MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Prajzler

Momenty a kumulanty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ivan Mizera, CSc.
Studijní program: Finanční matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval doc. RNDr. Ivanu Mizerovi, CSc. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Název práce: Momenty a kumulanty

Autor: Petr Prajzler

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ivan Mizera, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá momenty a kumulanty jako klíčovými koncepty v pravděpodobnosti a statistice. V teoretické části jsou definovány momenty, střední hodnota, rozptyl a vyšší momenty, včetně jejich aplikací v pravděpodobnostní teorii. Dále je diskutována momentová vytvořující funkce a charakteristická funkce. Kumulanty jsou představeny jako funkce momentů s důrazem na jejich význam a vztahy s momenty. V empirické části jsou provedeny výpočty momentů a kumulantů pro vybraná pravděpodobnostní rozdělení. Je představena Fréchet-Shohatova věta, známá také jako momentový problém. V závěru jsou shrnuty dosažené výsledky.

Klíčová slova: Momenty Kumulanty Momentový problém

Title: Moments and cumulants

Author: Petr Prajzler

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ivan Mizera, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with moments and cumulants as key concepts in probability and statistics. The theoretical part defines moments, mean, variance, and higher moments, including their applications in probability theory. Furthermore, the moment-generating function and characteristic function are discussed. Cumulants are introduced as functions of moments with emphasis on their significance and relationships with moments. In the empirical section, calculations of moments and cumulants are performed for selected probability distributions. The Fréchet-Shohat theorem, also known as the problem of moments, is presented. In the conclusion, the achieved results are summarized.

Keywords: Moments Cumulants Problem of moments

Obsah

Úvod

Momenty a kumulanty jsou základními pojmy v oblastech pravděpodobnosti a statistiky, které hrají klíčovou roli při charakterizaci vlastností pravděpodobnostních rozdělení a souborů dat. Porozumění těmto konceptům poskytuje cenné poznatky o chování a charakteristikách náhodných veličin. Tato bakalářská práce si klade za cíl prozkoumat detaily momentů a kumulantů, jejich definice, vlastnosti a aplikace v různých matematických a statistických kontextech.

V teoretickém rámci se zabýváme definicemi momentů, včetně střední hodnoty, rozptylu a vyšších momentů, osvětlujeme jejich význam při popisu tvaru a rozptylu pravděpodobnostních rozdělení. Kromě toho zkoumáme momentovou vytvořující funkci a charakteristickou funkci které nabízejí alternativní pohledy na rozdělení náhodných veličin.

Kumulanty, jako funkce momentů, jsou představeny s důrazem na jejich interpretační výhody a vztahy s momenty.

Empirická část této práce zahrnuje praktické výpočty momentů a kumulantů pro vybraná pravděpodobnostní rozdělení.

Dále představujeme Fréchet-Shohatovu větu, známou také jako momentový problém, která se zabývá unikátní reprezentací pravděpodobnostních rozdělení na základě jejich momentů. Porozumění této větě nám pomáhá osvětlit omezení a výzvy spojené s inferencí založenou na momentech.

V samotném závěru shrnujeme výsledky této práce. Prozkoumáním detailů těchto konceptů se snažíme přispět k rozvoji pravděpodobnostní a statistické teorie a tím i k lepšímu porozumění a interpretaci náhodných veličin a jejich rozdělení.

1. Teoretický rámec

1.1 Definice momentů, střední hodnota, rozptyl

U čtenáře se předpokládá znalost základní teorie pravděpodobnosti, statistiky, konceptu náhodných veličin, jejich distribučních funkcí, charakteristik a práce s nimi a k tomu potřebný matematický aparát.

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Mějme náhodnou reálnou veličinu X s distribuční funkcí $F_X(x)$. Jakým způsobem jsme schopni toto rozdělení charakterizovat? Jak popsat polohu, tvar a tak dále?

První a nejdůležitější charakteristikou je střední hodnota, která určuje polohu pravděpodobnostního rozdělení. Následující značení a definice jsou standardní, například práce Dupače a Huškové [1].

Definice 1 (Střední hodnota)**.** *Nechť je dána náhodná veličina X, její střední hodnotou, značíme $E[X]$, rozumíme reálné číslo $E[X]$ dané vztahem*

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega),$$

pokud integrál na pravé straně existuje, kde $P(\omega)$ představuje příslušnou pravděpodobnostní míru.

Nechť h je reálná měřitelná funkce, potom platí

$$E[h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(X(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}F_X(x),$$

kde $F_X(x)$ je příslušná distribuční funkce náhodné veličiny X, $f_X(x)$ její hustota a $\mu(x)$ je Lebesgueova, čítací, nebo empirická pravděpodobnostní míra.

Značkou L^p budeme označovat množinu všech reálných náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ takových, že $E[|X|^p] < \infty$.

Tvrzení 1 (Vlastnosti střední hodnoty)**.** *Nechť $X,Y \in L^1$. Pak platí:*

1. *$E(a + bX) = a + bE[X]$ pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$.*
2. *$E(X + Y) = E[X] + E[Y]$.*
3. *Pokud $P[X \leq Y] = 1$, pak $E[X] \leq E[Y]$.*

4. *Jestliže existuje $\mu \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$, pak $E[X] = \mu$.*

5. *Pro nezávislé náhodné veličiny X a Y platí*
$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Z této definice dostáváme vlastnosti, které bychom od charakteristiky určující polohu čekali. Není invariantní vůči translaci. pokud je hustota pravděpodobnosti symetrická, její střed je právě střední hodnota, a tak dále. Jaké další vlastnosti nám střední hodnota nabízí?

Tvrzení 2 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ (může být nekonečný), tj. $P[X \in I] = 1$. Nechť g je [neostře] konvexní funkce na I taková, že existuje $E[g(X)]$. Pak*
$$E[g(X)] \geq g(E[X])$$
a rovnost nastává právě když $g(x) = a + bx$ nebo X je konstanta.

Důsledek.
1. $E[X^2] \geq (E[X])^2$.
2. $E[\log X] \leq \log E[X]$ pro $X \in L^1$ takovou, že $P[X > 0] = 1$.
3. Nechť $p > q > 0$. Pak $E[|X|^{\frac{p}{q}}]^{\frac{1}{p}} \geq E[|X|^{\frac{q}{p}}]^{\frac{1}{q}}$.
4. Nechť $p > q > 0$ a $E[|X|^p] < \infty$. Pak $E[|X|^q] < \infty$.

Poznámka. Všimněme si, že pokud budeme mít náhodnou veličinu X, pro kterou platí $P[X = 1] = 1$, pak $E(X) = 1$. Pokud budeme mít náhodnou veličinu Y, pro kterou platí $P[Y = 2] = \frac{1}{2}, P[Y = 0] = \frac{1}{2}$ pak $E(X) = 1$ stejně jako u náhodné veličiny X. Jak tedy mezi těmito náhodnými veličinami rozlišit, když střední hodnota nestačí?

Vidíme tedy, že integrací první mocniny x dostáváme velmi užitečnou popisnou charakteristku pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny X s hezkými vlastnostmi. Co kdybychom nyní integrovali vyšší mocniny x a zkoumali význam těchto integrálů? Tyto integrály obecně označíme termínem momenty.

Definice 2 (Momenty)**.** *Definujme pro* $k \in \mathbb{N}_0$:

$\mu'_0 = \mu_0 = 1$ *jako nultý moment.*

$\mu'_k := E[X^k]$ *nazveme k-tý (obecný) moment náhodné veličiny* X.

$\mu_k := E[(X - E[X])^k]$ *nazveme k-tý centrální moment náhodné veličiny* X.

$E[|X|^k]$ *nazveme k-tý absolutní moment náhodné veličiny* X.

