MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vladimír Chudý

AE řešitelnost intervalových soustav

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. Mgr. Milan Hladík, Ph.D.
Studijní program: Informatika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce, prof. Milanu Hladíkovi, za návrh tak zajímavého tématu, za konzultace a za cenné rady při psaní této práce.

Název práce: AE řešitelnost intervalových soustav

Autor: Vladimír Chudý

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. Mgr. Milan Hladík, Ph.D., Katedra aplikované matematiky

Abstrakt: Součástí intervalové analýzy je zkoumání různých typů řešitelnosti intervalových soustav. Mezi nejznámější patří slabá řešitelnost, silná řešitelnost a jejich kombinace, AE řešitelnost. V současnosti není znám žádný exponenciální algoritmus, který by byl schopný AE řešitelnost intervalových soustav otestovat. Některé její speciální typy jsou NP-úplné či co-NP-úplné problémy. V této práci si částečně odpovíme na otázku, kdy k tomuto zjednodušení dochází. Ukážeme některé nutné a postačující podmínky pro obecnou AE řešitelnost, ale i její speciální případy. Také se zaměříme na různé ekvivalence mezi soustavami a popíšeme úpravy zachovávající řešitelnost. V závěru práce některé nutné, postačující a charakterizační podmínky naimplementujeme v prostředí Matlab s využitím toolboxu Intlab a numericky otestujeme jejich úspěšnost.

Klíčová slova: intervalová analýza, intervalové lineární soustavy, slabá řešitelnost, silná řešitelnost

Title: AE solvability of interval systems

Author: Vladimír Chudý

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: prof. Mgr. Milan Hladík, Ph.D., Department of Applied Mathematics

Abstract: Interval analysis involves investigating various types of solvability of interval systems. The most well-known ones are weak solvability, strong solvability and their combination AE solvability. Currently, there is no known exponential algorithm that is able to test the AE solvability of interval systems. Some of its special types are NP-complete or co-NP-complete problems. In this paper, we partially answer the question when such simplification occurs. We will show some necessary and sufficient conditions for general AE solvability, as well as its special cases. We will also look at various equivalences between systems and describe transformations that preserve solvability. Finally, we will implement some necessary, sufficient and characterization conditions in Matlab using the Intlab toolbox and numerically test their success rate.

Keywords: interval analysis, interval linear systems, weak solvability, strong solvability

Obsah

Úvod

Některé matematické úlohy zahrnují výpočty s nepřesnými daty. Takové úlohy se objevují například v robotice, ekonomii, nebo při rigorózních výpočtech, kdy nám samotná floating point aritmetika vytváří během výpočtu nepřesnosti.

Pro tyto typy problémů se od poloviny minulého století rozvíjí intervalová aritmetika a intervalová analýza, kdy nepřesné hodnoty jsou reprezentované horním a dolním odhadem. Za zakladatele této části matematiky je často považován R. E. Moore.

Intervalová analýza zahrnuje i zkoumání různých typů řešitelnosti a řešení intervalových lineárních soustav. Mezi některé otázky patří: Existuje realizace intervalů taková, aby výsledná soustava měla řešení? Nebo existuje pro každou realizaci intervalů ohodnocení proměnných, které soustavu řeší?

V této práci se zaměříme na AE řešitelnost intervalových soustav, která zatím není příliš prozkoumaná. Budeme vycházet ze článků M. Hladíka *Weak and strong solvability of interval linear systems of equations and inequalities* [3] a *AE solutions and AE solvability to general interval linear systems* [4]

Cíl práce

Cílem této práce je prostudovat transformace intervalových soustav do jednodušších tvarů. Popsat různé podmínky testující AE řešitelnost intervalových lineárních soustav, včetně speciálních typů. Tyto podmínky implementovat v MATLABu s využitím toolboxu Intlab a numericky porovnat.

Struktura práce

V první kapitole se seznámíme se základy intervalové aritmetiky. Připomeneme důležitá tvrzení z lineárního programování. A řádně si definujeme slabou, silnou, AE a EA řešitelnost intervalových soustav.

Ve druhé kapitole se seznámíme se známými poznatky o řešitelnosti intervalových soustav. Charakterizujeme slabou a silnou řešitelnost. Popíšeme jejich dualitu. Předvedeme polynomiální algoritmus testující postačující podmínku pro silnou řešitelnost. Také ukážeme postačující podmínku pro AE řešitelnost. Charakterizujeme další speciální příklad AE řešitelnosti a na závěr ukážeme dualitu mezi AE a EA řešitelností.

Ve třetí kapitole popíšeme nové poznatky. Nejdříve ukážeme nový důkaz tvrzení, že test slabé řešitelnosti je NP-těžký problém. Pak předvedeme, jak převést libovolnou intervalovou soustavu na soustavu rovnic s volnými proměnnými. Ukážeme si, jak upravit slabé a silné intervalové soustavy tak, abychom snížili počet nebodových intervalů, které obsahují. Na závěr kapitoly popíšeme další vlastnosti AE intervalových soustav nerovnic a obecných AE intervalových soustav.

Čtvrtá kapitola je věnovaná implementaci našeho balíčku aeintlin v prostředí MATLAB, který obsahuje dříve diskutované testy řešitelnosti. Kromě uživatelské a programátorské dokumentace uvedeme také výsledky numerických testů testující úspěšnost nutných a postačujících podmínek.

1 Úvod do intervalových soustav

V této úvodní kapitole se zaměříme na matematické prerekvizity nutné k pochopení vlastní práce.

V první podkapitole se seznámíme s intervaly a částí intervalové aritmetiky. V druhé podkapitole se nachází strohý úvod do lineárního programování. Ve třetí podkapitole tyto znalosti zkombinujeme a popíšeme různé typy řešitelností intervalových soustav. Kapitola je uzavřena seznamem matematického značení, které budeme používat.

Čtenář, který tyto oblasti ovládá, může přeskočit až na seznam se značením.

1.1 Počítání s intervaly

Pro začátek si definujeme některé základní pojmy z intervalové analýzy.

Intervaly

Definice 1 (Reálný interval)**.** *Pro $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, pro které platí $\underline{x} \leq \overline{x}$, nazveme reálným intervalem množinu $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{a | a \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq a \leq \overline{x}\}$ a $\underline{x}$ s $\overline{x}$ nazveme dolní a horní mezí.*

Pokud platí, že $\underline{x} = \overline{x}$, řekneme o intervalu, že je *bodový*. Množinu všech intervalů označíme $\mathbb{IR} = \{[a,b] | a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Také si zavedeme značení pro střed intervalu $x_c = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$ a jeho poloměr $x_\Delta = \frac{\overline{x}-\underline{x}}{2}$.

Základní operace na intervalech jsou:

- Sčítání: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$
- Odčítání: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$
- Násobení: $\mathbf{ab} = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b})]$
- Dělení: $\mathbf{a}/\mathbf{b} = [\min(\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}), \max(\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b})]$ pokud $0 \notin \mathbf{b}$

Intervalové sčítání a násobení jsou komutativní a asociativní. Obecně ale nejsou distributivní. Rovnost $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ platí například pokud $a_\Delta = 0$, nebo pokud $\underline{b} \geq 0$ a $\underline{c} \geq 0$. O aritmetických vlastnostech intervalů píše například G. Mayer [6].

Nerovnost mezi intervaly $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ platí, pokud nerovnost platí pro všechny hodnoty z intervalu. Proto musí platit podmínka $\overline{a} \leq \underline{b}$.

Intervalové matice

Definujeme si intervalové matice a intervalové vektory. (Každé porovnání matic "$\leq$"v následující definici, ale i v celé práci, znamená menší nebo rovno po prvcích.)

Definice 2 (Intervalová matice)**.** *Pro dvě reálné matice $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pro které platí $\underline{A} \leq \overline{A}$, nazveme intervalovou matici množinu matic $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A | A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$ a $\underline{A}$ s $\overline{A}$ nazveme dolní a horní mezí.*

Obdobně jako pro reálné intervaly zavedeme značení pro *středovou matici* $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A})$ a *matici průměru* $A_\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A}-\underline{A})$. Pokud platí, že $\underline{A} = \overline{A}$, řekneme o intervalové matici, že je *bodová*. Množinu všech intervalových matic o rozměrech $m \times n$ budeme označovat $\mathbb{IR}^{m\times n}$.

Intervalovou matici můžeme také chápat, jako množinu všech matic, jejíž prvky odpovídají všem kombinacím hodnot v příslušných intervalech.

Intervalové vektory pak můžeme považovat za speciální případ intervalových matic s rozměrem $m \times 1$. Množinu intervalových vektorů takového rozměru označíme $\mathbb{IR}^n$.

1.2 Lineární programování

V úloze lineárního programování se snažíme najít maximum (nebo minimum) zadané lineární funkce, které splňuje zadané lineární *podmínky* (lineární rovnice a neostré nerovnice). Pomocí věty o silné dualitě lineárních programů lze však dokázat, že jde v reálných číslech o stejně náročnou otázku, jako nalezení řešení splňující lineární podmínky bez hledání optima. V této práci budeme téměř vždy uvažovat druhou variantu bez optimalizační funkce. Tu využijeme pouze v popisu algoritmu 11.

Často kromě rovnic a nerovnic rozlišujeme mezi proměnnými *volnými*, ty mohou nabývat libovolné reálné hodnoty, a *nezápornými* proměnnými, ty mohou nabývat pouze nezáporné reálné hodnoty. Lineární program pak můžeme zapsat pomocí matic

$$Ax + By = b, Cx + Dy \leq d, x \geq 0. \tag{1.1}$$

My budeme s lineárním programování pracovat čistě jako s nástrojem a není ho tedy třeba znát do hloubky. Většinu času si vystačíme se dvěma poznatky:

První důležitý poznatek je: Zjistit, zda lineární program (soustava rovnic tvaru (1.1)) má řešení je polynomiální problém.

Druhý důležitý poznatek je Farkasovo lemma. To nám říká, jak pro každý lineární program vytvořit k němu *duální* lineární program. Tedy takový, aby právě jeden z nich měl řešení. To se nám bude hodit pro přechody mezi jednotlivými typy řešitelnosti. (Obvykle má v lineárním programování slovní spojení duální problém trochu jiný význam v souvislosti s optimalizační variantou problému. V této práci ale pokud budeme mluvit o duálních soustavách, máme na mysli právě takovou dvojici soustav, kdy je řešitelná právě jedna z nich.) Konkrétní znění Farkasova lemmatu tak, jak ho budeme používat, je:

Věta 3 (Farkasovo lemma)**.** *Právě jedna ze soustav*

$$Ax + By = b, Cx + Dy \leq d, x \geq 0$$

a

$$A^\top p + C^\top q \geq 0, B^\top p + D^\top q = 0, b^\top p + d^\top q = -1, q \geq 0$$

je řešitelná.

O lineárním programování, včetně zmíněných poznatků, detailně píše A. Schrijver ve své knize [9].

1.3 Definice řešitelnosti intervalových soustav

Pokud do lineární soustavy vložíme intervaly místo reálných čísel, dostaneme množinu lineárních programů, která bude obsahovat všechny možné realizace intervalů. Naskytnou se nám pak dvě přirozené otázky. První je, jestli je některý z těchto lineárních programů řešitelný. Tomu budeme říkat *slabá řešitelnost*. Druhá otázka je, jestli jsou všechny takové lineární programy řešitelné. Této otázce budeme říkat *silná řešitelnost*. Jak si ukážeme v následující kapitole, tyto otázky jsou úzce propojeny, protože mezi nimi existuje určitá forma duality.

(Symbol $\mathbb{R}_0^+$ označuje množinu reálných nezáporných čísel.)

Definice 4 (Slabá řešitelnost)**.** *Nechť* $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{m \times n'}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m' \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^{m}$ *a* $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^{m'}$. *Lineární intervalová soustava*

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y = \mathbf{b}, \mathbf{C}x + \mathbf{D}y \leq \mathbf{d}, x \geq 0$$

je slabě řešitelná právě tehdy, když formule

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists d \in \mathbf{d}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$Ax + By = b, Cx + Dy \leq d \tag{1.2}$$

je pravdivá.

Definice 5 (Silná řešitelnost)**.** *Nechť* $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{m \times n'}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{m' \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^{m}$ *a* $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^{m'}$. *Lineární intervalová soustava*

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y = \mathbf{b}, \mathbf{C}x + \mathbf{D}y \leq \mathbf{d}, x \geq 0$$

je silně řešitelná právě tehdy, když formule

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}, \forall C \in \mathbf{C}, \forall D \in \mathbf{D}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall d \in \mathbf{d}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$Ax + By = b, Cx + Dy \leq d \tag{1.3}$$

je pravdivá.

Zajímavé je si intervaly rozdělit do dvou skupin. Budeme jim říkat *slabé* a *silné*. Otázka AE řešitelnosti se pak ptá, jestli pro každou kombinaci hodnot ze silných intervalů, existuje kombinace hodnot ze slabých intervalů taková, aby byl výsledný lineární program řešitelný.

Definice 6 (AE řešitelnost)**.** *Nechť* $\mathbf{A}^\forall \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^\exists \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{B}^\forall \in \mathbb{IR}^{m \times n'}$, $\mathbf{B}^\exists \in \mathbb{IR}^{m \times n'}$, $\mathbf{C}^\forall \in \mathbb{IR}^{m' \times n}$, $\mathbf{C}^\exists \in \mathbb{IR}^{m' \times n}$, $\mathbf{D}^\forall \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $\mathbf{D}^\exists \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $\mathbf{b}^\forall \in \mathbb{IR}^{m}$, $\mathbf{b}^\exists \in \mathbb{IR}^{m}$, $\mathbf{d}^\forall \in \mathbb{IR}^{m'}$ *a* $\mathbf{d}^\exists \in \mathbb{IR}^{m'}$. *Lineární intervalová soustava tvaru*

$$(\mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists)x + (\mathbf{B}^\forall + \mathbf{B}^\exists)y = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists,$$
$$(\mathbf{C}^\forall + \mathbf{C}^\exists)x + (\mathbf{D}^\forall + \mathbf{D}^\exists)y \leq \mathbf{d}^\forall + \mathbf{d}^\exists,$$
$$x \geq 0$$

je AE řešitelná právě tehdy, když formule

$$\forall A^\forall \in \mathbf{A}^\forall, \forall B^\forall \in \mathbf{B}^\forall, \forall C^\forall \in \mathbf{C}^\forall, \forall D^\forall \in \mathbf{D}^\forall, \forall b^\forall \in \mathbf{b}^\forall, \forall d^\forall \in \mathbf{d}^\forall,$$

$$\exists A^{\exists} \in \mathbf{A}^{\exists}, \exists B^{\exists} \in \mathbf{B}^{\exists}, \exists C^{\exists} \in \mathbf{C}^{\exists}, \exists D^{\exists} \in \mathbf{D}^{\exists}, \exists b^{\exists} \in \mathbf{b}^{\exists}, \exists d^{\exists} \in \mathbf{d}^{\exists},$$
$$\exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$
$$(A^{\forall} + A^{\exists})x + (B^{\forall} + B^{\exists})y = (b^{\forall} + b^{\exists}),$$
$$(C^{\forall} + C^{\exists})x + (D^{\forall} + D^{\exists})y \leq (d^{\forall} + d^{\exists}) \tag{1.4}$$

je pravdivá.

