. Pak dokazujeme následující implikaci: $E_{n+3} \to (E_{n+1} \to D_n) \Rightarrow (E_{n+1} \to D_n)$. Předpokládáme tedy, že platí antecedent a první člen succedentu. Pokud platí E_{n+1}, tak platí i E_{n+3} (neboť $E_{n+1} \to D_{n+2}$ a $D_{n+2} \to E_{n+3}$) tedy platí i $(E_{n+1} \to D_n)$, což jsme chtěli dokázat.

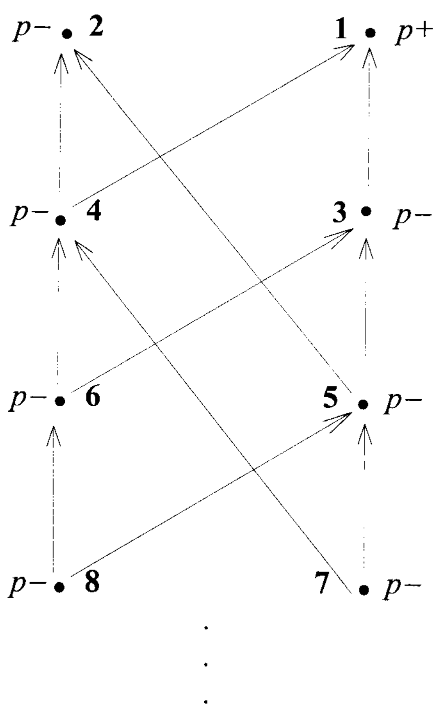
Když hledáme ekvivalent k formuli $D_{n+1} \to E_n$, opět zjistíme, že je to formule E_n. Dříve jsme ukázali, že formule E_n je ekvivalentní s formulí $D_n \to E_n$. Nyní tedy chceme dokázat: $D_{n+1} \to (D_n \to E_n) \Rightarrow (D_n \to E_n)$. Předpokládáme–li, že platí první člen succedentu D_n pak můžeme odvodit, že platí D_{n+1}. Když ale platí antecedent a jeho první člen, musí platit i druhý člen, tedy to, co jsme chtěli dokázat.

Když hledáme ekvivalent k formuli $D_{n+x} \to E_n$ nebo $E_{n+x} \to E_n$, kde $x>1$ pak je úvaha obdobná jako v případě, kdy jsme hledali ekvivalent k formulím $D_{n+x} \to D_n$ nebo $E_{n+x} \to D_n$, kde $x>1$.

Konec důkazu věty 3.

Na závěr této kapitoly ukažme, že všechny formule v R–N diagramu jsou navzájem neekvivalentní. To provedeme tak, že ukážeme, že každá z těchto formulí definuje jinou množinu vrcholů v modelu, kterému budeme říkat univerzální.

Věta 4: Každý člen posloupnosti R–N definuje v následujícím modelu jinou množinu vrcholů.



Důkaz:

D_0 definuje prázdnou množinu vrcholů.
D_1 definuje množinu $\{1\}$.
D_2 definuje množinu $\{1, 2\}$.
D_3 definuje množinu $\{1, 2, 3\}$.

.
.
.

E_0 definuje $\{1\}$.
E_1 definuje množinu $\{2\}$.
E_2 definuje množinu $\{1, 3\}$.
E_3 definuje množinu $\{1, 2, 4\}$.
E_4 definuje množinu $\{1, 2, 3, 5\}$.
E_5 definuje množinu $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

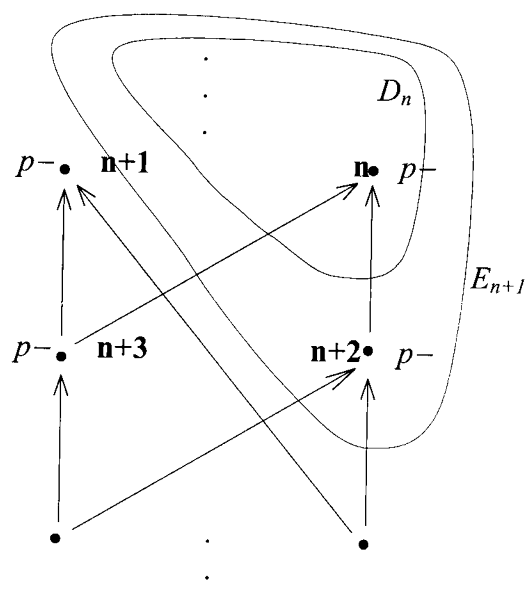
.
.
.

Když se pokoušíme nalézt množinu vrcholů, kterou definuje příslušná formule, zdá se, že se vyskytují jisté pravidelnosti.

Ukažme, že formule D_n definuje množinu vrcholů $\{1, ..., n\}$ a že formule E_n definuje množinu vrcholů $\{1, ..., n-1, n+1\}$. Důkazy provedeme indukcí podle n.

Když si uvědomíme, že $D_{n+2} \equiv E_{n+1} \vee E_n$, tak stačí ukázat, jaké je sjednocení množin, které definují formule E_{n+1} a E_n. Formule E_{n+1} definuje množinu $\{1, ..., n, n+2\}$, formule E_n definuje množinu $\{1, ..., n-1, n+1\}$ a jejich sjednocení tudíž je množina $\{1, ..., n+2\}$, což jsme chtěli dokázat.

Formuli E_{n+2} si můžeme podle definice napsat jako $E_{n+1} \to D_n$. Tato formule tedy definuje množinu vrcholů $\{x;\ x \Vdash E_{n+1} \Rightarrow x \Vdash D_n\}$. Řečeno obráceně, této formuli nevyhovuje množina vrcholů, ze kterých je vidět vrchol x, pro který neplatí implikace $x \Vdash E_{n+1} \Rightarrow x \Vdash D_n$. Podívejme se na obrázek, abychom snáze nahlédli, který vrchol to je:



Množina vrcholů, kde neplatí implikace $x \Vdash E_{n+1} \Rightarrow x \Vdash D_n$ je $\{n+2\}$ a množina vrcholů, ze kterých není vrchol $n+2$ vidět je $\{1, \ldots, n+1, n+3\}$, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Konec důkazu Věty 4.

KAPITOLA 3

P-morfismus, p-ekvivalence a ostatní nástroje pro manipulaci s modely

V minulé kapitole jsme rozebírali, jak obecně popsat všechny jednoatomové formule v intuicionistické logice. V této kapitole se pokusíme popsat všechny modely jednoatomových formulí.

Modely chápejme jako protipříklady pro formule, které nejsou tautologie intuicionistické logiky. Podle toho, jak je složitá příslušná formule, tak je složitý i její protipříklad. U některých formulí stačí k ukázání, že nejsou tautologie, velice jednoduchý model, který má jen několik málo vrcholů.

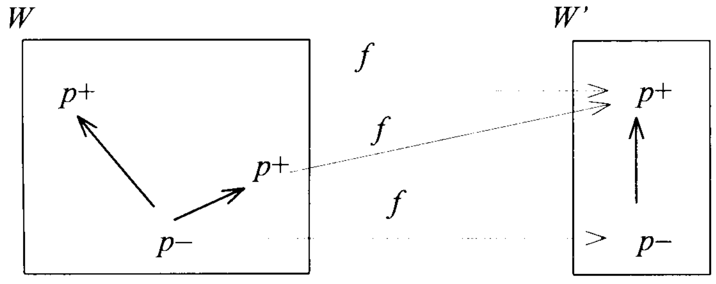
V této kapitole mimo jiné využijeme univerzální model, o kterém byla řeč v předešlé kapitole.

