



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Mlčoušek

Aktuárské výpočty založené na Gompertzově-Makehamově úmrtnosti

Pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Studijní program: Finanční matematika

Studijní obor: MFMP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych vyjádřil své upřímné poděkování profesoru RNDr. Tomáši Ciprovi, DrSc., za jeho vedení a podporu během mé bakalářské práce. Jeho přístup, čas a cenné rady pro mě byly velmi důležité. Je mi ctí, že jsem mohl mít možnost spolupracovat s tak významným a inspirativním akademikem.

Název práce: Aktuárské výpočty založené na Gompertzově-Makehamově úmrtnosti

Autor: Jakub Mlčoušek

Katedra: Pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zaměřuje na aplikaci Gompertzova-Makehamova zákona úmrtnosti v kontextu aktuárských výpočtů, prováděných v rámci oblasti životního pojištění. Tento přístup umožňuje základní aktuárské výpočty založit na gama funkci, která je odhadnuta pomocí omezeného počtu parametrů. V této studii jsou detailně popsány příslušné odhadové postupy, jež jsou aplikovány pro ocenění životních důchodů v české populaci.

Klíčová slova: Gompertzova-Makehamova úmrtnost, gama funkce, životní důchod, komutační funkce, životní pojištění

Title: Actuarial calculations based on Gompertz-Makeham mortality

Author: Jakub Mlčoušek

Department: Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The study focuses on applying the Gompertz-Makeham mortality law in actuarial calculations for life insurance. This method simplifies actuarial calculations by relying on the gamma function, which requires only a few parameters. The study explains and applies specific estimation methods to evaluate life annuities within the Czech population.

Keywords: Gompertz-Makeham mortality, gamma function, life annuity, commutation functions, life insurance

Obsah

Úvod	2
1 Gompertzův-Makehamův zákon úmrtnosti	3
1.1 Základní terminologie	3
1.1.1 Hustota pravděpodobnosti	3
1.1.2 Distribuční funkce	3
1.1.3 Funkce přežití	4
1.1.4 Zbývající délka života	4
1.1.5 Očekávaná délka života	4
1.1.6 Intenzita úmrtnosti	4
1.1.7 Úročení a diskontování	4
1.1.8 Diskrétní finanční toky	5
1.1.9 Spojité finanční toky	6
1.2 Gama funkce	6
1.3 Gompertzova-Makehamova úmrtnost	7
1.4 Aplikační limity	9
1.5 Využití	9
1.6 Alternativy	9
2 Komutační čísla	10
2.1 Ukazatele úmrtnosti	10
3 Aktuárské výpočty založené na aplikaci gama funkce	11
Tvrzení 1	11
Tvrzení 2	12
Tvrzení 3	13
4 Aplikace Kingovy-Hardyho metody	15
5 Numerická studie	17
Odhady parametrů pomocí Kingovy-Hardyho metody	17
Odhad počáteční hodnoty životního důchodu	20
Závěr	22
Seznam použité literatury	23
Seznam obrázků	24
Seznam tabulek	25
A Přílohy	26
První příloha	26

Úvod

Cílem této práce je podrobné seznámení s teoretickým a praktickým použitím Gompertzova-Makehamova zákona v rámci aktuárských výpočtů a jeho aplikace na reálná data české populace.

Zákon o Gompertzově-Makehamově úmrtnosti spojuje Gompertzův model stárnutí s Makehamovým nezávislým prvkem, čímž vytváří matematický model popisující pravděpodobnost úmrtí v závislosti na věku. Gompertzova část zdůrazňuje exponenciální nárůst rizika úmrtí s přibývajícím věkem, zatímco Makehamova část zahrnuje i vnější faktory, jako jsou sebevraždy či nehody. Tato kombinace přesněji modeluje skutečné trendy v úmrtnosti populace. Model se často využívá v oblasti pojistné matematiky a demografie pro odhady životního pojištění a analýzu věkové struktury populace.

Při výpočtech pojistného životního a důchodového pojištění se pojišťovny snaží odhadnout, zda se pojištěný dožije nebo nedožije sjednaného termínu pojištění, a jaká je pravděpodobnost, že může nastat pojistná událost. Tuto pravděpodobnost a další charakteristiky nezbytné pro stanovení pojistných sazeb poskytují tzv. úmrtnostní tabulky. Klíčovým prvkem, který se používá k výpočtu všech ostatních ukazatelů v úmrtnostních tabulkách, je pravděpodobnost úmrtí v daném věku. V práci je ukázáno, že za předpokladu úmrtnosti ve formě Gompertzova-Makehamova typu lze zbývající očekávanou délku života a komutační funkce, které se používají pro výpočet očekávaných počátečních hodnot různých typů životního pojištění, vyjádřit pomocí neúplné gama funkce.

První kapitola seznamuje čtenáře se základními pojmy a vztahy. Rovněž se zde uvádí úskalí a praktické využití tohoto zákona.

Druhá kapitola se věnuje komutačním číslům.

Třetí kapitola se zabývá aktuárskými výpočty využívajícími Gompertzův-Makehamův zákon úmrtnosti a aplikací gama funkce pro úpravu výpočtů. Dále uvádí alternativní výpočty komutačních čísel používané v životním pojištění. Tyto úpravy lze implementovat v běžných softwarových aplikacích.

Čtvrtá kapitola je věnována využití Kingovy-Hardyho metody pro odhady počátečních parametrů Gompertzovy-Makehamovy funkce. Následná optimalizace těchto parametrů přispívá k lepším odhadům a vyrovnání.

V páté kapitole odhadneme parametry Gompertzovy-Makehamovy funkce pro úmrtnost české populace v období let 2010 až 2022 pomocí Kingovy-Hardyho metody. Následně vypočteme částku nutnou k vložení do fondu v těchto letech tak, aby vyplácený jednotkový důchod byl dostatečný až do okamžiku úmrtí.

Je nezbytné uznat, že přes provedené numerické aplikace patří problematika této práce spíše do oblasti aktuárské teorie. V současném životním pojištění se provádějí analýzy ziskovosti, jež jsou založeny na scénářích příslušných systémů finančních toků v rámci pojistných portfolií.

1. Gompertzův-Makehamův zákon úmrtnosti

Gompertzův-Makehamův zákon úmrtnosti je matematický model popisující pravděpodobnost úmrtí jednotlivce v závislosti na věku. Tento model kombinuje Gompertzovu a Makehamovu složku. Gompertzova složka, pojmenovaná po britském matematikovi a statistikovi Benjaminu Gompertzovi, který zákon v roce 1825 navrhl, vyjadřuje, že intenzita úmrtnosti exponenciálně roste s věkem:

$$\mu_{x+t} = \beta \cdot \gamma^{x+t}.$$

William Makeham, rovněž britský matematik a statistik, v roce 1860 navrhl rozšíření Gompertzovy funkce o konstantní člen, který by byl nezávislý na věku jedince a zohledňoval by tak úmrtí způsobená například autonehodami, smrtelnými chorobami či hladomorem: $\mu_{x+t} = \alpha + \beta \cdot \gamma^{x+t}$.

Tím vznikl model, který zahrnuje dvě složky – jednu, která popisuje exponenciální růst úmrtnosti s věkem (Gompertzova složka), a druhou, která představuje konstantní úroveň úmrtnosti nezávislou na věku (Makehamova složka).

1.1 Základní terminologie

1.1.1 Hustota pravděpodobnosti

Používá se ke stanovení pravděpodobnosti, že náhodná veličina X spadá do určitého intervalu hodnot $[a, b]$. Pravděpodobnost $P[a \leq X \leq b]$ je určena integrálem hustoty s dolní mezí a , horní b . Je-li $f(x)$ hustota pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny X :

$$\int_{H(X)} f(x) dx = 1,$$

kde $H(X)$ je obor hodnot X .

1.1.2 Distribuční funkce

Jedná se o neklesající zprava spojitou funkci s oborem hodnot $[0, 1]$ vyjadřující kumulované rozdělení pravděpodobnosti, podle níž lze jednoznačně popsat rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

1.1.3 Funkce přežití

$S(t)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že jedinec bude žít déle než t let. Jedná se o doplněk distribuční funkce udávající pravděpodobnost, že se osoba nedožije věku t :

$$\begin{aligned} S(t) &= \mathbf{P}(T > t), & t > 0 & \quad (\text{zprava spojitá}), \\ F(t) &= \mathbf{P}(T \leq t), & t > 0 & \quad (\text{zprava spojitá}), \\ S(t) &= 1 - F(t). \end{aligned}$$

1.1.4 Zbývající délka života

T_x je náhodná spojitá veličina odpovídající zbývajícím dobám života ve věku x . Věkem úmrtí rozumíme $x + T_x$.

Distribuční funkcí T_x je $F_x(t) = P(T_x \leq t)$, $t \geq 0$.

Hustota $f_x(t) = F'_x(t)$, $t \geq 0$ splňuje $f_x(t)dt = P(t < T_x < t + dt)$, kde dt symbolizuje nekonečně malý přírůstek.

1.1.5 Očekávaná délka života

Střední délka života, označovaná jako e_x , vyjadřuje průměrnou dobu, kterou lze očekávat, že jedinec ve věku x ještě přežije:

$$e_x = \int_0^\infty t f_x(t) dt = \int_0^\infty (1 - F_x(t)) dt = \int_0^\infty S_x(t) dt = \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)} dt.$$

Očekávaná délka života při narození

e_0 je střední délka života novorozence.

1.1.6 Intenzita úmrtnosti

Ukazatel, jenž měří poměr úmrtí v určité populaci v daném časovém období d , je definován: $\mu_x = \lim_{d \rightarrow 0^+} \frac{P(T_x \leq d)}{d}$.

1.1.7 Úročení a diskontování

Hodnota peněz se v čase mění, proto k zachování její reálné hodnoty používáme úročení. Diskontování je opačný proces k úročení.

Jednoduché úročení

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n),$$

kde FV je koncová hodnota počáteční hodnoty PV po uplynutí n let při roční úrokové míře i .

Složené úročení

Zahrnuje pravidelné přičítání vypočítaných úroků k původnímu kapitálu, což v průběhu času zvyšuje celkovou částku, na kterou jsou vypočteny další úroky:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n.$$

Úročení nemusí být pouze roční. Jistina se může úročit p -krát ročně. Musíme tedy počítat také s příslušnou úrokovou mírou. Pro p -tinu roku je odpovídající úroková míra $\frac{i^{(p)}}{p}$.

Spojité úročení

Speciální případ složeného, kdy frekvence úročení přesahuje všechny meze:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} i_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(1 + i)^{1/p} - 1}{1/p} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1 + i)^y - 1}{y}.$$

Získaný výraz vyhovuje L'Hospitalovu pravidlu (limita typu $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1 + i)^y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} (1 + i)^y \cdot \ln(1 + i) = \ln(1 + i).$$

Intenzitou úročení δ rozumíme výraz $\ln(1 + i)$. Tudíž $e^\delta = 1 + i$. Dále $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$, v budeme používat pro diskontní faktor.

1.1.8 Diskrétní finanční toky

Jedná se o platby C_{t_1}, \dots, C_{t_n} v časech $0 < t_1 < \dots < t_n < T$.

Současná hodnota (v čase 0)

$$PV = \sum_{j=1}^n C_{t_j} \cdot v^{t_j}.$$

Budoucí hodnota (v čase T)

$$FV = \sum_{j=1}^n C_{t_j} \cdot A(t_j, T),$$

kde $A(t_j, T)$ je akumulační faktor představující jednotkové zhodnocení za čas $T - t_j$ vyjádřený vzorcem:

$$A(t_j, T) = (1 + i)^{T-t_j}.$$

Současná hodnota jednotkového dočasného důchodu

Důchodem rozumíme sérii periodicky se opakujících plateb.

Polhůtný $\ddot{a}_n = 1 + v + v^2 \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$.

Předhůtný $a_n = v + v^2 \cdots + v^n = v \cdot \ddot{a}_n = \frac{1-v^n}{i}$.

1.1.9 Spojité finanční toky

Jsou definovány intenzitou plateb $\rho(t); t \in (0, T)$. Souhrnné množství plateb v časovém intervalu $[t_1, t_2]$, kde $0 < t_1 < t_2 < T$, je $\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt$.

Současná hodnota (v čase 0)

$$PV = \int_0^T \rho(t) \cdot v(t) dt.$$

Budoucí hodnota (v čase T)

$$FV = \int_0^T \rho(t) \cdot A(t, T) dt,$$

ve spojitém případě $A(t_j, T) = (1+i)^{T-t_j} = e^{\delta(T-t_j)}$.