Jeden z možných úhlů pohledu na AE řešitelnost je, že máme množinu množin lineárních programů a chceme zjistit, jestli v každé množině je alespoň jeden lineární program řešitelný.

Otázka EA řešitelnosti se naopak ptá, jestli existuje kombinace hodnot ze slabých intervalů taková, aby pro každou kombinaci hodnot ze silných intervalů byl výsledný lineární program řešitelný.

Definice 7 (EA řešitelnost)**.** *Nechť* $\mathbf{A}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^{\forall} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{B}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m \times n'}$, $\mathbf{B}^{\forall} \in \mathbb{IR}^{m \times n'}$, $\mathbf{C}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m' \times n}$, $\mathbf{C}^{\forall} \in \mathbb{IR}^{m' \times n}$, $\mathbf{D}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $\mathbf{D}^{\forall} \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $\mathbf{b}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m}$, $\mathbf{b}^{\forall} \in \mathbb{IR}^{m}$, $\mathbf{d}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m'}$ *a* $\mathbf{d}^{\forall} \in \mathbb{IR}^{m'}$. *Lineární intervalová soustava tvaru*

$$(\mathbf{A}^{\forall} + \mathbf{A}^{\exists})x + (\mathbf{B}^{\forall} + \mathbf{B}^{\exists})y = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists},$$
$$(\mathbf{C}^{\forall} + \mathbf{C}^{\exists})x + (\mathbf{D}^{\forall} + \mathbf{D}^{\exists})y \leq \mathbf{d}^{\forall} + \mathbf{d}^{\exists},$$
$$x \geq 0$$

je EA řešitelná právě tehdy, když formule

$$\exists A^{\exists} \in \mathbf{A}^{\exists}, \exists B^{\exists} \in \mathbf{B}^{\exists}, \exists C^{\exists} \in \mathbf{C}^{\exists}, \exists D^{\exists} \in \mathbf{D}^{\exists}, \exists b^{\exists} \in \mathbf{b}^{\exists}, \exists d^{\exists} \in \mathbf{d}^{\exists},$$
$$\forall A^{\forall} \in \mathbf{A}^{\forall}, \forall B^{\forall} \in \mathbf{B}^{\forall}, \forall C^{\forall} \in \mathbf{C}^{\forall}, \forall D^{\forall} \in \mathbf{D}^{\forall}, \forall b^{\forall} \in \mathbf{b}^{\forall}, \forall d^{\forall} \in \mathbf{d}^{\forall},$$
$$\exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$
$$(A^{\forall} + A^{\exists})x + (B^{\forall} + B^{\exists})y = (b^{\forall} + b^{\exists}),$$
$$(C^{\forall} + C^{\exists})x + (D^{\forall} + D^{\exists})y \leq (d^{\forall} + d^{\exists}) \tag{1.5}$$

je pravdivá.

Obdobně jako u AE řešitelnosti jeden z možných úhlů pohledu na EA řešitelnost je, že máme množinu množin lineárních programů a chceme zjistit, jestli v nějaké z těchto množin jsou všechny lineární programy řešitelné.

Jak si ukážeme v následující kapitole, dualita mezi slabou a silnou řešitelností se dá rozšířit na dualitu mezi AE a EA řešitelností. Jinak se EA řešitelností nebudeme příliš zabývat, a raději se budeme věnovat AE řešitelnosti a některým jejím zjednodušeným variantám.

1.4 Seznam značení

e	jedničkový vektor (vektor, který má všechny prvky 1)
$\mathbf{a}$	interval, nebo intervalový vektor
$\mathbf{A}$	intervalová matice
$\underline{a}$	dolní mez intervalu, intervalového vektoru
$\underline{A}$	dolní mez intervalové matice
$\overline{a}$	horní mez intervalu, intervalového vektoru
$\overline{A}$	horní mez intervalové matice
a_c	střed intervalu, intervalového vektoru
A_c	střed intervalové matice
a_Δ	poloměr intervalu, intervalového vektoru
A_Δ	poloměr intervalové matice
$\mathrm{diag}(s)$	diagonální matice, která má na diagonále hodnoty vektoru s
$\{\pm 1\}^n$	množina n-dimensionálních vektorů s prvky -1 a 1
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{IR}$	množina intervalů

2 Známé poznatky

V této kapitole se podíváme na známé poznatky o řešitelnosti intervalových soustav a jejich přímé implikace. V jednotlivých podkapitolách se podíváme na slabou, silnou, AE a EA řešitelnost.

2.1 Slabá řešitelnost

O slabé řešitelnosti je toho známé asi nejvíce ze všech typů řešitelnosti, kterými se budeme zabývat. Jedním z důvodů je i skutečnost, že otázka, zda je slabá soustava řešitelná, splývá s otázkou, zda má řešení. Rozdíl mezi řešitelností a řešením intervalové soustavy se projeví až u silné řešitelnosti. Silné řešení je takové ohodnocení proměnných, které splňuje všechny vzniklé lineární programy. My se v celé práci ovšem budeme zabývat pouze otázkou řešitelnosti.

Nejdříve si slabou řešitelnost charakterizujeme. Podle článku M. Hladíka [3] platí věta:

Věta 8 (Charakterizace slabé řešitelnosti)**.** *Intervalová soustava ve tvaru* (1.2) *z definice 4 je řešitelná právě tehdy, když reálná soustava*

$$\begin{aligned} \underline{A}x + B_c y &\le B_\Delta |y| + \overline{b}, \\ -\overline{A}x - B_c y &\le B_\Delta |y| - \underline{b}, \\ \underline{C}x + D_c y &\le D_\Delta |y| + \overline{d}, \qquad\qquad x \ge 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

je řešitelná.

Z této věty ihned vyplývá, že tento výraz charakterizuje i slabé intervalové soustavy tvaru

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y \le \mathbf{b}, -\mathbf{A}x - \mathbf{B}y \le -\mathbf{b}, \mathbf{C}x + \mathbf{D}y \le \mathbf{d}, x \ge 0. \tag{2.2}$$

Tedy z každé slabé intervalové soustavy lze vytvořit ekvivalentní slabou intervalovou soustavu nerovnic. V následující kapitole ve větě 20 si i ukážeme, jak vytvořit ekvivalentní slabou intervalovou soustavu rovnic s volnými proměnnými.

Druhý výsledek charakterizace je, že otestování, zda má slabá intervalová soustava řešení, je v NP. Pokud bychom znali $\operatorname{sgn}(y)$, mohli bychom pak definovat $z = |y|$. Proto by platilo $y = \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(y))z$ a charakterizaci slabé řešitelnosti pak můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} \exists s \in \{\pm 1\}^{n'} : \underline{A}x + B_c \operatorname{diag}(s) z &\le B_\Delta z + \overline{b}, \\ -\overline{A}x - B_c \operatorname{diag}(s) z &\le B_\Delta z - \underline{b}, \\ \underline{C}x + D_c \operatorname{diag}(s) z &\le D_\Delta z + \overline{d}, \qquad\qquad x \ge 0, z \ge 0. \end{aligned}$$

Díky tomu máme přímočarý algoritmus na testování slabé řešitelnosti.

Testování slabé řešitelnosti je dokonce NP-úplný problém, jak dokázal například J. Rohn [7]. My dokážeme NP-těžkost tohoto problému v následující kapitole pomocí převodu problému SAT na test slabé řešitelnosti intervalové soustavy.

Se slabou řešitelností souvisí problém hledání množiny všech slabých řešení. Tato množina je sjednocení až $2^{n'}$ konvexních mnohostěnů, proto se často místo samotné množiny hledá *obálka* řešení. Ta má tvar hyperkvádru, který obsahuje celou množinu řešení. I hledání těsné obálky je NP-úplný problém, naštěstí existují aproximační algoritmy, které umí najít hyperkvádr, který těsnou obálku obsahuje. Příkladem může být intervalová verze Gaussovy eliminace [2] nebo Rohnova metoda [8].

2.2 Silná řešitelnost

Úvahy o silné řešitelnosti jsou obecně složitější než u slabé řešitelnosti. Naštěstí existuje forma duality mezi slabou a silnou řešitelností. Můžeme tuto dualitu považovat za rozšíření Farkasova lemmatu do slabé a silné řešitelnosti.

Věta 9 (Dualita slabé a silné řešitelnosti)**.** *Pro každou silnou intervalovou soustavu existuje slabá intervalová soustava taková, že je právě jedna z nich řešitelná. A obráceně.*

Konkrétně pro intervalové soustavy

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y = \mathbf{b}, \mathbf{C}x + \mathbf{D}y \leq \mathbf{d}, x \geq 0 \tag{2.3}$$

a

$$-\mathbf{A}^\top p - \mathbf{C}^\top q \leq 0, \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{b}^\top \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} \mathbf{D}^\top \\ \mathbf{d}^\top \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, q \geq 0 \tag{2.4}$$

platí, že (2.3) *je slabě řešitelná právě tehdy, když* (2.4) *není silně řešitelná, a obráceně,* (2.3) *je silně řešitelná právě tehdy, když* (2.4) *není slabě řešitelná.*

Důkaz. Ukážeme, jak k silné intervalové soustavě vytvořit duální slabou intervalovou soustavu. Budeme vycházet z tvaru (1.3) z definice 5:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}, \forall C \in \mathbf{C}, \forall D \in \mathbf{D}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall d \in \mathbf{d},$$

$$\exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$Ax + By = b, Cx + Dy \leq d.$$

Použijeme Farkasovo lemma ve tvaru z věty 3:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}, \forall C \in \mathbf{C}, \forall D \in \mathbf{D}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall d \in \mathbf{d} :$$

$$\neg\Big(\exists p \in \mathbb{R}^{n'}, \exists q \in (\mathbb{R}_0^+)^n :$$

$$A^\top p + C^\top q \geq 0, B^\top p + D^\top q = 0, b^\top p + d^\top q = -1\Big).$$

Na závěr přesuneme negaci na začátek formule. Tím se nám prohodí obecné kvantifikátory na existenční. Pokud zapíšeme rovnosti pomocí blokových matic, dostaneme negaci formule

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists d \in \mathbf{d} :$$

$$\exists p \in \mathbb{R}^m, \exists q \in (\mathbb{R}_0^+)^{m'} :$$

$$-A^\top p - C^\top q \leq 0, \begin{pmatrix} B^\top \\ b^\top \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} D^\top \\ d^\top \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tento výraz platí, pokud slabá intervalová soustava

$$-\mathbf{A}^\top p - \mathbf{C}^\top q \leq 0, \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{b}^\top \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} \mathbf{D}^\top \\ \mathbf{d}^\top \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, q \geq 0$$

není řešitelná.

Důkaz druhé části věty je totožný, pouze bychom začínali s obecnými kvantifikátory, které bychom v průběhu důkazu změnili na existenční. Proto ho nebudeme ani uvádět. □

Další důležitý poznatek pro silné intervalové soustavy je jejich charakterizace. Uvedeme ji ve stejném tvaru, jako M. Hladík v článku [3]. Samotný důkaz charakterizace zde uvádět nebudeme. Jeho hlavní myšlenka je využití duality a charakterizace řešitelnosti slabých intervalových soustav.

Věta 10 (Charakterizace silné řešitelnosti)**.** *Intervalová soustava ve tvaru* (1.3) *z definice 5 je silně řešitelná právě tehdy, když reálná lineární soustava*

$$\begin{aligned} (A_c + diag(s)A_\Delta)x + (B_c + diag(s)B_\Delta)y^1 - (B_c - diag(s)B_\Delta)y^2 & \\ = b_c - diag(s)b_\Delta. & \\ \overline{C}x + \overline{D}y^1 - \underline{D}y^2 \leq \underline{d}, & \\ x, y^1, y^2 \geq 0 & \end{aligned} \tag{2.5}$$

je řešitelná pro každý vektor $s \in \{\pm 1\}^m$*.*

Díky dualitě a skutečnosti, že slabá řešitelnost je NP-úplný problém, můžeme o silné řešitelnosti říct, že je co-NP-úplný problém. Proto poslední poznámka pro silnou řešitelnost, kterou v této podkapitole uvedeme, bude algoritmus testující postačující podmínku pro silnou řešitelnost v polynomiálním čase. Algoritmus je také podle článku [3].

Algoritmus 11 (Postačující podmínka silné řešitelnosti)**.**

Nejdříve vyřešíme lineární program

$$\max \alpha : A_c x + B_c y = b_c, C_c x + D_c y + \alpha e \leq \underline{d}, x \geq 0.$$

Pokud soustava neobsahuje nerovnice, tak ho nahradíme lineárním programem:

$$\max \alpha : A_c x + B_c y = b_c, x \geq \alpha e.$$

Díky tomu dostaneme jedno možné řešení x^*, y^*. Pokud řešení neexistuje, soustava není silně řešitelná. Pokud lineární program není omezený, tak vezmeme libovolné řešení na jeho neomezené hraně.

Následně vytvoříme čtvercovou soustavu rovnic. Pokud $x_i^* = 0$, tak odstraníme i-tý sloupec z $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$. Tím snížíme počet proměnných. Takto jich odstraníme maximálně $n + n' - m$, protože jinak bychom místo čtvercové soustavy začali vytvářet předpodmíněnou soustavu. Pokud $(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ stále není čtvercová matice, přidáme další rovnice $A'x + B'y = b'$, kde řádky matice $(A'\ B')$ jsou ortogonální bází jádra matice $(A_c\ B_c)$ a $b' = A'x^* + B'y^*$.

Pak najdeme obálku řešení upravené soustavy

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y = \mathbf{b}, A'x + B'y = b'.$$

Výsledná obálka $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ neobsahuje všechny možná řešení soustav $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y = \mathbf{b}$, ale pro každou realizaci intervalů obsahuje alespoň jedno řešení.

Na závěr porovnáme nerovnosti $\mathbf{x} \geq 0$ a $\mathbf{Cx} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{d}$, kde je hodnota $\mathbf{Cx} + \mathbf{Dy}$ spočítaná pomocí intervalové aritmetiky. Pokud nerovnosti platí, tak každá realizace intervalů dává řešitelnou soustavu. Pokud nějaká nerovnost neplatí, nebyly jsme schopni rozhodnout.

