



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Oliver Křenek

**Vlastnosti Killingových vektorů v
axiálně symetrických prostoročasech**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Praha 2024

Rád bych poděkoval panu prof. RNDr. Pavlu Krtoušovi, Ph.D. za možnost psát bakalářskou práci pod jeho odborným vedením. Vážím si jeho vytrvalosti a pečlivosti s kterou mi pomáhal bakalářskou práci vylepšovat. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za jejich podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název: Vlastnosti Killingových vektorů v axiálně symetrických prostoročasech

Autor: Oliver Křenek

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V práci se budeme zabývat axiálními symetriemi v maximálně symetrických prostoročasech. Tyto prostoročasy mohou být asymptoticky rozumnou aproximací obecnějších axiálně symetrických prostoročasů obsahujících hmotu lokalizovanou v blízkosti osy symetrie. Bude nás proto zajímat zejména asymptotická oblast daleko od osy. Jelikož de Sitterův prostoročas nemá prostorové nekonečno, budou vhodnými kandidáty pro zkoumání pouze Minkowského a anti-de Sitterův prostoročas.

V celé práci se budeme soustředit hlavně na Killingovy vektory charakterizující rotační a statickou symetrii. Nejdříve popíšeme geometrii Minkowského a anti-de Sitterova prostoročasu, a poté v nich pomocí vhodných souřadnic identifikujeme Killingovy vektory. Abychom mohli zobrazit anti-de Sitterův prostoročas, budeme muset provést jeho kompaktifikaci v prostorových souřadnicích. Naším hlavním cílem bude zkoumat kauzální charakter nalezených Killingových vektorů.

Klíčová slova: metrika, Killingovy vektory, axiálně symetrické prostoročasy, Minkowského prostoročas, anti-de Sitterův prostoročas, asymptotické chování

Title: Properties of Killing vectors in axially symmetric spacetimes

Author: Oliver Křenek

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In this paper, we consider axial symmetries in maximally symmetric spacetimes. Such spacetimes can be a reasonable asymptotic approximation of more general spacetimes with matter localized near the axis of symmetry. Therefore, we will be especially interested in the domain far from the axis. Since the de Sitter spacetime has no spatial infinity, only the Minkowski and anti-de Sitter spacetimes will be the appropriate spacetimes to investigate.

In our work, we will concentrate mainly on the Killing vectors characterizing rotational and static symmetry. First, we will describe the geometry of the Minkowski and anti-de Sitter spacetimes, and then we will identify the Killing vectors using appropriate coordinates. In order to visualize the anti-de Sitter spacetime, we will need to implement its compactification in spatial coordinates. Our main goal will be the study of the causal character of the identified Killing vectors.

Keywords: Metric, Killing vectors, Axially symmetric spacetimes, Minkowski spacetime, Anti-de Sitter spacetime, Asymptotic properties

Obsah

Úvod	2
1 Metrika a Killingovy vektory	3
2 Geometrie Minkowského prostoročasu	5
2.1 Polární souřadnice	5
2.2 Cylindrické souřadnice	6
2.3 Rindlerovy souřadnice	6
2.4 Struktura symetrií Minkowského prostoročasu	8
3 Analýza Killingových vektorů v Minkowského prostoročase	10
3.1 Polární symetrie	10
3.2 Cylindrická symetrie	13
3.3 Boost-rotační symetrie	15
4 Geometrie anti-de Sitterova prostoročasu	19
4.1 Třídídimenzionální prostoročas	19
4.2 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_τ a R_φ	20
4.3 Vizualizace anti-de Sitterova prostoročasu	23
4.4 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x	25
4.5 Struktura symetrií anti-de Sitterova prostoročasu	34
5 Analýza Killingových vektorů v anti-de Sitterově prostoročase	37
5.1 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_τ a R_φ	37
5.2 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x	39
Literatura	45

Úvod

V této práci se budeme zabývat vlastnostmi Killingových vektorů reprezentujících rotační a statickou symetrii v maximálně symetrických prostoročasech.

Nejjednodušší řešení Einsteinových rovnic jsou maximálně symetrické prostoročasy – Minkowského, de Sitterův a anti-de Sitterův prostoročas. Minkowského prostoročas se používá ve Speciální teorii relativity a odpovídá relativistickému spojení euklidovského prostoru a času. Anti-de Sitterův a de Sitterův vesmír analogicky odpovídají spojení hyperbolického (Lobačovského), resp. sférického prostoru s časem.

Obecnější úlohou by bylo zkoumat prostoročasy s axiální a stacionární symetrií obsahující hmotu. Zakřivení prostoročasu vlivem hmoty však výrazně technicky komplikuje analýzu. My se proto zaměříme na jednodušší situaci – zaměříme se zejména na asymptotické chování takových prostoročasů. To znamená, že si budeme představovat, že jsme ve velké vzdálenosti od osy, kolem které je soustředěna hmota. V takové vzdálenosti bude s dobrou přesností prostoročas vakuový a budou přítomny symetrie. Pro většinu známých prostoročasů je takový přístup dobrou aproximací.

Jelikož chceme zkoumat prostorově vzdálené oblasti od centrálně umístěné hmoty, jako dobré aproximace připadají v úvahu zejména Minkowského a anti-de Sitterův prostoročas. De Sitterův prostoročas nemá prostorové nekonečno a proto ho neuvažujeme.

Symetrie jsou reprezentovány Killingovými vektory, a právě jimi se budeme zabývat. Budeme zkoumat jak jednotlivé symetrie, tak i jejich kombinace.

Při získávání znalostí jsme v největší míře vycházeli ze zdroje [1]. Pro konkrétní matematické potřeby jsme studovali zdroj [2] a obecné přehledové materiály tvořily zdroje [3], [4], [5], [6] a [7].