Střední hodnotu tedy můžeme nazvat prvním obecným momentem. Jedná se o charakterizaci centrální tendence rozdělení s příznivými výpočetními vlastnostmi, narozdíl od jiných charakteristik polohy, jako je například medián. Zkoumáním těchto definic objevíme další praktické popisné charakteristiky pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny X. Druhým nejdůležitějším momentem po střední hodnotě je rozptyl, definovaný jako druhý centrální moment. Rozptyl nám pomůže objasnit přesnost dat.

Definice 3 (Rozptyl, směrodatná odchylka, šikmost, špičatost)**.** *Definujme:*

- *Rozptyl* $Var(X)$ *náhodné veličiny* X *jako její druhý centrální moment, tj.* $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$. *Rozptyl se může také značit* σ_X^2 *nebo* σ^2.
- *Směrodatná odchylka* σ_X *náhodné veličiny* X *je odmocnina z jejího rozptylu,* $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.
- *Šikmost* γ_3 *náhodné veličiny* X *je definována jako* $\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.
- *Špičatost* γ_4 *náhodné veličiny* X *je definována jako* $\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$.

Rozptyl je jedním ze způsobů, jak měřit variabilitu dat. Měří rozsah kolísání náhodné veličiny kolem střední hodnoty. V případě, že chceme mít míru variabilitu ve stejných jednotkách jako náhodnou veličinu, použijeme směrodatnou odchylku σ_X nebo střední absolutní odchylku $E[|X - E[X]|]$. Pokud by náhodná veličina byla měřena například v metrech, rozptyl by představoval m^2, proto v aplikacích, například fyzikálních, můžeme s přihlédnutím na jednotky používat směrodatnou odchylku jakožto míru variability.

Šikmost náhodné veličiny γ_3 měří symetrii hustoty pravděpodobnosti rozdělení kolem střední hodnoty. Pokud je γ_3 kladná, rozdělení má delší pravé rameno a je vychýleno doleva. Naopak, pokud je γ_3 záporná, rozdělení má delší levé rameno a je vychýleno doprava. Když je γ_3 rovna nule, rozdělení je symetrické, toto platí například pro nnormální rozdělení.

Špičatost náhodné veličiny γ_4 měří, jak název napovídá, jak moc je hustota daného rozdělení špičatá nebo plochá. Kladná hodnota γ_4 značí, že rozdělení má vyšší a úzký vrchol, většina hodnot náhodné veličiny leží blízko její střední hodnoty a hlavní vliv na rozptyl mají málo pravděpodobné odlehlé hodnoty. Zatímco záporná hodnota značí, že rozdělení má nižší a širší vrchol, rozdělení je rovnoměrnější a jeho křivka hustoty je plošší. Rovněž platí, že $\gamma_4 = 3$ pro rozdělení s normálním tvarem.

Excess kurtóza (špičatost) je definována jako $\gamma_4^{exc} = \gamma_4 - 3$. Normální rozdělení má tedy $\gamma_4^{exc} = 0$ a měří, zda je dané rozdělení více, či méně špičaté než normální rozdělení.

Věta 3 (Vlastnosti rozptylu)**.** *Nechť X je náhodná veličina taková, že $Var(X) < \infty$. Pak platí:*

1. *$Var(X) \geq 0$; navíc $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : P[X = c] = 1$.*
2. *$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.*
3. *$Var(a + bX) = b^2 Var(X)$ pro $a,b \in \mathbb{R}$.*

Důkaz.
1.) (i) Rozptyl je definovaný jako druhý centrální moment, tedy je kvadrátem nějaké reálné hodnoty, pokud je náhodná veličina X reálná, je vždy nezáporný. (ii) Nechť platí, že $P[X = c] = 1$, pak nutně $E[X] = c$ a z definice rozptylu:

$$E[(X - E[X])^2] = E[0] = 0$$

2.) Použijeme definici rozptylu a následně rozepíšeme výraz:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

3.) Použijeme definici rozptylu:

$$\begin{aligned} Var(a + bX) &= E[(a + bX - E[a + bX])^2] \\ &= E[(a + bX - (a + bE[X]))^2] \\ &= E[(b(X - E[X]))^2] \\ &= E[b^2(X - E[X])^2] \\ &= b^2 E[(X - E[X])^2] \\ &= b^2 Var(X) \end{aligned}$$

$\square$

Máme tedy již několik velice užitečných popisných charakteristik pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny. Tyto charakteristiky nám v principu pomáhají chápat tvar a pozici rozdělení. Mají ale mezi sebou nějakou spojitost?

Věta 4 (Markovova nerovnost). *Nechť $X \in L^r$, kde $r > 0$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}.$$

Dupač; Hušková [1, Věta 2.10(ii)]

Důsledek (Čebyševova nerovnost). Pro $X \in L^2$ a pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Čebyševova nerovnost nám dává spojitost mezi střední hodnotou a rozptylem. Rozptyl nám omezuje pravděpodobnost nastání odlehlých pozorování od střední hodnoty.

Poznámka. Všimněme si faktu, že existence k-tého obecného (centrálního, absolutního,...) momentu je podmíněna existencí všech obecných (centrálních, absolutních,...) momentů řádu $< k$ a to pro všechna $k > 0$. Pro $k = 0$ víme, že takový moment existuje vždy a je roven 1. Existence takových momentů nezaručuje existenci k-tého momentu, jedná se pouze o nutnou podmínku.

Stejné pravidlo platí i pro existenci centrálních momentů v závislosti na existenci obecných momentů a naprosto stejně pro všechny typy momentů. Platí, že k-tý centrální moment existuje jen tehdy, pokud existují všechny obecné momenty nižších řádů a tak dále. Ukažme si nyní, že momenty některých pravděpodobnostních rozdělení nemusí vždy existovat.

Příklad. Momenty Studentova t-rozdělení
Mějme Studentovo t-rozdělení s k stupni volnosti, $k \in \mathbb{N}$. Spočítejme střední hodnotu a některé další momenty tohoto rozdělení. Studentovo t-rozdělení je definováno hustotou $f_X(x)$, kterou můžeme zapsat jako

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Obecné momenty spočítáme podle následujícího vztahu

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\, dx.$$

Dosadíme za $f_X(x)$:

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx$$

Přesuneme všechny konstanty před integrál:

$$\mathrm{E}[X] = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx$$

Nyní rozdělíme výpočet do několika kroků podle počtu stupňů volnosti. Pro $k = 1$ integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r \left(1 + x^2\right)^{-1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^r}{1 + x^2} dx$$

není absolutně konvergentní pro každé celé $r > 0$, tedy takové Studentovo t-rozdělení nemá střední hodnotu, tím pádem ani žádný moment vyššího řádu. Pro $k > 1$ se jedná o integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx.$$

Pro $k > 1, r = 1$ máme integrál z liché funkce a jelikož integrujeme přes symetrický obor hodnot, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx = 0.$$

Tedy $E[X]$ pro $k > 1$ je 0. Pokud $k > 1$, můžeme z integrálu nahlédnout existenci momentů maximálně do řádu $k - 1$ včetně. Tedy Studentovo rozdělení s $k = 1$ má konečný pouze nultý moment, ostatní neexistují. Studentovo rozdělení s $k = 2$ má navíc první moment a neexistující všechny vyšší. Pro $k = 3$ existuje i rozptyl (neboli druhý centrální moment - existuje jen tehdy, pokud existuje druhý obecný moment) a tak dále.

Studentovo t-rozdělení s různými stupni volnosti se často používá v oblasti financí. Má těžší chvosty než normální rozdělení, tudíž extrémní pozorování nastávají s větší pravděpodobností (extrémní zisky či ztráty), což lépe modeluje realitu, než normální rozdělení, ale zároveň pro vhodnou volbu stupňů volnosti existují příslušné momenty, narozdíl od Cauchyho rozdělení.

Cauchyho rozdělení je speciální případ studentova t-rozdělení pro $k = 1$ stupňů volnosti. Toto rozdělení nemá střední hodnotu viz. výše a tedy ani rozptyl.