2.3 AE řešitelnost

O AE řešitelnosti se toho zatím bohužel mnoho neví. Protože slabá i silná řešitelnost jsou její speciální případy, tak za předpokladu, že NP se nerovná co-NP, nepatří ani do jedné z těchto tříd. Sice jsou známé některé nutné a postačující podmínky, ale v současnosti není znám žádný algoritmus, který by byl schopný řešitelnost rozhodnout a zároveň by se jeho doba běhu dala seshora odhadnout exponenciální funkcí.

Víme, že jde o řešitelný problém. Jde totiž o speciální případ rozhodovacího problému v základní reálné algebře. Jak dokázal A. Tarski [10]. Tento postup umí eliminovat kvantifikátory, ale za cenu dvojitě exponenciální časové složitosti.

V naší práci se proto zaměříme na speciální případy AE řešitelnosti a zároveň se pokusíme ukázat různé tvary AE řešitelnosti, které zachovávají složitost obecného problému. Jeden speciální tvar, který je co-NP-úplný, pospal M. Hladík v článku [4]. Ten si ukážeme v následující větě:

Věta 12 (Speciální varianta AE soustavy)**.** *Pokud jsou $B^{\exists}_{\Delta} = 0$ a $D^{\exists}_{\Delta} = 0$, pak je soustava* (1.4) *AE řešitelná právě tehdy, když je soustava*

$$\begin{aligned}
(\underline{A}^{\exists} + A^{\forall}_c + diag(s)A^{\forall}_{\Delta})x + (B^{\exists}_c + B^{\forall}_c + diag(s)B^{\forall}_{\Delta})y_1 \qquad\qquad& \\
-(B^{\exists}_c + B^{\forall}_c - diag(s)B^{\forall}_{\Delta})y_2 &\leq \overline{a}^{\exists} + a^{\forall}_c - diag(s)a^{\forall}_{\Delta}, \\
-(\overline{A}^{\exists} + A^{\forall}_c + diag(s)A^{\forall}_{\Delta})x - (B^{\exists}_c + B^{\forall}_c + diag(s)B^{\forall}_{\Delta})y_1 \qquad\qquad& \\
+(B^{\exists}_c + B^{\forall}_c - diag(s)B^{\forall}_{\Delta})y_2 &\leq -\underline{a}^{\exists} - a^{\forall}_c + diag(s)a^{\forall}_{\Delta}, \\
(\overline{C}^{\forall} + \underline{C}^{\exists})x + (B^{\exists}_c + \overline{D}^{\forall})y_1 - (B^{\exists}_c + \underline{D}^{\forall})y_2 &\leq \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}, \\
x, y_1, y_2 &\geq 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

řešitelná pro každé $s \in \{\pm 1\}^m$.

Z charakterizace slabé řešitelnosti (věta 8) vyplývá, že test slabé řešitelnosti intervalových soustav, pro které je $B_{\Delta} = 0$ a $D_{\Delta} = 0$, je polynomiální problém. To nám dalo naději, že AE řešitelnost intervalové soustav je co-NP-úplný problém pokud $B^{\exists}_{\Delta} = 0$ a $D^{\exists}_{\Delta} = 0$. Věta 12 nám dokazuje, že to tak skutečně je.

Ve stejném článku je tato ekvivalence zobecněna na postačující podmínku pro obecnou AE řešitelnost:

Věta 13 (Postačující podmínka AE řešitelnosti). *Intervalová soustava* (1.4) *z definice 6 je AE řešitelná, pokud existuje* $z \in \{\pm 1\}^{n'}$ *takové, že pro všechny* $s \in \{\pm 1\}^m$ *je soustava*

$$
\begin{aligned}
(\underline{A}^{\exists} + A_c^{\forall} + diag(s)A_{\Delta}^{\forall})x &+ (B_c^{\exists} - B_{\Delta}^{\exists} diag(z) + B_c^{\forall} + diag(s)B_{\Delta}^{\forall})y_1 \\
&- (B_c^{\exists} - B_{\Delta}^{\exists} diag(z) + B_c^{\forall} - diag(s)B_{\Delta}^{\forall})y_2 \le \overline{a}^{\exists} + a_c^{\forall} - diag(s)a_{\Delta}^{\forall}, \\
-(\overline{A}^{\exists} + A_c^{\forall} + diag(s)A_{\Delta}^{\forall})x &- (B_c^{\exists} + B_{\Delta}^{\exists} diag(z) + B_c^{\forall} + diag(s)B_{\Delta}^{\forall})y_1 \\
&+ (B_c^{\exists} + B_{\Delta}^{\exists} diag(z) + B_c^{\forall} - diag(s)B_{\Delta}^{\forall})y_2 \le -\underline{a}^{\exists} - a_c^{\forall} + diag(s)a_{\Delta}^{\forall}, \\
(\overline{C}^{\forall} + \underline{C}^{\exists})x &+ (D_c^{\exists} - D_{\Delta}^{\exists} diag(z) + \overline{D}^{\forall})y_1 \\
&- (D_c^{\exists} - D_{\Delta}^{\exists} diag(z) + \underline{D}^{\forall})y_2 \le \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}, \\
&x, y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

řešitelná.

2.4 EA řešitelnost

Poslední typ řešitelnosti, kterým se zde budeme alespoň částečně zabývat je EA řešitelnost. Ta je ještě méně známá než AE řešitelnost. Jedním z důvodů pro to je i skutečnost, že mezi AE a EA řešitelností existuje dualita stejně jako mezi slabou a silnou řešitelností. A proto není nutné je zkoumat samostatně.

Ještě než si ukážeme samotnou dualitu, je dobré si ukázat tvrzení o výběru intervalu:

Tvrzení 14 (Výběr z intervalu). *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *a formuli* f *platí ekvivalence:*

$$Qy \in \mathbf{y} : f(x + y) \iff Qy \in \mathbf{y} + x : f(y),$$

kde Q *zastupuje kvantifikátor* ($\forall$, *nebo* $\exists$).

Tvrzení říká, že nezáleží, jestli vybereme hodnotu z intervalu a pak k ní přičteme reálné číslo, nebo jestli hodnotu vybíráme z již posunutého intervalu. Tvrzení nám zjednoduší některé důkazy, protože nebudeme muset některé věty dokazovat pro slabou a AE řešitelnost zvlášť, ale věty již dokázané pro slabou řešitelnost budeme moci přímo zobecnit pro AE řešitelnost.

Díky tomuto tvrzení můžeme formuli (1.4) z definice AE řešitelnosti přepsat na ekvivalentní

$$
\begin{gathered}
\forall A \in \mathbf{A}^{\forall}, \forall B \in \mathbf{B}^{\forall}, \forall C \in \mathbf{C}^{\forall}, \forall D \in \mathbf{D}^{\forall}, \forall b \in \mathbf{b}^{\forall}, \forall d \in \mathbf{d}^{\forall}, \\
\exists A' \in \mathbf{A}^{\exists} + A, \exists B' \in \mathbf{B}^{\exists} + B, \exists C' \in \mathbf{C}^{\exists} + C, \exists D' \in \mathbf{D}^{\exists} + D, \exists b' \in \mathbf{b}^{\exists} + b, \exists d' \in \mathbf{d}^{\exists} + d, \\
\exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} : \\
A'x + B'y = b', C'x + D'y \le d'.
\end{gathered} \tag{2.8}
$$

Nyní můžeme rozšířit větu o dualitě mezi slabými a silnými intervalovými soustavami na AE a EA soustavy.

Věta 15 (Dualita AE a EA řešitelnosti). *Pro každou AE intervalovou soustavu existuje EA intervalová soustava taková, že je právě jedna z nich řešitelná. A obráceně.*

Důkaz. Na (2.8) můžeme přímo využít dualitu slabé a silné řešitelností. Tím dostaneme

$$\forall A \in \mathbf{A}^\forall, \forall B \in \mathbf{B}^\forall, \forall C \in \mathbf{C}^\forall, \forall D \in \mathbf{D}^\forall, \forall b \in \mathbf{b}^\forall, \forall d \in \mathbf{d}^\forall :$$

$$\neg\Bigg(\forall A' \in \mathbf{A}^\exists + A, \forall B' \in \mathbf{B}^\exists + B, \forall C' \in \mathbf{C}^\exists + C, \forall D' \in \mathbf{D}^\exists + D,$$

$$\forall b' \in \mathbf{b}^\exists + b, \forall d' \in \mathbf{d}^\exists + d : \exists p \in \mathbb{R}^m, \exists q \in (\mathbb{R}_0^+)^{m'} :$$

$$-A'^\top p - C'^\top q \leq 0, \begin{pmatrix} B'^\top \\ b'^\top \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} D'^\top \\ d'^\top \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\Bigg).$$

Po úpravě už dostaneme negaci formule testující EA řešitelnost:

$$\exists A \in \mathbf{A}^\forall, \exists B \in \mathbf{B}^\forall, \exists C \in \mathbf{C}^\forall, \exists D \in \mathbf{D}^\forall, \exists b \in \mathbf{b}^\forall, \exists d \in \mathbf{d}^\forall,$$

$$\forall A' \in \mathbf{A}^\exists + A, \forall B' \in \mathbf{B}^\exists + B, \forall C' \in \mathbf{C}^\exists + C, \forall D' \in \mathbf{D}^\exists + D,$$
$$\forall b' \in \mathbf{b}^\exists + b, \forall d' \in \mathbf{d}^\exists + d : \exists p \in \mathbb{R}^m, \exists q \in (\mathbb{R}_0^+)^{m'} :$$
$$-A'^\top p - C'^\top q \leq 0, \begin{pmatrix} B'^\top \\ b'^\top \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} D'^\top \\ d'^\top \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v důkazu věty 9 nebudeme dokazovat druhý směr, protože důkaz dostaneme pouze prohozením kvantifikátorů. □

Díky dualitě mnoho vět a tvrzeních o AE řešitelnosti má obdobu i pro EA řešitelnost. Na takové věty a tvrzení v naší práci upozorníme, případně je i dokážeme. Jinak se ale převážně zaměříme na AE řešitelnost.

3 Ekvivalence soustav a problémů

V této kapitole se zaměříme na srovnání různých tvarů intervalových soustav a ekvivalenci problémů. V první podkapitole si dokážeme, že testování slabé řešitelnosti je NP-těžký problém pomocí převodu SATu. Ve druhé podkapitole dokážeme, že test řešitelnosti intervalových soustav rovnic s pouze volnými proměnnými je stejně náročný, jako test řešitelnosti obecných soustav. Ve třetí podkapitole ukážeme, jak transformovat slabou intervalovou soustavu, tak aby se všechny nebodové intervaly nacházeli v jedné nerovnici. Za pomocí duality pak ukážeme, že silné intervalové soustavy lze přetransformovat tak, aby všechny nebodové intervaly byly násobeny stejnou proměnnou. Ve čtvrté podkapitole se zaměříme na soustavy nerovnic. Vyslovíme hypotézu o složitosti testu jejich řešitelnosti a popíšeme její variantu, kterou je možné rozhodnout v polynomiálním čase. V poslední podkapitole popíšeme podmínky pro tvary AE intervalových soustav, které postačují, aby test řešitelnosti takového tvaru byl ekvivalentní s testem AE řešitelnosti obecných intervalových soustav.

3.1 Převod SATu

Jak jsme již diskutovali ve druhé kapitole, testování slabé řešitelnosti intervalových soustav je NP-úplné. V důsledcích charakterizace slabé řešitelnosti (věta 8) jsme již odůvodňovali, proč je testování slabé řešitelnosti v NP. Nyní si dokážeme, že je i NP-těžké, pomocí převodu problému SAT v konjunktivní normální formě (CNF) na slabou intervalovou soustavu.

Nejprve si budeme muset pomocí slabého intervalu vytvořit disjunkci:

Lemma 16 (Disjunkce s rovností s nulou)**.** *Nechť* $x \in \mathbb{R}_0^+$ *a* $y \in \mathbb{R}_0^+$*. Pak formule*

$$\exists a \in [-1, 1], \exists z \in \mathbb{R} : x + y + az = 0, x - y + z = 0$$

je pravdivá právě tehdy, když $x = 0$ *nebo* $y = 0$*.*

Důkaz. Ekvivalenci rozdělíme na dvě implikace:

- Implikace z hora dolů: Druhá rovnice nám pro dané x a y jednoznačně určuje hodnotu $z = y - x$. Tu můžeme dosadit do první rovnice a dostat tím ekvivalentní formuli

  $$\exists a \in [-1, 1] : x + y + a(y - x) = 0,$$

  která je ekvivalentní k formuli

  $$\exists a \in [-1, 1] : (1 - a)x + (1 + a)y = 0.$$

  Pokud by x ani y nebyly rovny nule, tak by výrazy $1 - a$ i $1 + a$ musely být rovny nule a to je spor.

- Druhý směr implikace: Pokud je $x = 0$, tak můžeme vybrat $z = y$ a $a = -1$. Pak obě rovnosti platí. A pokud je $y = 0$, tak můžeme vybrat $z = -x$ a $a = 1$ a vtom případě rovnost bude také platit.

□

Přidáním třetí rovnosti můžeme vytvořit z x binární proměnou a y pak bude její negace:

Lemma 17 (Binární proměnná)**.** *Nechť $x \in \mathbb{R}_0^+$ a $y \in \mathbb{R}_0^+$. Pak formule*

$$\exists a \in [-1, 1], \exists z \in \mathbb{R} : x + y + az = 0, x - y + z = 0, x + y = 1$$

je pravdivá právě tehdy, když $x = 0 \wedge y = 1$ nebo $x = 1 \wedge y = 0$.