Současná hodnota jednotkového dočasného důchodu

$$\bar{a}_n = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1-v^n}{\delta}.$$

Současná hodnota věčného důchodu

$$\bar{a}_\infty = \int_0^\infty \rho(t) \cdot e^{-\delta t} dt,$$

pro $\rho(t) = 1$ je $\bar{a}_\infty = \int_0^\infty e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$.

Současná hodnota jednotkového doživotního důchodu

Jedná se o speciální případ dočasného důchodu, který je vyplácen od věku x a poslední platba bude vyplacena v momentu úmrtí jedince:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \frac{S(x+t)}{S(x)} dt.$$

1.2 Gama funkce

Gama funkce, značená $\Gamma(t)$, zobecňuje faktoriálovou funkci na komplexní a reálná čísla, s výjimkou negativních celých čísel, kde není definovaná. Gama funkce je spojitá pro $t > 0$ a je definována vztahem:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

Vlastnosti

$$\begin{aligned}\text{Rekurentní vztah :} \quad & \Gamma(t+1) = t\Gamma(t). \\ \text{Pro } n \in N : \quad & \Gamma(n+1) = n!. \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \text{ pro } 0 < z < 1. \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Neúplná gama funkce

$$\Gamma(t, h) = \int_h^\infty e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0, h > 0. \quad (1.2)$$

Distribuční funkce pro gama-rozdělenou náhodnou veličinu je:

$$G(t, h, b) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^h e^{-x/b} x^{t-1} dx.$$

Pro účely této práce se klade $b = 1$:

$$G(t, h, 1) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^h e^{-x} x^{t-1} dx. \quad (1.3)$$

1.3 Gompertzova–Makehamova úmrtnost

Pro potřeby této práce pracujeme s nenulovým parametrem $\alpha \neq 0$ a kladnými hodnotami parametrů: $\beta > 0, \gamma > 0$. Gompertzův–Makehamův zákon úmrtnosti je charakterizován následujícími veličinami:

Funkce přežití:

$$S(t) = l(t, \alpha, \beta, \gamma) = e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1)}. \quad (1.4)$$

Distribuční funkce (viz obrázky 1.1, 1.2 a 1.3):

$$F(t, \alpha, \beta, \gamma) = 1 - l(t, \alpha, \beta, \gamma). \quad (1.5)$$

Intenzita úmrtnosti:

$$\mu(t, \alpha, \beta, \gamma) = -\frac{d}{dx} \log l(t, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta e^{\gamma t}. \quad (1.6)$$

Střední délka života:

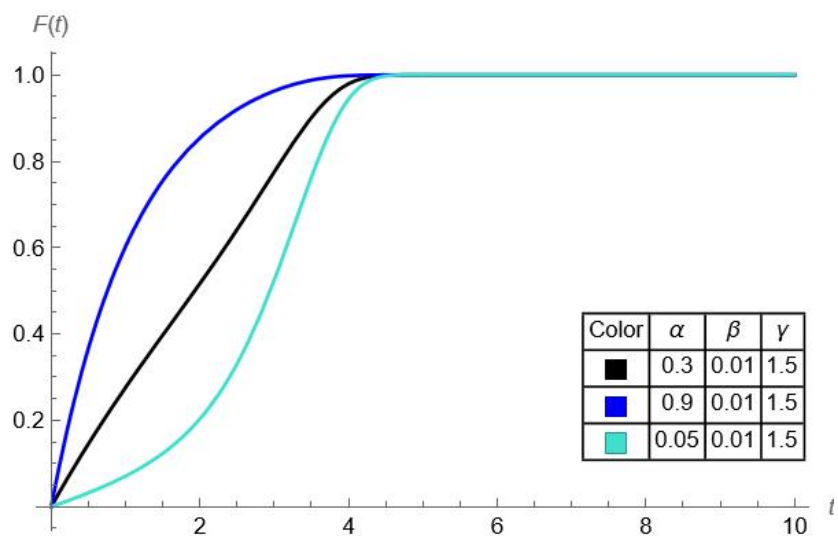
$$e_x = \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)} dt = \int_0^\infty \frac{l(x+t, \alpha, \beta, \gamma)}{l(x, \alpha, \beta, \gamma)} dt. \quad (1.7)$$

Střední délka života novorozence:

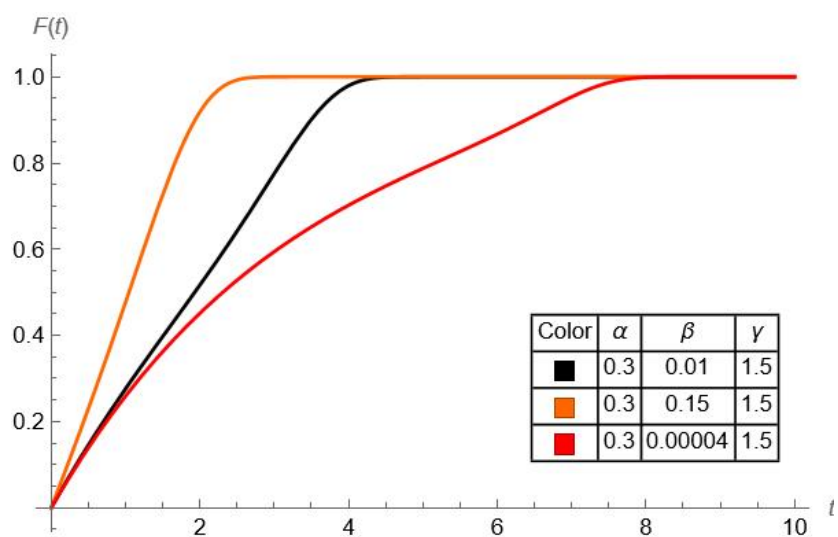
$$e_0 = \int_0^\infty S(t) dt = \int_0^\infty l(t, \alpha, \beta, \gamma) dt. \quad (1.8)$$

Současná hodnota jednotkového doživotního důchodu:

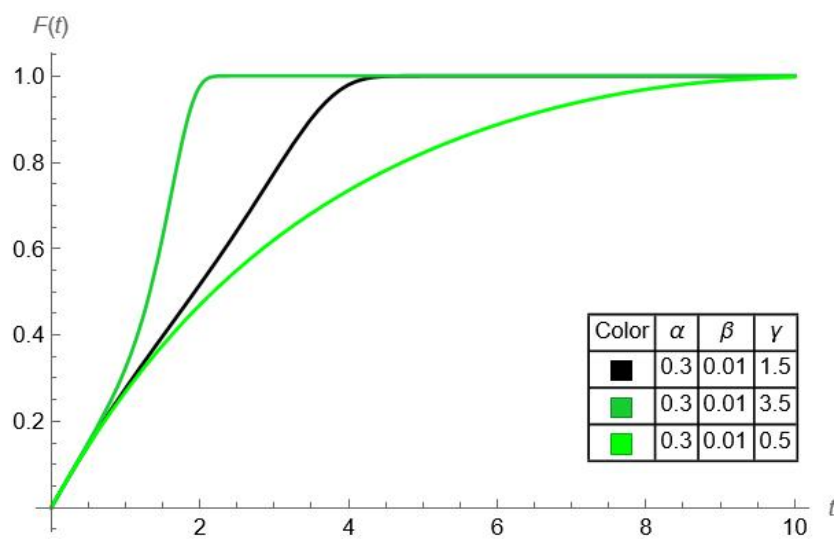
$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \frac{l(x+t, \alpha, \beta, \gamma)}{l(x, \alpha, \beta, \gamma)} dt. \quad (1.9)$$



Obrázek 1.1: Vliv parametru α na tvar distribuční funkce 1.5



Obrázek 1.2: Vliv parametru β na tvar distribuční funkce 1.5



Obrázek 1.3: Vliv parametru γ na tvar distribuční funkce 1.5

1.4 Aplikační limity

První úskalí tohoto zákona se týká věku jedinců pozorované populace. Tento zákon není aplikovatelný na všechny věkové skupiny, zvláště v dětském věku a nad 90 let intenzita úmrtnosti exponenciálně neroste s věkem.

Jako většina zákonů opírající se o zákon velkých čísel, můžeme jej použít jen na dostatečně velké populace, aby byla zajištěna spojitost a plynulost úmrtnostních funkcí.

Je nutná homogenita v rámci populace. Ve skutečnosti mohou různé demografické skupiny projevovat odlišné trendy v úmrtnosti.

Zatímco model může dobře odpovídat historickým údajům o úmrtnosti, jeho prediktivní přesnost pro budoucí trendy v úmrtnosti může být omezena. Změny úmrtnosti v čase mohou být ovlivněny faktory jako zlepšení zdravotní péče či životního prostředí, změny životního stylu a jiné vnější vlivy, které model explicitně nezachycuje.

1.5 Využití

Tento model má několik praktických využití v oblastech:

Pojišťovnictví

V oblasti pojišťovnictví a aktuárství se Gompertzův-Makehamův model používá k odhadu pravděpodobnosti úmrtí v různých věkových skupinách. To je klíčové pro výpočet pojistného, finančních rezerv a penzí.

Demografie

V demografii a populačních studiích pomáhá při analýze a porovnání úmrtnostních vzorů různých populací. Slouží k odhadu vývoje populace v budoucnu, odhadům očekávané délky života v různých věkových a populačních skupinách.

Epidemiologie

Bývá používán k analýze úmrtnosti v rámci specifických onemocnění nebo populací. Pomáhá porozumět rizikům úmrtí a přispívá k plánování zdravotnických opatření.

Další vědecké disciplíny

Vědci v oblasti biologie a gerontologie používají Gompertzův-Makehamův model ke zkoumání procesů stárnutí a biologických faktorů ovlivňujících délku života. To může vést k lepšímu porozumění mechanismů stárnutí.

1.6 Alternativy

V závislosti na charakteristikách zkoumané populace mohou být vhodnější alternativní modely úmrtnosti (jako například model Lee-Carter nebo různé parametrické modely přežití) pro zachycení konkrétních vzorů úmrtnosti.

2. Komutační čísla

Komutační čísla byla významným zjednodušením ručních výpočtů, kdy po sestavení komutační tabulky bylo vše již otázkou základních algebraických úprav. V dnešní době se software využívá k vytváření sofistikovanějších cash-flow modelů, které umožňují implementaci různorodých předpokladů a podmínek.

2.1 Ukazatele úmrtnosti

Komutační čísla nultého řádu

$$D_x = l_x \cdot v^x,$$

kde l_x je počet dožívajících se věku x .

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1},$$

kde d_x je počet zemřelých ve věku x .

Chceme-li je chápat spojitě:

$$\begin{aligned} D_x &= l_x \cdot e^{-\delta x}, \\ C_x &= d_x \cdot e^{-\delta(x+1)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Komutační čísla prvního řádu

Získáme je součtem komutačních čísel nultého řádu:

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{y=x}^{\infty} D_y, \\ M_x &= \sum_{y=x}^{\infty} C_y. \end{aligned}$$

Obdobně spojitě:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_x^{\infty} D_y dy, \\ M_x &= \int_x^{\infty} C_y dy = \int_x^{\infty} \mu_y \cdot D_y dy. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Komutační čísla druhého řádu

Získáme je součtem komutačních čísel prvního řádu:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{y=x}^{\infty} M_y, \\ S_x &= \sum_{y=x}^{\infty} N_y. \end{aligned}$$

V této práci komutační čísla vyšších řádů nebudeme využívat.

3. Aktuárské výpočty založené na aplikaci gama funkce

V této části se zaměříme na některé aktuárské výpočty, přičemž předpokládáme platnost Gompertzova-Makehamova zákona úmrtnosti. Naším cílem je modifikovat příslušné výpočty komutačních čísel a dalších důležitých aktuárských hodnot pomocí aplikace gama funkce, která je implementačně i výpočetně nenáročná pro široké spektrum běžných softwarových aplikací. Předpokládáme platnost základních Gompertzových-Makehamových vztahů uvedených v odstavci 1.3. Uvedená tvrzení a jejich odvození se opírají o výsledky práce Lagerås (2010).