Kapitoly 1, 2 a 4 tvoří přehled známých faktů a k jejich vytvoření jsme využili výše uvedené zdroje. Kapitoly 3 a 5 obsahují vlastní výpočty a jedná se o kapitoly s vlastním přínosem. Vlastní přínos tvoří i všechny obrázky, vypracované v programu Wolfram Mathematica.

Kapitola 1

Metrika a Killingovy vektory

Vzdálenost mezi dvěma body na dvoudimenzionální euklidovské rovině dokážeme spočítat pomocí Pythagorovy věty. Pro body nacházející se v obecném vícedimenzionálním prostoročase je výpočet komplikovanější. Obecný prostoročas může být zakřivený a obsahovat dodatečnou časovou souřadnici. V těchto případech využíváme prostoročasovou metriku, pomocí které dokážeme spočítat vzdálenost bodů v obecném prostoročase.

Prostoročasová metrika je symetrické, nedegenerované tenzorové pole druhého řádu signatury $(-+++)$, které dává do souvislosti souřadnice a vzdálenost. Metrika definuje skalární součin, velikost vektorů a umožňuje tak zavést délky křivek. Souhrnně, metrika definuje geometrii prostoročasu.

Killingovo vektorové pole je generátorem symetrie prostoročasové geometrie. Pokud posouváme metriku podél Killingova vektoru, metrika se nemění. Killingův vektor snadno identifikujeme, pokud podél něj zvolíme jednu ze souřadnic. V takových souřadnicích nebudou metrické koeficienty záviset na příslušné Killingovské souřadnici.

Postup bude takový, že nejprve nalezneme tvar metriky ve vhodných souřadnicích a z něho pak určíme Killingovy vektory. Z jednoho tvaru metriky nedokážeme určit všechny existující Killingovy vektory v daném prostoročase. Podaří se nám určit pouze ty, které budou z konkrétního tvaru metriky „vidět“.

Jako příklad si uveďme metriku plochého čtyřdimenzionálního Minkowského prostoročasu, která má tvar¹

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (1.1)$$

Vidíme, že metrické koeficienty nezávisí na souřadnicích t, x, y, z . Tedy Killingovy vektory, které dokážeme určit z tohoto tvaru, jsou

$$\frac{\partial}{\partial t} , \quad \frac{\partial}{\partial x} , \quad \frac{\partial}{\partial y} , \quad \frac{\partial}{\partial z} . \quad (1.2)$$

Čtyřdimenzionální Minkowského prostoročas má celkem 10 Killingových vektorů. Z metriky (1.1) jsme dokázali určit pouze 4 z nich.

V následujících kapitolách se budeme zabývat Killingovými vektory v Minkowského a anti-de Sitterově prostoročase. Tyto prostoročasy jsou nejjednodušším řešením Einsteinových rovnic. Jsou maximálně symetrické a mají konstantní

¹Pro zjednodušení našich výpočtů budeme v celém textu uvažovat $c = 1$. Důsledkem toho bude, že čas a rozměr budou ve stejných jednotkách.

skalární křivost. Minkowského prostoročas odpovídá relativistickému spojení euklidovského prostoru a času. Je příkladem prostoročasu, kde je Riemannův tenzor křivosti roven nule. Anti-de Sitterův prostoročas je spojením hyperbolického (Lobačovského) prostoru a času. Je to prostoročas se zápornou konstantní skalární křivostí, kterou je plně charakterizován jeho Riemannův tenzor křivosti.

V této práci budeme používat takové souřadnice, které explicitně ukazují axiální symetrii geometrie prostoročasu. Jak jsme již naznačili výše, nejsme schopni určit všechny existující Killingovy vektory v daném prostoročase z jednoho tvaru metriky. Abychom identifikovali všechny, zavedeme dostatečné množství souřadnic.

V celém textu budeme zkoumat zejména symetrie, kombinující časupodobné a rotační Killingovy vektory. Orbyty takových kombinací mohou znázorňovat pohyb spojený s fyzikálním pozorovatelem. U Killingových vektorů určíme jejich kauzální charakter a u vybraných z nich vykreslíme jejich orbitu.

Kapitola 2

Geometrie Minkowského prostoročasu

V této kapitole zavedeme vhodné souřadnice k identifikování Killingových vektorů v Minkowského prostoročase. Minkowského prostoročas je nejjednodušší prostoročas, který je zároveň plochý a maximálně symetrický. Popisuje prostoročas Speciální teorie relativity, tedy prostoročas, ve kterém nejsou žádné zdroje gravitačního pole ani se v něm nešíří žádné gravitační vlny.

2.1 Polární souřadnice

Jako první se budeme zabývat třídimenzionálním prostoročasem. Je to nejjednodušší prostoročas ve kterém jsme schopni nalézt zároveň rotační a časový Killingův vektor. Jejich lineární kombinace dává přesně ten vektor, o který se v naší práci zajímáme. Je to Killingův vektor kombinující časový posun a rotaci okolo počátku (ve čtyřdimenzionálním prostoročasu je to rotace okolo osy). Metrika dává do souvislosti dvě kartézské souřadnice x , y a jednu časovou souřadnici t . Její tvar je

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 . \quad (2.1)$$

V těchto souřadnicích ale explicitně nevidíme rotační symetrii prostoru kolem počátku.