Důkaz. V přidané rovnici $x + y = 1$ se nevyskytuje z ani a, proto můžeme přepsat formuli na ekvivalentní

$$x + y = 1 \wedge (\exists a \in [-1, 1], \exists z \in \mathbb{R} : x + y + az = 0, x - y + z = 0).$$

Ta podle předchozího lemmatu je ekvivalentní s formulí

$$x + y = 1 \wedge (x = 0 \vee y = 0).$$

S využitím distributivity získáme formuli

$$(x + y = 1 \ \wedge \ x = 0) \ \vee \ (x + y = 1 \ \wedge \ y = 0),$$

která už je triviálně ekvivalentní s formulí

$$(y = 1 \ \wedge \ x = 0) \ \vee \ (x = 1 \ \wedge \ y = 0).$$

□

Pomocí binárních proměnných už můžeme dokázat následující tvrzení:

Tvrzení 18 (Ekvivalence slabé řešitelnosti a SATu)**.** *Každý výrok v konjunktivní normální formě (CNF) lze v polynomiální čase přepsat na slabou intervalovou soustavu.*

Důkaz. Každý výrok V v CNF je konjunkce klauzulí $C \in V$. Každá taková klauzule je disjunkce literálů $\ell \in C$. Každý literál je pak výroková proměnná p_i, nebo její negace $\neg p_i$. Každý výrok V se dá napsat, jako

$$\bigwedge_{C \in V} \bigvee_{\ell \in C} \ell.$$

Pro naše účely si každou klauzuli rozdělíme na dvě části. V první části $P(C)$ budou pouze literály, které mají hodnotu výrokové proměnné a v druhé části $N(C)$ budou pouze literály, které mají hodnotu negace výrokové proměnné. S tímto rozdělení můžeme výrok V zapsat jako

$$\bigwedge_{C \in V} \left(\left(\bigvee_{\ell \in P(C)} p_\ell \right) \vee \left(\bigvee_{\ell \in N(C)} \neg p_\ell \right) \right).$$

Ke každému takovému výroku s n výrokovými proměnnými můžeme přiřadit slabou intervalovou soustavu:

$$x + y + [-I_n, I_n]z = 0, x - y + z = 0, x + y = e, x \geq 0, y \geq 0, \tag{3.1}$$

$$\forall C \in V : \sum_{\ell \in P(c)} x_\ell + \sum_{\ell \in N(c)} (1 - y_\ell) \geq 1 \tag{3.2}$$

Pokud máme ohodnocení výrokových proměnných, které splňuje výrok V, tak podle něj může ohodnotit proměnné v soustavě:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (1,0) & \text{if } p_i \\ (0,1) & \text{if } \neg p_i \end{cases}.$$

Takové ohodnocení podle lemmatu 17 bude splňovat podmínky (3.1). Zároveň bude splňovat i nerovnice (3.2), protože v každé klauzuli musí být alespoň jeden literál pravdivý, proto bude alespoň jedno $x_\ell = 1$ nebo $y_\ell = 0$ a nerovnice pak bude splněna.

Obráceně, pokud máme řešení slabé intervalové soustavy, tak podle lemmatu 17 budou x_i a y_i splňovat formuli $(x_i = 0 \wedge y_i = 1) \vee (x_i = 1 \wedge y_i = 0)$. Pak můžeme výrokové proměnné p_i ohodnotit pravdivostní hodnotou $x_i = 1$. Protože je splněna každá nerovnice z (3.2), musí být i v každé klauzuli výroku V jeden pravdivý literál. □

3.2 Rovnicový tvar

V první kapitole jsme definovali lineární intervalové soustavy pomocí rovnic, nerovnic, volných a nezáporných proměnných. Nabízí se otázka, zda bychom je nemohli definovat jednodušeji.

Libovolný reálný lineární program lze přepsat na soustavu rovnic s nezápornými proměnnými nebo nerovnic s volnými proměnnými. Naopak soustava rovnic s volnými proměnnými je v oboru reálných čísel jednodušší problém, který se dá řešit rychlejšími algoritmy. Otázka tedy je, jestli podobné situace nenastávají i pro AE a EA řešitelnost intervalových soustav.

Jak vyplývá z věty 12, test AE řešitelnosti intervalové soustavy rovnic a nerovnic s nezápornými proměnnými je co-NP-úplný problém. Proto zcela jistě ne každé omezení na soustavu nám zachová složitost problému. V této podkapitole si ukážeme, že pro každou AE i EA lineární intervalovou soustavu lze v polynomiálním čase vytvořit ekvivalentní soustavu rovnic s volnými proměnnými polynomiální velikosti. Nejprve si dokážeme toto tvrzení pro slabou a silnou řešitelnost a poté ho rozšíříme i pro AE a EA řešitelnost.

Nejdříve potřebujeme přijít se způsobem, jak pomocí slabé intervalové rovnice vytvořit nerovnici. Konkrétně budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 19 (Intervalová nerovnost). *Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak platí:*

$$(\exists a \in [0,1])(ax = 1) \iff x \geq 1.$$

Důkaz. První krok důkazu je využití charakterizace slabé intervalové soustavy. Zbytek důkazu je už jenom aritmetika.

$$\begin{aligned}(\exists a \in [0{,}1])(ax = 1) &\iff 0.5x \leq 0.5|x| + 1 \ \wedge\ -0.5x \leq 0.5|x| - 1\\ &\iff 0.5x - 1 \leq 0.5|x| \ \wedge\ 1 - 0.5x \leq 0.5|x|\\ &\iff |0.5x - 1| \leq 0.5|x|\\ &\iff |x - 2| \leq |x|\\ &\iff x \geq 1\end{aligned}$$

□

S tímto nástrojem již jsme schopní libovolnou slabou intervalovou soustavu převést na soustavu slabých rovnic s volnými proměnnými.

Věta 20 (Slabé soustavy rovnic)**.** *Ke každé slabé intervalové lineární soustavě ve tvaru* (1.2) *z definice 4 lze v polynomiálním čase vytvořit ekvivalentní slabou soustavu rovnic s volnými proměnnými. Jedna z takových ekvivalentních soustav je:*

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists d \in \mathbf{d},$$

$$\exists I \in [0, I_{m'}], \exists J \in [0, I_n], \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0\\ C & D & I_{m'} & 0\\ -I_n & 0 & 0 & I_n\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z_1\\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\\ d+e\\ e\\ e\\ e \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Ekvivalenci nejprve dokážeme pro konkrétní výběr reálných matic. Začneme tedy s tvarem

$$\exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} : Ax + By = b, Cx + Dy \leq d.$$

V této formuli se již žádné intervaly nevyskytují, proto s ním můžeme pracovat jako s lineárním programem v reálných číslech.

Nejprve se musíme vypořádat s nezápornými proměnnými. To lze udělat běžnou úpravou, kdy každou nezápornou proměnnou nahradíme volnou proměnnou a přidáme nerovnici $x \geq 0$. Dostaneme tak ekvivalentní tvar

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} : Ax + By = b, Cx + Dy \leq d, -x \leq 0.$$

Druhý krok je odstranění nerovností. Toho bychom mohli dosáhnout pomocí přičtení nezáporných proměnných k menší části nerovnice. Tím by se nám ale do formule vrátili zpátky nezáporné proměnné. Proto místo nezáporných proměnných použijeme proměnné, které jsou větší nebo rovno jedné:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^n :$$

$$Ax + By = b, Cx + Dy + z_1 = d + e, -x + z_2 = e, z_1 \geq e, z_2 \geq e.$$

Využijeme lemma 19, která nerovnosti upraví na slabé rovnice.

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^n, \exists I \in [0,I_{m'}], \exists J \in [0,I_n]:$$

$$Ax + By = b, Cx + Dy + I_{m'} z_1 = d + e, -I_n x + I_n z_2 = e, I z_1 = e, J z_2 = e$$

Díky tomu jsme dostali tvar bez nerovnic a nezáporných proměnných.

Znalost této ekvivalence můžeme přímo použít na definici 4 o slabé řešitelnosti a díky tomu dostaneme ekvivalentní formuli pro slabou řešitelnost.

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists d \in \mathbf{d},$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^n, \exists I \in [0,I_{m'}], \exists J \in [0,I_n]:$$

$$Ax + By = b, Cx + Dy + I_{m'} z_1 = d + e, -I_n x + I_n z_2 = e, I z_1 = e, J z_2 = e$$

Pokud prohodíme existenční kvantifikátory a rovnice zapíšeme jako jednu rovnost pomocí složené matice dostaneme tak požadovaný tvar.

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists d \in \mathbf{d},$$

$$\exists I \in [0, I_{m'}], \exists J \in [0, I_n], \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^{n'}:$$

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & I_{m'} & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d+e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

□

Pro silnou řešitelnost platí obdobné tvrzení.

Věta 21 (Silné soustavy rovnic)**.** *Ke každé silné intervalové soustavě ve tvaru* (1.3) *z definice 5 lze v polynomiálním čase vytvořit ekvivalentní silnou soustavu rovnic s volnými proměnnými. Jedna z takových ekvivalentních soustav je:*

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}, \forall C \in \mathbf{C}, \forall D \in \mathbf{D}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall d \in \mathbf{d}, \forall I \in [0,I_n], \forall J \in [0,I_{m'}]:$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists y' \in \mathbb{R}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^n, \exists z_3 \in \mathbb{R}^{m'}:$$

$$\begin{pmatrix} A & B & b & 0 & 0 & 0 \\ C & D & d & -I_{m'} & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m'} & 0 & J \\ -e^\top & 0 & -1 & e^\top & e^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Pro dokázání ekvivalence využijeme duality silné a slabé řešitelnosti z věty 9. Ta nám dá negaci tvaru:

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists d \in \mathbf{d},$$

$$\exists p \in \mathbb{R}^m, \exists q \in (\mathbb{R}_0^+)^{m'} :$$

$$-A^\top p - C^\top q \leq 0, \begin{pmatrix} B^\top \\ b^\top \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} D^\top \\ d^\top \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Na ten můžeme přímo aplikovat větu 20 a získat tak negaci

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists C \in \mathbf{C}, \exists D \in \mathbf{D}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists d \in \mathbf{d},$$

$$\exists I \in [0, I_n], \exists J \in [0, I_{m'}], \exists p \in \mathbb{R}^m, \exists q \in \mathbb{R}^{m'}, \exists r_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists r_2 \in \mathbb{R}^n :$$

$$\begin{pmatrix} D^\top & B^\top & 0 & 0 \\ d^\top & b^\top & 0 & 0 \\ -C^\top & -A^\top & I_n & 0 \\ -I_{m'} & 0 & 0 & I_{m'} \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}.$$

Znova použijeme dualitu, aby jsme se dostali zpátky do silné řešitelnosti:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{B}, \forall C \in \mathbf{C}, \forall D \in \mathbf{D}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall d \in \mathbf{d}, \forall I \in [0, I_n], \forall J \in [0, I_{m'}] :$$

$$\exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists y' \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^n, \exists z_3 \in \mathbb{R}^{m'} :$$

$$\begin{pmatrix} D & d & -C & -I_{m'} & 0 & 0 \\ B & b & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m'} & 0 & J \\ 0 & -1 & e^\top & e^\top & e^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tento tvar již je ekvivalentní se soustavou ze zadání. □

Obdobné věty platí i pro AE a EA intervalové soustavy. My ovšem vyslovíme a dokážeme větu pouze pro AE intervalové soustavy.

Věta 22 (AE soustavy rovnic). *Ke každé AE intervalové lineární soustavě ve tvaru (1.4) z definice 6 lze v polynomiálním čase vytvořit ekvivalentní AE intervalovou soustavu rovnic s volnými proměnnými. Jedna z takových ekvivalentních soustav je:*

$$\forall A^\forall \in \mathbf{A}^\forall, \forall B^\forall \in \mathbf{B}^\forall, \forall C^\forall \in \mathbf{C}^\forall, \forall D^\forall \in \mathbf{D}^\forall, \forall b^\forall \in \mathbf{b}^\forall, \forall d^\forall \in \mathbf{d}^\forall,$$

$$\exists A^\exists \in \mathbf{A}^\exists, \exists B^\exists \in \mathbf{B}^\exists, \exists C^\exists \in \mathbf{C}^\exists, \exists D^\exists \in \mathbf{D}^\exists, \exists b^\exists \in \mathbf{b}^\exists, \exists d^\exists \in \mathbf{d}^\exists,$$
$$\exists I \in [0, I_{m'}], \exists J \in [0, I_n], \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists z_1 \in \mathbb{R}^{m'}, \exists z_2 \in \mathbb{R}^{n'} :$$
$$\begin{pmatrix} A^\forall + A^\exists & B^\forall + B^\exists & 0 & 0 \\ C^\forall + C^\exists & D^\forall + D^\exists & I_{m'} & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^\forall + b^\exists \\ d^\forall + d^\exists + e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Věta vyplývá z tvrzení 14. Konkrétně z ekvivalentního zápisu AE intervalové soustavy (2.8). Na ten lze přímo aplikovat ekvivalenci z věty 20 a tak získat požadovaný ekvivalentní tvar AE intervalové soustavy. □

Důkaz pro EA intervalové soustavy by jsme vytvořili stejně, pouze by jsme místo věty 20 využili větu 21.

3.3 Ekvivalentní tvary slabých a silných soustav

V této podkapitole se zaměříme na slabou a silnou řešitelnost. V předchozí podkapitole jsme si ukázali, jak upravit slabou i silnou intervalovou soustavu na soustavu pouze rovnic s volnými proměnnými. Tento převod nám vyjma počtu podmínek a počtu proměnných také zvýšil počet nebodových intervalů. Proto si v této podkapitole ukážeme transformace slabých a silných intervalových soustav, které jejich počet naopak sníží.

Pokud se podíváme na charakterizaci slabé řešitelnosti z věty 8, tak si můžeme všimnout, že NP-těžkost způsobují volné proměnné, které se násobí s intervaly, a že nesouvisí s počtem podmínek ve kterých se intervaly vyskytují. Ukážeme si postup, jak slabou intervalovou soustavu s volnými proměnnými upravit, tak aby se všechny intervaly vyskytovali pouze v jedné nerovnici.

O podobném výsledku psali E. Garajová, M. Hladík a M. Rada [1]. Jejich výsledky jsou silnější. Rozdíl se výrazněji projeví ve variantě pro silnou řešitelnost. Dokázali, že pokud má silná intervalová soustava nebodové intervaly pouze ve vektoru, který se žádnou proměnnou nenásobí, zůstává test řešitelnosti stále co-NP-úplný. Naše upravená silná intervalová soustava bude všechny nebodové intervaly násobit stejnou proměnnou. Nebudeme pouze dokazovat ekvivalenci složitosti ale transformaci mezi soustavami, kterou budeme moci použít i pro AE řešitelnost.

Věta 23 (Zjednodušení slabých soustav)**.** *Ke každé slabé intervalové soustavě existuje ekvivalentní soustava s jednou slabou intervalovou nerovnicí.*

Důkaz. Jak jsme již viděli v předchozí podkapitole, v intervalové soustavě můžeme nahradit nezáporné proměnné volnými přidáním reálné nerovnice $x \geq 0$. A jak víme z prvního důsledku charakterizace slabé řešitelnosti (věty 8), tak ke každé slabé intervalové soustavě existuje ekvivalentní slabá intervalová soustava nerovnic.

