MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Dohnalová

Kochenova-Stoneova nerovnost

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D. za trpělivost, ochotu a za užitečné rady, které mi poskytoval v celém průběhu psaní práce.

Název práce: Kochenova-Stoneova nerovnost

Autor: Barbora Dohnalová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá Kochenovo-Stoneovou nerovností a jejími alternativami. První kapitola shrnuje Borel-Cantelliho lemma a je doplněna o několik příkladů, ve kterých je dokázané lemma využíváno různými způsoby. Druhá kapitola se věnuje důkazu samotné Kochenovy-Stoneovy nerovnosti a zmiňuje další zobecnění Borel-Cantelliho lemma. Třetí kapitola patří pár přikládům na využítí Kochenovy-Stoneovy nerovnosti.

Klíčová slova: Kochenova-Stoneova nerovnost Borelovo-Cantelliho lemma 0-1 zákony Chung-Erdösova nerovnost V.V.Petrov

Title: Kochen-Stone inequality

Author: Barbora Dohnalová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The main theme of this work is the Kochen-Stone inequality and its alternatives. The first chapter summarizes the Borel-Cantelli lemma and is supplemented with several examples in which the proven lemma is utilized in various ways. The second chapter focuses on the proof of the Kochen-Stone inequality itself and mentions further generalizations of the Borel-Cantelli lemma. The third chapter presents a few examples of utilizing the Kochen-Stone inequality.

Keywords: Kochen-Stone inequality Borel-Cantelli lemma zero-one laws V.V.Petrov Chung-Erdös inequality

Obsah

Úvod

Borel-Cantelliho lemma je jedním z nejznámějších 0-1 zákonů. Určuje nám pravděpodobnost, se kterou pro nekonečně mnoho n nastane určitý jev. Jako jednoduchý příklad pro lepší uvedení do situace lze uvést hod mincí, kdy nás zajímá, s jakou pravděpodobností padne rub pro nekonečně mnoho n. Takový případ nám Borel-Cantelliho lemma rychle vyřeší, hlavně proto, že se jedná o nezávislé jevy. Ale vzhledem k tomu, že pro jeho použití je třeba splnit vcelku striktní podmínky, tak nám ve spoustě dalších případů pomoci neumí.

Spoustě matematikům tedy připadalo toto lemma nedostatečné a po mnoho let se pokoušeli o jeho vylepšení. Několika z nich se určitým způsobem povedlo podmínky zeslabit, s tím se však pojí, že výsledkem je odhad pravděpodobnosti. Mezi takové inovace se řadí i Kochenova-Stoneova nerovnost. Ta spatřila světlo světa v 70. letech 20. století a využívá pomocné tvrzení opřené o vlastnosti středních hodnot a jeho důsledku. Oslabená podmínka, kterou tvrzení uvádí, se však v praxi těžko ověřuje, proto se ještě předkládá postačující podmínka, jež je pro nás dostupnější.

Na následujích stránkach první kapitoly lze tedy najít podrobněji popsané Borel-Cantelliho lemma společně s důkazem a několika příklady na jeho použití.

Druhá kapitola se už věnuje samotné Kochenově-Stoneově nerovnosti spolu s důkazem. Dále je zde uvedena její alternativa také s důkazem, která se na danou problematiku dívá z trochu jiného úhlu, ale dochází k totožnému výsledku. Poslední část druhé kapitoly dokazuje, že jedno z nejnovějších zobecnění Kochenovy-Stoneovy nerovnosti je vlastně jeho jednoduchý důsledek.

Třetí kapitola uvádí několik příkladů, které lze vyřešit pomocí Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, kdy jsou k řešení použity obě dokázaná tvrzení. Zároveň se zde znovu objevuje jeden příklad z první kapitoly pro srovnání náročnosti výpočtu.

1. Úvod do 0-1 zákonů

1.1 Borel-Cantelliho lemma

V prvních desetiletích dvacátého století přišli Émile Borel a Francesco P. Cantelli s lemmatem o posloupnosti náhodných jevů ze σ-algebry $\mathcal{A}$. Lemma můžeme rozdělit na dvě části, kdy jedna část pracuje jen s posloupností náhodných jevů a druhá část počítá dokonce s nezávislostí jevů.

Jako první si zavedeme následující značení.

Značení. Mějme A_1, A_2,... náhodné jevy z $\mathcal{A}$. Pak následující množiny jsou také z $\mathcal{A}$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n \text{ a } \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n.$$

Z rovností výše nám vyplývá, že $\limsup_{n\to\infty} A_n$ je množina elementárních jevů, které jsou prvkem nekonečně mnoha z jevů A_n. Na druhou stranu $\liminf_{n\to\infty} A_n$ značí množinu elementárních jevů, které jsou prvkem všech až na konečně mnoho z jevů A_n.

Lemma 1 (Borel-Cantelli I.část)**.** *Buďte A_1, A_2,... náhodné jevy, pak platí implikace*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.
Ze značení výše dostáváme

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

Kdy druhá rovnost plyne ze spojitosti pravděpodobností a poslední rovnost využívá předpokladu z tvrzení.