Tvrzení 1

Pro střední délku života $e_0(\alpha, \beta, \gamma)$ za platnosti Gompertzova-Makehamova zákona úmrtnosti z odstavce 1.3 platí:

$$e_0(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{e^{\beta/\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right). \quad (3.1)$$

Důkaz:

Na základě 1.8 a 1.4:

$$e_0(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty l(t, \alpha, \beta, \gamma) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1)} dt.$$

Nyní použijeme substituční pravidlo, kde klademe $m = \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma t}$.
Vyjádříme: $t = \log(\frac{m \cdot \gamma}{\beta})/\gamma$, $dm = \beta e^{\gamma t} dt$, $dt = \frac{dm}{\beta} e^{-\gamma t}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1)} dt &= \int_{\beta/\gamma}^\infty e^{-\alpha \cdot \log(\frac{m \cdot \gamma}{\beta})/\gamma - \frac{\beta}{\gamma} \exp\{\gamma \cdot \log(\frac{m \cdot \gamma}{\beta})/\gamma\} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta} e^{-\gamma \cdot \log(\frac{m \cdot \gamma}{\beta})/\gamma} dm \\ &= \int_{\beta/\gamma}^\infty \left(\frac{m \cdot \gamma}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot e^{-m} \cdot e^{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot \frac{1}{\gamma m} dm \\ &= \frac{e^{\beta/\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \int_{\beta/\gamma}^\infty m^{-\frac{\alpha}{\gamma} - 1} \cdot e^{-m} dm. \end{aligned}$$

Integrál, který vznikl, lze substituovat za pomocí gama funkce.

$$\frac{e^{\beta/\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \int_{\beta/\gamma}^\infty m^{-\frac{\alpha}{\gamma} - 1} \cdot e^{-m} dm = \frac{e^{\beta/\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right).$$

□

Jako důsledek pro $e_0(\alpha, \beta, \gamma)$ získáme:

$$e_0(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} e^{\beta/\gamma} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \left[1 - G\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)\right]\right). \quad (3.2)$$

Důkaz:

Nejprve si upravíme gama funkci, dle 1.2:

$$\begin{aligned}\Gamma(t, h) &= \int_h^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = \frac{1}{t} [x^t e^{-x}]_h^\infty + \frac{1}{t} \int_h^\infty e^{-x} x^t dx \\ &= -\frac{1}{t} h^t e^{-h} + \frac{1}{t} \Gamma(t+1, h) = -\frac{1}{t} (h^t e^{-h} - \Gamma(t+1, h)).\end{aligned}$$

Díky 1.3:

$$G(t, h, 1) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^h e^{-x} x^{t-1} dx = 1 - \frac{1}{\Gamma(t)} \int_h^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = 1 - \frac{\Gamma(t, h)}{\Gamma(t)}.$$

V této fázi využijte právě odvozené rovnosti:

$$\begin{aligned}\Gamma(t, h) &= \Gamma(t) \cdot (1 - G(t, h, 1)) = -\frac{1}{t} (h^t e^{-h} - \Gamma(t+1, h)) \\ &= -\frac{1}{t} (h^t e^{-h} - \Gamma(t+1)(1 - G(t+1, h, 1))).\end{aligned}$$

Pokračujeme v samotném důkazu a aplikujeme výše odvozené rovnosti:

$$\begin{aligned}e_0(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{e^{\beta/\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) \\ &= \frac{e^{\beta/\gamma}}{\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \frac{\gamma}{\alpha} \left(\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{-\alpha/\gamma} e^{-\beta/\gamma} - \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) (1 - G\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)) \right) \\ &= \frac{e^{\beta/\gamma}}{\alpha} e^{-\beta/\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{-\alpha/\gamma} - \frac{e^{\beta/\gamma}}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) (1 - G\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha/\gamma} e^{\beta/\gamma} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) [1 - G\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)]\right).\end{aligned}$$

□

Tvrzení 2

Pro střední délku života $e_x(\alpha, \beta, \gamma)$ ve věku x platí:

$$e_x(\alpha, \beta, \gamma) = e_0(\alpha, \beta e^{\gamma x}, \gamma). \quad (3.3)$$

Důkaz:

Využijeme 1.7 a 1.4.

$$\begin{aligned}e_x(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty \frac{l(x+t, \alpha, \beta, \gamma)}{l(x, \alpha, \beta, \gamma)} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(e^{-\alpha(t+x) - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma(t+x)} - 1)})}{(e^{-\alpha x - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma t} e^{\gamma x}} \cdot e^{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{\frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x}} \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma t} e^{\gamma x} + \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x}} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt.\end{aligned}$$

Získali jsme analogický integrál jako v tvrzení 1, a tedy:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt = e_0(\alpha, \beta e^{\gamma x}, \gamma).$$

□

Tvrzení 3

Současná hodnota jednotkového doživotního důchodu za platnosti Gompertzova-Makehamova zákona úmrtnosti z odstavce 1.3 je:

$$\begin{aligned} \bar{a}_x(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \frac{1}{\alpha + \delta} \left(1 - \left(\frac{\beta e^{\gamma x}}{\gamma} \right)^{\frac{\alpha + \delta}{\gamma}} \exp \left\{ \frac{\beta e^{\gamma x}}{\gamma} \right\} \Gamma \left(1 - \frac{\alpha + \delta}{\gamma} \right) \right. \\ &\quad \left. [1 - G \left(1 - \frac{\alpha + \delta}{\gamma}, \frac{\beta e^{\gamma x}}{\gamma}, 1 \right)] \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Důkaz:

Použijeme 1.9 a rovnost získanou z tvrzení 2.

$$\begin{aligned} \bar{a}_x(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \frac{l(x+t, \alpha, \beta, \gamma)}{l(x, \alpha, \beta, \gamma)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha + \delta) - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt. \end{aligned}$$

Nyní opět uplatníme tvrzení 1:

$$\int_0^{\infty} e^{-t(\alpha + \delta) - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt = e_0(\alpha + \delta, \beta e^{\gamma x}, \gamma).$$

Nakonec využijeme důsledek tvrzení 1:

$$\begin{aligned} e_0(\alpha + \delta, \beta e^{\gamma x}, \gamma) &= \frac{1}{\alpha + \delta} \left(1 - \left(\frac{\beta e^{\gamma x}}{\gamma} \right)^{\frac{\alpha + \delta}{\gamma}} \exp \left\{ \frac{\beta e^{\gamma x}}{\gamma} \right\} \right. \\ &\quad \left. \Gamma \left(1 - \frac{\alpha + \delta}{\gamma} \right) [1 - G \left(1 - \frac{\alpha + \delta}{\gamma}, \frac{\beta e^{\gamma x}}{\gamma}, 1 \right)] \right). \end{aligned}$$

□

Z tvrzení 3 a vztahu 1.9 nám plyne:

$$\bar{a}_x(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha + \delta) - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} dt = e_0(\alpha + \delta, \beta e^{\gamma x}, \gamma). \quad (3.5)$$

Posledním naším úkolem v této kapitole je modifikovat příslušné výpočty komutačních čísel sloužících k výpočtu současné hodnoty různých životních pojistných smluv.

Zejména $D(t)$, $N(t)$ a $M(t)$ z kapitoly 2:

$D(t)$ se dá snadno softwarově spočítat, uvědomíme-li si, že podle 2.1 je:

$$D(t) = l(t, \alpha, \beta, \gamma) e^{-\delta t} = e^{-\delta t} \cdot e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} = e^{-t(\alpha + \delta) - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)} = l(t, \alpha + \delta, \beta, \gamma).$$

Pro $\bar{a}_t = N(t)/D(t)$ vidíme, že $N(t)$ bude softwarově rychle spočítatelné.

Poslední funkcí je $M(t)$. Pro ní ovšem platí:

$$M(t) = D(t) - \delta \cdot N(t).$$

Tudíž i $M(t)$ nebude problém snadno numericky vyhodnotit.

Aplikační limity

V navrhovaném modelu s Gompertzovou-Makehamovou úmrtností a pevnou úrokovou sazbou je důležité si uvědomovat omezení. Pevná úroková sazba je klíčová pro výpočty, ale v praxi bychom chtěli diskontovat budoucí platby s ohledem na křivku výnosnosti, která zřídka bývá konstantní. Realističtější přístupem by bylo zohlednit stochastické úrokové sazby, což však přesahuje rámec této práce.

Předpoklad o úmrtnosti může být omezující, neboť nezahrnuje mechanismus pro snižování budoucí úmrtnosti, což je důležité pro poskytovatele rent, vzhledem k pravděpodobnému stárnutí společnosti. Ideálně bychom potřebovali stochastický model pro budoucí úmrtnost, ale to by znamenalo komplexnější přístup. Můžeme však zohlednit nejlepší či konzervativní odhad budoucí úmrtnosti, kterému by parametry co nejlépe odpovídaly.

4. Aplikace Kingovy-Hardyho metody

V současnosti se vedou živé diskuse o prodlužování lidského života a stárnutí populace. Ve společnosti dramaticky nárůstá počet jedinců dosahujících pokročilého věku. Abychom lépe porozuměli vývoji úmrtnosti v těchto nejstarších věkových skupinách, je nezbytné důkladně sledovat úmrtnost osob ve vysokém věku.

Pro tento účel se dlouhodobě využívá Gompertzova-Makehamova funkce. Jednou z jejích výhod je existence počátečních odhadových vzorců, známých jako Kingova-Hardyho metoda, které slouží k odhadu neznámých parametrů.

Výsledky této metody jsou ovlivněny šířkou věkových intervalů a počátečním věkem pro vyrovnání. Doporučuje se vyrovnání provádět od 60 let věku, přičemž horní věková hranice je stanovena na základě spolehlivosti empirických dat.

Potenciální úprava odhadů neznámých parametrů Gompertzovy-Makehamovy funkce přispívá především ke zlepšení odhadů parametrů a výslednému vyrovnání.

Následující kapitola předpokládá platnost základních vztahů z odstavce 1.3, je inspirována hlavními myšlenkami a metodami prezentovanými v článku Dotlačilová a Langhamrová (2015).

K získání empirických hodnot úmrtnostních měř definujeme m_x :

$$m_x = \frac{M_x}{\bar{z}_x},$$

kde M_x je počet zemřelých v dokončeném věku x a \bar{z}_x je střední stav počtu žijících x -letých.

Z platnosti Gompertzových-Makehamových vztahů, zejména 1.6, víme:

$$m_x = \mu_{x+0.5} = \alpha + \beta e^{\gamma(x+0.5)} = \alpha + \beta \cdot \zeta^{x+0.5},$$

kde za e^γ klademe ζ .

Nyní pomocí King-Hardyho metody odhadneme parametry α , β a ζ .

Definujeme si tři rovnice o třech neznámých:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} m_x = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} \alpha + \beta \cdot \zeta^{x+0.5} = k\alpha + \beta \cdot \zeta^{x_0+0.5} (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{k-1}), \\ I_2 &= \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} m_x = k\alpha + \beta \cdot \zeta^{x_0+k+0.5} (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{k-1}), \\ I_3 &= \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} m_x = k\alpha + \beta \cdot \zeta^{x_0+2k+0.5} (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{k-1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nyní odečteme druhou rovnici od třetí a první od druhé za účelem eliminace parametru α :

$$\begin{aligned} I_3 - I_2 &= k\alpha + \beta\zeta^{x_0+2k+0.5}(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1}) - k\alpha - \beta\zeta^{x_0+k+0.5}(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1}) \\ &= \beta\zeta^{x_0+k+0.5}(\zeta^k - 1)(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1}), \\ I_2 - I_1 &= k\alpha + \beta\zeta^{x_0+k+0.5}(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1})/k - k\alpha - \beta\zeta^{x_0+0.5}(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1}) \\ &= \beta\zeta^{x_0+0.5}(\zeta^k - 1)(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Máme k dispozici dvě rovnice o dvou neznámých. Provedeme jejich podíl, čímž eliminujeme parametr β :

$$\frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} = \frac{\beta \cdot \zeta^{x_0+k+0.5}(\zeta^k - 1)(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1})}{\beta \cdot \zeta^{x_0+0.5}(\zeta^k - 1)(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1})} = \zeta^k.$$

Neznámý parametr ζ získáme k -tou odmocninou ζ^k . Z druhé rovnice 4.2 dostaneme:

$$\beta = \frac{I_2 - I_1}{\zeta^{x_0+0.5}(\zeta^k - 1)(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1})}.$$

Z první rovnice 4.1 pak pro α platí:

$$\alpha = \frac{I_1 - \beta \cdot \zeta^{x_0+0.5}(1 + \zeta + \dots \zeta^{k-1})}{k}.$$

Pro další výpočty je nutné stanovit podmínky, aby rovnice z kapitoly 3 a parametry α, β a ζ dávaly smysl. V odstavci 1.3 jsme kladli $\beta, \gamma > 0, \alpha \neq 0$. Tudíž: $\zeta > 1$ (neboť $\zeta = e^\gamma$) a $\alpha + \delta \neq 0$ (aby vzorec 3.4 byl smysluplný).