Díky tomu nám stačí ukázat ekvivalenci pouze pro slabou intervalovou soustavu nerovnic s volnými proměnnými. Proto náš počáteční tvar intervalové soustavy je

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists a \in \mathbf{a}, \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq a. \tag{3.3}$$

V prvním kroku důkazu využijeme charakterizaci řešitelnosti slabých intervalových soustav (věta 8):

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : A_c x \leq A_\Delta |x| + \overline{a}.$$

Zde nahradíme absolutní hodnotu vektorem nových nezáporných proměnných y. Pro zachování vlastností absolutní hodnoty přidáme vektor $s \in \{\pm 1\}^n$ a novou sadu rovnic $x = \operatorname{diag}(s)y$. Tím získáme formuli

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists s \in \{\pm 1\}^n : A_c x - A_\Delta y \leq \overline{a}, x = \operatorname{diag}(s)y.$$

Nyní se podíváme na každou nově přidanou rovnici $x_i = s_i y_i$ zvlášť. Protože s_i nabývá pouze hodnot ± 1, můžeme jím rovnici vynásobit a získat ekvivalentní tvar $y_i - s_i x_i = 0$.

Dále díky vlastnosti $y_i = |x_i|$ platí nerovnice $y_i \geq x_i$ a zároveň $y_i \geq -x_i$ a díky tomu je můžeme přidat k podmínkám, aniž bychom změnili pravdivostní hodnotu formule. Naopak, pokud budeme předpokládat pouze platnost těchto dvou nerovností, tak platí

$$y_i - s_i x_i = \begin{cases} y_i - x_i \geq x_i - x_i = 0 & \text{pokud } s_i = 1 \\ y_i + x_i \geq -x_i + x_i = 0 & \text{pokud } s_i = -1 \end{cases}$$

$$\implies y_i - s_i x_i \geq 0.$$

Díky tomu rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - s_i x_i = 0$$

může platit pouze, pokud $y_i - s_i x_i = 0$ platí pro každé i. A díky tomu můžeme rovnice $x = \operatorname{diag}(s)y$ nahradit nerovnicemi

$$x - y \leq 0, -x - y \leq 0, -s^\top x + e^\top y \leq 0.$$

Nerovnice $y_i \geq x_i$ a $y_i \geq -x_i$ nám navíc ještě zajistí, že y_i bude nezáporné, takže tuto podmínku už u kvantifikátoru nepotřebujeme. Díky těmto poznatkům můžeme napsat ekvivalentní formuli pomocí blokových matic.

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^n, \exists s \in \{\pm 1\}^n : \begin{pmatrix} A_c & -A_\Delta \\ I_n & -I_n \\ -I_n & -I_n \\ -s^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \overline{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abychom důkaz dokončili, je třeba ještě ukázat, že $\{\pm 1\}^n$ je možné nahradit intervalovým vektorem. K tomu opět využijeme charakterizaci slabé řešitelnosti.

Prvně oddělíme vektor s od zbytku matice:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^n, \exists s \in \{\pm 1\}^n : \begin{pmatrix} A_c & -A_\Delta \\ I_n & -I_n \\ -I_n & -I_n \\ 0 & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ s^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnota $s_i x_i$ bude maximální (nezáporná), pokud $s_i = \operatorname{sgn}(x_i)$, jinak by byla záporná. Proto výraz na pravé straně nerovnice bude nastávat svého maxima, pokud $s = \operatorname{sgn}(x)$ a to konkrétně hodnoty $e^\top |x|$. Tím dostaneme formuli

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A_c & -A_\Delta \\ I_n & -I_n \\ -I_n & -I_n \\ 0 & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e^\top & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| + \begin{pmatrix} \overline{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která charakterizuje slabou řešitelnost intervalové soustavy

$$\exists s \in [-e, e], \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A_c & -A_\Delta \\ I_n & -I_n \\ -I_n & -I_n \\ s^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \overline{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

□

Obdobnou větu lze ukázat i pro silné soustavy. Rozdíl je, že místo jedné podmínky s intervaly se v silné variantě budou všechny nebodové intervaly vyskytovat u jedné proměnné.

Věta 24 (Zjednodušení silných soustav)**.** *Ke každé silné intervalové soustavě existuje ekvivalentní silná soustava, kde se všechny nebodové intervaly násobí stejnou proměnnou.*

Důkaz. Obdobně jako v důkazu pro slabou řešitelnost se budeme zabývat pouze rovnicemi s nezápornými proměnnými. Nerovnice můžeme nahradit rovnicemi přidáním nezáporné proměnné a z důsledku charakterizace silné řešitelnosti (věta 10) můžeme ze silné intervalové soustavy s volnými proměnnými vytvořit ekvivalentní soustavu s nezápornými proměnnými. Tvar silné soustavy, ze které budeme vycházet je

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n : Ax = a.$$

Podle duality je tato soustava silně řešitelná právě tehdy, když soustava

$$\exists A \in \mathbf{A}, \exists a \in \mathbf{a}, \exists p \in \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} -A^\top \\ a^\top \end{pmatrix} p \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

není slabě řešitelná. Na ni můžeme použít ekvivalenci formulí (3.3) a (3.4) z minulého důkazu:

$$\exists s \in [-e, e], \exists p \in \mathbb{R}^m, \exists q \in \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} -A_c^\top & -A_\Delta^\top \\ a_c^\top & -a_\Delta^\top \\ I_m & -I_m \\ -I_m & -I_m \\ s^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz završíme zpětným využití duality. Tak dostaneme formuli:

$$\forall s \in [-e, e], \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in (\mathbb{R}_0^+)^m, \exists y' \in (\mathbb{R}_0^+)^m, \exists z \in \mathbb{R}_0^+ :$$

$$\begin{pmatrix} A_c & -I_m & I_m & -s \\ A_\Delta & I_m & I_m & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_c \\ -a_\Delta \end{pmatrix}.$$

□

Tyto ekvivalentní transformace využijeme v následujících dvou podkapitolách. Díky nim lépe pochopíme složitost testování AE řešitelnosti intervalových soustav.

3.4 AE intervalové soustavy nerovnic

V této podkapitole ještě zůstaneme vzdáleni od obecné AE řešitelnosti a podíváme se na AE řešitelnost intervalových nerovnic. Vyslovíme hypotézu o složitosti jejich řešitelnosti a ukážeme si jeden speciální případ, který lze řešit v polynomiálním čase.

O AE intervalových soustavách s nezápornými proměnnými víme, že test jejich řešitelnosti je co-NP-úplný problém (věta 12). Nabízí se tedy otázka, zda se test řešitelnosti AE intervalových soustav nezjednoduší, pokut se omezíme pouze na nerovnice.

Již víme, že test řešitelnosti slabé intervalové soustavy nerovnic je NP-úplný problém (důsledek věty 8 a tvrzení 18). Také víme, že test silné řešitelnosti intervalových soustav nerovnic je polynomiální problém. (Přímý důsledek věty 10) Nabízí se tedy hypotéza: *Testování řešitelnosti AE intervalových soustav nerovnic je NP-úplný problém.* Tuto hypotézu zatím neumíme dokázat, ale podíváme se na úpravu AE intervalové soustavy nerovnic, která by mohla uvažování nad tímto problémem zjednodušit:

Věta 25. *(Alternativní tvar AE intervalové soustavy nerovnic) Ke každé AE intervalové soustavě nerovnic lez vytvořit ekvivalentní AE intervalovou soustavu nerovnic tvaru:*

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall b \in \mathbf{b}, \exists a \in \mathbf{a}, \exists x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A \\ a^\top \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ a vektory $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ jsou různé od matic a vektorů v původní soustavě.

Důkaz. Pro zjednodušení důkaz budeme předpokládat, že v soustavě jsou pouze volné proměnné. Každou nezápornou proměnnou můžeme nahradit volnou proměnnou a jednou nerovnicí.

Podobně jako v důkazu věty 22 budeme vycházet ze zápisu AE intervalové soustavy (2.8) z tvrzení 14. Na ten lze přímo aplikovat výsledek z věty 23. Tak dostaneme požadovaný tvar

$$\forall D^\forall \in \mathbf{D}^\forall, \forall d^\forall \in \mathbf{d}^\forall, \exists s \in [-e, e], \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^n :$$

$$\begin{pmatrix} D_c^\exists + D^\forall & -D_\Delta^\exists \\ I_n & -I_n \\ -I_n & -I_n \\ s^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \overline{d}^\exists + d^\forall \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $\mathbf{A}$ odpovídá blokové intervalové matici bez posledního řádku. Ten odpovídá vektoru $\mathbf{a}^\top$. A $\mathbf{b}$ odpovídá blokovému intervalovému vektoru také bez posledního řádku. □

Jak víme z důkazu věty 23, pokud nahradíme vektor $s \in [-e, e]$ vektorem $z \in \{\pm 1\}^n$ dostaneme ekvivalentní tvrzení. Proto a není třeba vybírat z nekonečně mnoha možností, ale pouze z exponenciálně mnoho. Pak je AE intervalová soustava řešitelná právě tehdy, pokud každý mnohostěn $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$ protíná některou z nadrovin $a^\top x = 0$. Pokud si pohrajeme s negacemi, dostaneme tvrzení: Není pravda, že by existoval mnohostěn z $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$, který má prázdný průnik se všemi nadrovinami $a^\top x = 0$. Tyto formulace by mohli pomoci s důkazem hypotézy, ale zatím je musíme takto ponechat.

Proto si alespoň popíšeme, jak otestovat řešitelnost speciálního případu AE intervalové soustavy nerovnic, která je tvořená nezápornou maticí.

Věta 26 (AE intervalová soustava nerovnic s nezápornou maticí)**.** *Pokud pro AE intervalovou soustavu nerovnic*

$$(\mathbf{C}^\forall + \mathbf{C}^\exists)x + (\mathbf{D}^\forall + \mathbf{D}^\exists)y \leq \mathbf{d}^\forall + \mathbf{d}^\exists, x \geq 0$$

platí nerovnost $\underline{D}^\forall + D_c^\exists \geq 0$, tak je řešitelná právě tehdy, když je řešitelná i reálná soustava

$$(\overline{C}^\forall + \underline{C}^\exists)x - (\underline{D}^\forall + \overline{D}^\exists)y \leq \underline{d}^\forall + \overline{d}^\exists, x \geq 0, y \geq 0.$$

Důkaz. Opět budeme vycházet ze zápisu AE intervalové soustavy (2.8) z tvrzení 14. Pokud využijeme charakterizaci slabé intervalové řešitelnosti dostaneme formuli

$$\forall C^\forall \in \mathbf{C}^\forall, \forall D^\forall \in \mathbf{D}^\forall, \forall d^\forall \in \mathbf{d}^\forall, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$(C^\forall + \underline{C}^\exists)x + (D^\forall + D_c^\exists)y \leq D_\Delta^\exists |y| + d^\forall + \overline{d}^\exists.$$

Absolutní hodnotu nahradíme novou nezápornou proměnnou y' a původní $y = \operatorname{diag}(s)y'$, kde $s \in \{\pm 1\}^{n'}$:

$$\forall C^\forall \in \mathbf{C}^\forall, \forall D^\forall \in \mathbf{D}^\forall, \forall d^\forall \in \mathbf{d}^\forall, \exists s \in \{\pm 1\}^{n'}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y' \in (\mathbb{R}_0^+)^{n'} :$$

$$(C^{\forall} + \underline{C}^{\exists})x + (D^{\forall} + D_c^{\exists})\mathrm{diag}(s)y' \le D_{\Delta}^{\exists}y' + d^{\forall} + \overline{d}^{\exists}.$$

Pokud $s_j = 1$, tak se ke každé levé straně i-té nerovnice přičte hodnota $(B^{\forall} + B_c^{\exists})_{i,j}y'_j$, která je kladná. Pokud je $s_j = -1$, tak se stejná hodnota odečte. Proto pro minimalizaci levé strany musí každé $s_j = -1$. Díky tomu dostáváme ekvivalentní soustavu

$$\forall C^{\forall} \in \mathbf{C}^{\forall}, \forall D^{\forall} \in \mathbf{D}^{\forall}, \forall d^{\forall} \in \mathbf{d}^{\forall}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y' \in (\mathbb{R}_0^+)^{n'} :$$

$$(C^{\forall} + \underline{C}^{\exists})x - (D^{\forall} + \overline{D}^{\exists})y' \le d^{\forall} + \overline{d}^{\exists}.$$

Znova použijeme tvrzení 14. Tentokrát pro silné intervaly. Díky tomu dostaneme silnou intervalovou soustavu nerovnic s nezápornými proměnnými. Když použijeme charakterizaci silných soustav z věty 10, dostaneme chtěný tvar

$$\exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y' \in (\mathbb{R}_0^+)^{n'} : (\overline{C}^{\forall} + \underline{C}^{\exists})x - (\underline{D}^{\forall} + \overline{D}^{\exists})y' \le \underline{d}^{\forall} + \overline{d}^{\exists}.$$

□

3.5 Ekvivalence tvarů AE intervalových soustav

V předchozích podkapitole 3.2 jsme si ukázali, že testování řešitelnosti intervalových soustavy je ekvivalentní s testováním řešitelnosti intervalových soustav rovnic s volnými proměnnými. V této podkapitole se podíváme na další tvary intervalových soustav, které jsou ekvivalentní. Hlavně si dokážeme, že soustavy, které mají všechny slabé intervaly v jedné nerovnici s volnými proměnnými a zároveň mají všechny silné intervaly v rovnicích s nezápornými proměnnými jsou ekvivalentní k obecné AE intervalové soustavě.

Pro jednoduchost budeme vycházet z rovnicového tvaru z věty 22:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in \mathbb{R}^n : (A + B)x = a + b. \tag{3.5}$$

Nejprve si ukážeme, že nebodové silné a slabé intervaly nemusí sdílet proměnné, ani podmínky.

Věta 27 (Rozdělení matice AE intervalových soustav rovnic)**.** *Každou intervalovou soustavu lze v polynomiálním čase přetransformovat na takovou, aby nebodové silné a slabé intervaly nesdílely podmínky, ani proměnné. Jedním z takových upravených tvarů je:*

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^m, \exists z \in \mathbb{R}^n :$$

$$\begin{pmatrix} A & I_m & 0 \\ I_n & 0 & -I_n \\ 0 & -I_m & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$*,* $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^m$*,* $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ *a* $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$*.*

Důkaz. Podle věty 22 lze každou AE intervalovou soustavu přepsat do varu (3.5). Rovnice, které obsahuje, lze rozdělit na dvě části pomocí přidání nové proměnné pro každou rovnici. Tak dostaneme:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^m :$$

$$Ax + y = a, Bx - y = b.$$

Pokud chceme, aby spolu nebodové slabé a silné intervaly nesdílely proměnné, stačí zavést další sadu proměnných, které budou mít stejnou hodnotu jako x.