1.2 Statistika a momenty

Představme si, že pozorujeme realizace nějaké reálné náhodné veličiny bez znalosti jejího rozdělení (10 hodů kostkou,...). Jak spočítáme momenty, když neznáme distribuční funkci? Těmto realizacím budeme říkat data, či náhodný výběr. Následující definice jsou standardní, například dílo Anděla [2].

Definice 4 (Náhodný výběr)**.** *Posloupnost* $X_1, X_2, ..., X_n$ *nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, se stejnou distribuční funkcí* $F_X(x)$ *nazveme náhodným výběrem z rozdělení* $F_X(x)$*. Konstantu* n *nazýváme rozsah výběru.*

Obecně může být posloupnost náhodného výběru složena z reálných náhodných veličin, nebo náhodných vektorů.

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, ..., X_n$ s distribuční funkcí $F_X(x)$. Chceme určit momenty rozdělení s distribuční funkcí $F_X(x)$. Střední hodnota, jako charakterizace polohy, by mohla odpovídat hypotetickému středu našeho náhodného výběru, rozptyl by mohl být reprezentován jako vychýlení od tohoto středu. Je tedy intuitivní, že momenty rozdělelní $F_X(x)$ nebudeme počítat přesně, přesné hodnoty nám zůstanou neznámé, pokud je neznámá i distribuční funkce, ale můžeme je odhadovat. Jak?

Definice 5 (Empirická pravděpodobnostní míra)**.** *Empirickou pravděpodobnostní mírou budeme rozumnět takovou pravděpodobnostní míru, která přiřadí každému realizovanému pozorování z náhodného výběru pravděpodobnost výskytu* $\frac{1}{n}$*, kde* n *je rozsah výběru.*

Tedy empirická pravděpodobnostní míra realizované hodnoty náhodného výběru považuje za rovnocenné hodnoty se stejnou pravděpodobností výskytu. Vzhledem k této pravděpodobnostní míře nyní můžeme počítat střední hodnotu našeho náhodného výběru, rozptyl i vyšší momenty.

Příklad (Odhad střední hodnoty). Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí $F_X(x)$. Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ jsou realizované hodnoty náhodného výběru $X_1, X_2, ..., X_n$. Spočítejme jejich střední hodnotu vzhedem k empirické pravděpodobnostní míře, která přiřadí každé realizované hodnotě x_i novou pravděpodobnost výskytu $p_i = \frac{1}{n}$, pro $i = 1,...,n$. Tedy máme náhodnou veličinu x s možnými hodnotami $x_1, x_2, ..., x_n$ a pravděpodobnostní funkcí, která dává každému pozorování pravděpodobnost výskytu $p_i = \frac{1}{n}$.
Řešení:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tuto střední hodnotu označme $\bar{X}_n$ a nazvěme ji výběrovým průměrem náhodného výběru $X_1, X_2, ..., X_n$.

Příklad (Odhad rozptylu). Mějme stejné zadání jako v příkladu výše, nyní spočítejme rozptyl vzhledem k empirické pravděpodobnostní míře.
Řešení:

$$Var(x) = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$E[x^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$E[x] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tedy:

$$Var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i)$$

Po úpravě a s využitím výsledku z příkladu výše dostáváme:

$$Var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X}_n)^2$$

Tento rozptyl označíme jako $\hat{\sigma}^2$ a nazveme jej empirickým rozptylem.

Všimněme si, že se jedná pouze o jakousi aproximaci střední hodnoty a rozptylu, platí zde, že pravděpodobnost výskytu pozorování v náhodném výběru je stejná pro všechna pozorování. To nemůžeme po skutečných pravděpodobnostech vyžadovat. Tyto hodnoty tedy nazveme odhadem střední hodnoty a rozptylu. Stejným způsobem bychom mohli počítat obecné empirické momenty vyšších řádů.

V praxi se pro odhad rozptylu převážně používá vzorec ve kterém místo n vystupuje $n - 1$. Jedná se o modifikaci motivovanou teorií nevychýlených odhadů.

Definice 6 (Empirické momenty)**.** *Pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí $F_X(x)$ definujeme:*

- *Empirický k-tý obecný moment:*

$$\hat{\mu}'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- *Empirický k-tý centrální moment:*

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$$

- *Empirickou šikmost:*

$$\hat{\gamma}_n^3 = \frac{\hat{\mu}_3}{(\hat{\sigma}^2)^{3/2}}$$

- *Empirickou špičatost:*

$$\hat{\gamma}_n^4 = \frac{\hat{\mu}_4}{(\hat{\sigma}^2)^2}$$

Kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $F_X(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Nyní máme nástroj pro odhadování momentů z dat. Toto je v praxi extrémně užitečný nástroj, neboť málo kdy známe distribuční funkce zkoumaných veličin. Takovéto odhady skutečných momentů mají některé hezké vlastnosti, tímto se v této práci ale dále zabývat nebudeme.

Na základě vztahů mezi empirickými momenty a jejich teoretickými protějšky stojí velice často statistiky používaná momentová metoda, která slouží k odhadování parametrů pravděpodobnostních rozdělení. Tímto se však v této práci také dále zabývat nebudeme.

Momenty tedy popisují pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny, jeho tvar a chování. Přehled nejpoužívanějších diskrétních i spojitých rozdělení společně s jejich momenty viz. Příloha 1. Charakterizují však momenty rozdělení náhodné veličiny úplně? Odpovědí je, že ve vší obecnosti nikoliv. Tímto problémem se budeme v práci zabývat o pár stran dále. Další otázkou, na kterou bychom chtěli odpovědět je, zda existují i jiné popisné charakteristiky rozdělelní než momenty a případně zda existuje něco, co pravděpodobnostní rozdělení určuje jednoznačně. Odpověď je zde ano, viz. následující stránky.

1.3 Momentová vytvořující funkce

Během výkladu momentů si můžeme všimnout nedostatků, které momenty mají, např. nejednoznačnost, nejistá existence a poměrně náročný výpočet při složitých hustotách. Existuje tedy charakteristika, která jednoznačně určuje pravděpodobnostní rozdělení? Existuje i jiná cesta jak spočítat momenty než z definice? Na tyto dvě otázky odpovíme v následující kapitole. Na odpověď, zda se dá vyřešit nejednoznačnost momentů si počkáme o kapitolu dále. Následující definice momentové vytvořující funkce a charakteristické funkce jsou zcela standardní, například práce Grimmeta a Welshe [3, str. 118].

Definice 7 (Momentová vytvořující funkce)**.** *Momentovou vytvořující funkci reálné náhodné veličiny X, značíme $M_X(t)$, definujeme následovně.*
Pro spojitou náhodnou veličinu

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx.$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} p_X(x_i).$$

Za předpokladu, že tato střední hodnota existuje pro t v nějakém otevřeném okolí nuly. To znamená, že existuje $a > 0$, takové, že pro všechna t v $(-a; a)$ $\mathrm{E}[e^{tX}]$ existuje.

Pokud střední hodnota neexistuje v nějakém otevřeném okolí nuly, říkáme, že momentová vytvořující funkce neexistuje. Kde

- *t je libovolný reálný parametr,*
- *$f_X(x)$ je hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X,*
- *$p_X(x_i)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny X,*
- *x_i jsou hodnoty diskrétní veličiny.*

Příklad (Výpočet momentové vytvořující funkce). Mějme dvě náhodné veličiny, nalezněme jejich momentové vytvořující funkce. Nechť X je diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{pro } k = 1, \\ \frac{4}{5} & \text{pro } k = 2 \end{cases}$$

a Y náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením R(0,1).
Řešení: Pro X máme

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{2t}.$$

Což je dobře definováno pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Pro Y můžeme psát

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = \int_0^1 e^{ty}\, dy = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Připomeňme si, že

$$M_Y(0) = E[e^{0Y}] = 1,$$

tedy i tento výraz je dobře definován pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Tím jsme spočítali obě momentové vytvořující funkce.

