

POSUDOK OPONENTA BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Názov: Kochenova-Stoneova nerovnosť

Autor: Barbora Dohnalová

ZHRNUTIE OBSAHU PRÁCE

Práca sa zaoberá klasickou Borelovou-Cantelliho (B-C) vetou a niekoľkými jej zovšeobecneniami. V kapitole 1 je predstavená a dokázaná základná B-C veta, s niekoľkými príkladmi jej použitia. Kapitola 2 sa zaoberá rozšíreniami B-C vety. Ide o Kochenovu-Stoneovu (K-S) nerovnosť v pôvodnom znení (tvrdenie 4), K-S nerovnosť dokázanú pomocou Chungovej-Erdősovej nerovnosti (tvrdenie 7), a dve Petrovove zovšeobecnenia B-C vety (tvrdenia 8 a 9). Kapitola 3 ponúka niekoľko príkladov.

CELKOVÉ HODNOTENIE PRÁCE

Téma práce. Téma práce je zaujímavá, podľa môjho názoru možno ale až príliš náročná. Sú predstavené štyri rôzne rozšírenia B-C vety. Ich dôkazy sú technické, a ich úspešné spracovanie z niekoľkých (ako dobou vzniku, tak aj značením a prístupom) veľmi rozdielnych zdrojov z literatúry vyžaduje precíznosť a nadhľad. Vítam, že tieto dôkazy sú v práci uvedené. Práca ale nepôsobí prehľadne ani ucelene. Možno by teda stálo zato zvážiť spracovanie jediného — ale úplného a prehľadného — dôkazu, namiesto štyroch neprehľadných a problematických dôkazov, ako ich v práci nájdeme teraz.

Vlastný príspevok. Autorka replikuje niekoľko dôkazov a príkladov z literatúry. K tomu potrebuje doplniť celú radu často netriviálnych medzikrokov. To sa jej ale darí iba čiastočne, a celkovo práca pôsobí neistým dojmom.

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je veľmi kolísavá. Miestami nájdeme vcelku matematicky rigorózne formulovaný text. Na iných miestach však nachádzame celú radu neúplných alebo nesprávnych argumentov.

Práca so zdrojmi. Zdroje sa zväčša zdajú byť citované vhodne, miestami však text pôsobí ako voľný preklad pasáží z literatúry. To je napríklad dobre vidieť v dôležitej diskusii o K-S nerovnosti v závere sekcie 2.1, kde sa bez ďalšieho komentára alebo odkazu aplikujú netriviálne nástroje teórie čísel (*Selbergovo sito* apod.). Množstvo používaných (pomocných) výsledkov nie je citovaných do literatúry.

Formálna úprava. Formálna úprava práce je podpriemerná. Text obsahuje značné množstvo preklepov a problémov v značení. Práca sa číta ťažko a nepôsobí prehľadne.

OTÁZKY A PRIPOMIENKY

1. Vlastný dôkaz K-S nerovnosti (tvrdenie 4) je neprehľadný a neúplný. Ako presne sa v dôkaze využíva Hewittov-Savageov 0-1 zákon? Kde využívame, že systém javov $\{A_n\}$ je rekurentný? Čo presne je mienené vetou začínajúcou *Tato nerovnosť platí, pokiaľ napríklad...*?
2. Ako presne rozširuje K-S nerovnosť B-C vetu? Tento súvis je v práci niekoľkokrát naznačený, uvítal by som ale jasne formulované tvrdenie.

3. Sú tvrdenia 4 (základná K-S nerovnosť) a 7 (K-S nerovnosť z článku Yan, 2006) ekvivalentné tak ako je tvrdené na str. 13? Kde sa v tvrdení 7 nachádza predpoklad rekurencie náhodných javov z tvrdenia 4?
4. V tvrdení 4 vidíme, že $N(n)$ označuje počet javov A_{m_n} , ktoré nastanú. Čo teda znamená $P(N(n), \text{i.o.})$ na str. 16?
5. Dá sa niečo povedať o vzťahu dvoch uvedených Petrovových tvrdení (tvrdenia 8 a 9)? Majú Petrovove tvrdenia nejaký vzťah s K-S nerovnosťou?
6. V dôkaze tvrdenia 9 používame nerovnosť typu $HP(A_k)^2 \leq HP(A_k)$. To platí ak $H \geq 0$. My v tvrdení 9 ale predpokladáme $H \in \mathbb{R}$. Je teda táto nerovnosť v poriadku?
7. Čo presne znamená $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n < 1 \rightarrow \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n < 1$? Túto rovnicu máme na str. 9 v dôkaze tvrdenia 3.
8. Prečo v dôkaze tvrdenia 3 platí $\mathbf{E} Y_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} Y_n$ ako nájdeme na str. 9? Ako v tomto dôkaze vieme, že $\mathbf{E} Y_n^2 = T$ nezávisí od n ?
9. Prečo platí $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} Y_n \geq c) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \geq c)$ ako nájdeme na str. 10?
10. Prečo môžeme v príklade 7 predpokladať, že systém javov $\{A_k\}$ je rekurentný?
11. V príkladoch 4 a 9 uvažujeme postupnosti javov A_n , ktoré sú definované iba pomocou jedinej náhodnej veličiny X_1 . Nedalo by sa vyjadriť $P(A_n \text{ i.o.})$ aj jednoduchšie než s použitím B-C vety?
12. Ako je v príklade 8 presne definovaná náhodná prechádza v \mathbb{R}^3 ?
13. Str. 3: Sú základné definície množinového \limsup a \liminf správne?
14. Str. 11: Čo znamená, že sa *postupnosť chová podobne ako k*? Čo znamená symbol \sim na str. 20?
15. Str. 12: Čo je to *najjednoduchší odhad prvočísel*, alebo *Selbergovo sito*?

NIEKTORÉ FORMÁLNE CHYBY

1. Pomocné tvrdenia (napr. veta o spojitosti pravdepodobnosti na str. 3, alebo veta o „dvoch strážnikoch“ na str. 4) by mali byť odkazované do literatúry. Rovnako text zneprehľadňuje to, že namiesto odkazovania pomocou čísiel rovníc alebo tvrdení nachádzame iba vágne odkazy ako *odečteme rovnici z tohoto lemmatu* (str. 4), *z matematické analýzy známe* (str. 9), alebo *ze značení z prvej kapitoly* (str. 10). Podobných problémov nájdeme v práci veľké množstvo.
2. Práca obsahuje značné množstvo preklepov a ďalších formálnych chýb. Napríklad, už v abstrakte nájdeme hneď niekoľko preklepov (*Kochenovo-Stoneovou, využívano, príkládům*).

ZÁVER

Musím konštatovať, že sa jedná slabšiu prácu, ktorej chýba hlavne ucelená diskusia a nadhľad. Práve obhajoba tejto práce bude ale vhodným miestom na to, aby autorka výsledky uviedla do kontextu a ukázala porozumenie a prehľad.



Stanislav Nagy
 KPMS MFF UK
 26. mája 2024