Ústav matematiky
a statistiky

Prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy university
Kotlářská 2
611 37 Brno

Oponentský posudek disertační práce

Autor: **Mgr. Jakub Řada**

Název: **Synthetic geometry in various dimensions**

Práce je rozdělena do 5. kapitol a dvou příloh, které obsahují technické informace, odkaz na 3 videa na YouTube a návod na použití programu GeoGebra pro vizualizaci 4D.

První kapitola je jakýmsi motivačním úvodem, který má ukázat rozdíly v analytickém a syntetickém přístupu k řešení geometrických problémů. Autor si k tomu vybral tři geometrické problémy v rovině. Nejdříve na Pappově-Pascalově větě demonstruje rozdíl mezi analytickým a syntetickým přístupem. Nejdříve dokazuje Pappovu větu analyticky výpočtem v homogenních souřadnicích a potom její zobecnění – Pappovu-Pascalovu větu – i synteticky. Druhý problém je syntetická konstrukce oskulační kružnice elipsy v jejím libovolném bodě (srovnání s výpočtem používaným v diferenciální geometrii) a třetí problém je syntetická konstrukce kořenů kvadratické rovnice (srovnání s klasickým řešením výpočtem).

Druhá krátká (4 stránky) kapitola s názvem „Across dimensions“ je jakýmsi obecným popisem, jak se v geometrii dají přenášet metody použité v nižších dimenzích do vyšších dimenzí formou analogií. V tomto přístupu je ale potřeba si uvědomit, že některé vlastnosti ve vyšší dimenzi neodpovídají analogické vlastnosti z nižší dimenze.

I když se v názvu práce hovoří o syntetické geometrii v různých dimenzích, převážná část práce se zabývá vizualizací 4D prostoru. Tomu se věnují všechny následující kapitoly.

Třetí kapitola je věnována vizualizaci 4-rozměrného euklidovského prostoru, která je obdobou Mongeova promítání v 3D. Při použití 4D souřadnic $[x,y,z,w]$ kolmo promítáme do prostorů $\Omega(x,y,z)$ a $\Xi(x,y,w)$. Poté otočíme prostor Ξ do prostoru Ω tak, aby oba průměty bodů ležely na ordinálách, tj. kolmicích na rovinu $\pi(x,y)$. Tímto způsobem můžeme 4D objekty reprezentovat pomocí dvou 3D projekcí a tyto 3D projekce potom zobrazit, např. volným rovnoběžným promítáním, do roviny. Autor v této vizualizaci 4D popsal zobrazení bodů, přímek (včetně možných poloh dvou přímek), rovin (včetně možných poloh dvou rovin a jak poznat polohu ze 4D vizualizace) a některých 4D těles (tesserakt – D4 krychle, kulová nadplocha).

Z teoretické části disertace je nejpodstatnější (nejoriginálnější) čtvrtá kapitola, která se zabývá vizualizací 4D prostoru, která je obdobou (3D) lineární perspektivy (LP). Snad proto zahájil autor toto kapitolu úvodem o vzniku 3D LP a jejím využití v malířství. Pro vlastní 4D LP je důležitý vztah 3D LP s přidruženým Mongeovým promítáním do průmětny a základní roviny. Toto je zobecněno ve vztah 4D LP a přidruženého 4D Mongeova promítání popsaného ve třetí kapitole. Nejdříve jsou popsány hlavní pojmy a principy 4D LP a poté zobrazena různá 4D tělesa – nadkrychle, nadjehlan a kulová nadplocha. U kulové nadplochy je navíc sestrojeno i její osvětlení a její řezy nadrovinou.

Nejrozsáhlejší částí disertace je pátá kapitola věnovaná užití 4D vizualizace. Tato kapitola má tři podkapitoly. První podkapitola 5.1 je věnována vizualizaci komplexní roviny, kterou chápeme jako komplexní rozšíření reálné roviny. Komplexní rovinu je možno ztotožnit s $\mathbb{R}^4$ a metodami popsanými výše vizualizovat. To umožňuje i zobrazení „imaginárních" bodů. Dají se tak vizualizovat i komplexně sdružené průsečíky reálné přímky, která reálně neprotíná kružnici (nebo jakoukoliv regulární kuželosečku). Tímto způsobem jsou sestrojeny vizualizace reálné kružnice (paraboly, hyperboly, imaginární elipsy a kubické paraboly) včetně jejich imaginárních bodů (ve 4D Mongeově promítání, reálná kružnice i ve 4D LP). Podobně i přímky v komplexním rozšíření reálné roviny se dají vizualizovat včetně jejich imaginárních bodů.