Abychom ji viděli, musíme v prostorových proměných přejít do polárních souřadnic. V nich ρ udává radiální vzdálenost a φ úhel otočení okolo počátku v rovině x - y . Vztahy pro polární souřadnice jsou

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi , & \rho^2 &= x^2 + y^2 , \\ y &= \rho \sin \varphi , & \tan \varphi &= \frac{y}{x} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pomocí těchto vztahů spočítáme bázové kovektory a přepíšeme metriku (2.1) do polárních souřadnic. Metrika ve tvaru

$$g = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 , \quad (2.3)$$

již explicitně ukazuje rotační symetrii. Z rovnice (2.3) dokážeme, dle postupu uvedeného v kapitole 1, určit Killingovy vektory, reprezentující symetrie daného prostoročasu

$$\frac{\partial}{\partial t} , \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (2.4)$$

2.2 Cylindrické souřadnice

Přidáním kvadrátu kovektoru kartézské souřadnice dz^2 k metrice (2.1), získáme čtyřdimenzionální Minkowského prostoročas. V inerciálních souřadnicích má metrika tvar

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (2.5)$$

V tomto prostoročase již je možné získat axiální symetrii okolo osy (nikoliv okolo bodu, jako tomu bylo v třidimenzionálním prostoročase). Z tvaru metriky (2.5) není vidět axiální symetrie prostoru. Stejně jako v předchozí sekci transformujeme prostorovou část do polárních souřadnic. Využijeme opět vztahů (2.2) a získáme tvar

$$g = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 . \quad (2.6)$$

Killingovy vektory, které lze určit z (2.6) jsou

$$\frac{\partial}{\partial t} , \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} , \quad \frac{\partial}{\partial z} . \quad (2.7)$$

Vidíme, že nám oproti Killingovým vektorům z oddílu 2.1 přibyl posun v souřadnici $\frac{\partial}{\partial z}$.

2.3 Rindlerovy souřadnice

V tomto oddílu zavedeme tzv. Rindlerovy souřadnice. Pro přechod do těchto souřadnic jsou relevantní pouze dva směry, transformaci budeme tedy aplikovat pouze ve směrech souřadnic t a z . Začneme s dvoudimenzionální metrikou ve tvaru

$$g = -dt^2 + dz^2 . \quad (2.8)$$

Rindlerovy souřadnice pokrývají prostoročas na čtyřech oblastech. Jednotlivé oblasti mají vlastní transformační vztahy. Prostoročas je rozdělen na 4 oblasti, které se vůči počátku dají nazvat F – future (budoucnost), P – past (minulost), L – left (vlevo) a R – right (vpravo). Toto dělení je graficky znázorněno na obrázku 2.1.

Rindlerovy souřadnice v oblastech F a P

Přechod k Rindlerovým souřadnicím v oblastech F a P dávají vztahy

$$\begin{aligned} t &= \pm b \cosh \beta , \\ z &= \pm b \sinh \beta . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Kladné znaménka u transformačních vztahů odpovídají oblasti F a záporné oblasti P. Ze vztahů (2.9) spočítáme báze kovektory a vyjádříme metriku (2.8) v Rindlerových souřadnicích

$$g = -db^2 + b^2 d\beta^2 . \quad (2.10)$$

V oblastech F a P má metrika stejný tvar. Z (2.10) dokážeme určit jediný Killingův vektor

$$\frac{\partial}{\partial \beta} . \quad (2.11)$$

Rindlerovy souřadnice v oblastech L a R

Oblasti L a R pro nás budou zajímavější, protože v nich je Killingův vektor přizpůsobený souřadnicím časupodobný. To uvidíme z analýzy Killingových vektorů při výpočtu kvadrátu jeho velikosti. Na metriku (2.8) aplikujeme transformační vztahy

$$\begin{aligned} t &= \pm s \sinh \tau, \\ z &= \pm s \cosh \tau, \end{aligned} \quad (2.12)$$

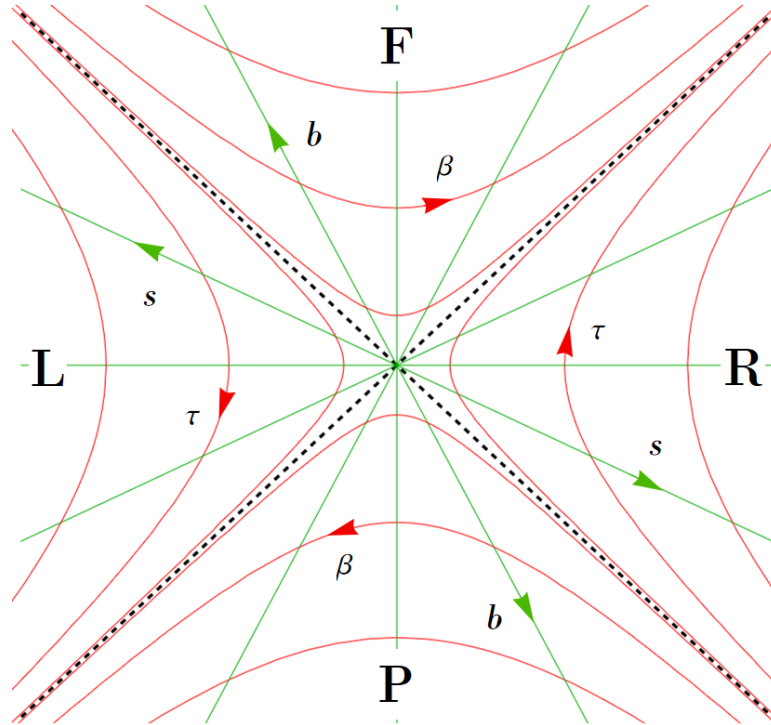
kteří ji převedou do Rindlerových souřadnic v oblastech L a R. Zde záporné znaménko odpovídá oblasti L a kladné oblasti R. Výsledný tvar metriky je

$$g = ds^2 - s^2 d\tau^2. \quad (2.13)$$

Z (2.13) dokážeme určit jediný Killingův vektor

$$\frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.14)$$

Na obrázku 2.1 je rozdělení roviny t - z , na čtyři oblasti, na kterých jsou definovány Rindlerovy souřadnice vztahy (2.9) a (2.12). Hranice mezi oblastmi jsou vykresleny přerušovanou čarou. Z fyzikálního pohledu se jedná o světelné paprsky prolétávající počátkem. V oblastech F a P jsou vykresleny souřadnicové čáry β a b a v oblastech L a R jsou vykresleny souřadnicové čáry τ a s . Souřadnicové čáry β a τ jsou vykresleny červenou barvou a souřadnicové čáry b a s jsou vykresleny zelenou barvou.