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^m, \exists z \in \mathbb{R}^n :$$

$$Ax + y = a, Bz - y = b, x = z$$

Tato soustava je již totožná se soustavou ve větě, kde je zapsaná pomocí složené matice. □

Nyní ukážeme, jak upravit AE intervalovou soustavu tak, aby všechny nebodové silné intervaly byli násobené nezápornými proměnnými. Tato transformace je největší ze všech transformací uvedené v této práci. Počet podmínek a proměnných v nové soustavě je však stále polynomiálně velký vůči původnímu zadání.

Věta 28 (Nezáporné proměnné v AE intervalových soustavách)**.** *Každou intervalovou soustavu lze v polynomiálním čase přetransformovat tak, aby nebodové silné intervaly byly v rovnicích s pouze nezápornými proměnnými. Možný tvar takové soustavy je:*

$$\forall A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$Ax = 0, Cx + By = b, \tag{3.7}$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{m' \times n'}$, $C \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ *a vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^{m'}$ *jsou různé od matic a vektorů v původní soustavě.*

Důkaz. Podle předchozí věty, lze každou AE intervalovou soustavu v polynomiálním čase přetransformovat na tvar (3.6). Ten budeme postupně upravovat.

Proměnné x si můžeme rozdělit na kladnou x^+ a zápornou x^- část. Abychom zajistili, že alespoň jedno z x_i^+ a x_i^- bylo nulové, přidáme si vektory nezáporných proměnných t^+ a t^-, které nám budou indikovat znaménko x. Chceme, aby t_i^+ bylo nenulové, když hodnota x_i je kladná, a aby t_i^- bylo nenulové, když hodnota x_i je záporná. Proto přidáme nerovnice $t^+ \geq x^+$ a $t^- \geq x^-$. Díky nezápornosti vektorů t můžeme využít lemma 16, které nám zajistí, že minimálně jedno z t_i^+ a t_i^- bude nula. Díky tomu bude i minimálně jedno z x_i^+ a x_i^- nula. Takto upravíme soustavu (3.6) na tvar:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists s \in [-e, e],$$

$$\exists t^+ \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists t^- \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists u \in \mathbb{R}^n,$$

$$\exists x^+ \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists x^- \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^m, \exists z \in \mathbb{R}^n :$$

$$A(x^+ - x^-) + y = a, Bz - y = b, x^+ - x^- = z,$$

$$t^+ \geq x^+, t^- \geq x^-, t^+ + t^- + \operatorname{diag}(s)u = 0, t^+ - t^- + u = 0.$$

Pokud bychom výraz $A(x^+ - x^-)$ nahradili výrazem $Ax^+ - Ax^-$, výsledná formule by nebyla validní AE intervalová soustava, protože by se v ní hodnoty z A vyskytovali vícekrát a byly by na sobě závislé. Proto potřebujeme hodnotu $A_{i,j}(x_j^+ - x_j^-)$ nahradit jinak. Nejprve si přidáme další proměnné $\tilde{x} = |x| = x^+ + x^-$. (Druhá rovnost platí, protože $x_i^+ = 0 \vee x_i^- = 0$.) Pak přidáme rovnost $A_{i,j}\tilde{x}_j = W_{i,j}^+ - W_{i,j}^-$. Kde W^+ a W^- jsou matice proměnných, určené k uchování právě této hodnoty. Přidáním nerovnic $t_j^+ \geq |W_{i,j}^+|$ a $t_j^- \geq |W_{i,j}^-|$ zajistíme, že pokud je $x_j > 0$, tak $W_{i,j}^+$ obsahuje hodnotu $A_{i,j}x_j$ a $W_{i,j}^- = 0$, a obráceně, pokud $x_j < 0$, tak $W_{i,j}^-$ obsahuje hodnotu $A_{i,j}x_j$ a $W_{i,j}^+ = 0$. Díky tomu můžeme hodnotu $A_{i,j}(x_j^+ - x_j^-)$ nahradit součtem $W_{i,j}^+ + W_{i,j}^-$. Naši soustavu jsme rozšířili na:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall a \in \mathbf{a}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists s \in [-e, e],$$

$$\exists t^+ \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists t^- \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists u \in \mathbb{R}^n, \exists W^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}, \exists W^- \in \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$\exists x^+ \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists x^- \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists \tilde{x} \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^m, \exists z \in \mathbb{R}^n :$$
$$W^+e + W^-e + y = a, Bz - y = b, x^+ - x^- = z,$$
$$t^+ \geq x^+, t^- \geq x^-, t^+ + t^- + \mathrm{diag}(s)u = 0, t^+ - t^- + u = 0,$$
$$\tilde{x} = x^+ + x^-,$$
$$\forall i \in \{1...m\}, \forall j \in \{1...n\} : A_{i,j}\tilde{x}_j = W_{i,j}^+ - W_{i,j}^-,$$
$$\forall i \in \{1...m\}, \forall j \in \{1...n\} : t_j^+ \geq W_{i,j}^+, t_j^+ \geq -W_{i,j}^+, t_j^- \geq W_{i,j}^-, t_j^- \geq -W_{i,j}^-,$$

Takováto soustava již je téměř v požadovaném tvaru. Jedním z problémů je výskyt nerovnic. Ten lze vyřešit přidáním dalších nezáporných proměnných. Dalším problémem je výskyt volných proměnných v rovnicích $A_{i,j}\tilde{x}_j = W_{i,j}^+ - W_{i,j}^-$. Ty se už ale nevyskytují u intervalů, a tak tento problém můžeme vyřešit přidáním dalších nezáporných proměnných a rovnici upravit na $A_{i,j}x_j = U_{i,j}^+ - U_{i,j}^-$ a $U_{i,j}^+ - U_{i,j}^- = W_{i,j}^+ - W_{i,j}^-$. Posledním problémem je vektor silných intervalů v rovnici $W^+e + W^-e + y = a$. Ten můžeme opět vyřešit přidáním nezáporných proměnných a rovnic: $v = 1$, $r^+ - r^- = av$ a $W^+e + W^-e + y = r^+ - r^-$.

Takto upravená soustava už je tvořena pouze rovnicemi, a všechny nebodové silné intervaly se vyskytují pouze v rovnicích s nezápornými proměnnými. □

Zbývá nám upravit tento tvar tak, aby všechny slabé intervaly byly v jedné nerovnici:

Věta 29 (Zjednodušený tvar AE intervalových soustav)**.** *Každou intervalovou soustavu lze přetransformovat tak, aby nebodové silné intervaly byly násobeny pouze nezápornými proměnnými a všechny nebodové slabé intervaly se nacházeli pouze v jedné nerovnici. Možný tvar takové soustavy je:*

$$\forall A \in \mathbf{A}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} : Ax = 0, b^\top y \leq 0, Cx + Dy \leq d,$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m'\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m'\times n'}$ *a vektory* $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^{n'}$, $d \in \mathbb{R}^{m'}$ *jsou různé od matic a vektorů v původní soustavě.*

Důkaz. Začneme ekvivalentní formulí (3.7) z předchozí věty. Tu si upravíme na soustavu nerovnic s volnými proměnnými:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \exists B_1 \in \mathbf{B}, \exists B_2 \in \mathbf{B}, \exists b \in \mathbf{b}, \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & 0 \\ C & B_1 \\ -C & -B_2 \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato formule není validní AE intervalová soustava, protože hodnoty z A se v ní používají vícekrát a jsou proto na sobě závislé. Přesto pro konkrétní A je soustava korektní slabou intervalovou soustavou a můžeme využít větu 23. Tak získáme formuli:

$$\forall A \in \mathbf{A}, \exists s' \in [-e, e], \exists s \in [-e, e], \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists x' \in \mathbb{R}^n, \exists y' \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & 0 \\ C & B_c & 0 & -B_\Delta \\ -C & -B_c & 0 & -B_\Delta \\ -I_n & 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & I_{n'} & 0 & -I_{n'} \\ -I_n & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & -I_{n'} & 0 & -I_{n'} \\ s'^\top & s^\top & e^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{b} \\ -\underline{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

První dva řádky jsou ekvivalentní s rovnicí $Ax = 0$. Pátý řádek nám dává $x \in (\mathbb{R}_0^+)^n$. Díky tomu, pokud je splněna šestá sada nerovnic je splněna i ta osmá. Proto ji můžeme odebrat. Po těchto úpravách dostáváme zjednodušenou formuli

$$\forall A \in \mathbf{A}, \exists s' \in [-e, e], \exists s \in [-e, e], \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists x' \in \mathbb{R}^n, \exists y' \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$Ax = 0, \begin{pmatrix} C & B_c & 0 & -B_\Delta \\ -C & -B_c & 0 & -B_\Delta \\ I_n & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & I_{n'} & 0 & -I_{n'} \\ 0 & -I_{n'} & 0 & -I_{n'} \\ s'^\top & s^\top & e^\top & e^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která je již validní AE intervalová soustava. Z charakterizace slabé řešitelnosti (věta 8) vyplývá, že pokud je tato formule pravdivá, je pravdivá i pro $s' = \underline{[-e, e]} = -e$.

Třetí sada nerovnic nám dává nerovnost $x \leq x'$. Jediná další nerovnice, kde se x' vyskytuje, je ta poslední, kde se snažíme minimalizovat $e^\top x'$. To minimum nabývá pro $x' = x$. Tím se nám poslední nerovnice zjednoduší na $s^\top y + e^\top y' \leq 0$. Dostáváme tak požadovaný tvar

$$\forall A \in \mathbf{A}, \exists s \in [-e, e], \exists x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \exists y \in \mathbb{R}^{n'}, \exists y' \in \mathbb{R}^{n'} :$$

$$Ax = 0, s^\top y + e^\top y' \leq 0, \begin{pmatrix} C \\ -C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_c & -B_\Delta \\ -B_c & -B_\Delta \\ I_{n'} & -I_{n'} \\ -I_{n'} & -I_{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Tato věta nám říká postačující podmínky pro tvary AE intervalových soustav, které jsou ekvivalentní k obecným AE intervalovým soustavám z definice 6. Pokud taková soustava obsahuje rovnice nebo nezáporné proměnné, slabou nerovnici či rovnici a několik silných rovnic, tak testování její řešitelnosti je stejně obtížné, jako testování AE řešitelnosti pro obecné soustavy. Zajímavá úvaha je, jak jsou tyto podmínky těsné. Není vyloučeno, že v ekvivalentní soustavě můžou být všechny silné intervaly násobeny stejnou proměnnou, obdobně jako u silných intervalových soustav podle věty 24.

4 Implementace testování řešitelnosti intervalových soustav

V poslední kapitole si popíšeme balíček **aeintlin** pro MATLAB. Jak jsme diskutovali v předchozích kapitolách, není znám žádný exponenciální algoritmus, který by byl schopný otestovat AE řešitelnost lineárních intervalových soustav. Proto jsme v knihovně aeintlin naimplementovali některé nutné a postačující podmínky obecné AE řešitelnosti společně s nutnými, postačujícími i charakterizačními podmínkami pro její speciálních varianty. Většinu z naimplementovaných podmínek jsme detailně popisovali ve druhé kapitole.

V této kapitole si postupně popíšeme uživatelskou dokumentaci, programátorskou dokumentaci a na závěr numericky otestujeme úspěšnost nutných a postačujících podmínek.

4.1 Uživatelská dokumentace

Instalace

Pro instalaci našeho balíčku je třeba přidat rozbalenou složku aeintlin do cesty MATLABu pomocí funkce `addpath('cesta/ke/složce/aeintlin/')` a zavolání funkce `startaeintlin`. Ta přidá všechny ostatní důležité cesty. Tyto dva příkazy lze použít přímo v REPLu MATLABu, ve skriptu, nebo ve startup skriptu vašeho MATLABu.

Pro používání balíčku aeintlin je také zapotřebí mít již nainstalované balíčky Optimization Toolbox a Intlab.

Optimization Toolbox je balíček vyvíjený firmou MathWorks, která vyvíjí i samotný MATLAB a je šířen jako add-on. Proto pro jeho instalaci stačí přímo v programu MATLAB v kartě HOME otevřít Add-Ons. Vyhledat balíček podle názvu a stáhnout ho. V našem balíčku se používá pouze interně pro testování řešitelnosti reálných lineárních programů. Bližší informace lze získat na webových stránkách `https://www.mathworks.com/products/optimization.html`.

Druhý zmíněný — Intlab — je potřeba nejen pro vnitřní fungování balíčku, ale zároveň i pro vytváření vstupů pro jednotlivé funkce testující řešitelnost. My si ukážeme pouze několik užitečných funkcí, které nám Intlab nabízí, pro vytváření vstupů. Bližší práci s Intlabem, včetně instalace, popisuje například Horáček [5]. Další informace lze získat na webových stránkách `https://www.tuhh.de/ti3/rump/intlab/`.

Vytváření matic

Pro testování řešitelnosti intervalových soustav potřebujeme umět vytvářet objekty reprezentující intervaly, intervalové vektory a intervalové matice. K tomu nám Intlab nabízí tři základní funkce:

- `infsup(`$\underline{x}$`, `$\overline{x}$`)` vytvoří interval $[\underline{x}, \overline{x}]$,
- `midrad(`x_c`, `x_Δ`)` vytvoří interval $[x_c - x_\Delta, x_c + x_\Delta]$,

- a `intval(`x`)` vytváří bodový interval $[x, x]$.

Vstupy pro všechny tyto funkce můžou být skalární hodnoty, vektory i matice.

Pro reprezentaci AE intervalových soustav je navíc v balíčku aeintlin objekt `AE(`$\mathbf{A}^{\forall}$`, `$\mathbf{A}^{\exists}$`)`, který representuje součet silných a slabých intervalů, stejně jako je v definici 6. Pokud je $\mathbf{A}^{\forall}$, nebo $\mathbf{A}^{\exists}$ bodová intervalová matice obsahující pouze nulovou matici, lze ji nahradit prázdnou maticí `[]`. Uvedeme pár příkladů vytvoření AE intervalových matic, které budeme používat i v dalších příkladech.

```
K = AE(infsup([0, 1], [1, 1]), infsup([5, 0], [5, 1]))
L = AE(infsup([1, 0], [1, 1]), infsup([-1, 1], [1, 1]))
M = AE(infsup(0, 1), [])
t = AE(infsup(0, 1), infsup(0, 1))
```

Testování AE řešitelnosti

Vstupem pro testovací funkce je intervalová soustava zapsaná pomocí matic:

$$Ax + By = b, \quad Cx + Dy \leq d, \quad x \geq 0. \tag{4.1}$$

Primární výstup všech testovacích funkcí v balíčku je celé číslo s významem:

- `1` – soustava je řešitelná,
- `0` – soustava není řešitelná,
- `-1` – řešitelnost soustavy nebyla rozhodnuta kvůli vnitřní chybě,
- `-2` – nutná či postačující podmínka nebyla schopna rozhodnout zda je soustava řešitelná.