Napřed ale budeme muset definovat některé nástroje, které nám umožní pracovat s modely. Některé tyto nástroje lze aplikovat na libovolné modely, některé budou sloužit k tomu, abychom popsali všechny modely jednoatomových formulí.

Nejprve definujme p-morfismus. Je to zobrazení z jedné množiny na jinou množinu. Na obou množinách je definována relace $\leq$. Pro naše použití si představme, že množiny obrazů a vzorů jsou kripkovské modely a relace $\leq$ je uspořádání mezi vrcholy.

Definice 1: p-morfismus. Funkce f je p-morfismus, jestliže je "na" (tedy surjektivní) zobrazení z W na W' a má tyto vlastnosti:
(i) $w \leq w' \rightarrow f(w) \leq' f(w')$
(ii) $f(w) \leq' f(w') \rightarrow$ existuje $w'' \in W$ tak, že $w \leq w''$ a $f(w') = f(w'')$.

Příklad p-morfismu:



První podmínka vlastně říká, že p-morfismus je monotónní. Od p-morfismu aplikovaného na kripkovské modely mimo jiné chceme, aby jistým způsobem pouze zjednodušoval zbytečně složité modely. Chceme, aby se vzor a obraz lišily pouze složitostí struktury, ale aby se nelišily platností formulí. Proto budeme vždy dbát na to, aby p-morfismus zachovával platnost atomů, a nyní dokážeme, že potom p-morfismus zachovává i platnost formulí.

Lemma 1: Když p-morfismus f zachovává platnost atomů, tak zachovává platnost všech formulí.

Důkaz: Indukcí podle složitosti formule φ.

I. Nechť $\varphi \equiv \neg A$ a pro A platí:

$\forall a\ (a \nVdash A\ ) \Rightarrow f(a) \nVdash A$

$\forall a\ (a \Vdash A\ ) \Rightarrow f(a) \Vdash A$

Pak chceme ukázat, že pokud $a \Vdash \neg A$ pak i $f(a) \Vdash \neg A$. Podle podmínky pro negaci v kripkovském modelu platí, že $(a \Vdash \neg A) \Leftrightarrow (\ \forall b\ (\ b \geq a \rightarrow b \nVdash A\ ))$.

Pokud tedy platí $a \Vdash \neg A$ chceme, aby platilo i $f(a) \Vdash \neg A$, tedy $\forall d\ (d \geq f(a) \rightarrow d \nVdash A)$. Dokažme sporem, že to platí. Předpokládejme, že nad bodem $f(a)$ máme d, pro které platí $d \Vdash A$. Protože p-morfismus je "na", tedy v množině obrazů neexistuje prvek, který by neměl vzor, existuje y_1 takové, že $f(y_1) = d$, tedy platí, že $f(a) \leq f(y_1)$. Pak (podle definice p-morfismu) existuje y takové, že ($a \leq y$) a $f(y_1) = f(y)$. Když ale platí, že $y \nVdash A$, tak i $f(y) \nVdash$ A. Protože $f(y_1) = f(y)$, tak i $f(y_1) \nVdash A$, a protože $f(y_1) = d$, tak i $d \nVdash A$ což je spor s předpokladem, že $d \Vdash A$.

Dále chceme ukázat, že pokud $a \nVdash \neg A$. Chceme ukázat, že i $f(a) \nVdash \neg A$.

Když tedy $a \nVdash \neg A$ pak $\neg[\forall b\ (b \geq a \Rightarrow b \nVdash A)]$.

Tedy $(\exists b \geq a)\ (b \Vdash$ A) a pro toto b platí: $f(b) \Vdash A$. Takže existuje d takové, že $d \geq f(a)$ a zároveň $d \Vdash A$, tedy $f(a) \nVdash \neg A$.

II. Nechť $\varphi \equiv A\ \&\ B$ a pro A, B již tvrzení platí, tedy platí následující implikace:

$\forall a\ (a \nVdash A) \Rightarrow f(a) \nVdash A$

$\forall a\ (a \Vdash A) \Rightarrow f(a) \Vdash A$

$\forall a\ (a \nVdash B) \Rightarrow f(a) \nVdash B$

$\forall a\ (a \Vdash B) \Rightarrow f(a) \Vdash B$

Když $a \Vdash A \& B$, pak $a \Vdash A$ a zároveň $a \Vdash B$. Dle indukčního předpokladu: $f(a) \Vdash A$ a $f(a) \Vdash B$, tedy $f(a) \Vdash A \& B$.

Když naopak $a \nVdash A \& B$, tedy platí $(a \nVdash A$ nebo $a \nVdash B)$. Pokud $a \nVdash A$ pak $f(a) \nVdash A$ a tedy $f(a) \nVdash A \& B$. Pokud $a \nVdash B$ pak $f(a) \nVdash B$ a tedy $f(a) \nVdash A \& B$.

III. Nechť $\varphi \equiv A \vee B$ a pro A a B již tvrzení platí. Vzhledem k tomu, že u vyhodnocení disjunkce ve vrcholu kripkovského modelu se kontroluje pouze ten jeden vrchol, kterého se zachování platnosti týká, je i zde úvaha jednoduchá jako u konjunkce.

IV. Nechť $\varphi \equiv A \rightarrow B$ a pro A a B již tvrzení platí.

Pokud $a \Vdash (A \rightarrow B)$, chceme ukázat, že platí i $f(a) \Vdash (A \rightarrow B)$. Dokažme to sporem a předpokládejme, že $f(a) \nVdash (A \rightarrow B)$. Potom tedy existuje nějaký prvek d pro který platí, že $d \geq f(a)$ a $d \Vdash A$ a zároveň $d \nVdash B$. Vzhledem k tomu, že p-morfismus je "na", existuje nějaký prvek y_1 takový, že $f(y_1) = d$. Z definice p-morfismu víme, že pokud $f(y_1) \geq f(a)$, pak existuje y takové, že $(a \leq y)$ a $f(y_1) = f(y)$. Máme tedy prvek $f(y)$, pro který platí, že $f(y) \geq f(a)$ a zároveň $f(y) \Vdash A$ a zároveň $f(y) \nVdash B$. Indukční předpoklad říká, že f zachovává platnost formulí A a B, můžeme říci, že když $f(y) \Vdash A$ a zároveň $f(y) \nVdash B$, pak platí, že $y \Vdash A$ a zároveň $y \nVdash B$. Když ale platí, že $(a \leq y)$, pak nemůže ve vrcholu a platit implikace $(A \rightarrow B)$, což je spor s původním předpokladem, že $a \Vdash (A \rightarrow B)$.

Pokud $a \Vdash\!\!\!/ (A \to B)$, pak podle definice platí, že $\exists b \geq a$ $(b \Vdash A$ & $b \Vdash\!\!\!/ B)$. Potom ale i nad vrcholem $f(a)$ existuje $f(b)$ takový, že $f(b) \Vdash A$ a $f(b) \Vdash\!\!\!/ B$. Pak tedy platí, že $f(a) \Vdash\!\!\!/ (A \to B)$.

Konec důkazu Lemmatu 1.

Nyní zavedeme definici p-ekvivalence. Tato relace spolu s isomorfismem nám bude sloužit k tomu, že jiným způsobem popíšeme funkci p–morfismu.