Obrázek 2.1: Pokrytí roviny t - z pomocí Rindlerových souřadnic. Na obrázku jsou znázorněny oblasti F – future (budoucnost), P – past (minulost), L – left (vlevo) a R – right (vpravo). Hranice oblastí jsou vykreslené přerušovanými čarami a znázorňují světelné paprsky prolétávající počátkem. V oblastech jsou vykreslené souřadnicové čáry β a τ červenou barvou a souřadnicové čáry b a s jsou vykresleny barvou zelenou.

Rindlerovy a polární souřadnice v oblastech F a P

Metrika ve tvaru (2.10) nezachycuje axiální symetrii (rotační symetrii kolem osy) prostoročasu. Axiální symetrii vytvoříme přidáním kvadrátů kovektorů kartézských souřadnic dx^2 , dy^2 a jejich následnou transformací do polárních souřadnic. Na metriku

$$g = -db^2 + b^2d\beta^2 + dx^2 + dy^2 \quad (2.15)$$

aplikujeme transformační vztahy (2.2) a získáme

$$g = -db^2 + b^2d\beta^2 + d\rho^2 + \rho^2d\varphi^2 . \quad (2.16)$$

Tvar (2.16) již definuje axiální symetrii prostoročasu. Dokážeme z něj určit Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial\beta} , \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} . \quad (2.17)$$

Ovšem, jak uvidíme dále, v těchto oblastech jsou oba tyto Killingovy vektory prostorupodobné.

Rindlerovy a polární souřadnice v oblastech L a R

Aplikujeme stejný postup jako výše. K metrice (2.13) přidáme kvadráty kovektorů kartézských souřadnic dx^2 a dy^2 . Tím získáme čtyřdimenzionální metriku ve tvaru

$$g = ds^2 - s^2d\tau^2 + dx^2 + dy^2 . \quad (2.18)$$

Souřadnice x a y transformujeme pomocí (2.2) a dostaneme

$$g = ds^2 - s^2d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2d\varphi^2 . \quad (2.19)$$

Metrika (2.19) již generuje axiální symetrii prostoročasu. Určíme z ní Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial\tau} , \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} . \quad (2.20)$$

Jak si ověříme v další kapitole, Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\tau}$ je časupodobný a Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ reprezentuje rotační symetrii okolo osy z .

2.4 Struktura symetrií Minkowského prostoročasu

Vektory

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial\tau} \quad (2.21)$$

odpovídající souřadnicím β a τ , zavedených na obrázku 2.1, globálně tvoří jeden Killingův vektor definovaný v celém Minkowského prostoročase. Odpovídající symetrie takového Killingova vektoru se nazývá boost – a v tomto případě ji značíme B_z .

Pro tuto symetrii je typické, že ve dvoudimenzionálním prostoročase obsahuje „bifurkační bod“, na obrázku 2.1 je tento bod v počátku, kde se protínají světelné

paprsky. Ve třídímníonálním prostoročase by se jednalo o „bifurkační přímku“ a ve čtyřdímníonálním prostoročase o „bifurkační 2-plochu“. Killingovské souřadnice přizpůsobené této symetrii nejsou hladké na celém prostoročase, ale rozpadají se na souřadnice na 4 oblastech.

Že se jedná o jeden Killingův vektor, lze dokumentovat tak, že $\frac{\partial}{\partial\beta}$ a $\frac{\partial}{\partial\tau}$ vyjádříme v inerciálních souřadnicích t a z . Ve všech oblastech (F, P, L, R) získáme, pro tento boostový Killingův vektor, stejné vyjádření

$$B_z = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} . \quad (2.22)$$

Ve vícedímníonálním prostoročase můžeme boost podobným způsobem zavést i ve směrech B_x a B_y . Boost je pohyb po pseudokružnici, který kombinuje prostor a čas. Příslušná symetrie popisuje změnu rychlosti inerciální soustavy v příslušném směru.

Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ reprezentuje symetrii rotace R_z okolo osy z . Jeho vyjádření v inerciálních souřadnicích je

$$R_z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} . \quad (2.23)$$

Analogicky lze ve čtyřdímníonálním prostoročase zavést R_x a R_y .

Pokud k symetriím uvedeným v tomto oddíle přidáme translace T_t , T_x , T_y a T_z – viz (1.2), celkem získáme 10 symetrií čtyřdímníonálního Minkowského prostoročasu. Jsou jimi: T_t , T_x , T_y , T_z , R_x , R_y , R_z , B_x , B_y a B_z . Ve třídímníonálním Minkowského prostoročase je symetrií pouze 6, jsou jimi: T_t , T_x , T_y , R_z , B_x a B_y . Tyto základní Killingovy vektory nazveme „bázové“, lineární kombinací „bázových“ Killingových vektorů, lze vytvořit všechny další Killingovy vektory.

Kapitola 3

Analýza Killingových vektorů v Minkowského prostoročase

V této kapitole budeme analyzovat Killingovy vektory, které jsme našli v kapitole 2 pomocí polárních, cylindrických a Rindlerových souřadnic. Budeme zkoumat kauzální charakter „bázových“ Killingových vektorů i jejich lineárních kombinací.

3.1 Polární symetrie

Z rovnice (2.3) jsme určili Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.1)$$

K analýze kauzálního charakteru vektorů spočítáme kvadrát jejich velikosti¹

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = -1, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 = \rho^2. \quad (3.3)$$

Z těchto výsledků můžeme určit jejich prostoročasový charakter. Vidíme, že kvadrát velikosti Killingova vektoru $\frac{\partial}{\partial t}$ je záporný, z toho vyplývá, že vektor je časopodobný. Na druhou stranu kvadrát velikost $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ je kladný, a tedy tento Killingův vektor je prostorupodobný.

