

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Girsanovova věta v diskrétním čase

Autor: Tomáš Kremla

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

V práci je studováno, jak lze změnou pravděpodobnostní míry z diskrétního semimartingalu udělat diskrétní martingal. Větám tohoto typu pro spojité procesy, kdy se změnou míry odstraní drift z Itoova procesu, se říká Girsanovova věta. Nejprve je rozebrána existence této nové míry pro semimartingal jen do konečného času N a to pomocí vhodně zkonstruované hustoty vzhl. k původní míře. V další části je studována možnost rozšíření této konstrukce (míry) pro proces na celém \mathbb{N} . Zejména jsou zkoumány podmínky, které zaručí absolutní spojitost této nové míry vzhl. k míře původní a to pro procesy s gaussovským šumem.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Hodnocení náročnosti a přiměřenosti tématu. Bylo téma zpracováno tak, aby bylo splněno zadání práce?

Jde o zajímavé téma, které svou náročností odpovídá bakalářské práci. Vyžaduje nastudování obecných základů diskrétních martingalů a specifických postupů používaných při dokazování Girsanovovy věty. Zadání práce považuji za splněné.

Vlastní příspěvek. Obsahuje práce vlastní příspěvek autora? V čem tento příspěvek spočívá? Je v práci dostatečně specifikován?

Vlastní příspěvek je jasně specifikován v závěru práce. Jde o formulaci a důkaz zobecněné Girsanovovy věty pro potenciálně negaussovské procesy v aditivním tvaru (adaptace podobného přístupu z literatury pro procesy v multiplikativním tvaru), dále formulace a důkaz podmínek pro existenci absolutně spojitě martingalové míry pro procesy s diskrétním časem (existující literatura se zabývá procesy se spojitým časem, teorii tedy bylo třeba adaptovat).

Matematická úroveň. Jaká je matematická úroveň práce? Obsahuje práce rigorózně a korektně zformulovaný matematický text?

Matematická úroveň práce je dle mého názoru velmi vysoká, práce obsahuje rigorózně a korektně zformulovaný matematický text. Všechny kroky jsou pečlivě zdůvodněny a práce je dobře čitelná. Nemnohé chyby jsou spíše drobná opomenutí a nemají vliv na správnost získaných závěrů.

Práce se zdroji. Jsou zdroje správně citovány? Neobsahuje práce doslova zkopírované nebo otrocky přeložené pasáže?

Práce čerpá z několika různých zdrojů, všechny jsou v práci správně citovány. Jen u jednotlivých knih v seznamu literatury chybí město nakladatelství, což je údaj, který se obvykle u knih uvádí. Nejsem si vědom žádných zkopírovaných či otrocky přeložených pasáží.

Formální úprava. Hodnocení formální úpravy práce.

Práce je sepsána srozumitelně a přehledně, je dobře čitelná. Našel jsem jen minimum překlepů. Formální úpravu tedy hodnotím jako výbornou.

PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

1. V Definicí 3 na str. 4 je definováno $\mathbb{E}[X|Y = y] := f(y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^n$. Aby definice byla korektní, nestačí existence $f(y)$, ale potřebujeme také jednoznačnost. Tu ovšem zaručenu nemáme.
2. Ve Větě 2 na str. 4 chybí předpoklad, že Y musí být \mathcal{G} -měřitelná.
3. Příklad na str. 14: Ve formulaci zákona iterovaného logaritmu chybí faktor $1/n$.
4. str. 20, 5. řádek od konce: Je použit anglický přepis “Liptserovy-Shiryaeovy”, zatímco ve zbytku práce je používán český přepis “Lipcer-Širjaev”.
5. Uvažujte proces $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definovaný na nějakém prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ touto rekurzí

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \\ X_{n+1} - X_n &= -\mu X_n + \epsilon_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \mu \in (0, 1), \end{aligned}$$

kde $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je posloupnost nezávislých veličin s rozdělením $N(0, 1)$. Odpovězte na tyto otázky:

- a) Jde o martingal (vzhl. ke kanonické filtraci)?
- b) Najděte hustotu míry \mathbb{P}_N vzhl. k \mathbb{P} , vůči které je tento proces až do času $N \in \mathbb{N}$ martingalem.
- c) Je splněna Novikovova podmínka pro existenci takové hustoty pro celý proces $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ (s nekonečným časovým horizontem)?

ZÁVĚR

Práci považuji za výbornou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Jméno oponenta: Pavel Kříž
Pracoviště: KPMS, MFF UK
Datum: 3.6.2024