Definice: p-ekvivalence. Relaci R nazveme p-ekvivalencí, když platí, že R je ekvivalence a když $(a, b) \in R$ pak platí:
a) atomy mají stejné ohodnocení v a i v b
b) $\forall c \{(b \leq c) \Rightarrow \exists y [(y, c) \in R \;\&\; a \leq y]\}$
c) $\forall c [(a \leq c \;\&\; c \leq b) \Rightarrow (a, c) \in R]$.

Značení: Třídu prvků p-ekvivalentních s prvkem a budeme značit $[a]$. Platí tedy, že $[a] = \{x ; x \sim a\}$, kde $\sim$ značí p-ekvivalenci.

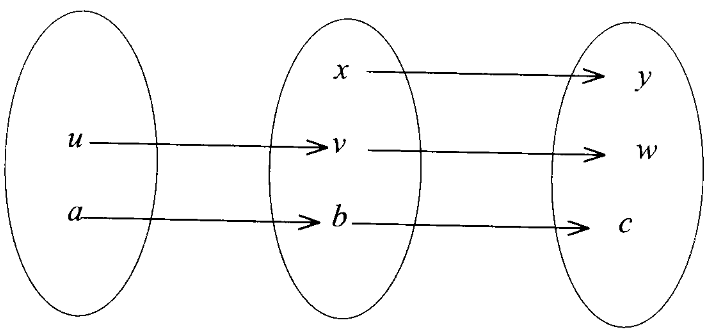
Definice: relace uspořádání mezi třídami p-ekvivalence. Řekneme, že $[a] \leq [b] \Leftrightarrow \exists x, y$ $(x \sim a,\ y \sim b,\ x \leq y)$.

Lemma 2: Když "$\sim$" je p-ekvivalence, pak $[a] \leq [b]$ je uspořádání (tedy relace, která je transitivní, reflexivní a slabě antisymetrická).

Důkaz:

a) Transitivita. Chceme tedy ukázat, že když platí $[a] \leq [b]$ a $[b] \leq [c]$, tak platí i $[a] \leq [c]$.
Když tedy $[b] \leq [c]$ a $[a] \leq [b]$,
tak dle definice $\leq$ platí, že
$\exists x,\ y$ $(x \sim b,\ y \sim c,\ x \leq y)$ a $\exists u,\ v$ $(u \sim a,\ v \sim b,\ u \leq v)$.

Abychom si to uměli lépe představit, podívejme se na tuto situaci na obrázku:

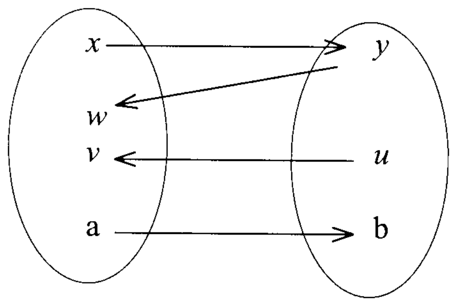


Z uvedeného je pak vidět, že $(x \sim v)$ & $(x \leq y)$ a z podmínky b), která platí pro p-ekvivalenci potom plyne, že $\exists w$ $(w \sim y$ & $v \leq w)$.
Máme tedy $u \leq v$, $v \leq w$, tedy $u \leq w$. Takže $\exists u,\ w$ $(u \sim a$ & $w \sim c$ & $u \leq w)$, tedy platí $[a] \leq [c]$.

b) Reflexivita. Chceme ukázat, že $[a]\leq[a]$, což platí právě když
$\exists x, y\ (x\sim a\ \&\ y\sim a\ \&\ x\leq y)$.
Protože platí, že $(a\leq a)$ a $(a\sim a)$ je vidět, že platí i $[a]\leq[a]$.

b) Slabá antisymetrie. Chceme ukázat, že když $[a]\leq[b]$ a $[b]\leq[a]$ tak potom platí, že $[a]=[b]$.

Nechť tedy platí, že
$[a]\leq[b]$ a $[b]\leq[a]$.
Potom (podle definice) platí, že
$\exists x, y\ (x\sim a\ \&\ y\sim b\ \&\ x\leq y)$ a $\exists u, v\ (u\sim b\ \&\ v\sim a\ \&\ u\leq v)$.
Když je pravda, že $(u\sim y\ \&\ u\leq v)$ tak platí i $\exists w\ (w\sim v\ \&\ y\leq w)$.
Vidíme, že $(x\leq y\leq w\ \&\ x\sim w)$, z čehož plyne, že $(x\sim y\ \&\ y\sim w)$.
Když tedy $(x\sim y)$ a $(x\sim a)$ a $(y\sim b)$ tak platí i $(a\sim b)$ a tedy i $[a]=[b]$.
Názorně můžeme tuto situaci pozorovat na obrázku:



Konec důkazu Lemmatu 2.

Následující dvě věty vypovídají o vzájemném vztahu mezi p–morfismem a p-ekvivalencí.

Věta 5A: Když f je zobrazení, které je definované předpisem $f(a)=[a]$, pak f je p-morfismus.

Věta 5B: Máme-li p-morfismus f a f zachovává platnost atomů (a tedy i formulí) a definujeme-li pro prvky množiny vzorů relaci R takto:

$(x,y)\in R \Leftrightarrow f(x)=f(y)$

pak relace R je p-ekvivalence.

Důkaz Věty 5A: Máme tedy $f(a)=[a]=\{x;\ x\sim a\}$ a chceme ověřit následující podmínky, které charakterizují p-morfismus:
i. Když $(a\leq b)$ pak $[a]\leq[b]$
ii. Když $[a]\leq[b]$ pak existuje c takové, že $(a\leq c)$ a $[c]=[b]$.
Ad i.: Nechť tedy $(a\leq b)$. Protože platí, že $(a\sim a)$ a $(b\sim b)$ tak je pravda, že existují x a y taková, že $(x\sim a)$ a $(y\sim b)$ a $(x\leq y)$. Z čehož podle definice plyne, že $[a]\leq[b]$, což jsme chtěli dokázat.
Ad ii.: Nechť tedy $[a]\leq[b]$. Potom podle definice platí, že existují x a y taková, že $(x\sim a)$ a $(y\sim b)$ a $(x\leq y)$. Víme, že $(a\sim a)$, tedy víme i že existují a a y taková, že $(a\sim a)$ a $(y\sim b)$ a $(a\leq y)$ a tedy víme, že existuje y takové, že $(a\leq y)$ a $[y]=[b]$, což jsme chtěli dokázat.

Konec důkazu Věty 5A.

Důkaz Věty 5B: Chceme ukázat, že výše definovaná relace je relace p-ekvivalence. Musíme ověřit, že se jedná o ekvivalenci, a také, že splňuje specifické vlastnosti p-ekvivalence.

Nejprve tedy ukažme, že se jedná o ekvivalenci, tedy, že tato relace je tranzitivní, reflexivní a symetrická.
Tranzitivita: když $f(x)=f(y)$ a $f(y)=f(z)$ pak i $f(x)=f(z)$.
Reflexivita: je zřejmé, že $f(x)=f(x)$.
Symetrie: je vidět, že $f(x)=f(y) \Leftrightarrow f(y)=f(x)$.

Nyní chceme ověřit, že když $(x,y)\in R$, pak atomy mají v bodě x a v bodě y stejné ohodnocení.
Když $(x,y) \in R$, tak platí, že $f(x)=f(y)$. Víme, že f zachovává platnost atomů, tedy když $x \Vdash p$ pak $f(x) \Vdash p$. Dokazujme sporem a předpokládejme, že existuje atom p, pro který platí, že $x \Vdash p$ a $y \nVdash p$. Pak by tedy platilo (protože f zachovává platnost atomů), že $f(x) \Vdash p$ a $f(y) \nVdash p$ a tedy by neplatilo, že $f(x)=f(y)$. Spor.