Nejobecnějším funkce pro testování AE řešitelnosti je

`aesolvable(A, B, b, C, D, d, usesufnec)`.

Implementuje postačující podmínku z věty 13. Zároveň pokud $B_{\Delta}^{\exists} = 0$ a $D_{\Delta}^{\exists} = 0$, funkce využívá větu 12 a je díky tomu schopná řešitelnost rozhodnout jednoznačně.

Pokud argument `usesufnec` není roven `0`, nebo je vynechán, tak před využitím implementace těchto vět se vyzkouší nutná

`aesolvablenec(A, B, b, C, D, d)`

a postačující

`aesolvablesuf(A, B, b, C, D, d)`

podmínka. Ty je možné spouštět i samostatně. Jsou vybrané tak, aby je bylo možné rychle spočítat.

Nutná podmínka je splněna, pokud pro středy silných intervalů existuje výběr ze slabých intervalů takový, aby výsledná soustava byla řešitelná. Jinak řečeno zafixujeme středy silných intervalů a pak otestujeme slabou řešitelnost soustavy pomocí funkce `weaksolvable`, o které budeme mluvit.

Postačující podmínka je splněna, pokud pro všechny kombinace hodnot ze silných intervalů po výběru středů ze slabých intervalů dostaneme vždy řešitelnou soustavu. Tedy naopak zafixujeme středy slabých intervalů a otestujeme silnou řešitelnost soustavy pomocí funkce `strongsolvable`.

Všechny tři tyto funkce je možné spouštět pouze s prvními třemi argumenty. Pak testují řešitelnost pouze AE intervalové soustavy rovnic.

Příklady užití funkcí `aesolvable`, `aesolvablenec`, `aesolvablesuf`:

```
>> aesolvable(K, L, t, [], [], [])
ans =
     1
>> aesolvable(M, [], t)
ans =
     0
>> aesolvable([], [], [], M, [], t)
ans =
     1
>> aesolvablesuf(K, L, t, [], [], [])
ans =
     1
>> aesolvablenec(M, [], t)
ans =
    -2
```

Čtvrtá implementovaná funkce

`AEneqpos(C, D, d)`

využívá větu 28 a umí rozhodnout řešitelnost AE intervalové soustavy nerovnic pokud platí $D_c^{\exists} + \underline{D^{\forall}} \geq 0$. Pokud tato podmínka není splněna, vrátí vždy hodnotu `-2`.

Příklad užití:

```
>> AEneqpos(M, [], t)
ans =
     1
```

Testování silné řešitelnosti

Pro slabou a silnou řešitelnost (speciální případy AE řešitelnosti) obsahuje balíček samostatnou sadu funkcí. Nejdříve se podíváme na testování silné složitosti.

Primární nástroj v balíčku pro testování silné složitosti je funkce

`[res, cer] = strongsolvable(A, B, b, C, D, d, usesufnec).`

Řešitelnost silné intervalové soustavy (4.1) je rozhodnuta podle charakterizační věty 10. Stejně jako ve funkci `aesolvable`, pokud argument `usesufnec` není roven `0`, nebo je vynechán, tak před využitím implementace této věty se vyzkouší nutná

`strongsolvablenec(A, B, b, C, D, d)`

a postačující

`strongsolvablesuf(A, B, b, C, D, d)`

podmínka. Na rozdíl od `aesolvable` funkce `strongsolvable` vrací dvě hodnoty. První hodnota je číslo určující řešitelnost a pokud soustava není řešitelná, druhá hodnota obsahuje certifikát o neřešitelnosti. Ten se dá použít pro zavolání funkce

```
[A, B, b, C, D, d] =
        strongsolvablecounterexample(A, B, b, C, D, d, cer),
```

která vrátí reálnou soustavu, která je obsažena v původní intervalové soustavě a zároveň není řešitelná.

Funkce pro nutnou a postačující podmínku lze opět volat samostatně. Nutná podmínka je splněna, pokud soustava vytvořená ze středů intervalů je řešitelná. Postačující podmínka je testována algoritmem 11.

Opět všechny tři funkce testující silnou řešitelnost je možné spouštět pouze s prvními třemi argumenty. Pak testují silnou řešitelnost pouze intervalové soustavy rovnic. Navíc k `strongsolvable` jsou připravené ještě tři alternativní funkce s různou kombinací parametrů pro užší varianty intervalových soustav:

- pro obecnou soustavu: `strongsolvable(A, B, b, C, D, d)`,
- pro soustavu rovnic: `strongsolvable(A, B, b)`,
- pro soustavu s volnými proměnnými: `strongsolvablegen(B, b, D, d)`,
- pro soustavu rovnic s volnými proměnnými: `strongsolvablegen(B, b)`,
- pro soustavu nerovnic: `strongsolvableneq(C, D, d)`,
- pro soustavu nerovnic s volnými proměnnými: `strongsolvableneq(D, d)`,
- pro soustavu s nezápornými proměnnými: `strongsolvablepos(A, b, C, d)`,
- pro soustavu rovnic s nezápornými proměnnými: `strongsolvablenpos(A, b)`.

Uvedeme si několik příkladů užití těchto funkcí pro intervalovou soustavu

$$\begin{pmatrix}[1,2] & [0,1]\end{pmatrix} x = [0,1], \begin{pmatrix}[-1,1] & 2\end{pmatrix} x \leq 1$$

a soustavu $[0,1]x = 1$:

```
>> strongsolvable([], infsup([1, 0], [2, 1]), infsup(0, 1), ...
                  [], infsup([-1, 2], [1, 2]), infsup(1, 1))
ans =
     1
>> strongsolvablegen(infsup(0, 1), infsup(1, 1))
ans =
     0
>> strongsolvablesuf([], infsup([1, 0], [2, 1]), infsup(0, 1), ...
                     [], infsup([-1, 2], [1, 2]), infsup(1, 1))
ans =
     1
>> strongsolvablenec([], infsup(0, 1), infsup(1, 1), [], [], [])
ans =
    -2
```

Testování slabé řešitelnosti

Uživatelskou dokumentaci završíme popisem funkcí testujících slabou řešitelnost. Tato sada funkcí je analogická k sadě funkcí testující silnou řešitelnost. Jména funkcí se liší pouze prefixem:

- pro obecnou soustavu: `weaksolvable(A, B, b, C, D, d)`,
- pro soustavu rovnic: `weaksolvable(A, B, b)`,
- pro soustavu s volnými proměnnými: `weaksolvablegen(B, b, D, d)`,
- pro soustavu rovnic s volnými proměnnými: `weaksolvablegen(B, b)`,
- pro soustavu nerovnic: `weaksolvableneq(C, D, d)`,
- pro soustavu nerovnic s volnými proměnnými: `weaksolvableneq(D, d)`,

- pro soustavu s nezápornými proměnnými: `weaksolvablepos(A, b, C, d)`,
- pro soustavu rovnic s nezápornými proměnnými: `weaksolvablenpos(A, b)`,
- nutná podmínka: `weaksolvablenec(A, B, b, C, D, d)`,
- nutná podmínka pro soustavu rovnic: `weaksolvablenec(A, B, b)`,
- postačující podmínka: `weaksolvablesuf(A, B, b, C, D, d)`,
- postačující podmínka pro soustavu rovnic: `weaksolvablesuf(A, B, b)`.

Jediná funkce ze silné řešitelnosti, která nemá svoji variantu pro slabou řešitelnost je funkce vytvářející protipříklad. Vytvoření řešitelné soustavy během testu pomocí charakterizace slabé soustavy je výpočetně jednodušší. Proto druhá hodnota, kterou vrací funkce `weaksolvable` je *Cell array* s příkladem řešitelné soustavy (`cer == {A, B, b, C, D, d}`).

Postačující podmínka je splněna, pokud soustava vytvořená ze středů intervalů je řešitelná. Jako nutná podmínka je využita dualita silné a slabé řešitelnosti společně s postačující podmínkou z testu silné řešitelnosti.

Ukážeme si příklad testování slabé řešitelnosti intervalové soustavy

$$\begin{pmatrix} [1,2] \\ [0,1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a soustavy

$$\begin{pmatrix} [0,1] \\ [-1,0] \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}:$$

```
>> weaksolvable([], infsup([1; 0], [2; 1]), intval([1; -1]), [], [], [])
ans =
     0
>> weaksolvableneq(infsup([0; -1], [1; 0]), infsup([1; -1], [1; -1]))
ans =
     1
>> weaksolvablenec([], infsup([1; 0], [2; 1]), intval([1; -1]))
ans =
     0
>> weaksolvablesuf([], [], [], [], ...
                    infsup([0; -1], [1; 0]), infsup([1; -1], [1; -1]))
ans =
     1
```

4.2 Programátorská dokumentace

Balíček aeintlin je tvořen šesti částmi, které jsou každá ve své složce:

- `general`: obsahuje funkce testující obecnou AE řešitelnost,
- `scripts`: obsahuje numerické testy,
- `strong`: obsahuje funkce testující silnou řešitelnost,
- `test`: obsahuje unit testy balíčku,
- `utils`: obsahuje pomocné funkce,
- `weak`: obsahuje funkce testující slabou řešitelnost.

V kořenovém adresáři je pouze funkce `startaeintlin`, která přidává podsložky do cesty MATLABu. Lze ji také spustit s argumentem `startaeintlin(1)`. Díky tomu se do cesty přidají i složky `scripts` a `test`, které pro běžné používání balíčku nejsou třeba.

Obsahy složek `general`, `strong` a `weak` jsme podrobně popisovali v uživatelské části dokumentace. Skriptům s numerickými testy se budeme podrobně věnovat v příští podkapitole. Proto si v této podkapitole podrobně popíšeme pouze unit testy a pomocné funkce.

Funkce ve složce `utils`

Mezi pomocnými funkcemi jsou dvě upravené assert funkce. Funkce

```
assertisinside(V, I)
```

testuje, jestli reálná matice `V` je obsažena v intervalové matici `I`. Funkce

```
assertisvalidlinsystem(A, B, b, C, D, d)
```

testuje, zda má zadaná soustava koherentní velikosti matic. Například, jestli se počet proměnných v rovnicích a nerovnicích neliší.

K využívání duality napříč balíčkem slouží funkce

```
[A, B, b, C, D, d] = farkaslemma(A, B, b, C, D, d)
```

a funkce

```
[A, B, b, C, D, d] = farkaslemmarev(A, B, C, D).
```

První zmíněná z intervalové soustavy vytvoří duální soustavu. Druhá zmíněná naopak z duální soustavy vytvoří původní soustavu. Toho se využívá ve funkci `strongsolvablecounterexample`.

Funkce

```
dispim(A, B, b, C, D, d)
```

slouží k jednoduchému zobrazení celé intervalové soustavy. Slouží hlavně v unit testech pro vypsání soustavy, kvůli které test neskončil úspěšně.

Další pomocné funkce jsou

```
[A, B, b, C, D, d] = normalize(A, B, b, C, D, d)
```

a

```
[A, B, b, C, D, d] = aenormalize(A, B, b, C, D, d).
```

V MATLABu mohou existovat prázdné matice, které mají nulový pouze jeden rozměr. Například `ones(0, 3)` vytvoří prázdnou matici velikosti 0×3. To komplikuje implementaci některých testů řešitelnosti. Tyto dvě funkce v parametrech dostanou intervalovou případně AE intervalovou soustavu a vrátí upravenou soustavu, kde všechny prázdné matice mají velikost 0×0.

Poslední soubor ve složce `utils` není funkce ale objekt `Onesvec`. Ten slouží pro implementaci iterace přes vektory z $\{\pm 1\}^n$. Mezi properties obsahuje hodnotu `Value`, která obsahuje konkrétní hodnotu $s \in \{\pm 1\}^n$. Pomocí funkce `next` dostaneme následující hodnotu. Pomocí funkce `reset` dostaneme první hodnotu a začneme iterovat od začátku. Pokud použijeme logický `not` a dostaneme pravdivou hodnotu, znamená to, že už jsme vyzkoušeli všechny možné hodnoty z $\{\pm 1\}^n$. Navíc pomocí `isempty` se můžeme zeptat, zda obsahuje nějakou nenulovou hodnotu. Ve skutečnosti `Onesvec` vytváří vektory z $\{-1, 0, 1\}$. V algoritmech, kde se objekt používá, mohou nastat situace, kdy na hodnotě některých prvků nezáleží. Například pokud se vždy násobí s nulovým řádkem. Proto se při jednotlivých iteracích hodnota těchto prvků nemění. To, které prvky budou nulové, se rozhodne při volání konstruktoru `Onesvec(vec)`, kde `vec` je reálný vektor cíleného rozměru, který má hodnoty 0 právě na pozicích nulových prvků. Ostatní budou mít v první iteraci hodnotu 1. Objekt `Onesvec` je využit v implementaci všech exponenciálních algoritmů v balíčku.

Unit testy

Několik základních testů je v souboru `basicfunctionality.m`. Tyto testy jsou dostatečně jednoduché, aby šli rozhodnout úvahou. Zároveň některé testy jsou inspirované převodem ze SATu podle tvrzení 18.

V souboru `randomizetests.m` se pak nacházejí testy, které využívají náhodně generovaná data. Náhodné soustavy se generují funkcemi

```
[A, B, b, C, D, d] = randin(x, y, e, n, m, r)
```

a

```
[A, B, b, C, D, d] = randinae(x, y, e, n, m, r).
```

Ty vytvoří soustavu s `x` nezápornými proměnnými, `y` volnými proměnnými, `e` rovnicemi, `n` nerovnicemi, střed každého intervalu je uniformě vybrán z intervalu [−`m, m`] a poloměr je uniformě vybrán z intervalu [`0, r`]. K vytváření intervalových matic využívají funkci `randm(h, w, m, r)`, kde `m` a `r` mají stejný význam a `h`×`w` jsou rozměry vytvořené matice.

Pro testování správnosti funkcí pro slabou a silnou řešitelnost se využívá jejich dualita. Pro AE řešitelnost tyto testy spíše testují, že funkce nevyhazují výjimky, než správnost funkce jako takovou, protože je obtížné najít druhý způsob jak řešitelnost vstupu otestovat.

4.3 Numerické otestování úspěšnosti nutných a postačujících podmínek

K numerickému testování jsme využili skripty ve složce `scripts`, kde se nacházejí i výstupy jednotlivých skriptů. Pro obecnou AE řešitelnost jsme porovnávali úspěšnost obou implementovaných postačujících podmínek. Následně jsme pro slabou a silnou řešitelnost testovali úspěšnost postačující a nutné podmínky.