Z Killingových vektorů (3.2) a (3.3) můžeme jejich lineární kombinací vytvořit nový Killingův vektor. Protože lineární kombinace Killingových vektorů je také Killingův vektor. Této lineární kombinaci přiřadíme parametr ω a vektor pojmenujeme

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.4)$$

¹Kvadrát velikosti Killingova vektoru počítáme pomocí prostoročasové metriky. A to tak, že s pomocí metriky g uděláme skalární součin vektoru se sebou samým. Tedy například $\frac{\partial}{\partial t} \cdot (-dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) \cdot \frac{\partial}{\partial t} = -1$.

Obecně nám nezáleží na přenásobení vektoru ξ libovolnou konstantou. Můžeme zvolit takovou, aby konstanta u časupodobného vektoru byla rovna jedné. V případě Killingova vektoru (3.4) u vektoru $\frac{\partial}{\partial t}$. Parametr ω může nabývat libovolné hodnoty. Můžeme si všimnout, že volbou konstanty u časupodobného vektoru ztratíme pouze případ, kdy se rovná nule. To není problém, protože v naší práci se zajímáme o případy, ve kterých chceme, aby byl časupodobný vektor přítomen. Spočítejme kvadrát velikosti vektoru 3.4,

$$\xi^2 = -1 + \omega^2 \rho^2 . \quad (3.5)$$

Tento kvadrát velikosti je rovný nule v

$$\rho^2 = \frac{1}{\omega^2} . \quad (3.6)$$

Tato rovnice charakterizuje hranici, kde má Killingův vektor světelný (nulový) charakter. Na této hranici je vektor (3.4) tečný k orbitě popisující pohyb rychlostí světla a mění zde svůj prostoročasový charakter z časupodobného na prostorupodobný.

Pokud platí $\xi^2 < 0$, jedná se o časupodobný vektor, kde časová složka přibývá rychleji než-li složka prostorová. Orbita takového Killingova vektoru znázorňuje pohyb podsvětelnou rychlostí. Naopak pro $\xi^2 > 0$ je vektor prostorupodobný, a tedy jeho prostorová složka přibývá rychleji než-li časová. Orbita takového Killingova vektoru charakterizuje pohyb rychlostí nadsvětelnou.

Ze zmíněných nerovnic určíme prostoročasový charakter vektoru

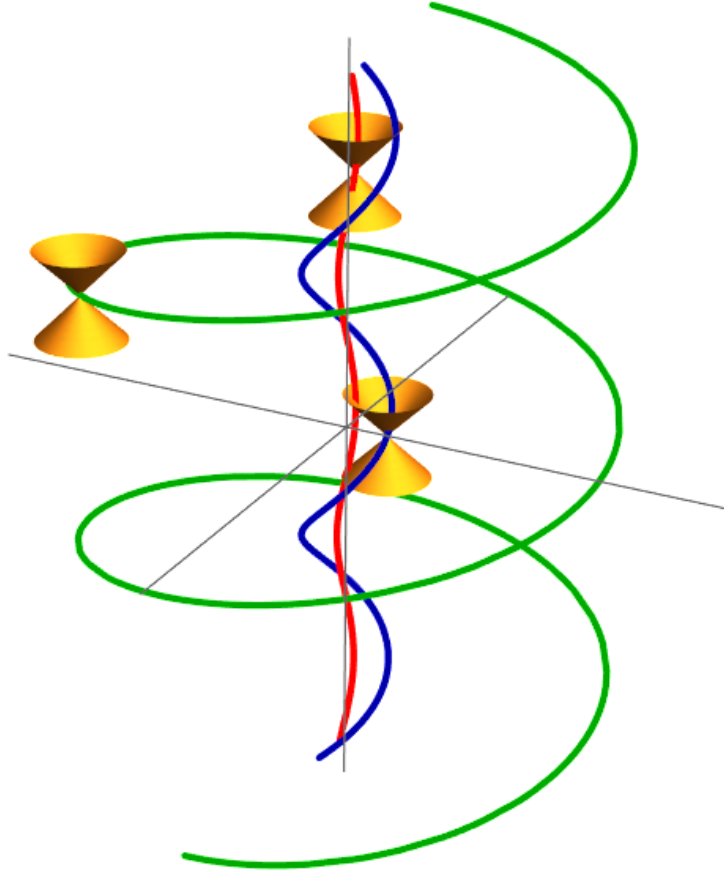
$$\xi^2 < 0 \Leftrightarrow \rho^2 < \frac{1}{\omega^2} , \quad (3.7)$$

$$\xi^2 > 0 \Leftrightarrow \rho^2 > \frac{1}{\omega^2} . \quad (3.8)$$

Pokud je $\omega \neq 0$, potom Killingův vektor (3.4) mění svůj prostoročasový charakter v $\rho = \frac{1}{|\omega|}$ a v této vzdálenosti od osy z je světelný. Ve vzdálenosti $\rho > \frac{1}{|\omega|}$ je Killingův vektor prostorupodobný a nelze ho v této oblasti spojit s fyzikálně se pohybujícím pozorovatelem. Ve vzdálenosti $\rho < \frac{1}{|\omega|}$ je vektor časupodobný a v této oblasti ho lze spojit s fyzikálně se pohybujícím pozorovatelem.

Na obrázku 3.1 jsou znázorněny tři orbity Killingova vektoru (3.4). Na každé je vykreslen světelný kužel, který určuje prostoročasový charakter vektoru. Vývoj červené orbity je časupodobný, vývoj modré orbity je světelný a vývoj zelené orbity má prostorupodobný charakter.