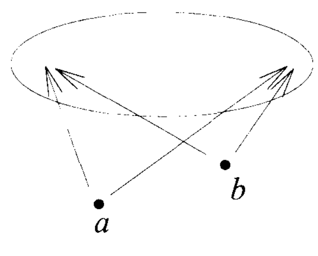
Dále chceme ověřit, že když $(x,y)\in R$ pak platí následující podmínka:
$\forall u\ \{(y\leq u) \Rightarrow \exists v\ [(v,u)\in R\ \&\ (x \leq v)]\}$.
Víme tedy, že $f(x)=f(y)$. Mějme tedy libovolné u, pro které platí, že $(y\leq u)$. Z definice p-morfismu plyne, že pak $f(y)\leq f(u)$. Když platí, že $f(y)\leq f(u)$ pak (opět z definice p-morfismu) plyne, že existuje v tak, že $[(y\leq v)\ \&\ f(u)=f(v)]$, přičemž to, že $f(u)=f(v)$ znamená, že $(u,v)\in R$. Ještě tedy zbývá dokázat, že $(x\leq v)$. Dokažme to sporem: Nechť $(v<x)$. Víme, že $(y\leq v)$, tedy $f(y)\leq f(v)$. Z těchto dvou nerovností plyne, že $f(y)<f(x)$. My jsme ale předpokládali, že $f(y)=f(x)$. Spor. Pro v musí tedy platit, že $(x\leq v)$.
Našli jsme tedy v takové, že $[x\leq v\ \&\ (u,v)\in R]$.

A nakonec chceme ověřit, že když $(x,y)\in R$ pak platí podmínka:
$\forall u\ \{(x\leq u\ \&\ u\leq y)] \Rightarrow (x,u)\in R\}$.
Víme tedy, že $(x,y)\in R$, tedy $f(x)=f(y)$. Mějme tedy libovolné u, pro které platí $(x\leq u\ \&\ u\leq y)$ a chceme odvodit, že $(x,u)\in R$. Když $[\exists u\ (x\leq u\ \&\ u\leq y)]$, pak pro toto u platí (z definice p-morfismu), že $f(x)\leq f(u)$ a $f(u)\leq f(y)$. Víme ale, že $f(x)=f(y)$. Nakonec sledujme následující implikace:
$[f(x)=f(y)\ \&\ f(u)\leq f(y)] \Rightarrow f(u)\leq f(x)$
$[f(u)\leq f(x)\ \&\ f(u)\leq f(x)] \Rightarrow f(u)=f(x)$.
Zjistili jsme, že pro u platí $f(u)=f(x)$, tedy že $(x,u)\in R$.

Konec důkazu Věty 5B.

Teď se podíváme na dva pro nás významné případy p-ekvivalence. Důležité jsou proto, že ukážeme, že jejich opakovanou aplikací na konečný kripkovský model můžeme dosahnout maximálního možného zjednodušení modelu. V podstatě se jedná o to, že popíšeme, v jaké konstelaci musí být dva prvky a a b vůči sobě, abychom je mohli považovat za p-ekvivalentní a do budoucna za totožné.

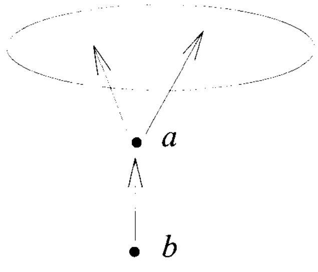
První speciální případ p-ekvivalence popisuje tento obrázek:



Přesně řečeno, jde o dva vrcholy, které jsou navzájem nezávislé, dávají atomům stejné ohodnocení a mají stejnou množinu následníků. Pro prvky a a b tedy platí:

$$\forall c\ (a<c \Leftrightarrow b<c)\ \&\ \forall p\ (a\Vdash p \Leftrightarrow b\Vdash p).$$

Druhý speciální případ p-ekvivalence je schematicky znázorněn na obrázku:



a vypovídá o tom, že za p-ekvivalentní prvky můžeme považovat takové dva vrcholy a a b, které ohodnocují stejně atomy a jeden z nich je bezprostřední následník druhého. Pro a a b tedy platí:

$$\forall c\ (b<c \Rightarrow a\leq c)\ \&\ \forall p\ (a\Vdash p \Leftrightarrow b\Vdash p).$$

Abychom mohli využívat toho, že tyto dva speciální případy jsou opravdu případy p-ekvivalence, musíme to dokázat. Důkaz povedeme tak, že pokud v kripkovském modelu najdeme dva prvky, pro které platí jeden z případů, pak definujeme relaci R jako sjednocení identity a této dvojice. O takto definované relaci dokážeme, že se jedná o p-ekvivalenci.

Věta 6: Pokud a a b jsou prvky takové, že

$$\forall c\ (a<c \Leftrightarrow b<c)\ \&\ \forall p\ (a\Vdash p \Leftrightarrow b\Vdash p)$$

pak relace R definovaná takto:

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow [(x=a\ \&\ y=b) \vee (x=b\ \&\ y=a) \vee (x=y)]$$

je p-ekvivalence.

Důkaz: Dokážeme to tak, že postupně ověříme, že pro R platí všechny vlastnosti p-ekvivalence. Nechť tedy pro x a y platí, že $(x,y)\in R$. Již z definice relace R je vidět, že atomy mají stejné ohodnocení v obou vrcholech x a y. Jednoduše lze také ukázat, že tato relace je ekvivalence (tedy to, že je transitivní, reflexivní a symetrická). Zbývá tedy dokázat, že platí poslední dvě charakteristiky p-ekvivalence, tedy že platí dvě podmínky:

$\forall w\ \{(y\leq w) \Rightarrow \exists v\ [(v,w)\in R\ \&\ x\leq v]\}$

a

$\forall v\ [(x\leq v\ \&\ v\leq y) \Rightarrow (x,v)\in R]$.

Dokažme první podmínku. Vezměme libovolné w, pro které platí $(y\leq w)$. Když $(x,y)\in R$, tak platí jeden ze členů disjunkce, která definuje relaci R. Když platí rovnost, je celá záležitost jasná. Vzhledem k tomu, že nyní je vztah mezi prvky a a b symetrický, stačí, když budeme zkoumat jeden ze zbylých dvou členů disjunkce definující relaci R. Nechť platí například, že $(x=a\ \&\ y=b)$. Vycházíme tedy z toho, že platí:

$\forall c\ (a<c \Leftrightarrow b<c)\ \&\ (x=a\ \&\ y=b)\ \&\ \exists w\ (y\leq w)$

a chceme odvodit, že

$\exists v\ [(v,w)\in R\ \&\ x\leq v]$.

Když $y=b$ a $\exists w\ (y\leq w)$, tak máme tedy w takové, že $b\leq w$, tedy buď platí $b<w$ nebo $b=w$. Když $b<w$ tak i $a<w$. Takže toto w můžeme považovat za hledané v, neboť

$(w,w) \in R$ a $x \leq w$, protože $x=a$. Když naopak platí, že $b=w$, pak a je hledané v, protože $(a,b) \in R$ a $a \leq a$.