$\square$

Důsledek. Z první části lemmatu získáváme přímý důsledek, který platí za výše daných předpokladů

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) = 1.$$

Poznámka. Z vlastností doplňku plyne, že

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^C = (\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C = \liminf_{n\to\infty} A_n^C.$$

Lemma 2 (Borel-Cantelli II.část)**.** *Buďte A_1, A_2,... nezávislé náhodné jevy, pak platí následující ekvivalence*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Důkaz. Jako první si dokážeme následující implikaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Pokud od důsledku pod první částí Borel-Cantelliho lemmatu odečteme rovnici z tohoto lemmatu, dostaneme následující vztah

$$\left.\begin{aligned} P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) = 1 \\ P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 - P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C).$$

Z faktu, že pravděpodobnost nabývá hodnot z intervalu [0,1], plyne nerovnost

$$\begin{aligned} 0 \leq P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) &= P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C) \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^C) = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

V první rovnosti je limes inferior přepsán analogicky jako limes superior v důkazu první části Borel-Cantelliho lemmatu. Druhá a třetí rovnost plyne ze spojitosti pravděpodobností. Čtvrtá rovnost vychází z předpokladu nezávislosti jevů ($P(\bigcap_{l\in L} A_l) = \prod_{l\in L} P(A_l)$, kdy L je konečná množina) a vlastnosti doplňku.
V nerovnosti $\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k)) \leq \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)}$ využíváme známého odhadu exponenciály $1 - x \leq e^{-x}$ pro každé reálné x. Poslední rovnost vyplývá z předpokladu tvrzení, že $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

Z věty o dvou strážnících dostáváme

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) = 0, \text{ a tedy } P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Máme tím pádem dokázané následující dvě implikace

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1. \end{aligned}$$

Ekvivalence plynou z faktu, že $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ nemůže dosáhnout jiného výsledku než $< \infty$ nebo $= \infty$.

□

Důkazy jsou čerpány ze skript k přednášce Pravděpodobnost a matematická statistika (Prokešová (2023)).

1.2 Jednoduché příklady

Příklad 1. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s normálním rozdělením s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_n \geq 0]$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že X_1, X_2... jsou ze zadání nezávislé jevy, pak i A_n jsou nezávislé, k řešení tedy použijeme druhou část Borel-Cantelliho lemmatu. Navíc víme, že hustota normálního rozdělení s danými parametry je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pak můžeme za pomoci gamma funkce spočítat

$$P(A_n) = P(X_n \geq 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

Dále dosadíme do sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Dostáváme, že $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností 1.

Příklad 2. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s normálním rozdělením s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_1 \geq 0]$.

Řešení. Zde si musíme dát pozor, neboť A_n nejsou nezávislé, nelze tím pádem použít druhou část Borel-Cantelliho lemmatu. Z příkladu výše víme, že $P(A_n) = \frac{1}{2}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Nepomůže nám ani první část lemmatu, budeme muset využít definice

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (X_1 \geq 0)) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X_1 \geq 0) = \lim_{n\to\infty} P(X_1 \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

Neboť v předposlední rovnosti můžeme za $P(X_1 \geq 0)$ dosadit $\frac{1}{2}$.
Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

Příklad 3. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 2$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_n \geq \log n^3]$.

Řešení. Opět máme, že X_1, X_2... jsou nezávislé jevy, stejně tak i A_n. Dále známe hustotu exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 2$, což je $f(x) = 2e^{-2x}$. Následně postupujeme podobně jako v prvním příkladu

$$P(A_n) = P(X_n \geq \log n^3) = \int_{\log n^3}^{\infty} 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_{\log n^3}^{\infty} = \frac{1}{n^6}.$$

Výsledek opět dosadíme do sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} < \infty.$$

Dostáváme, že $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností 0.

Příklad 4. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 2$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_1 \geq \log n^3]$.

Řešení. Stejně jako v Příkladu 2 jevy A_n nejsou nezávislé. Ale vzhledem k tomu, že už máme spočítané $P(A_n) = \frac{1}{n^6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, můžeme příklad dopočítat pomocí první části Borel-Cantelliho lemmatu. Podmínku máme splněnou, takže $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.
Jev A_n tedy nastane pro nekonečně mnoho n s pravděpodobností 0.

Příklad 5. Mějme k dispozici klasickou šestistěnnou kostku. Chceme určit, s jakou pravděpodobností padne dvojka v nekonečně mnoha hodech.

Řešení. Vzhledem k tomu, že máme k dispozici nekonečně mnoho hodů, tak se nabízí myšlenka, že dvojka určitě padne. Zkusíme to však ověřit početně.

Skutečnost, že padne dvojka, je nezávislý jev, předchozí hody očividně ten další nijak neovlivní. Dostáváme tedy nezávislou posloupnost jevů, díky které lze použít druhou část Borel-Cantelliho lemmatu. Pravděpodobnost padnutí dvojky je $\frac{1}{6}$. Můžeme psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} = \infty.$$

Z lemmatu plyne, že $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.
Tím pádem dvojka padne v nekonečně mnoha hodech s pravděpodobností 1, což potvrzuje naši prvotní myšlenku.

Příklad 6. Mějme jednu urnu s jedním bílým míčkem. Po každém vytažení míčku přidáme k černých míčků. Jaká je pravděpodobnost, že nekonečně-krát vytáhneme bílý míček?

Řešení. Označíme $A_n = \mathbf{1}_{[\text{v n-tém tahu vytáhneme bílý míček}]}$ a zajímá nás, jak dopadne $P(\limsup_{n\to\infty}(A_n))$. V prvním tahu se v urně nalézá jediný míček a navíc bílý, takže pravděpodobnost jeho vytažení je 1.

Pro druhý tah už máme v urně k+1 míčků, takže $P(A_2) = \frac{1}{k+1}$.

Ve třetím tahu se pravděpodobnost změnila na $P(A_3) = \frac{1}{2k+1}$.
Dostáváme tedy, že $P(A_n) = \frac{1}{nk+1}$. Můžeme obecně psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nk+1} = \infty.$$

Řada diverguje, použijeme druhou část Borel-Cantelliho lemmatu, tedy
$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

2. Zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu

2.1 Kochenova-Stoneova nerovnost

Vzhledem k tomu, že Borel-Cantelliho lemma už tu s námi je pár desítek let, tak se několik matematiků snažilo dosáhnout jeho vylepšení. V roce 1964 publikovali Charles Stone a Simon Kochen (Stone a Kochen (1964)) zobecnění Borel-Cantelliho lemmatu, na které se v této kapitole pokusíme podívat podrobněji. Kochen a Stone přišli s myšlenkou, že by se lemma dalo zpřesnit, pokud bychom uvažovali náhodné veličiny $X_n/\mathbb{E}X_n$, kdy X_n označuje počet jevů A_1,...,A_n, které nastanou. Použití této náhodné veličiny přináší velkou výhodu, neboť pokud jsou jevy A_n nezávislé a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverguje, tak pak lze aplikovat silný zákon velkých čísel, takže $\lim_{n\to\infty} X_n/\mathbb{E}X_n = 1$ skoro jistě.