Pokud má momentová vytvořující funkce Taylorův rozvoj okolo počátku, můžeme psát viz. Kendall; Stuart [4, str. 60-61]:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots + \frac{t^rX^r}{r!} + \cdots\right) =$$
$$= 1 + tE[X] + \frac{t^2E[X^2]}{2!} + \cdots + \frac{t^rE[X^r]}{r!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu'_r t^r}{r!}$$

Tedy k-tý obecný moment náhodné veličiny X můžeme získat k-tou derivací momentové vytvořující funkce $M_X(t)$ podle t a vyhodnocením v $t = 0$.

$$\mu'_k = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0}$$

Příklad (Výpočet momentů exponenciálního rozdělení). Předpokládejme, že X má exponenciální rozdělení s parametrem λ. Najděme momentovou vytvořující funkci $M_X(t)$, a všechny momenty $E[X^k]$.
Řešení: Připomeňme, že hustota exponenciálního rozdělení je

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0.$$

Tedy

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx =$$
$$= \left[-\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-(\lambda-t)x}\right]_0^\infty, \text{ pro } t < \lambda = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Tedy $M_X(t)$ existuje pro všechna $t < \lambda$. K určení momentů X můžeme psát:

$$E[X] = M'_X(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = M''_X(0) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E[X^3] = M'''_X(0) = \frac{6\lambda}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^3}$$

Obecně pro n-tý moment:

$$E[X^n] = M_X^{(n)}(0) = \frac{n!\lambda}{\lambda^{n+1}} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

1.3.1 Vlastnosti momentové vytvořující funkce

Nyní jsme zavedli koncept momentové vytvořující funkce, jakožto nástroje na výpočet momentů pomocí derivace. Má i jiné využití? Velice důležitou vlastností momentové vytvořující funkce je, že pokud mají dvě rozdělení stejné momentové vytvořující funkce, pak jsou rozdělení identická.

Tvrzení 5 (Jednoznačnost momentové vytvořující funkce)**.** *Pokud pro momentovou vytvořující funkci* $M_X(t)$ *platí, že* $M_X(t) = E(e^{tX}) < \infty$ *pro všechna* t *v otevřeném intervalu* $-a < t < a$ *pro nějaké* $a > 0$*, pak existuje unikátní distribuční funkce* $F_X(x)$ *s momentovou vytvořující funkcí* $M_X(t)$*.*

Tedy pokud pro dvě náhodné veličiny X a Y platí, že

$$M_X(t) = M_Y(t),$$

pro všechna t, pak

$$F_X(x) = F_Y(x)$$

pro všechna x. Tedy náhodné veličiny X a Y mají totožná rozdělení. Toto tvrzení není ekvivalentní s tvrzením „jestliže dvě rozdělení mají stejné momenty, pak jsou identická ve všech bodech“ (viz. momentový problém). To je způsobeno tím, že v některých případech existují momenty daného rozdělení, ale momentová vytvořující funkce nikoliv, protože limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu'_r \frac{t^r}{r!}$$

nemusí vždy existovat. Log-normální rozdělení je příkladem, kdy k tomuto dochází. Dále diskutováno v kapitole 3.

Věta 6 (Momentová vytvořující funkce součtu)**.** *Mějme nezávislé náhodné veličiny* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*, pak*

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t).$$

Důkaz.
Definujme

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Potom,

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}] =$$
$$= E[e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}] = E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\cdots E[e^{tX_n}] =$$
$$= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t).$$

□

Příklad (Součet nezávislých náhodných veličin). Pomocí momentových vytvořujících funkcí dokažme, že pokud $X \sim \text{Binom}(m,p)$ a $Y \sim \text{Binom}(n,p)$ jsou nezávislé, pak $X + Y \sim \text{Binom}(m + n,p)$.
Řešení: Máme

$$M_X(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^m$$
$$M_Y(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n.$$

Z nezávislosti X a Y plyne

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^{m+n},$$

což je momentová vytvořující funkce náhodné veličiny s rozdělením $\text{Binom}(m + n,p)$. Tudíž $X + Y \sim \text{Binom}(m + n,p)$.

Díky této vlastnosti je momentová i charakteristická funkce viz. níže používaným nástrojem k výpočtům a práci se součty náhodných veličin. Jak víme z předchozích kapitol, momenty pravděpodobnostních rozdělení nemusí vždy existovat, jak je to ale s momentovou vytvořující funkcí? Ukazuje se, že integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx,$$

či suma

$$\sum_i e^{tx_i} p_X(x_i),$$

není sčítatelná, potažmo integrál není vždy absolutně konvergentní pro celou řadu náhodných veličin viz. následující příklad.

Příklad (Existence momentové vytvořující funkce). Mějme náhodnou veličinu s hustotou $f(x) = k(1 + x^2)^{-m}$ pro konečné kladné hodnoty m. Kde k je konstanta taková, aby platilo

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(1 + x^2)^{-m}\, dx = 1.$$

Tedy

$$k = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-m}\, dx\right)^{-1}.$$

Momentová vytvořující funkce pro danou hustotu pravděpodobnosti
$f(x) = k(1+x^2)^{-m}$, kde k je normalizační konstanta a m je parametr, je definována následovně:

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} k(1 + x^2)^{-m}\, dx$$

Tento integrál diverguje pro kladné konečné hodnoty m, protože pro $m > 0$ integrál konverguje pouze pro záporné hodnoty t. Když je t kladné, integrál diverguje, neboť e^{tx} roste výrazně rychleji než $(1 + x^2)^{-m}$. Momentová vytvořující funkce tedy neexistuje.

Momentová vytvořující funkce tedy neexistuje pro všechny náhodné veličiny, existuje však nějaká charakteristika pravděpodobnostního rozdělení pro jakoukoliv náhodnou veličinu?

1.4 Charakteristická funkce

Definice 8 (Charakteristická funkce)**.** *Charakteristickou funkcí spojité náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti $f_X(x)$ rozumíme funkci $\Phi_X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovanou jako*

$$\Phi_X(t) = \mathrm{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx.$$

Charakteristickou funkci diskrétní náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $p_X(x_i)$, $\Phi_X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definujeme jako

$$\Phi_X(t) = \mathrm{E}[e^{itX}] = \sum_i e^{itx_i} p_X(x_i),$$

kde

- *t je libovolný reálný parametr,*
- *i je imaginární jednotka,*
- *x_i jsou jednotlivé hodnoty diskrétní veličiny,*
- *$p_X(x_i)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny X.*

Charakteristická funkce na rozdíl od momentové vytvořující funkce existuje pro všechny náhodné veličiny. Tedy i pokud momentová vytvořující funkce neexistuje. Pokud je X reálná náhodná veličina, můžeme psát

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)],$$

tedy platí, že charakteristická funkce je v jistém smyslu Furierova transformace hustoty pravděpodobnosti. Zde můžeme nahlédnout, že charakteristická funkce existuje pro všechny reálné náhodné veličiny, neboť z vlastností goniometrických funkcí plyne:

$$E\left[\cos(tx)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF(x) < \infty$$

$$E[\sin(tx)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF(x) < \infty$$
$$E\left[e^{itx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) < \infty$$

Tedy integrály jsou vždy konečné a existují, tudíž vždy existuje i charakteristická funkce. Charakteristická funkce má, až na existenci, velmi podobné vlastnosti jako momentová vytvořující funkce.

Věta 7 (Vlastnosti charakteristické funkce)**.** *Nechť je dána charakteristická funkce $\Phi_X(t)$ reálné náhodné veličiny X, pak $\Phi_X(t)$ má (mimo jiné) následující vlastnosti:*

1. $\Phi_X(0) = 1$.
2. $\Phi_X(t)$ *je omezená:* $|\Phi_X(t)| \leq 1$.
3. *Dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 mají stejné pravděpodobnostní rozdělení právě tehdy, když $\Phi_{X_1}(t) = \Phi_{X_2}(t)$.*
4. *Pokud náhodná veličina X má momenty až do k-tého řádu, pak je charakteristická funkce $\Phi_X(t)$ k-krát spojitě diferencovatelná na celé reálné ose a platí $E[X^k] = i^{-k}\Phi_X(t)^{(k)}(0)$.*
5. *Pokud jsou $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny pak charakteristická funkce součtu X_i je $\Phi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_n}(t)$.*
6. *Nechť náhodná veličina $Y = aX + b$ je lineární transformací náhodné veličiny X. Charakteristická funkce Y je $\Phi_Y(t) = e^{itb}\Phi_X(at)$.*

Důkaz.