Nyní dokažme druhou podmínku. Připomeňme si, že pro a a b platí:
$\forall c \ (a<c \Leftrightarrow b<c)$.
A nechť pro libovolné v platí, že $(x \leq v \ \& \ v \leq y)$. Chceme dokázat, že pak platí vztah $(x,v) \in R$.
Když tedy $(x,y) \in R$ tak platí jeden ze členů disjunkce, která definuje relaci R. Pokud platí rovnost $x=y$, pak snadno z $\exists v \ (x \leq v \ \& \ v \leq x)$ odvodíme, že $v=x$ a tedy, že $(x,v) \in R$. Co se týče ostatních dvou členů disjunkce, opět stačí prověříme–li jeden z nich, neboť vztah a a b je symetrický. Nechť tedy platí například $(x=a \ \& \ y=b)$. Když $\exists v \ (x \leq v \ \& \ v \leq y)$, tak vlastně $\exists v \ (a \leq v \ \& \ v \leq b)$, tedy
$\exists v \ [(a<v \lor a=v) \ \& \ (v<b \lor b=v)]$. Co se týče prvního členu konjunkce, nemůže platit $a<v$, neboť pak by podle definice vztahu a a b platilo, že i $b<v$, což by bylo ve sporu s druhým členem konjunkce. Musí tedy platit, že $a=v$. Protože $x=a$, tak platí i $x=v$, tedy $(x,v) \in R$.

Konec důkazu Věty 6.

Věta 7: Pokud a a b jsou prvky takové, že

$$\forall c \ (b<c \Rightarrow a \leq c) \ \& \ \forall p \ (a \Vdash p \Leftrightarrow b \Vdash p)$$

a definujeme-li relaci R takto:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow [(x=a \ \& \ y=b) \lor (x=b \ \& \ y=a) \lor (x=y)],$$

pak tato relace je p-ekvivalence.

Důkaz: Dokazujme tak, že postupně ověříme, že pro R platí všechny vlastnosti p-ekvivalence. Nechť tedy pro x a y platí, že $(x,y) \in R$. Již z definice relace R je vidět, že atomy mají stejné ohodnocení v obou vrcholech x a y. Jednoduše lze také ukázat, že tato relace je ekvivalence (tedy to, že je transitivní, reflexivní a symetrická). Zbývá tedy dokázat, že platí poslední dvě charakteristiky p-ekvivalence, tedy že platí dvě podmínky:
$\forall w \ \{(y \leq w) \Rightarrow \exists v \ [(v,w) \in R \ \& \ x \leq v]\}$
a
$\forall v \ [(x \leq v \ \& \ v \leq y) \Rightarrow (x,v) \in R]$.
Bude to poněkud komplikovanější, než v předchozím případě, protože vztah prvků a a b není symetrický a musíme prověřovat všechny tři členy disjunkce, která definuje relaci R.

Dokažme nejprve první podmínku. Předpokládáme tedy, že máme prvky a a b, pro které platí: $\forall c \ (b<c \Rightarrow a \leq c)$. Vezměme libovolné w, pro které platí $(y \leq w)$. Chceme najít takové v, pro které platí $(v,w) \in R$ a zároveň $x \leq v$. To, jakým způsobem jej nalezneme záleží na tom, díky kterému členu platí disjunkce definující relaci R. Pokud platí rovnost, tak hledané $v=w$. Když platí $(x=a \ \& \ y=b)$, rozmysleme si, jak to vypadá s w. Víme, že buď $(y<w)$ nebo $(y=w)$. Když $(y=w)$, tak x je hledané v. Když $(y<w)$, pak (ze vztahu mezi a a b) víme, že $x \leq w$. Když $x=w$, pak x je hledané v. Když $x<w$, pak hledané v je totožné s w.
Když platí $(x=b \ \& \ y=a)$, podívejme se, jak to vypadá s w. Když $w=y$, tak hledané v je totožné s y. Když $y<w$, tak $v=w$.

A jak to vypadá s druhou podmínkou? Chceme ukázat, že pokud máme prvky a a b takové, že $\forall c\ (b<c \Rightarrow a\leq c)$
a dále máme prvky x a y takové, že
$[(x=a\ \&\ y=b) \vee (x=b\ \&\ y=a) \vee (x=y)]$
a dále máme libovolné v, pro které platí, že $(x\leq v\ \&\ v\leq y)$,
pak platí, že $(x,v)\in R$.
Opět probereme zvlášť všechny případy, které mohou nastat, když platí disjunkce definující relaci R. Pokud platí rovnost, pak (jako v minulém případě) platí, že hledané $v=x=y$.
Pokud platí $(x=a\ \&\ y=b)$ a rozepíšeme-li to, co víme o v takto:
$[(x=v \vee x<v)\ \&\ (v=y \vee v<y)]$, stačí, rozebereme-li druhý člen této konjunkce. Zjistíme totiž, že nemůže platit $v<y$ (víme, totiž, že také $y<x$, z čehož by plynulo, že $v<x$, což by bylo ve sporu s prvním členem konjunkce) a tedy, že musí platit $v=y$. Pak $(x,v)\in R$, protože i $(x,y)\in R$.
A nakonec, pokud platí $(x=b\ \&\ y=a)$, rozepišme si opět podrobněji to, co víme o v:
$[(x=v \vee x<v)\ \&\ (v=y \vee v<y)]$.
Pokud první člen této konjunkce platí díky $x=v$, pak je hned vidět, že $(x,v)\in R$.
Pokud první člen platí protože $x<v$ a zároveň druhý člen platí protože $v=y$, pak také platí, že $(x,v)\in R$, protože $(x,y)\in R$.
Pokud první člen platí protože $x<v$ a zároveň druhý člen platí protože $v<y$, tak dojedeme ke sporu, neboť když $x<v$, pak podle definice vztahu mezi a a b platí, že $y\leq v$. Tento případ tedy nemůže nastat.

Konec důkazu Věty 7.

Ukázali jsme tedy, že první i druhý speciální případ jsou případy p-ekvivalence. Upřesněme ještě terminologii. Budeme říkat, že pro dva prvky a, b kripkovského modelu platí první speciální případ p-ekvivalence, pokud pro ně platí, že

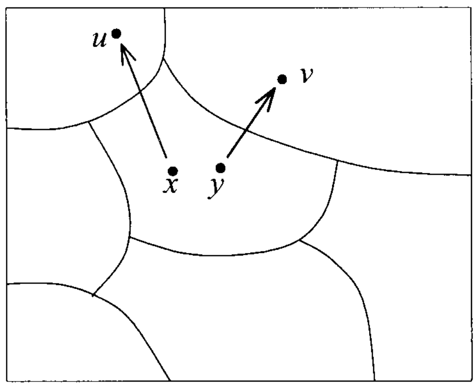
$$\forall c\ (a<c \Leftrightarrow b<c)\ \&\ \forall p\ (a\Vdash p \Leftrightarrow b\Vdash p).$$

Budeme říkat, že pro prvky a, b platí druhý speciální případ p-ekvivalence, pokud pro ně platí, že $\forall c\ (b<c \Rightarrow a\leq c)\ \&\ \forall p\ (a\Vdash p \Leftrightarrow b\Vdash p)$.

Nyní chceme ukázat, že pokud nám někdo předloží konečný kripkovský model, pak postupnou aplikací prvního a druhého speciálního případu p-ekvivalence (po konečném počtu kroků) dostaneme maximálně zjednodušený model. Tím myslíme, že jediná p-ekvivalence v tomto modelu je identita. Ukážeme to tak, že budeme uvažovat kripkovský model s p-ekvivalencí, která není identická, to znamená, že alespoň jedna třída této p-ekvivalence bude mít nejméně dva průzné prvky. Dokážeme, že v této třídě lze zvolit dva prvky a ty ztotožnit podle prvního nebo druhého speciálního případu p-ekvivalence.