Definice 1. *Konvergence skoro jistě: Nechť X_1, X_2,... jsou náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P). Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje skoro jistě k náhodné veličině X, jestliže*

$$P\bigg(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\bigg) = 1.$$

Definice 2. *Rekurentní jevy: Posloupnost jevů A_1, A_2,... se nazývá systém rekurentních jevů, jestliže existují nezávislé stejně rozdělené kladné celočíselné náhodné veličiny Y_1, Y_2,... takové, že pro jev A_k platí: $Y_1 + Y_2 + ... + Y_j = k$ pro nějaké j.*

Pro lepší představu definice si rozepíšeme, jak by mohlo vypadat několik prvních členů posloupnosti A_1, A_2,... . Důležitou skutečností je, že náhodné veličiny Y_1, Y_2,... jsou kladné a celočíselné. Potom tedy

$$\begin{aligned}
&A_1 = [Y_1 = 1],\\
&A_2 = [Y_1 = 2] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1],\\
&A_3 = [Y_1 = 3] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1],\\
&A_4 = [Y_1 = 4] \cup [Y_1 = 3, Y_2 = 1] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 2] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 1]\\
&\quad \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 3] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2, Y_3 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 2]\\
&\quad \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1].
\end{aligned}$$

Poznámka. Pro systém rekurentních jevů z definice výše platí, že $P(A_m \cap A_k) = P(A_m)P(A_{k-m})$ pro $1 \leq m < k$, z čehož je jasně vidět, že jevy nejsou nezávislé.

Tento vztah lze nahlédnout z rozepsaných členů rekurentní posloupnosti. Označme $p_i = P[Y_l = i]$.
Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= p_1,\\
P(A_2) &= p_2 + p_1^2,\\
P(A_3) &= p_3 + 2p_2p_1 + p_1^3,\\
P(A_4) &= p_4 + 2p_3p_1 + p_2^2 + 3p_2p_1^2 + p_1^4.
\end{aligned}$$

Vezměme například $m = 1$ a $k = 3$, pak by podle poznámky mělo platit následující

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2).$$

Obě části rovnosti si rozepíšeme zvlášť

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_3) &= p_2 p_1 + p_1^3 \\ P(A_1)P(A_2) &= p_1(p_2 + p_1^2) = p_2 p_1 + p_1^3, \end{aligned}$$

vidíme, že levá i pravá strana se rovnají, podobným způsobem bychom postupovali i pro další členy naší posloupnosti.

Ještě než se dostaneme k samotné formulaci a důkazu Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, tak si uvedeme tvrzení, které nám s dokazováním pomůže.

Tvrzení 3. *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost náhodných veličin, kdy každá z veličin má nezápornou střední hodnotu a konečný kladný druhý moment.*
Dále předpokládejme, že $\limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2} > 0$. Pak

i) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \leq 1) > 0$,

ii) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1) > 0$,

iii) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} > 0) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}(X_n)^2}$.

Důkaz. Označme $Y_n = \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$. Pak $\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}\frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} = \frac{\mathbb{E}X_n}{\mathbb{E}X_n} = 1$. Rozptyl bude vypadat následovně $\operatorname{var} Y_n = \mathbb{E}Y_n^2 - (\mathbb{E}Y_n)^2 = \mathbb{E}Y_n^2 - 1 < \mathbb{E}Y_n^2 < \infty$.
Podmínku $\limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2} > 0$ můžeme přepsat jako $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}Y_n^2} > 0$. Pak

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sup_{n \geq n_0} \frac{1}{\mathbb{E}Y_n^2} > \epsilon.$$

Neboli

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \inf_{n \geq n_0} \mathbb{E}Y_n^2 > \frac{1}{\epsilon}.$$

Označíme-li $M = \frac{1}{\epsilon}$, pak platí, že $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 \leq M < \infty$.

Nechť c je kladné číslo a I_n indikátor náhodného jevu $Y_n < c$. Pokud využijeme znalosti střední hodnoty z výpočtu výše, dostáváme nerovnost

$$1 = \mathbb{E}Y_n \leq \mathbb{E}Y_n I_n + \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{c},$$

pomocí které můžeme odhadnout následující výraz

$$\begin{aligned} 1 - \frac{M}{c} &\leq \mathbb{E}Y_n I_n + \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{c} - \frac{\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2}{c} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}I_n Y_n + \frac{\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 + \delta}{c}. \end{aligned}$$

Z matematické analýzy známe

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \mathbb{E}Y_n^2 - \delta \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2.$$

Vzhledem ke skutečnosti, že c může být libovolně velké, lze nerovnost

$$1 - \frac{M}{c} \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}I_n Y_n + \frac{\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n^2 + \delta}{c}$$

přepsat jako

$$1 \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} I_n Y_n).$$

Střední hodnotu a limes superior lze zaměnit na základě Fatouova lemmatu[1]

$$1 \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} I_n Y_n) \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} Y_n),$$

tím pádem dostáváme

$$0 \leq P(\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq 1) = P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1).$$

Co by se ale stalo, kdyby nastalo $P(\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq 1) = 0$? Pak by nutně muselo platit, že

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n < 1 \to \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} Y_n) < 1,$$

což je v přímém rozporu s odhadem $1 \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} Y_n)$, který jsme získali výše. Víme, že $\mathbb{E}Y_n = 1$, není tedy možné, aby střední hodnota $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n$ byla menší. Proto platí

$$0 < P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1).$$

A tím máme dokázaný bod ii) z tvrzení.
Bod i) plyne víceméně analogicky, jen dále označíme $\mathbb{E}Y_n^2 = T < \infty$ pro nějaké kladné T. Pak můžeme psát

$$1 + \frac{T}{c} = \mathbb{E}Y_n + \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{c} \geq \mathbb{E}Y_n \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n),$$

kdy jsme opět využili Fatouova lemmatu. Platí tedy

$$0 \leq P(\liminf_{n\to\infty} Y_n \leq 1) = P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \leq 1).$$

Nula však opět nemůže nastat, protože pak by stejně jako u důkazu bodu ii) došlo k následujícímu sporu

$$\liminf_{n\to\infty} Y_n > 1 \to \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n) > 1,$$

přičemž víme, že $1 \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n)$ pro nějaké libovolně velké c.