Po získání počátečních odhadů parametrů Gompertzovy-Makehamovy funkce lze provést jejich optimalizaci. Optimalizace počátečních odhadů umožňuje dosáhnout ještě lepšího vyrovnání Gompertzovou-Makehamovou funkcí. Jako kritérium optimalizace lze použít minimalizaci součtu vážených čtverců odchylek, který je definován následovně:

$$\frac{z_{t,x} + z_{t+1,x}}{2m_{t,x}(1 - m_{t,x})} (m_{t,x} - \tilde{m}_{t,x})^2, \quad (4.3)$$

kde $z_{t,x}$ představuje počet žijících jedinců ve věku x na začátku roku t , $m_{t,x}$ je specifická míra úmrtnosti pro osoby ve věku x v roce t , $\tilde{m}_{t,x}$ jsou specifické míry úmrtnosti vyjádřené pomocí Gompertzovy-Makehamovy funkce.

Při stanovení optimalizačního kritéria je nezbytné zohlednit vylepšení počátečních odhadů parametrů Gompertzovy-Makehamovy funkce prostřednictvím metody vážených nejmenších čtverců, jak je uvedeno v Dotlačilová a Langhamrová (2015).

Vypočteme vážené čtverce odchylek na věkovém intervalu $< 60; y >$, kde y je nejvyšší věk, ve kterém se míra úmrtnosti výrazně neliší od exponenciálního trendu.

Kingova-Hardyho metoda poskytuje jednoduchost i relativně dobré počáteční odhady neznámých parametrů. Avšak výsledky jsou ovlivněny počátečním věkem pro vyrovnání (x_0) a šířkou věkových intervalů (k).

5. Numerická studie

V poslední kapitole provedeme odhad parametrů Gompertzovy-Makehamovy funkce pro úmrtnost české populace v období let 2010–2022. Tyto parametry použijeme pro aktuárské ocenění příslušných životních důchodů. Odhady parametrů α , β a ζ získáme pomocí Kingovy-Hardyho metody. Počáteční věk x_0 klademe 60 let a uvažujeme 10leté věkové intervaly ($k = 10$). Pro zlepšení počátečních odhadů využijeme iterační metodu minimalizace součtu vážených čtverců odchylek pomocí nástroje pro analýzu dat v programu Excel, konkrétně algoritmu Řešitel.

Použili jsme tabulky Českého statistického úřadu a vztahy z kapitoly 4.

Odhady parametrů pomocí Kingovy-Hardyho metody

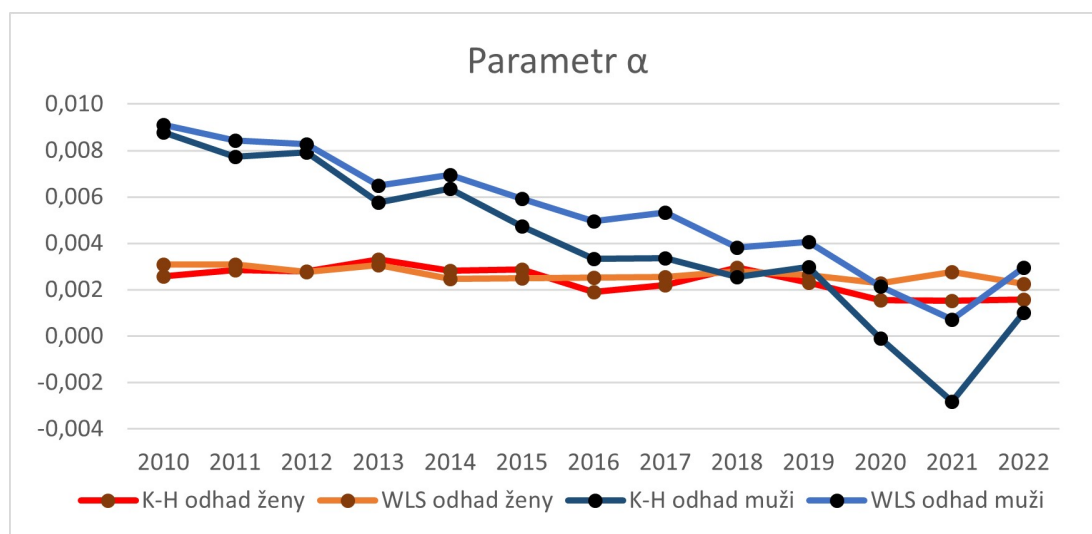
Parametr α ovlivňuje základní míru úmrtnosti v populaci.

V tabulce 5.1 jsou uvedeny odhady parametru α v jednotlivých letech pro obě pohlaví pomocí metod King-Hardy (K-H) a nejmenších vážených čtverců (WLS).

α	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
K-H ženy	0,0026	0,0029	0,0028	0,0033	0,0028	0,0029	0,0019
WLS ženy	0,0031	0,0031	0,0028	0,0031	0,0025	0,0025	0,0025
K-H muži	0,0088	0,0077	0,0079	0,0058	0,0063	0,0047	0,0033
WLS muži	0,0091	0,0084	0,0083	0,0065	0,0069	0,0059	0,0050
	2017	2018	2019	2020	2021	2022	
K-H ženy	0,0022	0,0030	0,0023	0,0016	0,0015	0,0016	
WLS ženy	0,0025	0,0028	0,0026	0,0023	0,0028	0,0023	
K-H muži	0,0034	0,0026	0,0030	-0,0001	-0,0028	0,0010	
WLS muži	0,0053	0,0038	0,0041	0,0021	0,0007	0,0030	

Tabulka 5.1: Odhady parametru α

Na obrázku 5.1 je vývoj odhadnutého parametru α graficky znázorněn:



Obrázek 5.1: Grafický vývoj odhadnutého parametru α

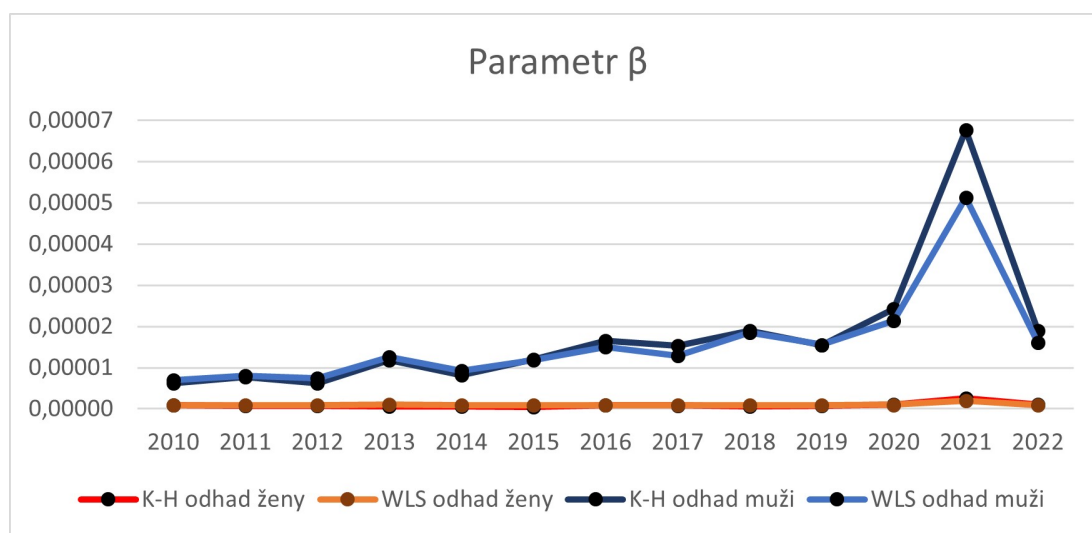
Parametr β ovlivňuje míru růstu nebo poklesu úmrtnosti s věkem. Pokud je β kladné, úmrtnost se zvyšuje s věkem (což je typické pro většinu populací). Pokud je β záporné, úmrtnost klesá s věkem, což by mohlo být pozorováno v některých specifických situacích.

V tabulce 5.2 je uveden odhadnutý parametr β v jednotlivých letech pro obě pohlaví:

β	2010	2011	2012	2013	2014
K-H ženy	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
WLS ženy	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
K-H muži	0,000006	0,000008	0,000006	0,000012	0,000008
WLS muži	0,000007	0,000008	0,000007	0,000013	0,000009
	2015	2016	2017	2018	2019
K-H ženy	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
WLS ženy	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001
K-H muži	0,000012	0,000016	0,000015	0,000019	0,000016
WLS muži	0,000012	0,000015	0,000013	0,000019	0,000016
	2020	2021	2022		
K-H ženy	0,000001	0,000003	0,000001		
WLS ženy	0,000001	0,000002	0,000001		
K-H muži	0,000024	0,000068	0,000019		
WLS muži	0,000021	0,000051	0,000016		

Tabulka 5.2: Odhady parametru β

Na obrázku 5.2 je vývoj odhadnutého parametru β graficky znázorněn:



Obrázek 5.2: Grafický vývoj odhadnutého parametru β

Oproti ostatním letům je parametr β násobně vyšší v roce 2021. To je v souladu s intuicí vzhledem k pandemii, která citelně postihla nejstarší věkovou skupinu.

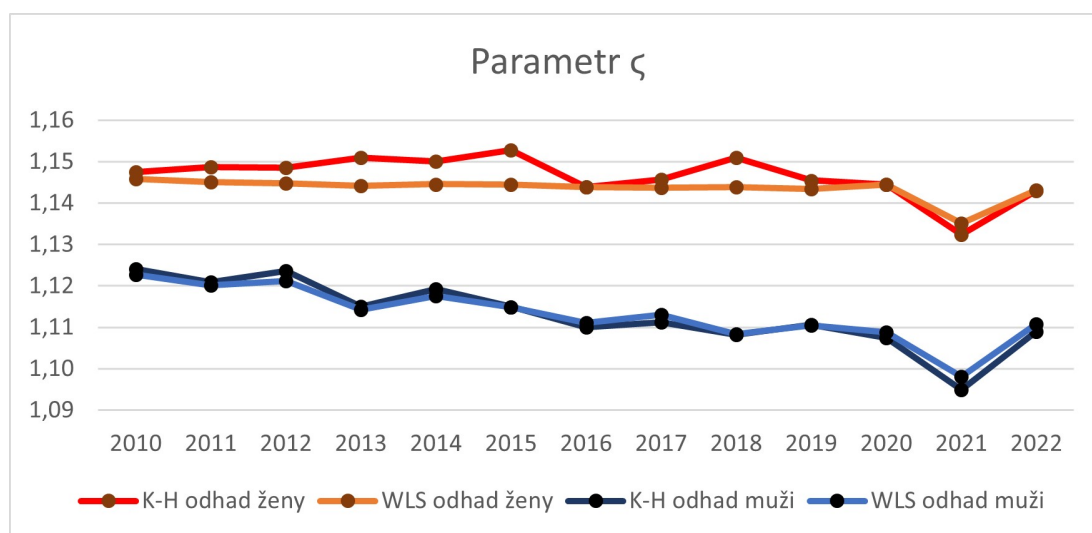
Parametr ζ ovlivňuje rychlost růstu úmrtnosti s věkem. Vyšší hodnoty ζ znamenají rychlejší růst úmrtnosti s věkem.

V tabulce 5.3 je uveden odhadnutý parametr ζ v jednotlivých letech pro obě pohlaví:

ζ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
K-H ženy	1,1475	1,1487	1,1485	1,1510	1,1501	1,1528	1,1439
WLS ženy	1,1459	1,1450	1,1447	1,1442	1,1445	1,1445	1,1439
K-H muži	1,1241	1,1209	1,1236	1,1150	1,1193	1,1149	1,1101
WLS muži	1,1227	1,1201	1,1212	1,1142	1,1176	1,1149	1,1111
	2017	2018	2019	2020	2021	2022	
K-H ženy	1,1457	1,1510	1,1454	1,1445	1,1324	1,1429	
WLS ženy	1,1437	1,1438	1,1433	1,1444	1,1351	1,1431	
K-H muži	1,1112	1,1082	1,1107	1,1075	1,0949	1,1089	
WLS muži	1,1131	1,1083	1,1104	1,1088	1,0981	1,1108	

Tabulka 5.3: Odhady parametru ζ

Na obrázku 5.3 je vývoj odhadnutého parametru ζ graficky znázorněn:



Obrázek 5.3: Grafický vývoj odhadnutého parametru ζ

Odhad počáteční hodnoty životního důchodu

V této části odvodíme částku, kterou bychom měli v jednotlivých letech 2010 – 2022 v 60 letech jednorázově vložit do fondu, tak aby pokryla náklady jednotkového doživotního důchodu. Předpokládáme platnost vzorců odvozených v kapitole 3 a konstantní investiční zhodnocování uložené částky sazbou 3 % p.a. Výše annuity vychází ze vztahu 3.4, kde odhadnuté parametry α, β jsou z tabulek 5.1 a 5.2, parametr $\gamma = \ln \zeta$ z tabulky 5.3 a $\delta = 3$ %.