Mějme tedy konečný kripkovský model s nějakou p-ekvivalencí "~", která není identická. Vyhledejme třídu p-ekvivalence takovou, ve které jsou alespoň dva různé prvky. Vzhledem k tomu, že nosičem této p-ekvivalence je kripkovský model, na kterém je definováno uspořádání a že i mezi třídami p-ekvivalence je definováno uspořádání, můžeme vyhledat tu třídu, která je mezi víceprvkovými maximální. Pokud jich existuje více vezmeme libovolnou z nich.

Máme tedy již vyhledanou tu třídu, o které víme, že obsahuje více různých p-ekvivalentních prvků kripkovského modelu. Může se stát, že tato třída obsahuje i listy. Nyní se podívejme, jak to v této třídě vypadá s maximy. Pokud jich je více, vezměme opět libovolná dvě maxima této třídy (říkejme jim x a y) a ukažme, že pro ně platí první speciální případ p-ekvivalence. Pokud jsou to listy (tedy v celém kripkovském modelu neexistuje žádný prvek, který by byl větší než kterýkoli z nich), pak je na první pohled vidět, že mají stejnou (prázdnou) množinu následníků a tedy, že jsou p-ekvivalentní. Pokud to nejsou listy, pak pro každý z nich existuje alespoň jeden prvek, který je větší. Podívejme se na obrázek, který nám pomůže lépe pochopit situaci:



Vzhledem, k tomu, že se jedná o p-ekvivalenci, tak pokud existuje u takové, že $x \leq u$, pak existuje ve stejné třídě jako u jiný prvek, který je větší než y. Vzhledem k tomu, že my jsme si vybrali takovou třídu, že výše než ona není žádná víceprvková, pak tedy musí platí i že $y \leq u$. Tímto způsobem lze uvažovat o všech následnících prvků x a y a z toho tedy můžeme odvodit, že i v tomto případě jsou množiny následníků stejné a tedy, že se jedná opět o prvý speciální případ p-ekvivalence.

Pokud je v námi vybrané třídě maximum jen jedno, mohou nastat dva různé případy. Buď toto maximum má právě jednoho přímého předchůdce, nebo jich má více. Pokud má jenoho přímého předchůdce, pak je již na první pohled vidět, že se jedná o druhý speciální případ p-ekvivalence. Pokud má přímých předchůdců více, vezměme opět libovolné dva z nich. Mají jednoho stejného následníka ve své třídě ekvivalence. Dále mohou mít různé následovníky ve vyšších třídách p-ekvivalence. Nyní je situace již velmi podobná případu, kdy se jednalo o dvě maxima ve vybrané třídě a je tedy vidět, že i nyní se jedná o první speciální případ p-ekvivalence.

Až doposud jsme se bavili o věcech, které bylo možno aplikovat na modely libovolně složitých formulí.

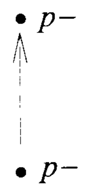
Nyní se zaměříme na jednoatomové formule a ukážeme, že redukovaný vrchol hloubky n může mít pouze dvojí podobu. Důkaz povedeme indukcí podle n.

Když $n=0$ pak je snadné nahlédnout, že vrcholy této hloubky mohou být jen dva různé[4]:

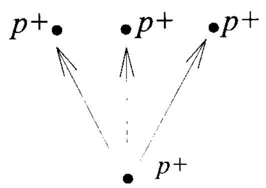
[4] V této části textu zarámované modely jsou ty, které již není možno dále redukovat a tedy ty, které představují jednu ze dvou variant vrcholu hloubky n.

Když $n=1$, pak je situace již složitější. Podívejme se, jaké různé případy mohou nastat:

Například tuto situaci:

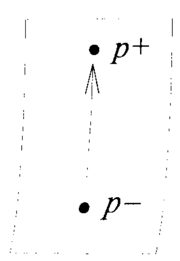


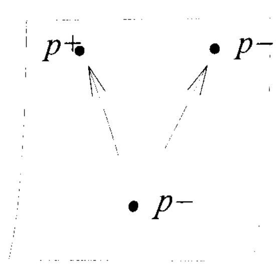
je možno aplikací druhého speciálního případu p-ekvivalence zjednodušit na jednovrcholovou množinu Podobně tomu bude i v případě, kdy by oba takové vrcholy dávaly atomu p kladné ohodnocení. Stejný výsledek bude u této situace:



Ke stejnému výsledku se ale dostaneme poněkud delší cestou, nejprve na listy dvakrát aplikujeme první případ p-ekvivalence (listy mají stejnou – prázdnou množinu následovníků a stejně ohodnocují atomy) a potom opět aplikujeme druhý speciální případ p-ekvivalence.

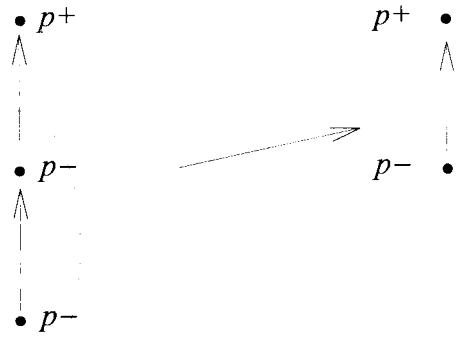
Abychom objevili nějaký nový vrchol, musíme tedy ohodnotit atomy v různých vrcholech různě, přitom ovšem musíme dodržet zásadu, že pokud atom má ve vrcholu kladné ohodnocení, musí už v následujících vrcholech mít také kladné ohodnocení. Nově se tedy objeví tyto dva případy, které nelze dále redukovat:



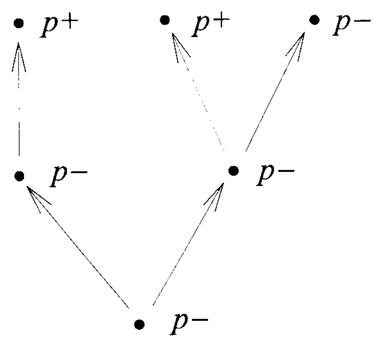


a po krátkém rozmyškení je vidět, že jiná kombinace (kterou by nešlo dále redukovat) neexistuje.

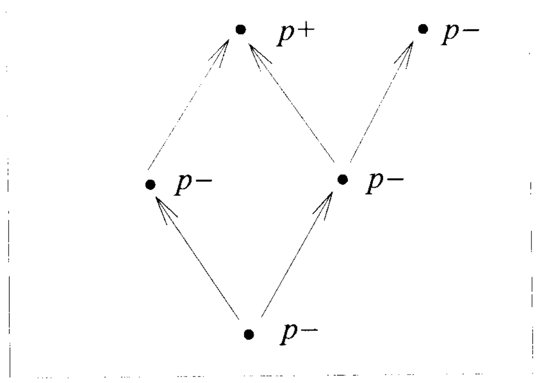
Když $n=2$. Při konstrukci vrcholu hloubky 2, můžeme již využít toho, že víme, jak vypadají vrcholy hloubky 1 a 0. Nad vrcholem hloubky 2 musí být alespoň jeden vrchol hloubky 1 a libovolné množství vrcholů hloubky 0. Pokud bychom ovšem vrchol hloubky 2 zkonstruovali tak, že bychom pod jeden z vrcholů hloubky 1 přidali jeden vrchol (atom p v něm nutně musí mít záporné ohodnocení), pak tento nový vrchol hloubky 2 a přidaný vrchol hloubky 1 jsou druhým speciálním případem p-ekvivlence a tedy je můžeme sloučit a tím dostaneme opět pouze vrcholy hloubky 1. Podívejme se na příklad:



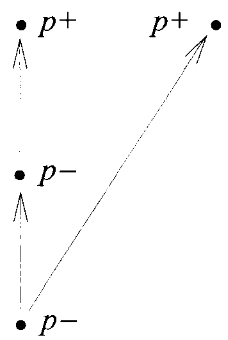
Je tedy vidět, že musíme nad nově konstruovaný vrchol přidat ještě něco jiného. Na první pohled je vidět, že když přidáme druhý případ vrcholu hloubky 1, získáme naprosto nový vrchol:



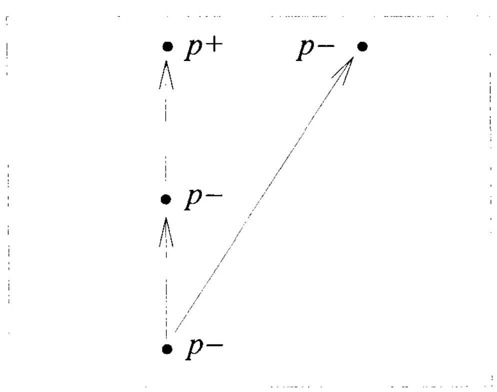
přičemž ještě můžeme dva listy, které atomu p dávají kladné ohodnocení, ztotožnit, neboť se jedná o první speciální případ p-ekvivalence. Potom dostaneme tento výsledek:



Libovolným opakováním vrcholů hloubky 1 nad vrcholem hloubky 2 opět dostaneme tento případ, neboť vždy se nám podaří aplikací speciálních případů p-ekvivalence slučovat vrcholy tak dlouho, až dojdeme opět k tomuto případu. Jak jinak lze ještě dospět k jinému vrcholu hloubky 2? Ještě můžeme nad vrchol hloubky 2 přidat (vedle nějakého vrcholu hloubky 1) vrchol hloubky 0. Abychom dospěli zase k novému případu, musíme zvolit vhodnou kombinaci, neboť když jako vrchol hloubky 1 přidáme te, který je složitější (má více prvků), pak nemá přidávání vrcholů hloubky 0 smysl, neboť tento je oba obsahuje a tudíž by bylo možno je sloučit. Zkusme tedy ještě kombinaci, kdy nad vrchol hloubky 2 přidáme jednodušší vrchol hloubky 1 a nějaký vrchol hloubky 0. Pokud zvolíme tuto kombinaci:



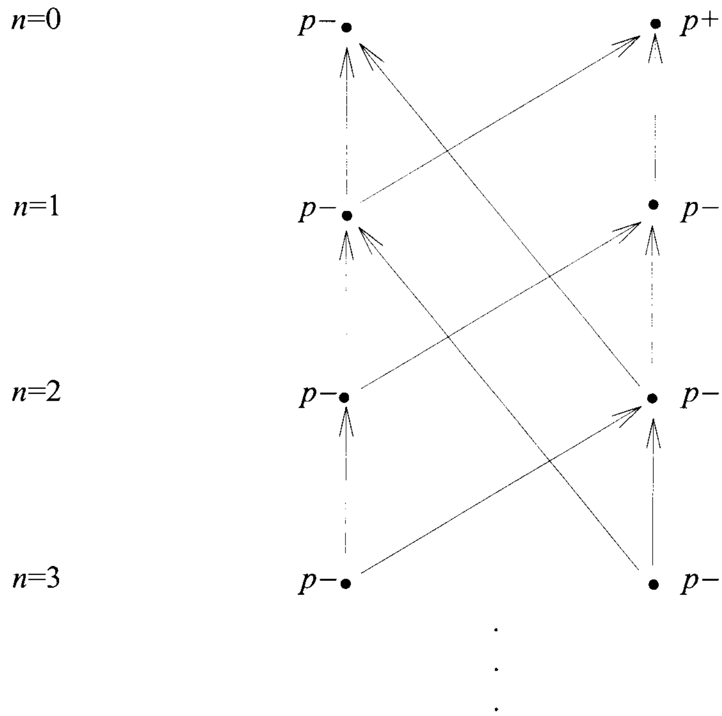
vidíme, že se zde vyskytují dva listy (tedy mají stejnou – prázdnou množinu následovníků), které stejně ohodnocují atom p a tudíž je můžeme ztotožnit. Pak od nejspodnějšího vrcholu k nejvyššímu vede šipka dvojím způsobem, jednak přes vrchol hloubky 1 a jednak přímo. Protože relace uspořádání mezi vrcholy je transitivní, můžeme tu šipku, která vede přímo také zrušit. Pak ještě podle druhého speciálního případu p-ekvivalence můžeme sloučit vrchol hloubky 2 a vrchol hloubky 1 a vidíme, že jsme nedospěli k nějakému vrcholu. Musíme tedy zvolit druhou možnou kombinaci:



kde již není možné dále redukovat počet prvků a našli jsme tedy další (odlišný) vrchol hloubky 2.

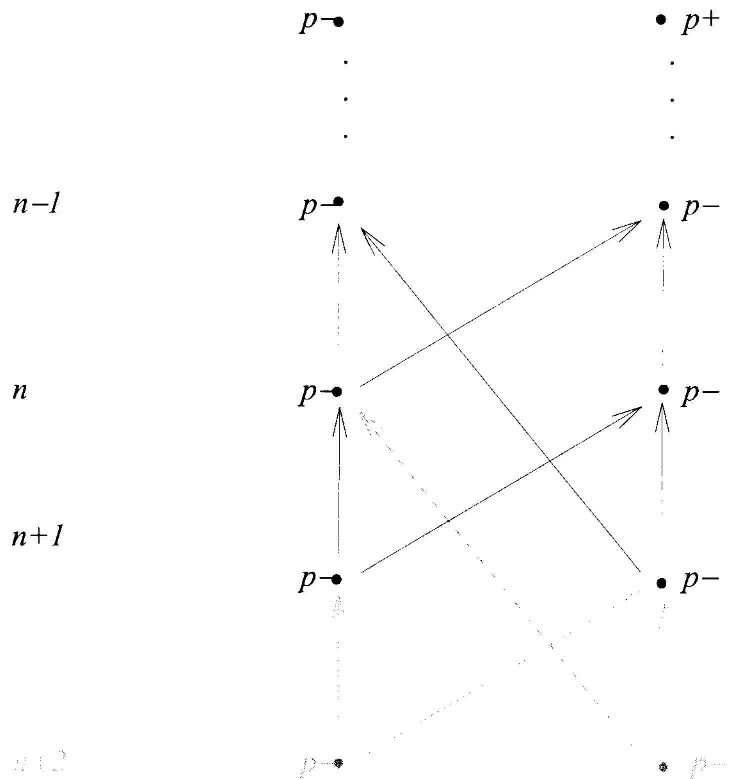
Je snadné rozmyslet si, že různými kombinacemi vrcholů hloubky 0 a 1 nad konstuovaným vrcholem hloubky 2 již nemůžeme (po redukci pomocí speciálních případů p-ekvivalence) dospět k nějaké jiné podobě vrcholu hloubky 2.