[1] Fatouovo lemma: Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou nějaké nezáporné měřitelné funkce na X, pak $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Zbývá nám dokázat bod iii). Zjevně $\mathbb{E}I_nY_n < c$, a proto platí nerovnost $\mathbb{E}Y_n(1-I_n) = 1 - \mathbb{E}I_nY_n \geq 1 - c$. Pak pro $0 < c < 1$ a z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostáváme, že

$$(1-c)^2 \leq (\mathbb{E}Y_n(1-I_n))^2 \leq \mathbb{E}Y_n^2\mathbb{E}(1-I_n)^2 = \mathbb{E}Y_n^2\mathbb{E}(1-I_n) = \mathbb{E}Y_n^2 P(Y_n \geq c).$$

Neboli ze značení z první kapitoly

$$\begin{aligned} P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq c) &= P(\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq c) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} Y_n \geq c) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} Y_n \geq c) \geq \limsup_{n\to\infty} P(Y_n \geq c) \\ &\geq (1-c)^2 \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}Y_n^2} = (1-c)^2 \limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2}. \end{aligned}$$

A c může být libovolně malé, zvolíme ho tedy blízko nule, čímž je dokázán bod iii).

□

Důsledek. Nechť předpoklady výše platí. Dále předpokládejme, že $\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$ a $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$ jsou konstanty skoro jistě. Pak

iv) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \leq 1) = 1$,

v) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \geq 1) = 1$.

Pokud nemáme nezávislé náhodné jevy a platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, tak nám Borel-Cantelliho lemma vůbec nic neřekne. Kochenova-Stoneova nerovnost se tento problém snaží řešit a alespoň odhaduje, s jakou pravděpodobností nastane jev pro nekonečně mnoho n.

Tvrzení 4 (Kochenova-Stoneova nerovnost)**.** *Nechť $A_1, A_2,...$ je systém rekurentních jevů. Dále nechť $m_1, m_2,...$ je striktně rostoucí posloupnost kladných čísel a nechť N(n) označuje počet jevů $A_{m_1},..., A_{m_n}$, které nastanou. Jestliže*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{m_n}) = \infty$$

a

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_j-m_i})}\right) > 0, \tag{2.1}$$

pak skoro jistě platí

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{N(n)}{\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k})}\right) \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{N(n)}{\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k})}\right). \tag{2.2}$$

Ještě než bude předveden důkaz Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, tak uvedeme znění Hewittova-Savageova 0-1 zákonu, který je v důkazu využíván.

Tvrzení 5 (Hewittův-Savageovův 0-1 zákon). *Nechť C=(C_1, C_2,...) je náhodná posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin a $\mathcal{S}$ je symetrická množina, kterou definujeme jako $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$: p(S)=S pro každou konečnou permutaci p$\}$. Pak P(C=S) $\in \{0{,}1\}$ pro každou $S \in \mathcal{S}$.*

A nyní už následuje samotný důkaz Tvrzení 4.

Důkaz. (Kochenova-Stoneova nerovnost) Nechť $N(n) = X_n$ z Tvrzení 3. Pak

$$\mathbb{E}X_n = \sum_{1<k<n} P(A_{m_k}) \text{ a } \mathbb{E}X_n^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} P(A_{m_i} \cap A_{m_j}).$$

Jevů, které nastanou, bude nekonečno právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$. Pak $\limsup_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}X_n)^2}{\mathbb{E}X_n^2} > 0$ můžeme přepsat jako $\limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{1<k<n} P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i,j\leq n} P(A_{m_i i} \cap A_{m_j})} > 0$. Tato nerovnost platí, pokud například $P(A_{m_i} \cap Am_j) \leq cP(A_{m_i})P(A_{m_j})$ pro nějakou konečnou konstantu c a všechna i a j.
Platnost tvrzení lze dokázat pomocí Hewittova-Savageova 0-1 zákona aplikovaného na náhodné veličiny $Y_n = \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n}$.

□

Podmínku (2.1) lze v praxi velmi těžko ověřit, proto si uvedeme postačující podmínku.
Mějme libovolné konstanty $\alpha \geq 1$ a $\beta > 0$ takové, že

$$P(A_{m_j - m_i}) \leq \beta P(A_{m_{[(j-i)/\alpha]}}) \text{ } pro \text{ } 1 \leq i \leq j - \alpha. \tag{2.3}$$

Pak (2.3) je postačující podmínka pro (2.1), protože platí

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_j - m_i})}\right)\\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n} P(A_{m_i})\beta P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k}))^2}{\beta\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_k}) + \sum_{k=1}^{n} P(A_{m_k})^2}{\beta\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right)\\
&\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_k})}{\beta\sum_{1\leq i<j-\alpha\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_{\frac{j-i}{\alpha}}})}\right) = \frac{2}{\beta} > 0.
\end{aligned}$$

Pokud dále přepokládáme, že $P(A_k)$ je asymptoticky ekvivalentní s **nerostoucí** funkcí k pro $k \longrightarrow \infty$, tj. $P(A_k)$ se chová podobně jako k, pak postačující podmínkou bude existence kladné konstanty α, která splňuje

$$m_j - m_i \geq m_{\frac{(j-i)}{\alpha}} \text{ pro } 1 \leq i \leq j - \alpha. \tag{2.4}$$