1. $\Phi_X(0) = E\left[e^{i0X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$.
2. Pro libovolné t platí $|\Phi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \leq E[|e^{itX}|] = E[1] = 1$.
3. Vynecháme.
4. Předpokládejme, že $k = 1$. Z existence EX plyne, že
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < \infty$$
a
$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx}\, dF(x)$$

je stejnoměrně konvergentní vzhledem k t, takže lze provést záměnu derivace a integrálu a můžeme počítat

$$\Phi_X(t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}\, dF(x).$$

Po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$\Phi_X(0) = \int_{\mathbb{R}} ix\, dF(x) = iEX.$$

Zbytek dokážeme matematickou indukcí.

5. Nechť $Z = \sum_{k=1}^n X_k$, kde X_k jsou nezávislé náhodné veličiny viz. tvrzení, pak

$$\begin{aligned}\Phi_Z(t) &= E[e^{itZ}]\\ &= E[e^{it\sum_{k=1}^n X_k}]\\ &= E[\prod_{k=1}^n e^{itX_k}]\\ &= \prod_{k=1}^n E[e^{itX_k}]\\ &= \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t).\end{aligned}$$

6. Nechť $Y = aX + b$, pak

$$\begin{aligned}\Phi_Y(t) &= E[e^{itY}]\\ &= E[e^{itb}e^{i(ta)X}]\\ &= e^{itb}E[e^{i(ta)X}]\\ &= e^{itb}\Phi_X(at)\end{aligned}$$

□

Pokud má náhodná veličina momentovou vytvořující funkci $M_X(t)$, pak platí

$$\Phi_X(-it) = M_X(t).$$

Příklad (Charakteristická funkce exponenciálního rozdělení). Spočítejme charakteristickou funkci náhodné veličiny X, která má exponenciální rozdělení s parametrem λ. Hustota exponenciálního rozdělení je

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$$

Tedy

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx =$$
$$= \left[\frac{\lambda}{it - \lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

a $\Phi_X(t)$ existuje pro každé $\lambda > 0$, zatímco momentová vytvořující funkce existuje pouze pokud $t < \lambda$.

Stejným způsobem můžeme počítat momentové vytvořující funkce a charakteristické funkce pro různá pravděpodobnostní rozdělení. K nahlédnutí v Příloze 2.

2. Kumulanty

Jak jsme se seznámili výše, máme již několik nástrojů na popis a charakterizaci pravděpodobnostního rozdělení. Momenty jsou popisné charakteristiky, které slouží k bližšímu pochopení a zkoumání pravděpodobnostích rozdělení a za určitých okolností, viz. momentový problém, jej i jednoznačně určují. Momentová a charakteristická funkce rovněž, s výhodou jednoznačnosti. Nicméně toto nejsou jediné ani nejlepší popisné charakteristiky, které se nabízejí.

Další charakteristiky, které popisují pravděpodobnostní rozdělení se nazývají kumulanty. Tato kapitola sleduje dílo Kendalla a Stuarta [4, str. 67-73].

Definice 9 (Kumulanty)**.** *Kumulanty $k_1, k_2, \ldots, k_r$ definujme následující identitou v t pro r přirozená čísla včetně nuly:*

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = 1 + \mu_1' it + \frac{\mu_2'(it)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu_r'(it)^r}{r!} + \cdots$$
$$= e^{(k_1(it)+(k_2(it)^2)/2!+\cdots+(k_r(it)^r)/r!+\cdots)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF$$

Již víme, viz. poznámka pod Definicí 6, že r-tý moment náhodné veličiny X μ_r' je koeficient u členu $(it)^r/r!$ v Taylorově rozvoji okolo počátku $\Phi_X(t)$. Kumulant r-tého řádu je koeficient v Taylorově rozvoji okolo počátku z logaritmu $\Phi_X(t)$ u $(it)^r/r!$, pokud tyto rozvoje existují. $K(t) = \log \Phi_X(t)$ označíme jako kumulantovou vytvořující funkci. Platí:

$$K(t) = \log \Phi_X(t) = \sum_r k_r \frac{(it)^r}{r!}$$

Někdy se můžeme setkat s definicí $\Phi_X(t)$ přes $\log M(t)$ a označovat toto jako kumulantovou vytvořující funkci, my však zůstaneme u Definice 9. Termín kumulant byl poprvé použit Fisherem [5] díky jejich kumulativní vlastnosti viz. Věta 8. V literatuře se také můžeme setkat s pojmenováním kumulantů semiinvarianty v návaznosti na vlastnosti kumulantů viz. Věta 8. Analogicky jako u momentů můžeme kumulanty získat derivováním kumulantové vytvořující funkce. Pro r = 1,2,...., platí:

$$k_r = i^{-r} K^{(r)}(0) = i^{-r} \left. \frac{\mathrm{d}^r \log \Phi_X(t)}{\mathrm{d}t^r} \right|_{t=0}$$
$$= i^{-r} \left. \frac{\mathrm{d}^r K(t)}{\mathrm{d}t^r} \right|_{t=0}$$

Pokud $r = 0$, platí

$$k_0 = 0.$$

Věta 8 (Vlastnosti kumulantů). *Kumulant $k_r(X)$ náhodné veličiny X má následující vlastnosti:*

1. Pokud $r > 1$ a c je nenáhodná konstanta, pak $k_r(X + c) = k_r(X)$, tj. kumulant je invariantní vůči translaci. (Pokud $r = 1$, pak máme $k_1(X+c) = k_1(X)+c$.)

2. Pokud c je nenáhodná konstanta, pak $k_r(cX) = c^r k_r(X)$.

3. Jestliže máme nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_m$, pak

$$k_r(X_1 + \dots + X_m) = k_r(X_1) + \dots + k_r(X_m).$$

Tedy kumulant je kumulativní - z této vlastnosti plyne i název.

Důkaz. [Vlastnosti kumulantů]

1.) Nechť $Y = X + c$. Charakteristická funkce náhodné veličiny Y je

$$\Phi_Y(t) = E[e^{it(Y)}] = E[e^{it(X+c)}].$$

Tedy:

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X+c}(t) = \Phi_X(t)e^{itc}$$

R-tou derivací $K_Y(t)$ podle t dostáváme

$$\frac{d^r}{dt^r} \log \Phi_Y(t) = \frac{d^r}{dt^r} \log(\Phi_X(t)e^{itc}) = \frac{d^r}{dt^r} \log \Phi_X(t) + \frac{d^r}{dt^r} itc.$$

Pro $r = 1$ a vyhodnocením v $t = 0$:

$$k_1(Y) = k_1(X + c) = k_1(X) + c$$

Tato vlastnost plyne také z vlastností střední hodnoty. Neboť

$$k_1(X + c) = E[X + c].$$

Pro $r > 1$ se člen $\frac{d^r}{dt^r} itc$ v derivaci výše vynuluje a dostáváme

$$k_r(Y) = k_r(X + c) = k_r(X).$$

2.) Vynechán. Částečně naznačeno výše skrze stejnou vlastnost rozptylu a střední hodnoty (první dva kumulanty).