Obecně tedy redukovaný vrchol hloubky n vypadá tak, že se přidá pod dva rozdílné vrcholy hloubky $n-1$ a nebo, že nad něj přidáme jeden vrchol hloubky $n-1$ a jeden vrchol hloubky $n-2$, přitom tyto musíme zvolit tak, aby vrchol hloubky $n-1$ neobsahoval v sobě vrchol hloubky $n-2$, tedy musíme vzít ten jednodušší vrchol hloubky $n-1$ a ten složitější vrchol hloubky $n-2$. Upřesněme, co rozumíme pod pojmem jednodušší vrchol hloubky n. My chceme ukázat, že redukovaný vrchol hloubky n může vypadat pouze dvojím způsobem. Přitom jeden z těchto způsobů má větší počet vrcholů a druhý má menší počet vrcholů. Ten, který má menší počet vrcholů nazývejme jednodušší a ten, který má větší počet vrcholů nazývejme složitější. Složitější vrchol hloubky n má za přímé následníky oba vrcholy hloubky $n-1$, jednodušší vrchol hloubky n má za přímého následníka ten jednodušší vrchol hloubky $n-1$ a ten složitější vrchol hloubky $n-2$.
Nyní přichází opět ke slovu univerzální model, kterému jsme se již věnovali dříve. Tento model, totiž svojí strukturou ukazuje, jak vypadají ty jediné dvě možné verze vrcholů hloubky n:



Zajímá-li nás, jak mohou vypdat jediné dvě varianty vrcholu hloubky n, odpočítáme od shora příslušný počet úrovní a dostaneme to, co jsme potřebovali. Vrchol hloubky n pak může vypadat tak, že buď vezmeme ten jednodušší vrchol, nebo ten složitější vrchol a s ním samozřejmě všechny, které jsou z něj vidět.

Podívejme se nyní na univerzální model v místě, kde se rozhoduje o tom, jak bude vypadat vrchol hloubky n +2:



Buď zkonstruujeme vrchol hloubky n+2 tak, že jej umístíme pod dva vrcholy hloubky n+1. Přidávat další vrcholy hloubky n+1 nemá cenu, neboť ty by bylo možno postupným slučováním ztotožnit a opět by tam zůstaly jen ty dva. Stejně tak nemá cenu přidávat vrcholy ještě nižších úrovní, neboť ty již jsou obsaženy ve vrcholech hloubky n+1. Druhý (jiný) vrchol vznikne tak, že jej umístíme pod jednodušší vrchol hloubky n+1 a zároveň pod složitější vrchol hloubky n. V detailu je vidět, že tento vrchol není obasžen ve vrcholu hloubky n+1.

Závěr

Ohlédněme se zpět a připomeňme si, co bylo v této práci ukázáno.

Nejprve jsme ukázali, že v intuicionistické logice nelze (oproti klasické logice) definovat logické spojky pomocí ostatních.

Dále jsme se věnovali Rieger-Nishimurově diagramu jednoatomových formulí a ukázali jsme, že každá jednoatomová formule v intuicionistické logice je ekvivalentní s jednou z formulí z diagramu a také jsme ukázali, že tyto formule jsou navzájem neekvivalentní. Ukázali jsme tedy, že na rozdíl od klasické logiky (kde počet neekvivalentních jednoatomových formulí je konečný) v intuicionistické logice počet neekvivalentních jednoatomových formulí není konečný. Kromě toho jsme ovšem ukázali, že tyto jednoatomové formule lze přehledným a vyčerpávajícím způsobem uspořádat.

Poslední dvě kapitoly práce jsou věnovány modelům v intuicionistické logice. Definovali jsme některé nástroje, které nám umožní redukovat kripkovské modely (redukovat je ve smyslu složitosti zápisu, ne ve smyslu toho, co vyjadřují). Našli jsme způsob, jak zajistit, že původní model zredukujeme tak, že již je nejjednodušší možný. Potom jsme se věnovali speciálně jednoatomovým modelům a ukázali jsme, že jednoatomový model určité hloubky může mít pouze dvojí podobu a ukázali jsme univerzální model, který v sobě zahrnuje všechny konečné jednoatomové modely.

Na tyto úvahy lze navázat v několika směrech. Lze jich využít při sestavování algoritmů pro ukázání, že nějaká jednoatomová formule není tautologie (pokud je členem Rieger-Nishimurovy posloupnosti), lze na jejich základě sestavit algoritmus, který maximálně zredukuje zadaný kripkovský model (opakované použití speciálních případů p-ekvivalence).

Literatura:

van **Dalen**, D.: Intuitionistic Logic, volume III, chapter 4 in: Handbook of Philosophical Logic, D. Reidel Publishing Company, 1986

Gabbay, D. M.: Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic, D. Reidel Publishing Company

Hájek, P., **Švejdar**, V.: Matematická logika, připravováno

de **Jongh**, D., **Veltman**, F.: Intensional Logic, lecture Notes, Philosophy Department, University of Amsterdam, Amsterdam, 1988

Nishimura, I.: On Formulas of One Variable in Intuitionistic Propositional Calculus, in: The Journal of Symbolic Logic, vol. 25 (1960), pp. 327 - 331

Vysoká škola: FF UK Fakulta:

Katedra: logiky Školní rok: 1995-1996

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

pro Pavlu Burdovou

obor logika - sociologie

Vedoucí katedry Vám ve smyslu nařízení vlády ČSSR č. 90/1980 Sb., o státních závěrečných zkouškách a státních rigorózních zkouškách, určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu: Sémantické a důkazově-teoretické metody v neklasických logikách

Zásady pro vypracování:

Pro intuicionistickou logiku bylo postupně vyvinuto několik verzí sémantiky [4] a také několik verzí gentzenovského sekventového kalkulu. Pomocí sémantických metod lze například dokázat, že žádná ze čtyř logických spojek není definovatelná pomocí ostatních. Lze také klasifikovat intuicionistické tautologie sestavené z jediného atomu. Uvažujte o těchto nebo podobných výsledcích a vypracujte podrobné důkazy.

Je známo, že i pro intuicionistickou predikátovou logiku platí věta o eliminovatelnosti řezů, která říká, že každý sekvent dokazatelný v gentzenovském kalkulu je dokazatelný i bez užití pravidla řezu. Důkazy jsou uvedeny v [3] nebo [2]. Uvažujte o kvantitativních aspektech různých variant této věty a o vzájemné simulovatelnosti různých verzí gentzenovského kalkulu pro intuicionistickou logiku.

Vezměte v úvahu také logiku dokazatelnosti nebo jiné neklasické logiky. Uvažujte případně také o algoritmické složitosti některých úloh.

Jiné možné názvy práce by mohly být *Kalkuly pro některé neklasické logiky*, nebo *Sekventové kalkuly pro intuicionistickou logiku*.

Rozsah grafických prací:

Rozsah průvodní zprávy:

Seznam odborné literatury:

1) J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977
2) S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, D. van Nostrand, 1952
3) G. Takeuti, Proof Theory, North-Holland, Amsterdam, 1975
4) D. van Dalen. Intuicionistic Logic, díl 3, kap. 4 v: Handbook of Philosophical Logic, (D. Gabbay, F. Guenthner eds.), Kluwer, 1986
5) R. Dyckhoff: Contraction-free sequent calculi for Intuitionistic logic in Journal of Symbolic Logic vol. 57, 1992, p. 795-807

[mat. ústav v Žitné Po, St, Pá]

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

Datum zadání diplomové práce: únor 1996

Termín odevzdání diplomové práce: duben 1997

L. S.

P. Jirků
Vedoucí katedry

Děkan

V .... dne .... 198....