Podmínka (2.4) platí, jestliže m_n je n-té prvočíslo. Abychom si toto dokázali, musíme si uvědomit, že podmínka (2.4) je, pokud položíme j=$\pi(x+y)$, i= $\pi(y)$ a $\frac{j-i}{\alpha} = \pi(x)$, implikovaná následujícím

$$\pi(x+y) - \pi(y) \leq \alpha\pi(x), \text{ kdy } x \geq 2, \tag{2.5}$$

kde $\pi(x)$ označuje počet prvočísel $\leq x$. Z nejjednoduššího odhadu prvočísel existuje kladná konstanta c_1 taková, že

$$\pi(x) \geq \frac{c_1 x}{\log x}, \text{ kdy } x \geq 2.$$

Selbergovo síto nám dává další odhad s kladnou konstantou c_2

$$\pi(x+y) - \pi(y) \leq \frac{c_2 x}{\log x}, \text{ kdy } x \geq 2.$$

Z těchto dvou odhadů dostáváme podmínku (2.5)

$$\pi(x+y) - \pi(y) \leq \frac{c_2 x}{\log x} \leq \frac{c_2}{c_1}\pi(x) \Rightarrow \alpha = \frac{c_2}{c_1}.$$

Pokud platí

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{N(n)}{\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k})}\right) \text{ s.j. a } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{m_n}) = \infty,$$

pak i $\limsup_{n\to\infty} N(n) = \infty$ skoro jistě.

2.2 Alternativní zápisy K-S nerovnosti

Ještě dříve než Kochen a Stone vydali své výsledky maďarský matematik Paul Erdös s Kai Lai Chungem v roce 1952, čímž se řadí mezi první, kteří se o nějaké vylepšení pokusili. Vzhledem k tomu, že byl P.Erdös velmi činný autor, tak se k Borel-Cantellimu lemmatu vyjádřil ještě o sedm let později společně s Alfrédem Rényim. Nyní se však podíváme na jeho výsledek společné práce s K.L.Chungem, který je zmíněn v článku od Jia-An Yana (Yan (2006)). Tato nerovnost nám bude užitečná pro alternativní důkaz Kochenovy-Stoneovy nerovnosti.

Tvrzení 6 (Chung-Erdösova nerovnost)**.** *Nechť $\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ je posloupnost jevů. Pak*

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i \cap A_k)}. \tag{2.6}$$

Důkaz. Označme $X_k = \mathbf{1}_{A_k}$ a $Y_n = \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$. Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti[2] plyne

$$\left(\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right)^2 = \left(\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k)(Y_n)\right)^2 \leq \mathbb{E}(Y_n)^2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2$$
$$\leq \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 \leq P(\sum_{k=1}^{n} X_k > 0)\mathbb{E}\left((\sum_{k=1}^{n} X_k)^2\right).$$

[2]Cauchy-Schwarzova nerovnost: Mějme dvě náhodné veličiny Y a Z.
Pak $\mathbb{E}|ZY| \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)}$.

Vzhledem k tomu, že $P(\sum_{k=1}^{n} X_k > 0) = P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k)$, tak platí

$$\frac{\left(\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right)^2}{\mathbb{E}\left((\sum_{k=1}^{n} X_k)^2\right)} \leq P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i \cap A_k)}.$$

□

Poznámka. Náhodné veličiny označujeme jako negativně korelované, pokud jejich korelační koeficent nabývá záporných hodnot na intervalu [-1,0). Korelační koeficient pro náhodné veličiny X, Y definujeme jako

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}X \operatorname{var}Y}}.$$

Následujícím způsobem je Kochenova-Stoneova nerovnost formulována v článku od Jia-An Yana ((Yan, 2006)) i s alternativním důkazem. Ač se jedná o stejný výsledek, tak zápis je překvapivě rozdílný a daný odhad $P(A_n, i.o.)$, což je ekvivaletní zápis $P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$, lze v této interpretaci snadno nahlédnout. I důkaz je značně odlišnější, kdy využívá primárně dvou rovností a Chung-Erdösovy nerovnosti.

Tvrzení 7. *Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost jevů splňující podmínku*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty.$$

Pak

$$P(A_n, i.o.) \geq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)} \right) \tag{2.7}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i A_k)} \right). \tag{2.8}$$

Pokud jsou $\{A_n\}$ po dvou nezávislé či negativně korelované (tj. $P(A_i A_k) \leq P(A_i)P(A_k)$ pro $\forall\ i \neq k$), potom $P(A_n, i.o.) = 1$.

Důkaz. Označme $a_n = (\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2$, $b_n = \sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)$. Pak z předpokladu věty dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Navíc víme z (2.6), že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $b_n \geq a_n$. Dále z (2.6) a z nerovnosti

$$\sum_{i,k=m+1}^{n} P(A_i A_k) \leq \sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k) - \sum_{i,k=1}^{m} P(A_i A_k) = b_n - b_m$$

máme, že pro $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, m je pevné, platí

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k) &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=m+1}^{n} A_k) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=m+1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=m+1}^{n} P(A_iA_k)} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{m} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) - \sum_{i,k=1}^{m} P(A_iA_k)} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_m})^2}{b_n - b_m} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n - 2\sqrt{a_m a_n} + a_m}{b_n - b_m} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{a_m}}{\sqrt{a_n}} + \frac{a_m}{a_n}}{1 - \frac{b_m}{b_n}} \right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}.
\end{aligned}
$$

Pošleme-li nyní $m \to \infty$, získáme nerovnost (2.7).
Z předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ a dvou následujícíh rovností

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \right)^2 = 2 \sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2, \tag{2.9}
$$

$$
\sum_{i,k=1}^{n} P(A_kA_i) = 2 \sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \tag{2.10}
$$

plyne následující

$$
\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \right) = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \right).
$$