Tabulky 5.4 a 5.5 uvádějí počáteční hodnoty současné hodnoty jednotkového důchodu (PVuA) pro muže a ženy:

PVuA	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
K-H muži	13,66	13,80	13,87	13,91	14,14	14,06	14,26
WLS muži	13,59	13,71	13,77	13,81	14,03	13,95	14,14
	2017	2018	2019	2020	2021	2022	
K-H muži	14,27	14,31	14,39	13,88	13,36	14,34	
WLS muži	14,14	14,20	14,29	13,73	13,22	14,22	

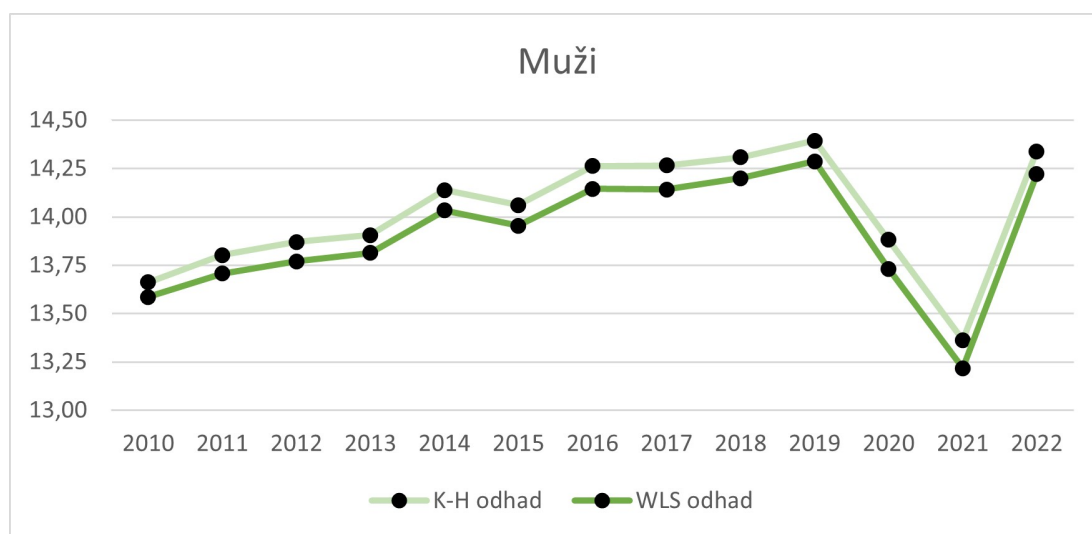
Tabulka 5.4: Současná hodnota jednotkového důchodu pro muže

PVuA	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
K-H ženy	16,06	16,13	16,18	16,21	16,47	16,34	16,55
WLS ženy	15,96	16,04	16,12	16,14	16,42	16,26	16,47
	2017	2018	2019	2020	2021	2022	
K-H ženy	16,50	16,52	16,65	16,32	15,96	16,62	
WLS ženy	16,43	16,48	16,58	16,24	15,86	16,55	

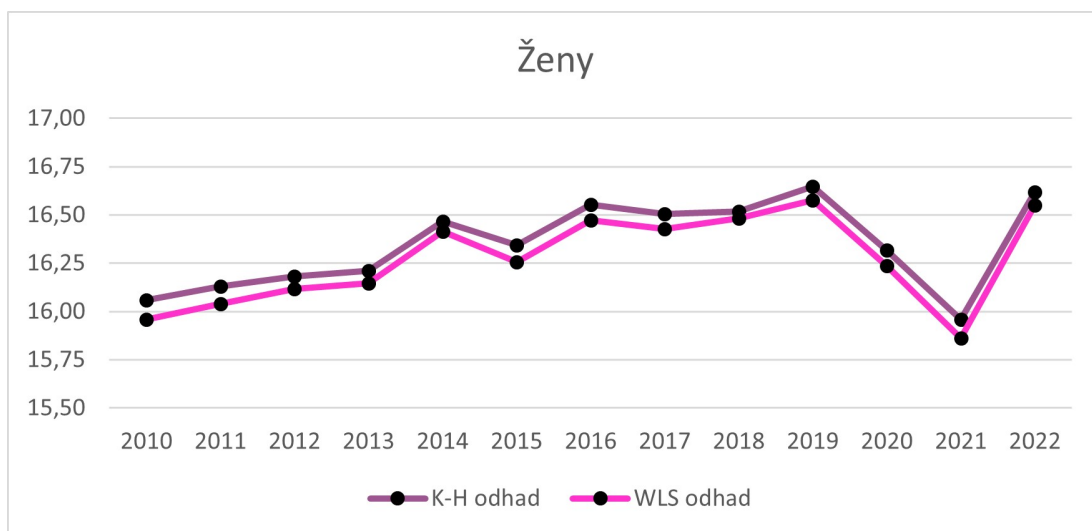
Tabulka 5.5: Současná hodnota jednotkového důchodu pro ženy

Tabulky potvrzují, že ženy musí do fondu vložit více. To koresponduje s očekávanou délkou života z úmrtnostních tabulek Českého statistického úřadu.

Níže jsou údaje z tabulek 5.4 a 5.5 graficky znázorněny podle pohlaví:

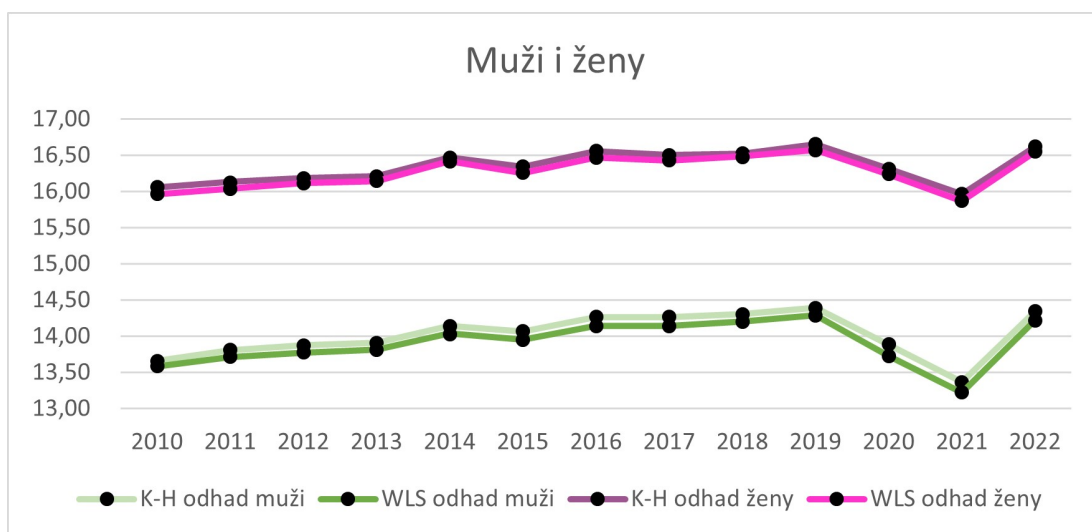


Obrázek 5.4: Současná hodnota jednotkového důchodu: muži



Obrázek 5.5: Současná hodnota jednotkového důchodu: ženy

Konečně, následující graf zobrazuje údaje z tabulek 5.4 a 5.5. Slouží k porovnání původních a optimalizovaných odhadů současné hodnoty jednotkového důchodu mezi pohlavími.



Obrázek 5.6: Současná hodnota jednotkového důchodu: muži a ženy

Uvedené výsledky ukazují poměrně významný pokles současné hodnoty jednotkového důchodu během pandemie.

Závěr

Výsledky získané v rámci této práce lze shrnout následujícím způsobem:

Pro muže jsme pozorovali:

Parametr α vykazoval klesající trend v období let 2010 až 2022.

Parametr β má lehce vzrůstající tendenci s významným skokem v roce 2021.

Parametr ζ mírně klesal, můžeme pozorovat výrazný výkyv během pandemie.

U žen jsme pozorovali:

Parametr α v období let 2010 až 2022 mírně osciloval, nepozorujeme významné kolísání v abnormálním roce 2021.

Parametr β zůstával převážně konstantní, s významným výkyvem v roce 2021.

Parametr ζ mírně vzrůstal v prvních pěti letech sledování, následně jsme zaznamenali jemné kolísání.

U všech parametrů se nám díky optimalizaci založené na redukování gradientu cílové funkce v každém kroku iterační optimalizace podařilo zjemnit hrany grafu, zejména v abnormálních letech.

Díky odhadům parametrů Gompertzova-Makehamova zákona můžeme provést strukturální srovnání úmrtnosti mezi muži a ženami a posoudit jejich dopad na stanovení počáteční současné hodnoty jednotkové annuity.

Dále jsme odvodili částku, kterou by jednotlivci měli v letech 2010 až 2022 vložit do fondu, aby fond byl schopen vyplácet příslušné doživotní jednotkové annuity při zvolené investiční výkonnosti. Tato částka pro muže v období let 2010 až 2022 mírně stoupala a dosáhla maxima 14,29 (WLS odhad) v roce 2019. V důsledku pandemie následoval prudký pokles až na 13,22 (WLS odhad), s následným návratem na původní úroveň v roce 2022.

Provedli jsme odhad i pro ženskou populaci, u níž jsme pozorovali podobný trend. Nejnižší hodnotu 15,86 (WLS odhad) jsme pozorovali v roce 2021, zatímco nejvyšší počáteční hodnota připadá na rok 2019 s hodnotou 16,58 (WLS odhad).

Z výsledků vyplývá, že ženy musí do fondu vkládat větší částky než muži. Tento výsledek je v souladu s očekávanou délkou života z úmrtnostních tabulek Českého statistického úřadu.

Celkově lze shrnout, že analýza Gompertzovy-Makehamovy úmrtnosti a stanovení vhodné výše investic do fondu může být přínosná pro oblast finančního plánování a správy rizik spojených s penzijním pojištěním.

Seznam použité literatury

DOTLAČILOVÁ, P. a LANGHAMROVÁ, J. (2015). Odhad parametrů gompertzovy-makehamovy funkce: Kingova-hardyho metoda. *Slovenska statistika a demografia*.

LAGERÅS, A. N. (2010). Commutation functions under gompertz–makeham mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010**(2), 161–164.

Seznam obrázků

1.1	Vliv parametru α na tvar distribuční funkce 1.5	8
1.2	Vliv parametru β na tvar distribuční funkce 1.5	8
1.3	Vliv parametru γ na tvar distribuční funkce 1.5	8
5.1	Grafický vývoj odhadnutého parametru α	17
5.2	Grafický vývoj odhadnutého parametru β	18
5.3	Grafický vývoj odhadnutého parametru ζ	19
5.4	Současná hodnota jednotkového důchodu: muži	20
5.5	Současná hodnota jednotkového důchodu: ženy	21
5.6	Současná hodnota jednotkového důchodu: muži a ženy	21

Seznam tabulek

5.1	Odhady parametru α	17
5.2	Odhady parametru β	18
5.3	Odhady parametru ζ	19
5.4	Současná hodnota jednotkového důchodu pro muže	20
5.5	Současná hodnota jednotkového důchodu pro ženy	20