Podkapitola 5.2 je věnována osvětlení algebraických nadploch ve 4D LP. Je popsáno, jak sestrojit osvětlení algebraických ploch (ve 3D kulová plocha, torus, elipsoid a jejich vržený stín na hyperbolický paraboloid) nejdříve v 3D a pro nadkvadriky i ve 4D a jejich vizualizace ve 4D LP. K těmto částem jsou vytvořena i videa přístupná na YouTube.

Podkapitola 5.3 je potom věnována popisu, jak „vyrobit" vizualizaci formou 3D tisku. Podle názoru autora je 3D model vizualizace, například tesseractu, mnohem „názornější" než rovnoběžná projekce do roviny.

K práci mám následující připomínky:

1. Celkově je práce poskládaná z článků autora, které spolu často nesouvisí – např. problematika z první kapitoly se nikde dále nepoužije. Je vidět, že některé části práce jsou doslova převzaté z již publikované práce bez alespoň formální úpravy. Zvlášť viditelné je to v části 5.2, kde jsou formulace „this paper aims", „Paper organization", „Throughout the paper" atd. To by nevadilo, pokud by to bylo uvedeno explicitně na počátku části 5.2. Takto to působí poněkud rušivě, protože tyto formulace se týkají pouze části 5.2 a ne celé disertace.
2. V úvodu na straně 5 (1. řádek) je nedokončená věta.
3. V kapitole 1 u Pappovy-Pascalovy věty se používají různé symboly pro označení průniku přímek. Nejdříve v Theorem 3 (str. 8) je použit symbol $\times$, potom symbol sjednocení $\bigcup$ (str. 8) a nakonec obvyklý symbol průniku $\bigcap$ (str. 10). Proč tomu tak je?
4. Pro čtenáře je nezvyklé, že úvody k další podkapitole v první kapitole jsou na konci předchozí podkapitoly bez nějakého grafického odlišení. Vhodnější je zařazení těchto textů na úvod každé podkapitoly.
5. Třetí část práce (4D Mongeovo promítání) je hodně podobná s jednou kapitolou v disertací M. Zamboje. Také 6 uvedených autorových publikací z celkem 9 je se

spoluautorem M. Zambojem. Naskýtá se tedy otázka, jaký je podíl autora a M. Zamboje na vzniku těchto publikací? Např. u videí na YuoTube je uveden jako autor jen M. Zamboj. Prosil bych o vyjasnění podílu autora a M. Zamboje na předložených výsledcích.

6. Dvě různé reálné roviny ve 4D mohou být rovnoběžné, protínat se v bodě nebo přímce, ale také mohou být „mimoběžné“ (s prázdným průnikem a se společným směrem). Jsou tak 4 možné polohy dvou různých rovin. Na obrázcích 3.5 – 3.9 (na straně 25) je ale celkem 5 možných poloh. Pátá poloha je „skew“. To je ale zavádějící, protože to odpovídá rovinám s prázdným průnikem a společným směrem, což už je na obrázku 3.6. I ty příslušné vizualizace jsou nevypovídající, protože mimoběžné roviny se společným směrem se mohou zobrazit do situací zobrazených v případech 3.6, 3.7 i 3.9. Jde pouze o polohu vůči prostorům $\Omega(x,y,z)$ a $\Xi(x,y,w)$. To je ukázka toho, že 4D vizualizace polohy dvou mimoběžných rovin není analogická se zobrazením dvou mimoběžných přímek ve 3D.
7. Ve 4D LP je zobrazena nadkrychle v polohách, kdy jedna soustava hran je hloubkových přímkách a nadkrychle je posunutá ve směrech souřadných os. To odpovídá obdobě 1-úběžníkové 3D LP. Možnosti volby 4D LP, které by odpovídaly 2- a 3- úběžníkové 3D LP nejsou vůbec zmíněny. Zkoušel autor i tyto možnosti?

Práce je psána anglicky. Po technické stránce je na dobré úrovni. Ocenit je třeba náročnost doprovodných obrázků. Někde by bylo vhodné „vyrobit“ obrázky i formou appletů aby si čtenář mohl případně upravit pohled na danou prostorovou situaci (to by bylo vhodné např. u obrázků 3.5 až 3.9 v mé připomínce číslo 6 nebo zobrazení nadkrychle ve 4D LP).

Závěr: V předložené disertaci převažuje „konstrukční“ přístup ke 4D geometrii nad teoretickým přístupem. Práci považuji za hodnotnou především z praktického (počítačová 4D vizualizace především 4D LP) pohledu. Autor prokázal schopnosti samostatné tvůrčí práce. Po úspěšné obhajobě doporučuji práci **uznánt** jako Ph.D. disertaci a autorovi přiznat titul Ph.D.

V Brně, 22.8.2024 prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.