Budeme dál upravovat výraz v limes superior a využijeme z diskuze výše, že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

$$
0 \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \right) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{b_n} = 0. \tag{2.11}
$$

Tedy z věty o dvou strážnících z matematické analýzy dostáváme

$$
\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \right) = 0.
$$

Dále nám pomůže výše zmíněná rovnost (2.10)

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k)}} \right).
\end{aligned}
$$

Člen $\limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_iA_k)}\right)^{-1}$ můžeme rozepsat jako

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_iA_k)}}\right)\\
&=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_iA_k)+\sum_{k=1}^n P(A_k)-\sum_{k=1}^n P(A_k)}{2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_iA_k)+\sum_{k=1}^n P(A_k)}\right)\\
&=\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)}\right)=1,
\end{aligned}$$

protože z (2.11) víme, že $\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)}\right)=0$.

Dohromady dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^n P(A_iA_k)}\right)=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_iA_k)}\right),$$

čímž máme dokázanou rovnost (2.8).

Pokud jsou jevy po dvou nezávislé nebo negativně korelované, tak je snadné nahlédnout, že $P(A_n, i.o.)=1$

$$\begin{aligned}
P(A_n, i.o.)&\ge\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_iA_k)}\right)\\
&\ge\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}\right)=1\Rightarrow P(A_n, i.o.)=1.
\end{aligned}$$

Tato podmínka je značně slabší než nezávislost jevů, je zde tedy patrné určité vylepšení oproti Borel-Cantellimu lemmatu, které vyžaduje striktní nezávislost.

□

Poznámka. Jak spolu souvisí Trvzení 4 a Tvrzení 7?
Vidíme, že podmínka $\sum_{n=1}^\infty P(A_n)=\infty$ se objevuje v téměř stejné formě v obou tvrzeních.
Ve Tvrzení 7 chybí ekvivalentní podmínka k

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\le k\le n} P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\le i<j\le n} P(A_{m_i})P(A_{m_j-m_i})}\right)>0.$$

Ale když využijeme znalosti rovnice (2.9), tak dostáváme

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}\right)\\
&=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)+\sum_{k=1}^n P(A_k)^2}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}\right)\\
&=2+\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)^2}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)}\right)>0.
\end{aligned}$$

Nerovnost (2.7) je analogií k Tvrzení 3 iii). Protože pokud platí

$$\sum_{n=1}^\infty P(A_{m_n})=\infty,$$

tak z

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{N(n)}{\sum_{1\le k\le n}\ P(A_{m_k})}>0\right)\geq\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\le k\le n}\ P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\le i<j\le n}\ P(A_{m_i}A_{m_j})}\right)$$

plyne, že

$$P(N(n),i.o.)\geq\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{1\le k\le n}\ P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\le i<j\le n}\ P(A_{m_i}A_{m_j})}\right).$$

Poznámka. K-S nerovnost můžeme interpretovat i následujícím způsobem: Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost jevů splňující podmínku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ P(A_n)=\infty\ a\ \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{\sum_{1\le m,n\le k}\ P(A_m\cap A_n)}{(\sum_{n=1}^{k}\ P(A_n))^2}\right)<\infty.$$

Pak pravděpodobnost, že $\{A_n\}$ nastane nekonečněkrát často, je kladná.

2.3 Zobecnění Valentina V. Petrova

Borel-Cantelliho lemma zůstalo aktuální i v následujích letech, obzvláště zaujalo ruského matematika Valentina V. Petrova. V roce 1990 vydal o lemmatu článek společně s A.I. Martikainenem zabývající se nutnými a postačujícími podmínkami pro $P(A_n,i.o.)=\alpha,\alpha\in[0{,}1]$, kde $\sum P(A_n)=\infty$. O dvanáct let později publikoval práci (Petrov (2002)), která zobecňuje verzi Borel-Cantelliho lemmatu od Paula Erdösa a Alfréda Rényiho. Vylepšil tedy už vylepšené, ale ani to profesorovi na Petrohradské státní univerzitě nestačilo. Dva roky poté přichází s novým zobecněním B-C lemmatu, kdy část dřívějších zobecnění jsou speciálními případy výsledku V.V.Petrova (Petrov (2004)). A na toto poslední zobecnění se zaměříme v následující podkapitole.

Jako první si uvedeme, jak vypadá výsledek prvního článku od Petrova.

Tvrzení 8 (Petrov I.)**.** *Nechť $A_1,A_2,...$ je posloupnost jevů splňujících podmínku*

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$$

a

$$P(A_kA_j)\leq CP(A_k)P(A_j)$$

pro všechna $k,j>L$ taková, že $k\neq j$ a pro nějaké kladné konstanty $C\geq1$ a L. Pak platí

$$P(\limsup_{n\to\infty}A_n)\geq1/C.$$

Důsledek. Pokud se $C=1$, pak dostáváme předchozí tvrzení v následujícím tvaru: Nechť $A_1,A_2,...$ je posloupnost jevů splňujících podmínku

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$$

a

$$P(A_kA_j) \leq P(A_k)P(A_j) \tag{2.12}$$

pro všechna k,j taková, že $k \neq j$. Pak platí

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq 1.$$

Pokud jsou navíc dané jevy po dvou nezávislé, tak dostáváme v (2.12) rovnost.

Poznámka. Kochenova-Stoneova nerovnost implikuje V.V.Petrovovo zobecnění, což samotný Petrov neuvádí, ale provádí vlastní důkaz, který K-S nerovnosti přímo nevyužívá. Na propojení poukázal ve svém článku Jia-An Yan(Yan (2006)). Že se opravdu jedná o důsledek K-S nerovnosti, je ukázáno v následujcím důkazu společně se zněním druhého Petrovova vylepšení.