Vidíme, že pro $\rho \rightarrow \infty$ získáme konečnou velikost vektoru ξ pouze v případě, že zvolíme $\omega = 0$. Pro tuto volbu parametru je velikost vektoru záporná, vektor je časupodobný a tedy může být tečný ke světočáře.



Obrázek 3.1: Obrázek tří orbit Killingova vektoru $\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$ pro $\omega \neq 0$. Při růstu ρ budeme mít jednu časupodobnou, jednu světelnou a jednu prostorupodobnou orbitu. Na orbitách jsou vykresleny světelné kužely určující jejich prostoročasový charakter. Červená orbita je časupodobná, modrá je světelná a zelená prostorupodobná.

Killingův vektor ξ v oblasti $\rho < \frac{1}{|\omega|}$ reprezentuje fyzikální pozorovatele rotující kolem osy z . S těmito pozorovateli můžeme spojit souřadnou soustavu. Bude se jednat o soustavu přizpůsobenou Killingovu vektoru ξ . Soustava je zadána vztahy

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t, \\ \tilde{\rho} &= \rho, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi - \omega t.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Z těchto vztahů spočítáme bázové kovektory a přepíšeme metriku (2.3). Metrika nám vyjde nediagonální

$$\tilde{g} = (\omega^2 \tilde{\rho}^2 - 1) d\tilde{t}^2 + d\tilde{\rho}^2 - \omega \tilde{\rho}^2 (d\tilde{t} d\tilde{\varphi} + d\tilde{\varphi} d\tilde{t}) + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\varphi}^2.\tag{3.10}$$

Z metriky určíme Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}.\tag{3.11}$$

Můžeme spočítat, jaký vztah mají k původním bázovým vektorům

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} = \xi, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.12)$$

Souřadnice $\{t, \rho, \varphi\}$ jsou přizpůsobeny statickým pozorovatelům a z metriky (2.3) jsme v nich identifikovali symetrie spojené s Killingovými vektory $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Další symetrii jsme našli jejich lineární kombinací $\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

V souřadnicích $\{\tilde{t}, \tilde{\rho}, \tilde{\varphi}\}$ přizpůsobených rotujícím pozorovatelům dokážeme z metriky (3.10) identifikovat Killingovy vektory $\xi = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}$. Killingův vektor $\xi = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ odpovídá rotujícím pozorovatelům a Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}$ rotační symetrii prostoročasu. Původní Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial t}$ statických pozorovatelů, lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvních dvou.

Pro Killingovy vektory platí, že je identifikujeme, pokud podél nich zvolíme jednu ze souřadnic. V tom je právě rozdíl mezi popisem prostoročasu pomocí souřadnic $\{t, \rho, \varphi\}$ a $\{\tilde{t}, \tilde{\rho}, \tilde{\varphi}\}$. Při použití $\{t, \rho, \varphi\}$ máme dvě souřadnice spojené s Killingovými vektory $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Kdežto pokud používáme souřadnice $\{\tilde{t}, \tilde{\rho}, \tilde{\varphi}\}$, pak jsou dvě souřadnice spojené s Killingovými vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \xi = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

3.2 Cylindrická symetrie

V tomto oddílu budeme analyzovat Killingovy vektory nalezené ve čtyřdimenzi-onálním prostoročase pomocí cylindrických souřadnic. Z (2.6) jsme určili Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.13)$$

Kvadráty jejich velikostí jsou

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = -1, \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 = \rho^2, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = 1. \quad (3.16)$$

Tyto výsledky interpretujeme obdobně, jako v oddílu 3.1. Ze zápornosti kvadrátu velikosti je $\frac{\partial}{\partial t}$ časupodobný a Killingovy vektory $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$ jsou z kladnosti kvadrátu velikosti prostorupodobné. Z těchto poznatků plyne, že pouze lineární kombinace obsahující $\frac{\partial}{\partial t}$ bude mít mez na které se mění prostoročasový charakter vektoru.

Z vektorů (3.14), (3.15) a (3.16) vytvoříme lineární kombinaci

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + v \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.17)$$

Její specifické podpřípady jsou

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.18)$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.19)$$

A jeden „pseudo“ podpřípad

$$\xi = \alpha \frac{\partial}{\partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.20)$$

Vektor (3.17) obsahuje lineární kombinaci tří Killingových vektorů, kde opět nastavujeme konstantu před časupodobným vektorem rovnu jedné. Jeho kvadrát velikosti je

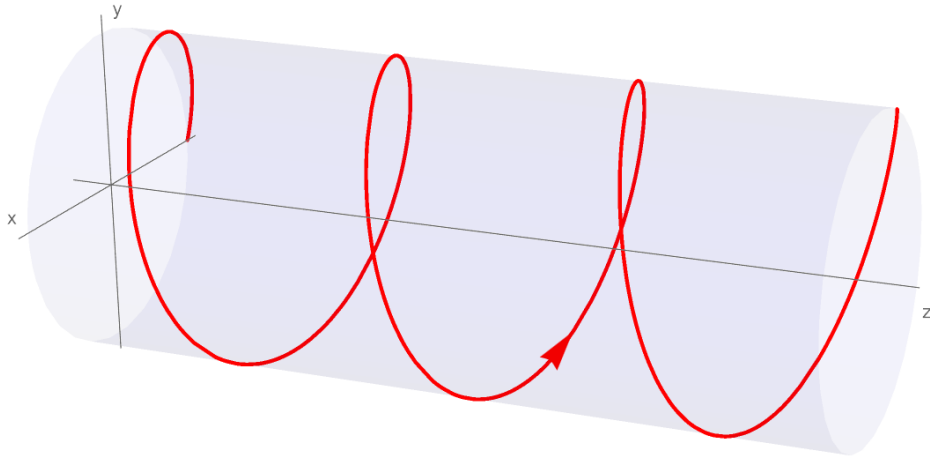
$$\xi^2 = -1 + \omega^2 \rho^2 + v^2 \quad (3.21)$$

a z toho vyplývající podmínka na světelný charakter vektoru

$$\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{\frac{1-v^2}{\omega^2}}. \quad (3.22)$$