Pro každou skupinu testů jsme předem vybrali sadu různých tvarů soustav. V tabulkách s výsledky testů jsou rozměry jednotlivých soustav ve tvaru: *(počet nezáporných proměnných):(počet volných proměnných):(počet rovnic):(počet nerovnic)*. Pro každý takový tvar soustavy je náhodně vygenerováno N soustav. Střed každého intervalu v generované soustavě je uniformě vybrán z intervalu

$[-m,m]$ a jeho poloměr je uniformě vybrán z intervalu $[0,r]$, pro předem vybrané hodnoty m a r. Pro testy řešitelnosti nejsou důležité konkrétní hodnoty m a r, ale pouze jejich poměr r/m, proto v tabulkách s výsledky testů – na rozdíl od výstupů skriptů – budeme uvádět pouze tento poměr.

Testování AE řešitelnosti

Pro AE řešitelnost jsme testovali, o kolik je složitější postačující podmínka z věty 13 účinnější než přímočará podmínka implementovaná v `aesolvablesuf`. K tomuto testu slouží skript `aecompare.m` a výstup tohoto skriptu je uložen v souboru `ae.txt`. Ten je z části přepsán do tabulky 4.1.

Testovali jsme 28 různých tvarů soustav a pro každou jsme jich vygenerovali 1000. Z toho polovinu s poměrem $r/m = 0.1$ a druhou polovinu s poměrem $r/m = 0.01$. Tvary soustav jsme vybírali tak, aby byly zastoupeny různé kombinace počtu rovnic, nerovnic, volných a nezáporných proměnných.

V tabulce je na každém řádku rozměr soustavy, počet soustav splňující libovolnou postačující podmínku a poměr soustav, které z nich splňují pouze podmínku z věty 13, vyjádřený v procentech. Tyto hodnoty jsou spočítány zvlášť pro soustavy s poměrem 0.1 a 0.01.

Zajímavým úkazem je skutečnost, že soustavy, které by splňovali pouze postačující podmínku z `aesolvablesuf`, ale nesplňovali by podmínku z věty 13, jsou velmi vzácné. V našem skriptu byly vygenerované pouze dvě takové a to mezi soustavami se třemi rovnicemi a třemi volnými proměnnými. Proto počet soustav, pro které byla úspěšná pouze funkce `aesolvablesuf` v tabulce 4.1 neuvádíme.

Nahlédnutím do dat také zjistíme, že počet soustav, které věta 13 označí za řešitelné, se změnou poměru r/m příliš nemění. Bohužel z nich nejsme schopní zjistit, zda je úspěšnost věty stejná nezávisle na poměru, nebo se úspěšnost mění společně se skutečným počtem řešitelných soustav.

Naopak je jednoznačně vidět, že poměr soustav, které je schopna označit za řešitelné pouze podmínka z věty 13, s klesajícím poměrem r/m klesá. To není příliš překvapivé, protože pro $r = 0$, je úspěšnost jednodušší postačující podmínky stoprocentní. To podporují i zkušenosti z praxe. Když počítáme s nepřesnými daty s dostatečně malými rozptyly a z intervalů vybereme hodnoty blízké jejich středům, často dostaneme dostatečně blízký výsledek.

Testování slabé a silné řešitelnosti

Numerické testy slabé a silné řešitelnosti jsou ve skriptech `weakcompare.m` a `strongcompare.m`. Jejich výstupy jsou uloženy ve `weak.txt` a `strong.txt`. Ty jsou přepsané do tabulky 4.2 pro slabou řešitelnost a 4.3 pro silnou řešitelnost.

V těchto numerických testech jsme se zaměřili na úspěšnost nutných a postačujících podmínek pro intervalové soustavy různých rozměrů. Na rozdíl od obecné AE řešitelnosti jsme schopní rozhodnout řešitelnost každé soustavy, a proto můžeme testovat jejich úspěšnost a ne je pouze porovnávat mezi sebou.

Pro každý rozměr soustavy jsme generovali 1000 příkladů podle předem vybraného m a r. Ty jsme vybírali tak, aby alespoň třetina příkladů byla řešitelná a alespoň třetina příkladů řešitelná nebyla. V tabulkách s výsledky je ke každému typu soustavy kromě jejího tvaru a poměru r/m také počet řešitelných soustav,

Rozměry soustavy	r / m = 0.1		r / m = 0.01	
	Řešitelné	**Splňující pouze větu 13**	**Řešitelné**	**Splňující pouze větu 13**
0:3:3:0	476	15.5%	500	3.0%
0:5:5:0	477	40.5%	496	4.2%
0:8:8:0	449	68.4%	493	6.9%
1:3:3:1	358	32.1%	361	3.0%
2:5:5:2	371	52.3%	348	5.2%
4:8:8:4	319	85.9%	296	13.9%
3:3:3:3	329	34.7%	310	1.9%
5:5:5:5	300	57.0%	319	5.3%
8:8:8:8	294	88.1%	292	13.4%
3:1:1:3	338	15.4%	341	2.6%
5:2:2:5	304	29.3%	305	2.3%
8:4:4:8	308	55.5%	310	8.4%
3:0:0:3	356	7.6%	333	0.0%
5:0:0:5	312	15.7%	310	1.0%
8:0:0:8	286	18.9%	282	3.5%
10:0:0:10	302	29.8%	298	2.0%
0:4:3:3	235	52.3%	230	6.1%
0:7:5:5	262	76.0%	239	8.8%
0:12:8:8	293	92.5%	307	13.4%
0:3:0:6	325	18.2%	323	2.2%
0:5:0:10	320	34.7%	324	4.6%
0:8:0:16	293	50.9%	320	6.2%
2:2:3:0	378	22.5%	380	0.3%
3:3:5:0	229	58.1%	237	5.5%
4:4:8:0	31	100.0%	26	30.8%
6:0:3:0	344	17.7%	323	1.5%
10:0:5:0	308	36.7%	321	3.1%
16:0:8:0	279	57.0%	278	4.3%

Tabulka 4.1: Výsledky testů postačujících podmínek AE řešitelnosti.

poměr řešitelných soustav, které splňují postačující podmínku, v procentech a poměr neřešitelných soustav, které byly úspěšně odmítnuty nutnou podmínkou, také v procentech.

První triviální pozorování z výsledků je, že nutná a postačující podmínka slabé řešitelnosti se chová obdobně jako postačující a nutná podmínka silné řešitelnosti. To je díky dualitě mezi těmito typy řešitelností, která se využívá i v implementaci těchto podmínek.

Když se podíváme na úspěšnost podmínek založených na algoritmu 11, zjistíme, že dosahuje výrazně lepších výsledků u soustav rovnic s volnými proměnnými, než když soustava obsahuje nerovnice či nezáporné proměnné. To se projevilo i u první varianty implementace nutné podmínky pro slabou řešitelnost. Pro ni jsme využili

Rozměry soustavy	**Poměr r/m**	**Řešitelné soustavy**	**Úspěšnost postačující podmínky**	**Úspěšnost nutné podmínky**
0:5:6:0	0.08	601	0.0%	76.2%
0:8:10:0	0.08	552	0.0%	27.5%
0:10:13:0	0.08	481	0.0%	5.0%
2:5:7:0	0.03	466	51.9%	7.9%
3:8:11:0	0.03	448	24.1%	0.0%
4:10:14:0	0.03	471	13.4%	0.0%
5:5:9:0	0.05	565	33.6%	0.0%
8:8:15:0	0.05	507	7.9%	0.0%
10:10:19:0	0.05	515	2.1%	0.0%
0:5:3:5	0.03	662	79.0%	16.6%
0:8:4:1	0.03	573	63.0%	0.7%
0:10:5:1	0.05	472	30.7%	0.0%
0:5:0:1	0.05	544	73.2%	2.4%
0:8:0:2	0.05	497	55.5%	0.0%
0:10:0:2	0.05	518	42.9%	0.0%
0:5:5:1	0.01	556	87.1%	91.2%
0:8:8:2	0.03	547	41.9%	6.6%
0:10:10:4	0.05	605	11.2%	0.0%
5:5:5:6	0.02	584	81.2%	1.7%
8:8:8:9	0.01	620	85.0%	1.6%
10:10:10:1	0.01	453	73.3%	0.0%

Tabulka 4.2: Výsledky testů úspěšnosti nutných a postačujících podmínek slabé řešitelnosti.

jinou formu Farkasova lemmatu, která místo rovnice $b^\top p + d^\top q = -1$ z věty 3 obsahovala nerovnici $b^\top p + d^\top q \leq -1$. To způsobovalo, že nutnou podmínku slabé řešitelnosti nesplňovaly pouze jednotky z vygenerovaných soustav.

Podmínky, které jsou založené na řešitelnosti středů intervalů, naopak nejsou účinné pro rovnice s volnými proměnnými, ale pro soustavy obsahující nerovnice nebo nezáporné proměnné jsou překvapivě úspěšné. Aby pro silnou soustavu rovnic s volnými proměnným byla taková podmínka úspěšná, musela by soustava vytvořená ze středů intervalů být tvořená maticí s menším rankem, než je počet rovnic. A pravděpodobnost, že takovou matici náhodně vygenerujeme, je nízká. Obdobná úvaha platí i pro slabou řešitelnost.

Rozměry soustavy	**Poměr r/m**	**Řešitelné soustavy**	**Úspěšnost postačující podmínky**	**Úspěšnost nutné podmínky**
0:5:5:0	0.08	545	89.9%	0.0%
0:8:8:0	0.05	420	79.0%	0.0%
0:10:10:0	0.03	486	85.8%	0.0%
0:5:5:1	0.01	426	72.1%	91.3%
0:9:8:2	0.02	527	5.3%	50.3%
0:11:10:3	0.01	359	8.6%	75.4%
0:8:5:5	0.04	564	0.5%	39.4%
0:13:8:8	0.03	504	0.0%	32.3%
0:16:10:10	0.02	573	0.0%	37.0%
4:3:5:0	0.03	575	16.9%	74.1%
8:4:8:0	0.02	483	6.2%	73.3%
10:5:10:0	0.01	525	7.0%	83.2%
10:0:5:0	0.04	495	4.8%	73.1%
16:0:8:0	0.02	506	3.2%	77.5%
20:0:10:0	0.01	512	3.9%	87.9%
1:5:5:1	0.05	461	7.6%	47.9%
2:8:8:2	0.03	381	1.0%	53.6%
3:10:10:3	0.01	548	4.6%	73.5%
5:5:5:5	0.03	476	1.1%	65.8%
8:8:8:8	0.02	420	0.2%	69.3%
10:10:10:10	0.01	485	0.0%	79.2%

Tabulka 4.3: Výsledky testů úspěšnosti nutných a postačujících podmínek silné řešitelnosti.

Závěr

Na začátku práce jsme shrnuli známé poznatky o AE řešitelnosti intervalových soustav. Věnovali jsme se i jejím speciálním případům, slabé a silné řešitelnosti. Zopakovali jsme různé nutné a postačující podmínky jejich řešitelnosti. Některé zjednodušené varianty jsme i charakterizovali.

V části práce věnované novým výsledkům jsme ukázali nový důkaz dokazující NP-těžkost řešitelnosti slabých intervalových soustav. Následně jsme se věnovali ekvivalentním úpravám. Popsali jsme, jak intervalové soustavy transformovat na soustavy rovnic s volnými proměnnými, jak ze slabé intervalové soustavy vytvořit takovou, která bude mít všechny nebodové intervaly v jedné nerovnici, a jak naopak ze silné intervalové soustavy vytvořit takovou, která má všechny nebodové intervaly u stejné proměnné. Popsali jsme speciální případ AE intervalových soustav nerovnic, jejichž řešitelnost lze otestovat v polynomiálním čase. Na závěr této části jsme popsali sérii úprav, která zachovává řešitelnost AE intervalové soustavy. Nově vytvořený tvar nám pak dal lepší vhled, které varianty AE intervalových soustav jsou ekvivalentní s obecnou variantou a které mohou být jednodušší.

V části práce s novými výsledky jsme i vyslovili hypotézu o časové složitosti testování AE řešitelnosti intervalových soustav nerovnic. Tu se nám nepodařilo dokázat, ale navrhli jsme zjednodušený tvar tohoto problému, který by mohl vést k důkazu této hypotézy.

Součástí této práce byla i implementace nutných, postačujících a charakterizačních podmínek řešitelnosti intervalových soustav, které jsme v práci popsali. Ty jsme zapouzdřili do balíčku aeintlin pro prostředí Matlab, pomocí kterého jsme numericky otestovali úspěšnost nutných a postačujících podmínek.

Literatura

1. Garajová, Elif; Hladík, Milan; Rada, Miroslav. On the Properties of Interval Linear Programs with a Fixed Coefficient Matrix. In: Sforza, Antonio; Sterle, Claudio (ed.). *Optimization and Decision Science: Methodologies and Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2017, s. 393–401. isbn 978-3-319-67308-0.
2. Hansen, Eldon; Walster, G William. Solving Overdetermined Systems of Interval Linear Equations. *Reliable Computing*. 2006, roč. 12, č. 3, s. 239–243.
3. Hladík, Milan. Weak and strong solvability of interval linear systems of equations and inequalities. *Linear Algebra and its Applications*. 2013, roč. 438, č. 11, s. 4156–4165. issn 0024-3795. Dostupné z doi: `https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.012`.
4. Hladík, Milan. AE solutions and AE solvability to general interval linear systems. *Linear Algebra and its Applications*. 2015, roč. 465, s. 221–238. issn 0024-3795. Dostupné z doi: `https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.030`.
5. Horáček, Jaroslav. *Přeurčené soustavy intervalových lineárních rovnic*. 2011. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra aplikované matematiky. Vedoucí práce Milan Hladík.
6. Mayer, G. *Interval Analysis: And Automatic Result Verification*. De Gruyter, 2017. De Gruyter studies in mathematics. isbn 9783110499476. Dostupné také z: `https://books.google.cz/books?id=fpJUswEACAAJ`.
7. Rohn, J. Solvability of systems of interval linear equations and inequalities. In: *Linear Optimization Problems with Inexact Data*. Boston, MA: Springer US, 2006, s. 35–77. isbn 978-0-387-32698-6. Dostupné z doi: `10.1007/0-387-32698-7_2`.
8. Rohn, Jiří. Enclosing solutions of overdetermined systems of linear interval equations. *Reliable Computing*. 1996, roč. 2, č. 2, s. 167–171.
9. Schrijver, Alexander. *Theory of Linear and Integer Programming. Repr.* Chichester: Wiley, 1998.
10. Tarski, Alfred; McKinsey, J. C. C. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Berkeley: University of California Press, 1951. isbn 9780520348097. Dostupné z doi: `doi:10.1525/9780520348097`.