A. Přílohy

První příloha

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2010				60	0,015035	85394	15,60
Muži		Ženy		61	0,016778	84047	3,51
α	0,0088	α	0,0026	62	0,018714	82570	0,02
β	0,000006	β	0,000001	63	0,020617	80962	2,54
ζ	1,1241	ζ	1,1475	64	0,022362	79242	5,45
γ	0,1170	γ	0,1376	65	0,02399	77427	6,28
θ	3%	θ	3%	66	0,025574	75533	5,16
a	13,66	a	16,06	67	0,027176	73567	3,04
WLS odhad				68	0,028853	71535	1,02
2010				69	0,030683	69438	0,03
Muži		Ženy		70	0,03279	67270	0,36
α	0,0091	α	0,0031	71	0,035347	65018	1,26
β	0,000007	β	0,000001	72	0,038522	62662	1,55
ζ	1,1227	ζ	1,1459	73	0,042321	60182	1,16
γ	0,1157	γ	0,1362	74	0,046627	57566	0,75
θ	3%	θ	3%	75	0,051397	54815	0,53
a	13,59	a	15,96	76	0,056708	51934	0,41
věk	mx	mx		77	0,062664	48928	0,31
60	0,015035	0,006363		78	0,069398	45806	0,19
61	0,016778	0,006982		79	0,077062	42576	0,06
62	0,018714	0,007662		80	0,085777	39252	0,00
63	0,020617	0,008425		81	0,095586	35855	0,08
64	0,022362	0,009291		82	0,106527	32415	0,23
65	0,02399	0,010271		83	0,118684	28969	0,36
66	0,025574	0,011378		84	0,132205	25561	0,41
67	0,027176	0,012617		85	0,147188	22235	0,35
68	0,02399	0,010271		86	0,163726	19040	0,19
69	0,025574	0,011378		87	0,181896	16024	0,03
l_1	0,21981	0,094638		88	0,201764	13232	0,05
70	0,03279	0,01709		89	0,22337	10702	0,53
71	0,035347	0,018901		Suma			51,47
72	0,038522	0,020954		věk	mx	Lx	vzorec
73	0,042321	0,023315		60	0,006363	93293	0,86
74	0,046627	0,026064		61	0,006982	92673	0,25
75	0,051397	0,029296		62	0,007662	91997	0,03
76	0,056708	0,033098		63	0,008425	91260	0,02
77	0,062664	0,037575		64	0,009291	90455	0,17
78	0,069398	0,042954		65	0,010271	89575	0,45
79	0,077062	0,049264		66	0,011378	88611	0,80
l_2	0,512836	0,298511		67	0,012617	87554	1,08
80	0,085777	0,056606		68	0,013981	86398	1,12
81	0,095586	0,065059		69	0,015465	85136	0,80
82	0,106527	0,074681		70	0,01709	83762	0,31
83	0,118684	0,085531		71	0,018901	82269	0,01
84	0,132205	0,097684		72	0,020954	80646	0,15
85	0,147188	0,11124		73	0,023315	78882	0,76
86	0,163726	0,126331		74	0,026064	76959	1,67
87	0,181896	0,14314		75	0,029296	74860	2,48
88	0,201764	0,162111		76	0,033098	72562	2,93
89	0,22337	0,183119		77	0,037575	70045	2,81
l_3	1,456723	1,105502		78	0,042954	67284	1,75
Muži		Ženy		79	0,049264	64257	0,66
α	0,009098229	α	0,003080297	80	0,056606	60949	0,04
β	6,91483E-06	β	9,30E-07	81	0,065059	57358	0,17
ζ	1,122652902	ζ	1,145904041	82	0,074681	53495	0,89
				83	0,085531	49385	1,69
				84	0,097684	45072	2,04
				85	0,11124	40611	1,72
				86	0,126331	36074	0,89
				87	0,14314	31538	0,13
				88	0,162111	27086	0,09
				89	0,183119	22802	1,35
				Suma			28,14

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2013				60	0,013703	86907	14,26
Muži		Ženy		61	0,015231	85659	5,20
α	0,0058	α	0,0033	62	0,01691	84294	0,73
β	0,000012	β	0,000001	63	0,018692	82807	0,13
ζ	1,1150	ζ	1,1510	64	0,020546	81199	1,71
γ	0,1089	γ	0,1406	65	0,022474	79472	3,98
θ	3%	θ	3%	66	0,02448	77629	5,93
a	13,91	a	16,21	67	0,026542	75675	6,71
				68	0,028612	73617	5,69
				69	0,030655	71468	3,17
				70	0,032773	69238	0,88
				71	0,035154	66928	0,01
				72	0,038005	64525	0,19
				73	0,041433	62014	0,45
				74	0,045534	59378	0,33
				75	0,050322	56602	0,05
				76	0,055536	53687	0,00
				77	0,06074	50657	0,16
				78	0,065799	47554	2,05
				79	0,071554	44401	5,40
				80	0,078916	41188	5,94
				81	0,088176	37892	3,21
				82	0,099094	34511	0,65
				83	0,111389	31071	0,03
				84	0,124757	27618	0,77
				85	0,138953	24213	1,43
				86	0,153979	20920	1,31
				87	0,170308	17794	0,90
				88	0,188334	14878	0,51
				89	0,208392	12205	0,25
						Suma	72,05
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,006212	93732	0,93
				61	0,006888	93120	0,05
				62	0,007626	92447	0,16
				63	0,008428	91708	0,81
				64	0,009297	90899	1,62
				65	0,010236	90016	2,24
				66	0,011245	89054	2,41
				67	0,012334	88011	2,06
				68	0,013521	86881	1,38
				69	0,01483	85658	0,62
				70	0,016296	84336	0,10
				71	0,017961	82904	0,04
				72	0,019879	81351	0,46
				73	0,022094	79662	1,29
				74	0,02465	77823	2,44
				75	0,027611	75817	3,72
				76	0,031067	73627	4,79
				77	0,035141	71232	5,16
				78	0,039973	68609	4,51
				79	0,045872	65730	2,30
				80	0,052831	62570	0,49
				81	0,060919	59116	0,04
				82	0,070155	55373	1,08
				83	0,08055	51362	2,84
				84	0,092158	47122	4,28
				85	0,105069	42707	4,72
				86	0,119405	38184	3,99
				87	0,13534	33629	2,49
				88	0,153058	29124	0,89
				89	0,173024	24754	0,06
						Suma	57,97
WLS odhad							
2013							
	Muži		Ženy				
α	0,0065	α	0,0031				
β	0,000013	β	0,000001				
ζ	1,1142	ζ	1,1442				
γ	0,1081	γ	0,1347				
θ	3%	θ	3%				
a	13,81	a	16,14				
věk	mx		mx				
60	0,013703		0,006212				
61	0,015231		0,006888				
62	0,01691		0,007626				
63	0,018692		0,008428				
64	0,020546		0,009297				
65	0,022474		0,010236				
66	0,02448		0,011245				
67	0,026542		0,012334				
68	0,028612		0,013521				
69	0,030655		0,01483				
I_1	0,205532		0,093747				
70	0,032773		0,016296				
71	0,035154		0,017961				
72	0,038005		0,019879				
73	0,041433		0,022094				
74	0,045534		0,02465				
75	0,050322		0,027611				
76	0,055536		0,031067				
77	0,06074		0,035141				
78	0,065799		0,039973				
79	0,071554		0,045872				
I_2	0,49685		0,280544				
80	0,078916		0,052831				
81	0,088176		0,060919				
82	0,099094		0,070155				
83	0,111389		0,08055				
84	0,124757		0,092158				
85	0,138953		0,105069				
86	0,153979		0,119405				
87	0,170308		0,13534				
88	0,188334		0,153058				
89	0,208392		0,173024				
I_3	1,362298		1,042509				
		Muži	Ženy				
α		0,006489569	0,003050807				
β		1,25477E-05	9,85068E-07				
ζ		1,114186542	1,144186264				

K-H odhad					věk	mx	Lx	vzorec
2014					60	0,01316	87570	14,71
Muži		Ženy			61	0,014594	86363	5,39
α	0,0063	α	0,0028		62	0,016119	85048	1,01
β	0,000008	β	0,000001		63	0,01766	83624	0,00
ζ	1,1193	ζ	1,1501		64	0,019237	82096	0,37
γ	0,1127	γ	0,1399		65	0,020995	80462	1,60
θ	3%	θ	3%		66	0,023113	78707	4,86
a	14,14	a	16,47		67	0,025527	76817	10,36
					68	0,027935	74792	14,19
					69	0,029987	72658	11,23
					70	0,031744	70451	4,59
					71	0,033512	68190	0,39
					72	0,03573	65870	0,34
					73	0,038583	63469	1,73
					74	0,042197	60959	2,28
					75	0,046567	58315	1,74
					76	0,051462	55528	1,26
					77	0,056708	52608	1,33
					78	0,062414	49569	1,77
					79	0,06892	46423	1,93
					80	0,076465	43172	1,51
					81	0,085074	39828	0,90
					82	0,094806	36408	0,37
					83	0,105775	32940	0,06
					84	0,118101	29458	0,02
					85	0,131902	26004	0,22
					86	0,147296	22623	0,58
					87	0,16439	19365	0,94
					88	0,18328	16281	1,15
					89	0,204043	13420	1,10
						Suma	87,93	
					věk	mx	Lx	vzorec
					60	0,005699	94054	0,00
					61	0,006296	93492	0,31
					62	0,006958	92874	1,01
					63	0,00769	92197	1,91
					64	0,008497	91454	2,80
					65	0,009385	90640	3,50
					66	0,01036	89749	3,83
					67	0,011426	88777	3,67
					68	0,01259	87718	3,00
					69	0,013855	86566	1,91
					70	0,015242	85316	0,78
					71	0,016782	83962	0,07
					72	0,018519	82493	0,17
					73	0,02052	80899	1,17
					74	0,022877	79164	2,67
					75	0,025691	77266	3,94
					76	0,029033	75182	4,55
					77	0,032974	72889	4,43
					78	0,037597	70364	3,70
					79	0,043116	67584	2,12
					80	0,049505	64530	0,85
					81	0,056861	61193	0,13
					82	0,065292	57574	0,03
					83	0,074908	53684	0,42
					84	0,085794	49548	0,99
					85	0,098029	45206	1,35
					86	0,111706	40716	1,22
					87	0,126964	36148	0,68
					88	0,143959	31580	0,11
					89	0,163188	27096	0,04
						Suma	51,37	
WLS odhad								
2014								
	Muži		Ženy					
α	0,0069	α	0,0025					
β	0,000009	β	0,000001					
ζ	1,1176	ζ	1,1445					
γ	0,1112	γ	0,1350					
θ	3%	θ	3%					
a	14,03	a	16,42					
věk	mx		mx					
60	0,01316		0,005699					
61	0,014594		0,006296					
62	0,016119		0,006958					
63	0,01766		0,00769					
64	0,019237		0,008497					
65	0,020995		0,009385					
66	0,023113		0,01036					
67	0,025527		0,011426					
68	0,029987		0,009385					
69	0,023113		0,01036					
l_1	0,194513		0,086056					
70	0,031744		0,015242					
71	0,033512		0,016782					
72	0,03573		0,018519					
73	0,038583		0,02052					
74	0,042197		0,022877					
75	0,046567		0,025691					
76	0,051462		0,029033					
77	0,056708		0,032974					
78	0,062414		0,037597					
79	0,06892		0,043116					
l_2	0,467837		0,262351					
80	0,076465		0,049505					
81	0,085074		0,056861					
82	0,094806		0,065292					
83	0,105775		0,074908					
84	0,118101		0,085794					
85	0,131902		0,098029					
86	0,147296		0,111706					
87	0,16439		0,126964					
88	0,18328		0,143959					
89	0,204043		0,163188					
l_3	1,311132		0,976206					
		Muži		Ženy				
α		0,006943646	α	0,002474229				
β		9,21439E-06	β	9,12E-07				
ζ		1,117610852	ζ	1,144538154				

K-H odhad			
2015			
Muži		Ženy	
α	0,0047	α	0,0029
β	0,000012	β	0,000001
ζ	1,1149	ζ	1,1528
γ	0,1088	γ	0,1422
θ	3%	θ	3%
a	14,06	a	16,34

WLS odhad			
2015			
Muži		Ženy	
α	0,0059	α	0,0025
β	0,000012	β	0,000001
ζ	1,1149	ζ	1,1445
γ	0,1087	γ	0,1349
θ	3%	θ	3%
a	13,95	a	16,26

věk	mx	mx
60	0,012713	0,005638
61	0,014412	0,006259
62	0,016253	0,006956
63	0,018062	0,007734
64	0,019753	0,008598
65	0,021385	0,009555
66	0,023058	0,010614
67	0,024889	0,011779
68	0,021385	0,009555
69	0,023058	0,010614
l_1	0,194968	0,087302
70	0,032544	0,015942
71	0,035641	0,01755
72	0,038586	0,019277
73	0,041526	0,021213
74	0,04468	0,023503
75	0,04827	0,026305
76	0,052502	0,029733
77	0,057548	0,033913
78	0,063512	0,038964
79	0,070427	0,044957
l_2	0,485236	0,271357
80	0,078315	0,051929
81	0,087088	0,059916
82	0,097044	0,068974
83	0,108312	0,079142
84	0,12102	0,090545
85	0,1353	0,103427
86	0,15128	0,118042
87	0,169077	0,134656
88	0,188795	0,153371
89	0,210516	0,174271
l_3	1,346747	1,034273
	Muži	Ženy
	α 0,005921692	α 0,00249937
	β 1,17995E-05	β 9,64E-07
	ζ 1,114851172	ζ 1,144454576

věk	mx	Lx	vzorec
60	0,012713	87813	20,03
61	0,014412	86630	5,70
62	0,016253	85313	0,24
63	0,018062	83862	0,71
64	0,019753	82292	2,27
65	0,021385	80617	2,83
66	0,023058	78846	2,55
67	0,024889	76979	2,10
68	0,027017	75008	2,10
69	0,029589	72916	3,10
70	0,032544	70687	4,85
71	0,035641	68319	5,60
72	0,038586	65832	3,49
73	0,041526	63249	0,89
74	0,04468	60582	0,02
75	0,04827	57833	1,21
76	0,052502	54993	3,31
77	0,057548	52052	4,80
78	0,063512	48998	4,98
79	0,070427	45829	4,17
80	0,078315	42549	2,96
81	0,087088	39177	2,04
82	0,097044	35737	1,09
83	0,108312	32256	0,34
84	0,12102	28768	0,01
85	0,1353	25315	0,17
86	0,15128	21943	0,78
87	0,169077	18702	1,64
88	0,188795	15644	2,48
89	0,210516	12818	3,01