Vidíme, že se problém poněkud komplikuje, protože máme přítomné dva parametry. Na intervalu $\rho < \sqrt{\frac{1-v^2}{\omega^2}}$ se jedná o vektor časupodobný, který je tečný k orbitě popisující pohyb podsvětelnou rychlostí a lze s ním spojit fyzikální pozorovatele. Na intervalu $\rho > \sqrt{\frac{1-v^2}{\omega^2}}$ je vektor prostorupodobný, je tečný k orbitě popisující pohyb nadsvětelnou rychlostí, a proto s ním fyzikální pozorovatele spojit nelze.

Na obrázku 3.2 je znázorněna prostorová stopa Killingova vektoru (3.17). Obrázek je zobrazen v kartézských souřadnicích x , y a z a s potlačenou souřadnicí t . Killingův vektor se nachází na modře vyznačeném povrchu válce $\rho^2 = \text{konst.}$



Obrázek 3.2: Obrázek červeně znázorňuje prostorovou stopu Killingova vektoru $\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + v \frac{\partial}{\partial z}$. Stopa se nachází na povrchu válce $\rho^2 = \text{konst.}$ Obrázek je vykreslen v kartézských souřadnicích x , y , z a je potlačena časová souřadnice t .

Killingovy vektory (3.18), (3.19) a (3.20) jsou speciálním případem vektoru (3.17). Vektor (3.18) nebudeme dále zkoumat, protože je obdobného charakteru, jako vektor (3.4) z oddílu 3.1. Killingův vektor (3.19) neobsahuje rotační symetrii a vektor (3.20) neobsahuje časovou symetrii. Protože obě chybějící symetrie jsou pro nás klíčové, uvedeme k těmto vektorům pouze základní rozbor.

Kvadrát velikosti vektoru (3.19) je

$$\xi^2 = -1 + v^2 . \quad (3.23)$$

Hodnota parametru, pro který vektor odpovídá rychlosti světla je

$$\xi^2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = 1 . \quad (3.24)$$

Vidíme, že kvadrát velikosti není závislý na poloze, ale pouze na parametru v . Hodnoty $v = \pm 1$ odpovídají případům, ve kterých orbity Killingova vektoru popisují světelný pohyb. Parametr v má význam rychlosti pohybu vůči zvolenému systému. Pro $|v| > 1$ je kvadrát velikosti Killingova vektoru kladný. V tomto intervalu je vektor prostorupodobný a příslušná orbita odpovídá nadsvětelné rychlosti. Pro $|v| < 1$ je kvadrát velikosti záporný a příslušná orbita je časupodobná.

Kvadrát velikosti vektoru (3.20) je

$$\xi^2 = \alpha^2 + \beta^2 \rho^2 \quad (3.25)$$

a je vždy kladný. To odpovídá očekávání, protože (3.20) je tvořený dvěma prostorupodobnými vektory.

3.3 Boost-rotační symetrie

V tomto oddíle budeme analyzovat Killingovy vektory ve čtyřdimenzionálním prostoročase, které jsme našli spojením Rindlerových a polárních souřadnic.

Boostový a rotační Killingův vektor v oblastech F a P

Připomeňme, že z metriky (2.16) jsme určili Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \beta} , \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (3.26)$$

Spočítáme kvadrát jejich velikosti

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^2 = b^2 , \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 = \rho^2 . \quad (3.28)$$

Z kladnosti kvadrátu velikosti vidíme, že v oblastech F a P jsou oba Killingovy vektory prostorupodobné. Jejich lineární kombinace bude mít tedy stejnou prostoročasnou charakteristiku. Tato lineární kombinace je

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \beta} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (3.29)$$

Kvadrát velikosti

$$\xi^2 = b^2 + \Omega^2 \rho^2 \quad (3.30)$$

je kladný a tedy Killingův vektor (3.29) je, dle očekávání, všude prostorupodobný.

Boostový a rotační Killingův vektor v oblastech L a R

Zajímavější než oblast F-P bude oblast L-R, protože v ní dokážeme vytvořit lineární kombinaci Killingových vektorů, která bude měnit svůj prostoročasový charakter. Z (2.19) jsme určili Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.31)$$

Jak jsme již naznačili v oddílu 2.4, souřadnicová pole $\frac{\partial}{\partial \beta}$ v oblastech F-P a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ v oblastech L-R tvoří v celém prostoročase jeden boostový Killingův vektor B_z . Killingův vektor B_z generuje symetrii odpovídající přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé, lišící se od původní rovnoměrným pohybem podél osy z . Orbyty takového Killingova vektoru tedy znázorňují rovnoměrně urychlené pozorovatele, tj. pozorovatele, kteří se urychlují libovolně blízko rychlosti světla. Vektorové pole $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ tvoří globální Killingův vektor R_z generující rotační symetrii kolem osy z .

Když spočítáme kvadrát velikosti Killingových vektorů (3.31)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 = -s^2, \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 = \rho^2, \quad (3.33)$$

zjistíme, že vektor $\frac{\partial}{\partial \tau}$ má v oblastech L-R časupodobný charakter a vektor $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ má v oblastech L-R charakter prostorupodobný.