Tvrzení 9 (Petrov II.)**.** *Nechť* $\{A_n, n \geq 1\}$ *je taková posloupnost jevů, že platí* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. *Nechť* H *je reálná konstanta. Položme*

$$\alpha_H = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}\Big(P(A_iA_k) - HP(A_i)P(A_k)\Big)}{\Big(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)^2}.$$

Pak $P(A_n, i.o.) \geq \frac{1}{H+2\alpha_H}$.

Důkaz. K důkazu použijeme nám už známé dvě rovnosti

$$2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) = \sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) - \sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

$$2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2.$$

Můžeme psát

$$\begin{aligned}
2\alpha_H &= 2\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}(P(A_iA_k) - HP(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}\\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_iA_k) - 2H\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}\\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - H(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2 + H\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} - H + \frac{H\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}\right).
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy následující vztah, neboť H se odečtou

$$H + 2\alpha_H = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} + \frac{H\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}\right).$$

Z předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ plyne, že

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} = 0.$$

Ze vztahu $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)^2$ a předpokladu tvrzení máme

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{H\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} &= \liminf_{n\to\infty} \frac{H\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{H\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{H}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pokud vše spojíme dohromady, tak dostáváme

$$H + 2\alpha_H = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2},$$

což lze přepsat jako

$$\frac{1}{H+2\alpha_H} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k)}.$$

Máme tedy dokázáno, že Tvrzení 7 implikuje Tvrzení 9.

□

Můžeme ještě ověřit, že pro nezávislé jevy dostaneme stejný výsledek jako při použití Borel-Cantelliho lemmatu.
Předpokládejme, že $\{A_n, n \geq 1\}$ je posloupnost nezávislých jevů, pro které platí $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Pak nastávají rovnosti

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}(P(A_iA_k) - HP(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}(P(A_i)P(A_k) - HP(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n}((1-H)P(A_i)P(A_k))}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{(1-H)\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2}.
\end{aligned}$$

Díky tomu, že předpokládáme nezávislost jevů, můžeme psát

$$2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{i,k=1}^{n} P(A_iA_k) = (\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2.$$

Tedy

$$2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) = (\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 1).$$

Víme, že

$$2 \sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) \geq 0,$$

z toho plyne

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 1) \geq 0.$$

Pro dostatečně velké n a z předpokladu věty platí

$$2 \sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 1) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2.$$

Dostáváme, že výraz $\sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2$ je vůči $2\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)$ zanedbatelný, takže

$$\alpha_H = \liminf_{n\to\infty} \frac{(1-H)\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{2\sum_{1\leq i<k\leq n}\ P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)^2} = \frac{1-H}{2}.$$

Celkově tedy máme

$$P(A_n, i.o.) \geq \frac{1}{H + 2\frac{1-H}{2}} = 1,$$

což je v souladu s výsledky Borel-Cantelliho lemmatu.

Výše jsem si ukázali, že pro nezávislé jevy se $\frac{1}{H+\alpha_H}$ rovná 1. Ale vzhledem k tomu, že hodnota α_H je závislá na konstantě H, tak její volbou lze ovlivňovat výsledek $\frac{1}{H+\alpha_H}$. Můžeme se snažit o optimalizaci výsledku, tedy hledáme takovou konstantu H, aby byla pravá strana co nejvyšší.

3. Příklady

Následující dva příklady uvádějí Simon Kochen a Charles Stone přímo ve svém článku. Napřed si však zadefinujeme jednoduchou náhodnou procházku, kterou v obou příkladech využívají.

Definice 3. *Jednoduchá náhodná procházka: Nechť X_1, X_2,... je iid náhodná posloupnost a uvažujme částečné součty $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathbb{N}$. Pak posloupnost $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ nazýváme náhodnou procházkou. Jestliže náhodné veličiny X_i nabývají pouze hodnot $\{-1,1\}$, dostáváme jednoduchou náhodnou procházku.*

Příklad 7. Nechť A_k je takový jev, že jednoduchá náhodná procházka v jednodimenzionálním prostoru se nachází v počátečním stavu v čase $2k$. Dále předpokládajme, že A_k tvoří systém rekurentních jevů a $P(A_k) \sim (\pi k)^{-1/2}$.

Řešení. Je-li m_n n-té prvočíslo, pak

$$\sum_{n\geq 1} P(A_{m_n}) \sim \sum_{n\geq 1} (\pi m_n)^{-1/2} = \infty.$$

Máme tedy splněnou první podmínku Kochenovy-Stoneovy nerovnosti. Druhou můžeme získat následovně

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n} P(A_{m_k}))^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_{m_i})P(A_{m_j - m_i})} \right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\sum_{1\leq k\leq n} (\pi m_k)^{-1/2})^2}{\sum_{1\leq i<j\leq n} (\pi m_i)^{-1/2}(\pi m_j - \pi m_i)^{-1/2}} \right) > 0. \end{aligned}$$

Tedy jednoduchá náhodná procházka je v počátečním stavu v čase $2p$ pro nekonečně mnoho prvočísel p skoro jistě.

Poznámka. Ten samý výsledek dostaneme ve dvoudimenzionálním prostoru, kde $P(A_k) \sim (\pi k)^{-1}$.

Příklad 8. Nechť A_k je takový jev, že jednoduchá náhodná procházka v trojdimenzionálním prostoru prochází bodem $(k,0,0)$. Pak $P(A_k) \sim ck^{-1}$ pro nějakou kladnou konstantu c. Jevy A_k sice nejsou rekuretní, ale splňují nerovnost

$$P(A_i \cap A_j) \leq (P(A_i) + P(A_j))P(A_{j-i}), 1 \leq i < j.$$

Buď m_n n-té prvočíslo. Pak je podmínka (2.1) z Tvrzení 4 platná. Z Hewittova-Savageova 0-1 zákona je splněn důsledek Tvrzení 3, takže platí (2.2). Obecně tedy náhodná procházka navštíví bod $(p,0,0)$ pro nekonečně mnoho prvočísel p skoro jistě.