3.) Dokážeme, že kumulantová vytvořující funkce součtu nezávislých náhodných veličin je součtem jejich kumulantových funkcí. Z tohoto pak triviálně tvrzení platí.

$$K_{X_1+\dots+X_m}(t) = \log \mathrm{E}\left[e^{it(X_1+\dots+X_m)}\right] =$$

$$= \log\left(\mathrm{E}\left[e^{itX_1}\right]\cdots\mathrm{E}\left[e^{itX_m}\right]\right) =$$
$$= \log\mathrm{E}\left[e^{itX_1}\right] + \cdots + \log\mathrm{E}\left[e^{itX_m}\right] = K_{X_1}(t) + \cdots + K_{X_m}(t).$$

$\square$

Z vlastností výše vyplývá, že každý kumulant součtu nezávislých náhodných veličin je součtem odpovídajících kumulantů všech sčítanců. Tedy střední hodnota součtu je součtem středních hodnot, rozptyl součtu je součtem rozptylů, třetí kumulant (který je zároveň třetím centrálním momentem viz. níže) součtu je součtem třetích kumulantů a tak dále pro každý kumulant. Nicméně zcela obecně momenty kumulativní nejsou, jak lze nahlédnout ze vztahů mezi momenty a kumulanty níže, kumulativita končí u třetího centrálního momentu, který tuto vlastnost má díky shodnosti se třetím kumulantem, ale momenty řádu > 3 už kumulativní vlastnost nemají.

2.1 Vztahy mezi kumulanty a momenty

Z Definice 9 si můžeme povšimnou úzké vazby mezi momenty a kumulanty, to je viditelné i z definice kumulantové vytvořující funkce, která je logaritmem charakteristické funkce. Evidentně $\mu_0' = 1$ dává $k_0 = 0$. Dále mějme viz. Definice 9 rovnost, kterou dále rozvineme pomocí Taylorova rozvoje exponenciály okolo počátku viz. Kendall; Stuart [4, str. 68]:

$$1 + \mu_1' it + \frac{\mu_2'(it)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu_r'(it)^r}{r!} + \cdots =$$
$$= e^{(k_1 it + (k_2(it)^2)/2! + \cdots + (k_r(it)^r)/r! + \cdots)} =$$
$$= e^{(k_1 it)/1!} e^{(k_2(it)^2)/2!} \cdots e^{(k_r(it)^r)/r!} \cdots =$$
$$= \left(1 + \frac{(k_1 it)}{1!} + \frac{(k_1^2(it)^2)}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{(k_2(it)^2)}{2!} + \frac{1}{2!}\left(\frac{(k_2^2(it)^4)}{2!^2}\right) + \cdots\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 + \frac{(k_r(it)^r)}{r!} + \frac{1}{2!}\left(\frac{(k_r(it)^r)}{r!}\right)^2 + \cdots\right)\cdots$$

Výběrem těch členů v expanzích, které po vynásobení mezi sebou dají mocninu $(it)^r$ pro $r = 1{,}2,\ldots$, dostáváme vztahy mezi momenty a kumulanty. Pro $r = 1$ dostáváme

$$\mu_1' it = \frac{k_1 it}{1!},$$

tedy $k_1 = \mu'_1$, dále pro $r = 2$ dostáváme

$$\frac{\mu'_2(it)^2}{2!} = \frac{k_1^2(it)^2}{2!} + \frac{k_2(it)^2}{2!}.$$

Z této rovnosti plyne vztah

$$\mu'_2 = k_1^2 + k_2,$$

a $k_1 = \mu_1$, úpravou dostáváme

$$k_2 = \mu'_2 - {\mu'_1}^2.$$

Obecně můžeme psát zlogaritmováním rovnosti z Definice 9:

$$\begin{aligned} k_1(it) + \frac{k_2(it)^2}{2!} + \cdots + \frac{k_r(it)^r}{r!} + \cdots \\ = \log(1 + \mu'_1 it + \frac{\mu'_2(it)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu'_r(it)^r}{r!} + \cdots) \end{aligned}$$

Expanzí logaritmu výše a výběrem členů v expanzích, které dají po vynásobení mezi sebou mocninu $(it)^r$ pro $r = 1{,}2, \ldots$, stejně jako při odvození vztahu pro první dva kumulanty, dostáváme obecný vztah pro kumulant k_r viz. Kendall; Stuart [4, str. 70, 3.39].

$$k_r = r! \sum_{m=0}^{r} \sum (\frac{\mu'_{p_1}}{p_1!})^{\pi_1} \ldots (\frac{\mu'_{p_m}}{p_m!})^{\pi_m} \frac{(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!}{(\pi_1! \ldots \pi_m!)}.$$

Kde druhá suma sčítá přes všechny nezáporné π a ρ taková, že

$$p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \ldots p_m\pi_m = r$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m = \rho.$$

Pro první čtyři kumulanty dostáváme:

$$k_1 = \mu'_1$$
$$k_2 = \mu'_2 - {\mu'_1}^2$$
$$k_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2{\mu'_1}^3$$
$$k_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3{\mu'_2}^2 + 12\mu'_2{\mu'_1}^2 - 6{\mu'_1}^4$$
$$\ldots$$

Analogickým způsobem lze vyjádřit vztahy momentů v závislosti na kumulantech, či závislost kumulantů na centrálních momentech a tak dále. Vzájemné vyjádření mezi momenty a kumulanty k nahlédnutí v díle Kendalla a Stuarta [4, str. 69-71]. Zde ukážeme n-tý obecný moment vyjádřený pomocí kumulantů:

$$\begin{gathered}\mu'_1 = k_1 \\ \mu'_2 = k_2 + k_1^2 \\ \mu'_3 = k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3 \\ \mu'_4 = k_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_2k_1^2 + k_1^4 \\ \dots\end{gathered}$$

Kumulanty vyjádřené pomocí centrálních momentů:

$$\begin{gathered}\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = k_2 \\ \mu_3 = k_3 \\ \mu_4 = k_4 + 3k_2^2 \\ \dots\end{gathered}$$

Všimněme si, $k_1 = \mu'_1$ je střední hodnota X, k_2 je rozptyl a $k_3 = \mathrm{E}((X - \mu'_1)^3)$.

$$\begin{aligned}E(X - \mu'_1)^3 &= E(X^3 - 3X^2\mu'_1 + 3X{\mu'_1}^2 - {\mu'_1}^3) \\ &= E(X^3) - 3E(X^2)\mu'_1 + 3E(X){\mu'_1}^2 - E({\mu'_1}^3) \\ &= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2{\mu'_1}^3 \\ &= k_3\end{aligned}$$

Kumulanty vyššího řádu už dále nejsou totožné s centrálními momenty vyšších řádů. Z Definice 9 a vztahů mezi momenty a kumulanty si můžeme všimnout, že kumulant k_r, pro $r = 1{,}2,\dots$ existuje tehdy, pokud existuje moment μ'_r a všechny nižší momenty a tedy i všechny nižší kumulanty. Formulujme tedy následující tvrzení viz. Kendall; Stuart [4, str. 71]:

Věta 9 (Existence kumulantů)**.** *Kumulant k_r existuje tehdy, pokud existují momenty řádu r a všechny momenty řádu nižšího. A to pro každé $r = 1, 2, \dots$.*

Z rovnosti

$$\exp\left\{\sum \frac{k_r(it)^r}{r!}\right\} = \Phi(t)$$

Viz Definice 9, je však obtížné toto tvrzení dokázat, ač intuitivně platí. Důkaz k nahlédnutí v díle Kendall; Stuart [4, str. 71, 3.34, 3.35]

2.2 Kumulanty a kumulantové funkce některých rozdělení

Příklad. Nechť je dána náhodná veličina X s normálním rozdělením $N(\mu,\sigma^2)$, spočtěme její kumulanty a kumulantovou vytvořující funkci. Víme, že platí

$$K(t) = \log \Phi_X(t).$$

Charakteristická funkce normálního rozdělení je $e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. Kumulantová vytvořující funkce je tedy $\mu it - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$. Derivujme podle t a vyhodnocujme v $t = 0$.

$$k_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0} = \mu$$

$$k_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0} = \sigma^2$$

$$k_3 = \frac{1}{i^3}\frac{d^3}{dt^3}\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0} = 0$$

$$k_4 = \frac{1}{i^4}\frac{d^4}{dt^4}\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0} = 0$$

A tak dále pro vyšší řády.