Suma 89,47			
věk	mx	Lx	vzorec
60	0,005638	94104	1,00
61	0,006259	93546	0,19
62	0,006956	92930	0,01
63	0,007734	92250	0,32
64	0,008598	91500	0,94
65	0,009555	90674	1,64
66	0,010614	89764	2,26
67	0,011779	88765	2,57
68	0,013055	87670	2,45
69	0,014443	86473	1,84
70	0,015942	85170	0,88
71	0,01755	83756	0,08
72	0,019277	82229	0,40
73	0,021213	80581	2,70
74	0,023503	78801	6,44
75	0,026305	76864	9,72
76	0,029733	74741	11,11
77	0,033913	72403	9,97
78	0,038964	69815	6,85
79	0,044957	66950	3,36
80	0,051929	63789	0,91
81	0,059916	60325	0,01
82	0,068974	56567	0,37
83	0,079142	52537	1,23
84	0,090545	48273	1,97
85	0,103427	43821	2,43
86	0,118042	39239	2,62
87	0,134656	34594	2,58
88	0,153371	29967	2,08
89	0,174271	25451	1,14
	Suma	80,07	

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2016				60	0,012548	88165	9,47
Muži		Ženy		61	0,013955	87005	3,26
α	0,0033	α	0,0019	62	0,015446	85736	0,53
β	0,000016	β	0,000001	63	0,016983	84357	0,00
ζ	1,1101	ζ	1,1439	64	0,018564	82872	0,35
γ	0,1044	γ	0,1344	65	0,020233	81280	0,89
θ	3%	θ	3%	66	0,022054	79581	1,52
a	14,26	a	16,55	67	0,024075	77767	2,30
				68	0,026332	75832	3,32
				69	0,028854	73770	4,62
				70	0,03156	71576	5,44
				71	0,034271	69260	4,39
				72	0,036846	66841	1,62
				73	0,039567	64337	0,07
				74	0,042754	61744	0,27
				75	0,046577	59049	0,96
				76	0,050965	56241	1,61
				77	0,055869	53318	2,32
				78	0,061364	50286	2,97
				79	0,067634	47149	3,12
				80	0,074847	43911	2,59
				81	0,082996	40584	1,84
				82	0,092208	37185	1,03
				83	0,102593	33740	0,36
				84	0,114268	30279	0,02
				85	0,127347	26840	0,10
				86	0,141948	23466	0,56
				87	0,158178	20203	1,29
				88	0,176139	17099	2,05
				89	0,195913	14202	2,62
						Suma	61,50
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,005468	94046	0,93
				61	0,005986	93509	0,46
				62	0,00658	92924	0,14
				63	0,007276	92282	0,00
				64	0,008086	91577	0,17
				65	0,008995	90798	0,63
				66	0,009981	89941	1,05
				67	0,011045	89000	1,17
				68	0,012217	87971	1,05
				69	0,013533	86846	0,82
				70	0,015018	85616	0,54
				71	0,016645	84272	0,16
				72	0,018493	82805	0,00
				73	0,020598	81203	0,12
				74	0,023009	79452	0,52
				75	0,025797	77538	1,10
				76	0,029063	75442	1,57
				77	0,032918	73142	1,62
				78	0,037471	70615	1,19
				79	0,042819	67839	0,54
				80	0,049039	64798	0,08
				81	0,055957	61489	0,00
				82	0,06388	57919	0,03
				83	0,072931	54096	0,15
				84	0,083242	50041	0,31
				85	0,094952	45784	0,41
				86	0,108205	41372	0,40
				87	0,123143	36864	0,24
				88	0,139904	32333	0,04
				89	0,158617	27861	0,08
						Suma	15,52

WLS odhad			
2016			
Muži		Ženy	
α	0,0050	α	0,0025
β	0,000015	β	0,000001
ζ	1,1111	ζ	1,1439
γ	0,1053	γ	0,1344
θ	3%	θ	3%
a	14,14	a	16,47

věk	mx	mx
60	0,012548	0,005468
61	0,013955	0,005986
62	0,015446	0,00658
63	0,016983	0,007276
64	0,018564	0,008086
65	0,020233	0,008995
66	0,022054	0,009981
67	0,024075	0,011045
68	0,026332	0,012217
69	0,028854	0,013533
I_1	0,186145	0,082393
70	0,03156	0,015018
71	0,034271	0,016645
72	0,036846	0,018493
73	0,039567	0,020598
74	0,042754	0,023009
75	0,046577	0,025797
76	0,050965	0,029063
77	0,055869	0,032918
78	0,061364	0,037471
79	0,067634	0,042819
I_2	0,467407	0,261831
80	0,074847	0,049039
81	0,082996	0,055957
82	0,092208	0,06388
83	0,102593	0,072931
84	0,114268	0,083242
85	0,127347	0,094952
86	0,141948	0,108205
87	0,158178	0,123143
88	0,176139	0,139904
89	0,195913	0,158617
I_3	1,266437	0,94987

	Muži	Ženy
α	0,004950924	0,002520356
β	1,49566E-05	9,34849E-07
ζ	1,11106366	1,143861422

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2017				60	0,012586	88127	9,57
Muži		Ženy		61	0,014103	86959	2,22
α	0,0034	α	0,0022	62	0,015632	85676	0,09
β	0,000015	β	0,000001	63	0,017101	84286	0,13
ζ	1,1112	ζ	1,1457	64	0,018517	82799	0,32
γ	0,1054	γ	0,1360	65	0,019991	81220	0,32
θ	3%	θ	3%	66	0,02167	79546	0,41
a	14,27	a	16,50	67	0,023631	77766	0,78
				68	0,0259	75864	1,63
				69	0,028492	73830	3,14
				70	0,031343	71655	4,90
				71	0,034286	69344	5,39
				72	0,037127	66913	3,42
				73	0,039998	64383	1,02
				74	0,043085	61765	0,00
				75	0,046579	59059	0,72
				76	0,050671	56258	2,27
				77	0,05552	53352	3,41
				78	0,061206	50330	3,60
				79	0,067739	47192	3,12
				80	0,075146	43942	2,34
				81	0,083422	40598	1,65
				82	0,092784	37180	0,90
				83	0,103348	33713	0,30
				84	0,115231	30229	0,01
				85	0,128552	26767	0,10
				86	0,143431	23370	0,53
				87	0,159977	20088	1,17
				88	0,178293	16968	1,80
				89	0,19846	14060	2,22
						Suma	57,51
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,005706	94264	0,06
				61	0,006264	93702	0,02
				62	0,00685	93089	0,11
				63	0,007507	92423	0,24
				64	0,00826	91698	0,44
				65	0,009114	90905	0,67
				66	0,010074	90037	0,87
				67	0,011148	89087	0,97
				68	0,012359	88046	0,99
				69	0,013727	86906	0,93
				70	0,015267	85656	0,77
				71	0,016923	84288	0,31
				72	0,018765	82798	0,01
				73	0,020834	81176	0,16
				74	0,023185	79410	0,89
				75	0,025906	77486	2,08
				76	0,029134	75384	3,06
				77	0,033007	73080	3,16
				78	0,037623	70546	2,39
				79	0,043042	67761	1,30
				80	0,049319	64707	0,44
				81	0,056346	61382	0,13
				82	0,064413	57792	0,00
				83	0,073652	53944	0,07
				84	0,084203	49858	0,28
				85	0,096212	45567	0,56
				86	0,10983	41117	0,75
				87	0,125208	36570	0,73
				88	0,142492	32000	0,47
				89	0,161815	27496	0,11
						Suma	22,95

WLS odhad			
2017			
Muži		Ženy	
α	0,0053	α	0,0025
β	0,000013	β	0,000001
ζ	1,1131	ζ	1,1437
γ	0,1071	γ	0,1343
θ	3%	θ	3%
a	14,14	a	16,43

věk	mx	mx
60	0,012586	0,005706
61	0,014103	0,006264
62	0,015632	0,00685
63	0,017101	0,007507
64	0,018517	0,00826
65	0,019991	0,009114
66	0,02167	0,010074
67	0,023631	0,011148
68	0,019991	0,009114
69	0,02167	0,010074
I_1	0,184892	0,084111
70	0,031343	0,015267
71	0,034286	0,016923
72	0,037127	0,018765
73	0,039998	0,020834
74	0,043085	0,023185
75	0,046579	0,025906
76	0,050671	0,029134
77	0,05552	0,033007
78	0,061206	0,037623
79	0,067739	0,043042
I_2	0,467554	0,263686
80	0,075146	0,049319
81	0,083422	0,056346
82	0,092784	0,064413
83	0,103348	0,073652
84	0,115231	0,084203
85	0,128552	0,096212
86	0,143431	0,10983
87	0,159977	0,125208
88	0,178293	0,142492
89	0,19846	0,161815
I_3	1,278644	0,96349

	Muži	Ženy
α	0,005330342	0,002540677
β	1,28873E-05	9,55593E-07
ζ	1,113086674	1,14372687

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2018				60	0,011872	88103	11,91
Muži		Ženy		61	0,01329	87002	4,79
α	0,0026	α	0,0030	62	0,014874	85786	0,86
β	0,000019	β	0,000001	63	0,016578	84448	0,04
ζ	1,1082	ζ	1,1510	64	0,018356	82986	1,09
γ	0,1027	γ	0,1406	65	0,020173	81404	2,52
θ	3%	θ	3%	66	0,021993	79706	3,11
a	14,31	a	16,52	67	0,023864	77900	2,82
				68	0,025918	75986	2,44
				69	0,028304	73955	2,63
				70	0,031027	71794	3,26
				71	0,034001	69499	3,70
				72	0,03712	67073	3,25
				73	0,040322	64527	1,85
				74	0,043551	61879	0,29
				75	0,046841	59146	0,37
				76	0,050495	56338	3,00
				77	0,054953	53447	5,78
				78	0,06051	50452	6,03
				79	0,06704	47339	4,72
				80	0,074283	44114	3,61
				81	0,082315	40796	2,67
				82	0,091356	37408	1,67
				83	0,101737	33972	0,56
				84	0,113572	30511	0,00
				85	0,126816	27062	0,37
				86	0,141406	23673	1,36
				87	0,157235	20396	2,30
				88	0,17425	17286	2,64
				89	0,192577	14394	2,38
						Suma	82,02
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,005781	94279	0,29
				61	0,006415	93706	0,04
				62	0,007071	93077	0,51
				63	0,007759	92389	1,06
				64	0,008491	91642	1,40
				65	0,009277	90831	1,40
				66	0,010132	89954	1,12
				67	0,011087	89005	0,76
				68	0,012194	87975	0,51
				69	0,013515	86852	0,48
				70	0,015073	85620	0,62
				71	0,016869	84264	0,84
				72	0,01889	82771	0,95
				73	0,021096	81134	0,69
				74	0,023418	79349	0,10
				75	0,02583	77420	0,40
				76	0,028496	75346	3,06
				77	0,031679	73115	7,10
				78	0,035628	70697	9,77
				79	0,040456	68061	9,97
				80	0,046271	65176	8,00
				81	0,05321	62019	4,80
				82	0,061456	58569	1,61
				83	0,071208	54817	0,01
				84	0,082615	50769	1,38
				85	0,095745	46448	5,84
				86	0,110592	41907	11,82
				87	0,127175	37223	17,02
				88	0,145516	32492	19,45
				89	0,165588	27824	17,93
						Suma	128,93