Znovu uvedeme Příklad 2 z první kapitoly a podíváme se, jestli by se dal spočítat pomocí Kochenovy-Stoneovy nerovnosti.

Příklad 9. Nechť X_1, X_2... je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s normálním rozdělením s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností pro nekonečně mnoho n nastane jev $A_n = [X_1 \geq 0]$.

Řešení. Využijeme toho, že známe $P(A_n) = \frac{1}{2}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Máme splněnou první podmínku. Zkusíme třeba tentokrát využít Tvrzení 7

$$\begin{aligned} P(A_n, i.o.) &\geq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} \ P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} \ P(A_iA_k)}\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2})^2}{\sum_{i,k=1}^{n} \ \frac{1}{2}}\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{4}}{\frac{n^2}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dostáváme, že jev A_n nastane pro nekonečně mnoho n alespoň s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Vidíme, že výpočet je značně jednodušší než při použití definice, jedná se však odhad.

Příklad 10. Pro zajímavost si ukážeme, jak nám vztah z poznámky pod definicí rekurentních jevů dokáže značně zjednodušit výpočty. Vypsání možností, které můžou nastat pro první tři jevy rekurentní posloupnosti, je vcelku jednoduché, od čtvtého jevu však počet možností prudce narůstá. Zkusme se podívat, čemu by se rovnala $P(A_3 \cup A_5)$.

Řešení. Pro názornost příkladu se podíváme, jaké možnosti mohou nastat pro A_5

$$\begin{aligned} A_5 = {} & [Y_1 = 5] \cup [Y_1 = 4, Y_2 = 1] \cup [Y_1 = 3, Y_2 = 2] \cup [Y_1 = 3, Y_2 = 1, Y_3 = 1] \\ & \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 3] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 2, Y_3 = 1] \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 2] \\ & \cup [Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 4] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 3, Y_3 = 1] \\ & \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 3] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2, Y_3 = 1, Y_4 = 1] \\ & \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 2, Y_4 = 1] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 2] \\ & \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 2, Y_3 = 2] \cup [Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1, Y_5 = 1]. \end{aligned}$$

Označíme-li $p_i = P[Y_l = i]$, pak

$$\begin{aligned} P(A_5) &= p_5 + 2p_4p_1 + 2p_3p_2 + 3p_3p_1^2 + 3p_2^2p_1 + 4p_2p_1^3 + p_1^5 \\ P(A_3) &= p_3 + 2p_2p_1 + p_1^3 \\ P(A_2) &= p_2 + p_1^2. \end{aligned}$$

Tedy

$$P(A_3 \cup A_5) = p_3p_2 + p_3p_1^2 + 2p_2^2p_1 + 3p_2p_1^3 + p_1^5.$$

Vidíme, že celé řešení je časově náročnější. Pokud však použijeme vzorec $P(A_m \cap A_k) = P(A_m)P(A_{k-m})$ pro $1 \leq m < k$, výpočet, jak můžeme vidět, je o dost jednodušší

$$\begin{aligned} P(A_3 \cap A_5) &= P(A_3)P(A_2) = (p_3 + 2p_2p_1 + p_1^3)(p_2 + p_1^2) \\ &= p_3p_2 + p_3p_1^2 + 2p_2^2p_1 + 3p_2p_1^3 + p_1^5. \end{aligned}$$

Závěr

Tato práce v první kapitole shrnula Borel-Cantelliho lemma spolu s několika příklady, které pokryly několik různých situací. Ve druhé kapitole se podrobněji věnovala Kochenově-Stoneově nerovnosti, jež zde byla zformulována v několika variantách spolu s důkazy. Poslední kapitola patří příkladům, na které je aplikována Kochenova-Stoneova nerovnost. Část práce se také věnuje rekurentním jevům.

Kochenova-Stoneova nerovnost oslabuje podmínky Borel-Cantelliho lemma a dává tím prostor pro větší využití. Důkaz používá pomocné tvrzení, které je založené na středních hodnotách a dalšího 0-1 zákonu. Na druhou stranu altertnativa Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, jež je zmíněna v článku od Jia-An Yana, využívá v důkazu Chung-Erdösovu nerovnost a dvě rovnosti, ve kterých figurují sumy pravděpodobností. Oba důkazy i formulovaná tvrzení jsou zcela odlišná, přesto nám dávají stejný výsledek.

S dokonce dvěmi novými variantami i s důkazy přišel také ruský matematik Petrov, jeho druhý výsledek je však jednoduchým důsledkem Kochenovy-Stoneovy nerovnosti, ač on ji ve svém důkazu nevyužívá.

Jak Borel-Cantelliho lemma, tak i Kochenova-Stoneova nerovnost jsou aplikovány na několik příkladů, aby byl vidět rozdíl mezi nimi. Lze si všimnout, že oslabená podmínka dokáže zjednodušit celý výpočet a přesto můžeme dostat velmi přesný odhad.

Seznam použité literatury

PETROV, V. V. (2002). A note the Borel-Cantelli Lemma. *Statistics & Probability Letters 58, page 283-286*.

PETROV, V. V. (2004). A generalization of the Borel-Cantelli Lemma. *Statistics & Probability Letters 67, page 233-239*.

PROKEŠOVÁ, M. (2023). Poznámky k přednášce NMSA202 Pravděpodobnost a matematická statistika. Katedra pravděpodobnosti a matematické statistikyMatematicko-fyzikální fakulta University Karlovy.

STONE, C. a KOCHEN, S. (1964). A note on the Borel-Cantelli Lemma. *Cornell University, Ithaca, New York*.

YAN, J.-A. (2006). A simple proof of two generalized Borel-Cantelli Lemmas. *Émery, M., Yor, M. (eds) In Memoriam Paul-André Meyer. Lecture Notes in Mathematics, vol 1874. Springer, Berlin, Heidelberg*.