Podobně můžeme počítat kumulanty a kumulantové vytvořující funkce i pro další pravděpodobnostní rozdělení viz. Příloha 3.

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má kumulantovou vytvořující funkci $K(t) = it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$ viz. výše, což je polynom druhého řádu. Toto implikuje, že všechny kumulanty řádu 3 a výše jsou nulové.

Józef Marcinkiewicz (1910-1940) ukázal, že normální rozdělení je jediné rozdělení, jehož kumulantová vytvořující funkce je polynom, tedy jediné rozdělení, které má konečný počet nenulových kumulantů.

Všimněme si, že konstantní rozdělení je degenerovaný případ normálního rozdělení s nulovým rozptylem.

3. Momentový problém

Nechť je dáno pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X s distribuční funkcí $F_X(x)$. Označme $\mu'_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, dF_X(x)$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, jako n-tý moment náhodné veličiny X a dále $s = (\mu'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ posloupnost momentů náhodné veličiny X.

Momentový problém se snaží odpovědět na otázku, zda posloupnost s jednoznačně určuje rozdělení náhodné veličiny X, případně za jakých podmínek. Obecně se tato problematika nazývá Hamburgerův momentový problém podle Hanze Hamburgera (1889 - 1956), nicméně existuje i několik dalších odvozených momentových problémů, my se však budeme zabývat pouze tímto.

Definice 10 (Posloupnost s)**.** *Posloupnost momentů s nazveme determinující, pokud jednoznačně určuje pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X, pokud tomu tak není, posloupnost s nazveme nedeterminující.*

Jak vyvrátit tvrzení, že posloupnost s vždy charakterizuje pravděpodobnostní rozdělení? Najděme protipříklad viz. Shorack [6, str. 293].

Příklad. Ukažme, že logaritmicko-normální rozdělení náhodné veličiny X s $\mu'_1 = 0, \sigma^2 = 1$ a hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

má konečné momenty a odpovídající momentová posloupnost je nedeterminující. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Dosadíme-li $y = \ln x$ a $t = y - n$, vypočítáme

$$\begin{aligned} s_n &= \int_{\mathbb{R}} x^n \, f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{n-1} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ny} e^{-y^2/2} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-n)^2/2} e^{n^2/2} \, dy \\ &= e^{n^2/2}. \end{aligned}$$

To ukazuje, že X má konečné momenty a její posloupnost momentů je $s = (e^{n^2/2})_{n \in \mathbb{N}_0}$.
Pro $c \in [-1,1]$ definujeme hustotu pravděpodobnosti pro jinou náhodnou veličinu $f_c(x)$ jako

$$f_c(x) = [1 + c \sin(2\pi \ln x)] \, f(x).$$

Jelikož $f(x)$ má konečné momenty, tak i $f_c(x)$ má konečné momenty pro $n \in \mathbb{N}_0$. Vypočítáme

$$\int_{\mathbb{R}} x^n(1 + c\sin(2\pi \ln x))f(x)d(x).$$

Abychom dokázali rovnost momentových posloupností těchto rozdělení, stačí ukázat, že

$$\int_{\mathbb{R}} x^n c\sin(2\pi \ln x)f(x)d(x) = 0.$$

Počítejme

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} x^n c\sin(2\pi \ln x)f(x)d(x) \\
&= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ny}(\sin 2\pi y)e^{-y^2/2}\,dy \\
&= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(y-n)^2/2}e^{n^2/2}\sin(2\pi y)\,dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili faktu, že funkce $\sin(2\pi(t+n))$ je lichá. Z definice $f_c(x)$ plyne, že pro libovolné $c \in [-1,1]$ má náhodná veličina X stejné momenty jako jiná náhodná veličina s hustotou $f_c(x)$. Takže posloupnost momentů s není determinující!

Ukázali jsme, že ve vší obecnosti neplatí, že posloupnost momentů s náhodné veličiny jednoznačně určuje její pravděpodobnostní rozdělení. Existují však alespoň nějaká rozdělení, která jsou posloupností s jednoznačně určena?

3.1 Postačující podmínky

Definice 11 (Variační obor náhodné veličiny)**.** *Nechť náhodná veličina X nabývá reálných hodnot. $x_m = \min_{(i)} x_i, x_M = \max_{(i)} x_i$, kde x_i jsou hodnoty náhodné veličiny X. Pak interval $[x_m, x_M]$ označíme jako variační obor náhodné veličiny X.*

Jak bylo ukázáno výše, posloupnost momentů s náhodné veličiny X obecně nedefinuje rozdělení náhodné veličiny X. Postačující podmínkou pro jednoznačnost rozdělení náhodné veličiny X je absolutní konvergence řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu'_k}{k!} t^k$$

pro některé kladné t.

Důkaz tohoto tvrzení spočívá v myšlence, že za platnosti této postačující podmínky je jednoznačně určena charakteristická funkce náhodné veličiny X, která jednoznačně určuje pravděpodobnostní rozdělení. Důkaz k nahlédnutí v původní práci Hamburgera [7]. Všimněme si, že se jedná o Taylorův rozvoj momentové vytvořující funkce okolo počátku. Formulujme následující viz. Rosenthal [8, str. 138, tvrz. 11.4.3.].

Tvrzení 10. *Nechť $a > 0$ a nechť je X náhodná veličina s momentovou vytvořující funkcí $M_X(t)$, která existuje pro všechna $t \in (-a,a)$. Pak rozdělení náhodné veličiny X je jednoznačně určeno posloupností momentů s a také momentovou vytvořující funkcí $M_X(t)$.*

Důkaz tvrzení viz. Rosenthal [8, str. 138-139]. Lze ukázat, že podmínka pro absolutní konvergenci řady výše je pouze postačující, nikoliv nutná. Formulujme tedy další postačující podmínky pro determinující posloupnost s.

Tvrzení 11 (Další postačující podmínky pro determinující s)**.** *Podle díla Shoracka [6] a Raa [9]. Pokud je splněna některá z následujících podmínek, posloupnost s je determinující.*

- *Variační obor náhodné veličiny je konečný.*
- *Variační obor náhodné veličiny je $(-\infty, \infty)$ a $\sum_{k=0}^{\infty} (\mu'_{2k})^{-\frac{1}{2k}} = \infty$ (Carlemanova podmínka).*
- *Variační obor náhodné veličiny je $(0, \infty)$ a $\sum_{k=0}^{\infty} (\mu'_k)^{-\frac{1}{2k}} = \infty$.*
- *Pro některé $t > 0$ je $\limsup_{k\to\infty} \left(|\mu'_k| \frac{t^k}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} < 1$.*
- *Pro nějakou konstantu c a $t > 0$ je $\limsup_{k\to\infty} \left(|\mu'_k|^{\frac{1}{k}} /k\right) < \frac{c}{t}$.*
- $\limsup_{k\to\infty} \left(\mu'^{\frac{1}{2k}}_{2k} /2k\right)$ *je konečná.*
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu'_{2k} t^k)}{2k!} < \infty$ *na nějakém intervalu.*

Příklad. Ukažme, že normované normální rozdělení $N(0,1)$ je jednoznačně určeno posloupností momentů s.

Řešení:
Použijme Tvrzení 11. Variační obor normálního rozdělení je $(-\infty, \infty)$. Víme, že pro momenty normálního rozdělení platí:

$$\mu'_{2k-1} = 0$$

$$\mu'_{2k} = \frac{(2k)!}{k!2^k}\sigma^{2k}, \text{pro k = 1,2,...}$$

Carlemanova podmínka pro normované normální rozdělení:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu'_{2k})^{-\frac{1}{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^{-\frac{1}{2k}} = \infty$$

Tedy platí Carlemanova podmínka a s je determinující.