WLS odhad			
2018			
Muži		Ženy	
α	0,0038	α	0,0028
β	0,000019	β	0,000001
ζ	1,1083	ζ	1,1438
γ	0,1028	γ	0,1344
θ	3%	θ	3%
a	14,20	a	16,48

věk	mx	mx
60	0,011872	0,005781
61	0,01329	0,006415
62	0,014874	0,007071
63	0,016578	0,007759
64	0,018356	0,008491
65	0,020173	0,009277
66	0,021993	0,010132
67	0,023864	0,011087
68	0,025918	0,009277
69	0,021993	0,010132
I_1	0,183166	0,085422
70	0,031027	0,015073
71	0,034001	0,016869
72	0,03712	0,01889
73	0,040322	0,021096
74	0,043551	0,023418
75	0,046841	0,02583
76	0,050495	0,028496
77	0,054953	0,031679
78	0,06051	0,035628
79	0,06704	0,040456
I_2	0,46586	0,257435
80	0,074283	0,046271
81	0,082315	0,05321
82	0,091356	0,061456
83	0,101737	0,071208
84	0,113572	0,082615
85	0,126816	0,095745
86	0,141406	0,110592
87	0,157235	0,127175
88	0,17425	0,145516
89	0,192577	0,165588
I_3	1,255547	0,959376

	Muži	Ženy
α	0,003813515	0,002797322
β	1,85229E-05	9,19E-07
ζ	1,108289834	1,143806842

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2020				60	0,011979	88056	11,21
Muži		Ženy		61	0,013863	86926	1,93
α	-0,0001	α	0,0016	62	0,016036	85637	0,43
β	0,000024	β	0,000001	63	0,017902	84197	2,10
ζ	1,1075	ζ	1,1445	64	0,019292	82646	0,74
γ	0,1021	γ	0,1349	65	0,020709	81010	0,00
θ	3%	θ	3%	66	0,022796	79268	0,02
a	13,88	a	16,32	67	0,025631	77373	1,38
				68	0,028766	75298	4,63
				69	0,031605	73061	4,64
				70	0,034175	70698	1,80
				71	0,036897	68231	0,13
				72	0,040228	65652	0,04
				73	0,044249	62939	0,13
				74	0,048917	60077	0,07
				75	0,054144	57063	0,02
				76	0,059775	53907	0,03
				77	0,065578	50635	0,35
				78	0,071567	47283	1,84
				79	0,07835	43873	3,89
				80	0,086799	40400	3,58
				81	0,097234	36855	1,28
				82	0,109034	33251	0,10
				83	0,121159	29642	0,00
				84	0,134036	26098	0,01
				85	0,148904	22661	0,01
				86	0,166585	19362	0,54
				87	0,186211	16237	1,58
				88	0,206473	13347	1,64
				89	0,227061	10749	0,70
						Suma	44,81
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,005672	94040	0,05
				61	0,006234	93482	0,00
				62	0,006849	92873	0,04
				63	0,00753	92207	0,08
				64	0,008299	91481	0,12
				65	0,00918	90685	0,17
				66	0,010205	89810	0,28
				67	0,01139	88846	0,47
				68	0,012734	87781	0,66
				69	0,01423	86606	0,71
				70	0,015896	85312	0,59
				71	0,017758	83889	0,36
				72	0,019852	82327	0,12
				73	0,022218	80614	0,00
				74	0,024906	78738	0,08
				75	0,027979	76685	0,40
				76	0,031523	74439	0,87
				77	0,035646	71982	1,28
				78	0,040473	69297	1,40
				79	0,046137	66364	1,14
				80	0,052796	63166	0,57
				81	0,060632	59689	0,06
				82	0,069617	55932	0,07
				83	0,079793	51914	0,41
				84	0,091305	47667	0,80
				85	0,104374	43234	1,12
				86	0,119215	38673	1,30
				87	0,13601	34052	1,23
				88	0,154858	29456	0,81
				89	0,175702	24980	0,17
						Suma	15,38

WLS odhad			
2020			
Muži		Ženy	
α	0,0021	α	0,0023
β	0,000021	β	0,000001
ζ	1,1088	ζ	1,1444
γ	0,1033	γ	0,1349
θ	3%	θ	3%
a	13,73	a	16,24

věk	mx	mx
60	0,011979	0,005672
61	0,013863	0,006234
62	0,016036	0,006849
63	0,017902	0,00753
64	0,019292	0,008299
65	0,020709	0,00918
66	0,022796	0,010205
67	0,025631	0,01139
68	0,02709	0,00918
69	0,022796	0,010205
I_1	0,191713	0,084744
70	0,034175	0,015896
71	0,036897	0,017758
72	0,040228	0,019852
73	0,044249	0,022218
74	0,048917	0,024906
75	0,054144	0,027979
76	0,059775	0,031523
77	0,065578	0,035646
78	0,071567	0,040473
79	0,07835	0,046137
I_2	0,53388	0,282388
80	0,086799	0,052796
81	0,097234	0,060632
82	0,109034	0,069617
83	0,121159	0,079793
84	0,134036	0,091305
85	0,148904	0,104374
86	0,166585	0,119215
87	0,186211	0,13601
88	0,206473	0,154858
89	0,227061	0,175702
I_3	1,483496	1,044302

	Muži	Ženy
α	0,002140313	0,002280776
β	2,13901E-05	9,83568E-07
ζ	1,108817461	1,144430322

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2021				60	0,014788	86242	2,60
Muži		Ženy		61	0,016502	84903	0,80
α	-0,0028	α	0,0015	62	0,018374	83436	0,05
β	0,000068	β	0,000003	63	0,020357	81837	0,08
ζ	1,0949	ζ	1,1324	64	0,02243	80105	0,34
γ	0,0906	γ	0,1243	65	0,024614	78244	0,50
θ	3%	θ	3%	66	0,026941	76254	0,50
a	13,36	a	15,96	67	0,029451	74135	0,40
				68	0,032199	71886	0,30
				69	0,035246	69504	0,26
				70	0,038619	66986	0,26
				71	0,04233	64331	0,27
				72	0,046391	61541	0,26
				73	0,050834	58624	0,24
				74	0,055707	55586	0,21
				75	0,060902	52441	0,07
				76	0,066456	49209	0,00
				77	0,072383	45912	0,24
				78	0,078808	42573	0,98
				79	0,085996	39209	1,83
				80	0,094201	35835	2,19
				81	0,103622	32466	1,77
				82	0,114385	29118	0,90
				83	0,126536	25819	0,18
				84	0,140001	22603	0,01
				85	0,154365	19515	0,16
				86	0,170109	16597	0,42
				87	0,187296	13885	0,68
				88	0,205978	11410	0,83
				89	0,226189	9195	0,80
						Suma	18,11
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,006658	93228	2,54
				61	0,007395	92575	0,91
				62	0,008206	91856	0,16
				63	0,009094	91065	0,00
				64	0,010063	90197	0,17
				65	0,01112	89247	0,43
				66	0,012274	88209	0,60
				67	0,013545	87078	0,64
				68	0,014963	85846	0,60
				69	0,016567	84504	0,53
				70	0,018389	83040	0,48
				71	0,020455	81444	0,42
				72	0,022795	79703	0,36
				73	0,025395	77806	0,20
				74	0,028274	75748	0,03
				75	0,031486	73519	0,03
				76	0,035123	71113	0,29
				77	0,039297	68518	0,70
				78	0,044124	65722	1,03
				79	0,049726	62712	1,09
				80	0,05623	59481	0,84
				81	0,063762	56023	0,41
				82	0,07244	52341	0,07
				83	0,082154	48455	0,00
				84	0,093182	44396	0,04
				85	0,105661	40203	0,15
				86	0,119728	35929	0,25
				87	0,13552	31634	0,26
				88	0,153165	27393	0,14
				89	0,172775	23284	0,01
						Suma	13,40

WLS odhad			
2021			
Muži		Ženy	
α	0,0007	α	0,0028
β	0,000051	β	0,000002
ζ	1,0981	ζ	1,1351
γ	0,0936	γ	0,1267
θ	3%	θ	3%
a	13,22	a	15,86

věk	mx	mx
60	0,014788	0,006658
61	0,016502	0,007395
62	0,018374	0,008206
63	0,020357	0,009094
64	0,02243	0,010063
65	0,024614	0,01112
66	0,026941	0,012274
67	0,029451	0,013545
68	0,024614	0,01112
69	0,026941	0,012274
I_1	0,225012	0,101749
70	0,038619	0,018389
71	0,04233	0,020455
72	0,046391	0,022795
73	0,050834	0,025395
74	0,055707	0,028274
75	0,060902	0,031486
76	0,066456	0,035123
77	0,072383	0,039297
78	0,078808	0,044124
79	0,085996	0,049726
I_2	0,598426	0,315064
80	0,094201	0,05623
81	0,103622	0,063762
82	0,114385	0,07244
83	0,126536	0,082154
84	0,140001	0,093182
85	0,154365	0,105661
86	0,170109	0,119728
87	0,187296	0,13552
88	0,205978	0,153165
89	0,226189	0,172775
I_3	1,522682	1,054617

	Muži	Ženy
α	0,000725048	0,002770882
β	5,12482E-05	2,02267E-06
ζ	1,098076986	1,135056584

K-H odhad				věk	mx	Lx	vzorec
2022				60	0,011341	88360	6,42
Muži		Ženy		61	0,012625	87308	2,93
α	0,0010	α	0,0016	62	0,014057	86152	0,79
β	0,000019	β	0,000001	63	0,015626	84883	0,02
ζ	1,1089	ζ	1,1429	64	0,017327	83496	0,27
γ	0,1034	γ	0,1336	65	0,019157	81988	1,08
θ	3%	θ	3%	66	0,021113	80354	1,99
a	14,34	a	16,62	67	0,023208	78594	2,67
				68	0,025468	76705	3,04
				69	0,027926	74685	3,13
				70	0,030581	72533	2,82
				71	0,033412	70251	2,02
				72	0,036409	67842	0,93
				73	0,039651	65312	0,16
				74	0,043265	62662	0,02
				75	0,04738	59888	0,29
				76	0,052045	56986	0,70
				77	0,057296	53957	1,10
				78	0,063165	50807	1,49
				79	0,069687	47546	1,90
				80	0,076894	44190	2,42
				81	0,084915	40760	2,92
				82	0,094163	37275	2,62
				83	0,104952	33749	1,49
				84	0,117427	30205	0,34
				85	0,1316	26676	0,02
				86	0,147458	23209	0,69
				87	0,164977	19860	1,93
				88	0,184111	16686	3,06
				89	0,204788	13743	3,50
						Suma	52,77
				věk	mx	Lx	vzorec
				60	0,005396	94233	0,04
				61	0,005936	93700	0,02
				62	0,006524	93119	0,16
				63	0,007166	92483	0,30
				64	0,007869	91791	0,36
				65	0,008647	91036	0,32
				66	0,009517	90213	0,23
				67	0,010499	89315	0,12
				68	0,011621	88333	0,05
				69	0,012912	87257	0,01
				70	0,014398	86074	0,00
				71	0,016103	84771	0,00
				72	0,018052	83337	0,02
				73	0,020282	81755	0,04
				74	0,022835	80013	0,07
				75	0,025736	78094	0,12
				76	0,029048	75986	0,20
				77	0,032835	73673	0,30
				78	0,037188	71140	0,38
				79	0,042227	68374	0,36
				80	0,048081	65359	0,22
				81	0,054874	62084	0,05
				82	0,062724	58545	0,01
				83	0,071757	54745	0,18
				84	0,082108	50699	0,59
				85	0,093808	46440	0,99
				86	0,107092	42012	1,30
				87	0,122111	37474	1,38
				88	0,139012	32899	1,12
				89	0,157934	28372	0,58
						Suma	9,53

WLS odhad			
2022			
Muži		Ženy	
α	0,0030	α	0,0023
β	0,000016	β	0,000001
ζ	1,1108	ζ	1,1431
γ	0,1051	γ	0,1338
θ	3%	θ	3%
a	14,22	a	16,55

věk	mx	mx
60	0,011341	0,005396
61	0,012625	0,005936
62	0,014057	0,006524
63	0,015626	0,007166
64	0,017327	0,007869
65	0,019157	0,008647
66	0,021113	0,009517
67	0,023208	0,010499
68	0,019157	0,008647
69	0,021113	0,009517
I_1	0,174724	0,079718
70	0,030581	0,014398
71	0,033412	0,016103
72	0,036409	0,018052
73	0,039651	0,020282
74	0,043265	0,022835
75	0,04738	0,025736
76	0,052045	0,029048
77	0,057296	0,032835
78	0,063165	0,037188
79	0,069687	0,042227
I_2	0,472891	0,258704
80	0,076894	0,048081
81	0,084915	0,054874
82	0,094163	0,062724
83	0,104952	0,071757
84	0,117427	0,082108
85	0,1316	0,093808
86	0,147458	0,107092
87	0,164977	0,122111
88	0,184111	0,139012
89	0,204788	0,157934
I_3	1,311285	0,939501

	Muži	Ženy
α	0,002957503	0,002257636
β	1,61298E-05	9,7396E-07
ζ	1,110767344	1,143114744