Jednoduchou úpravou příkladu výše lze ukázat, že každé normální rozdělení má determinující posloupnost s, tedy je jednoznačně určeno svými momenty. Na právě vyřešeném příkladě determinující posloupnosti s normálního rozdělení $N(0, 1)$ lze založit alternativní důkaz centrální limitní věty s využitím následujícího.

Věta 12 (Fréchet-Shohatova)**.** *Předpokládejme, že $F_X(x)$ je unikátní distribuční funkce náhodné veličiny s determinující posloupností s momentů μ'_k, pro všechna celá $k \geq 1$. Pak posloupnost distribučních funkcí $F_n(x) \to F_X(x)$ v distribuci pokud*

$$\mu_{nk} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF_n(x) \to \mu_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF_X(x), \textit{pro všechna celá } k \geq 1.$$

Důkaz k nahédnutí v díle Shoracka [6, str. 293].

Důsledek. Pokud posloupnost s náhodné veličiny X s distribuční funkcí F_X splňuje

$$\mu'_{2k} \to \frac{(2k)!}{2^k k!}; \quad \mu'_{2k+1} \to 0, \forall k \geq 0,$$

pak F_X konverguje k $N(0{,}1)$ v distribuci.

V této práci se nabízí otázka, zda stejný závěr pro nejednoznačnost posloupnosti momentů s platí i pro posloupnost kumulantů nějakého pravděpodobnostního rozdělení. Vzhledem ke vztahům mezi momenty a kumulanty je intuitivní výsledek takovéhoto bádání stejný. Ani kumulanty jednoznačně neurčují pravděpodobnostní rozdělení, nicméně tímto se v práci dále zabývat nebudeme.

Závěr

V práci jsme důkladně prozkoumali momenty a kumulanty tak, jak bylo naznačeno v úvodu. Definovali jsem momenty včetně střední hodnoty, rozptylu a vyšších momentů a vysvětlili jejich význam pro popis tvaru a rozptylu pravděpodobnostních rozdělení. Momentovou vytvořující funkci a charakteristickou funkci jsme podrobně rozebrali, abychom nabídli alternativní pohledy na rozdělení náhodných veličin a jejich popisné charakteristiky.

Dále jsme se zaměřili na kumulanty a zdůraznili jejich interpretační výhody a vztahy s momenty. V empirické části jsme provedli praktické výpočty momentů a kumulantů pro vybraná pravděpodobnostní rozdělení.

Fréchet-Shohatova věta, známá také jako momentový problém, byla představena a diskutována. Skrze tento poznatek jsem se snažil osvětlit omezení a výzvy spojené s inferencí založenou na momentech, přesně tak, jak byla tato práce koncipována.

Literatura

1. DUPAČ, V.; HUŠKOVÁ, M. *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Praha: Karolinum, 2013. Druhé upravené vydání. ISBN 978-80-246-2208-8.
2. ANDĚL, J. *Základy matematické statistiky.* Praha: MatfyzPress, 2011. Třetí vydání. ISBN 978-80-7378-162-0.
3. GRIMMET, G.; WELSH, D. *Probability: An introduction.* Oxford: Oxford University Press, 1986. První vydání. ISBN 78-0-19-853264-4.
4. KENDALL, M. G.; STUART, A. *The advanced theory of statistics.* New York: Hafner Publishing Company, 1963. Volume 1, Distribution theory, second edition.
5. FISHER, R. A.; WISHART, J. The Derivation of the Pattern Formulae of Two-Way Partitions from those of Simpler Patterns. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1932, roč. s2-33, č. 1, s. 195–208.
6. SHORACK, G. R. *Probability for Statisticians.* Springer, 2000. ISBN 978-0387989532.
7. HAMBURGER, H. *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems.* 1920-1921. Teil II.
8. ROSENTHAL, J. S. *A First Look at Rigorous Probability Theory.* WSPC, 2006. Druhé vydání. ISBN 978-9812703712.
9. RAO, R. C. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace.* Praha: Academia, 1978. První vydání.

Seznam tabulek

.1 Příloha 1

Tabulka 1: Rozdělení a jejich pravděpodobnostní funkce

Rozdělení	Pravděpodobnostní funkce $P[X = j]$
Alternativní	$p^j(1-p)^{1-j}$, pro $j = 0{,}1$
Binomické	$\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$, pro $j = 0{,}1,\ldots,n$
Geometrické	$p(1-p)^{j-1}$, pro $j = 1{,}2,\ldots$
Poissonovo	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$, pro $j = 0{,}1{,}2,\ldots$

Tabulka 2: Střední hodnota a rozptyl diskrétních rozdělení

Rozdělení	Střední hodnota	Rozptyl
Alternativní	p	$p(1-p)$
Binomické	np	$np(1-p)$
Geometrické	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo	λ	λ

Tabulka 3: Některá spojitá rozdělení a jejich hustoty

Rozdělení	Hustota $f_X(x)$
Normální	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Rovnoměrné	$\frac{1}{b-a}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$
Exponenciální	$\lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0$
Beta	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \alpha, \beta > 0$
Gama	$\frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax}, a > 0, p > 0$
Log-normální	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Tabulka 4: Definiční obor a momenty spojitých rozdělení

Rozdělení	Definiční obor	Střední hodnota, rozptyl
Normální	$(-\infty, \infty)$	μ, σ^2
Rovnoměrné	(a,b)	$\frac{a+b}{2}$, $\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciální	$(0,\infty)$	$\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda^2}$
Beta	$(0,1)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Gama	$(0,\infty)$	$\frac{p}{a}$, $\frac{p}{a^2}$
Log-normální	$(0,\infty)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, $(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$

.2 Příloha 2

Tabulka 5: Momentové a charakteristické funkce některých rozdělení

Rozdělení	**Mom. fce** $M_X(t)$	**Charakt. fce** $\Phi_X(t)$
Bernoulliho ($P(X=1)=p$)	$1-p+pe^t$	$1-p+pe^{it}$
Binomické ($B(n,p)$)	$(1-p+pe^t)^n$	$(1-p+pe^{it})^n$
Poissonovo (Pois(λ))	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Rovnoměrné (U(a,b))	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Normální ($N(\mu,\sigma^2)$)	$e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	$e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Chi-kvadrát (χ_k^2)	$(1-2t)^{-\frac{k}{2}},t<\frac{1}{2}$	$(1-2it)^{-\frac{k}{2}}$
Gamma ($\Gamma(k,\theta)$)	$(1-t\theta)^{-k},t<\frac{1}{\theta}$	$(1-it\theta)^{-k}$
Exponenciální (Exp(λ))	$\left(1-t\lambda^{-1}\right)^{-1},t<\lambda$	$\left(1-it\lambda^{-1}\right)^{-1}$
Cauchyho (Cauchy(μ,θ))	Neexistuje	$e^{it\mu-\theta\|t\|}$

.3 Příloha 3

Tabulka 6: Kumulanty a kumulantové vytvoř. funkce vybraných rozdělení

Rozdělení	**Kumulantová v.f.**	**Kumulanty**
Konstantní $P[X = \mu] = 1$	μit	$k_1 = \mu,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0, \dots$
Bernoulliho	$\log(1 - p + pe^{it})$	$k_1 = p, .. k_{n+1} = p(1-p)\frac{dk_n}{dp}$
Binomické $B(n,p)$	$n \log(1 - p + pe^{it})$	$k_1 = np,\ k_2 = np(1-p), \dots$
Poissonovo Pois(λ)	$\lambda(e^{it} - 1)$	$k_1 = \lambda,\ k_2 = \lambda,\ k_3 = \lambda, \dots$
Normální $N(\mu,\sigma^2)$	$\mu it - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$	$k_1 = \mu,\ k_2 = \sigma^2,\ k_3 = 0, \dots$
Exponenciální Exp(λ)	$-\log(1 - it\lambda^{-1})$	$k_n = \lambda^{-n}(n-1)!$