Vytvoříme lineární kombinaci vektorů (3.31), kde před časupodobným vektorem $\frac{\partial}{\partial \tau}$ zvolíme konstantu rovnu jedné. Lineární kombinace má tvar

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.34)$$

a její kvadrát velikost je

$$\xi^2 = -s^2 + \Omega^2 \rho^2. \quad (3.35)$$

Vektor je světelný pro

$$\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \frac{s}{|\Omega|}. \quad (3.36)$$

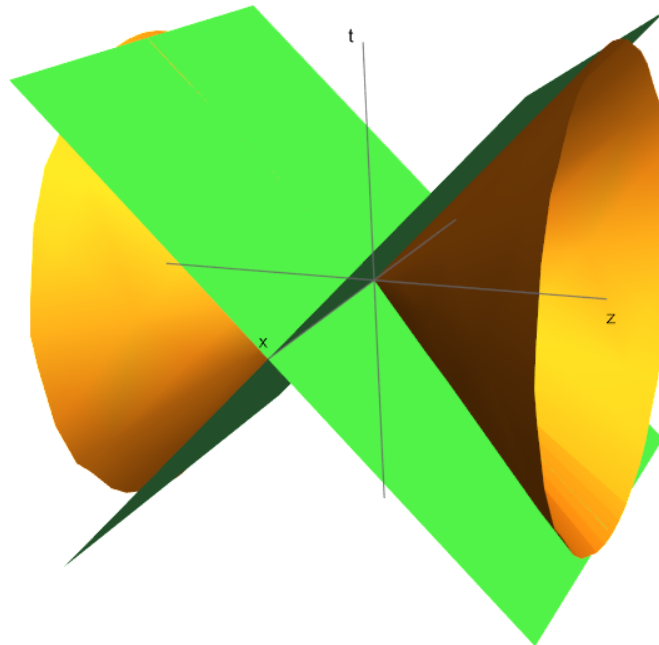
Prostoročasový charakter Killingova vektoru (3.34) tedy závisí na souřadnicích ρ , s a parametru Ω . Hranici na které se mění jeho charakter, tvoří lineární vztah mezi souřadnicemi ρ a s . Vektor je časupodobný na intervalu $\rho < \frac{s}{|\Omega|}$ a prostorupodobný na intervalu $\rho > \frac{s}{|\Omega|}$.

Do asymptoticky vzdálené oblasti (nekonečna) se můžeme dostávat různým způsobem: po časupodobné, po prostorupodobné nebo i po světelné orbitě. Typ orbity závisí na poměru přírůstku souřadnic s a ρ . V nekonečnu tak závisí prostoročasový charakter Killingova vektoru na cestě, po které jsme se do něj přiblížili.

Růstem souřadnice ρ a položením $s = \text{konst.}$ bude mít vektor v nekonečnu prostorupodobný charakter. Pokud bychom naopak zvolili $\rho = \text{konst.}$ a zvětšovali s , potom bude mít vektor v nekonečnu časupodobný charakter. Další možností je zvětšovat obě souřadnice proporcionálně tak, že bude mít vektor ξ světelný charakter.

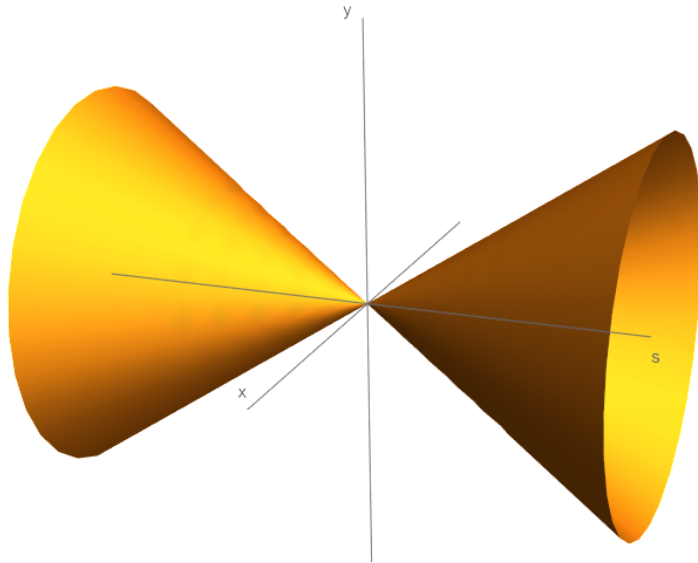
Stojí za povšimnutí, že z obrázku 2.1 je vidět, jakou roli hraje souřadnice s . S hodnotou $s = \text{konst.}$ jsou spojení rovnoměrně urychlení pozorovatelé, tj. pozorovatelé, kteří se urychlují libovolně blízko rychlosti světla.

Obrázek 3.3 zobrazuje čtyřdimenzionální prostoročas tvořený Rindlerovými a polárními souřadnicemi. Je vykreslen v kartézských souřadnicích t, x, z a má potlačenou souřadnici y . Zelené plochy jsou jednak hranice oblastí F-P a L-R, ale také plochy, které tvoří světelné trajektorie procházející „osou“, kde $t = z = 0$. Oranžové plochy jsou v oblastech L-R a znázorňují hranici, na které Killingův vektor (3.34) mění svůj prostoročasový charakter. Vektor (3.34) je uvnitř oranžových ploch časupodobný a vně prostorupodobný. Souřadnici y jsme potlačili zvolením $\varphi = \text{konst.}$ Konkrétně jsme zvolili $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$. Poznamenejme, že v zobrazovaných souřadnicích nejsou (a nemají být) oranžové plochy rotačně symetrické.



Obrázek 3.3: Obrázek je vykreslen v kartézských souřadnicích t, x, z a má potlačenou souřadnici y . Zelené plochy jsou tvořeny světelnými trajektoriemi šířícími se ve směru z a procházející „osou“ $t = z = 0$. Oranžové plochy jsou v oblastech L-R a znázorňují hranici, na které Killingův vektor $\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$ mění svůj prostoročasový charakter. Vektor $\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$ je uvnitř oranžových ploch časupodobný a vně prostorupodobný.

Další způsob, jak vizualizovat čtyřdimenzionální prostoročas tvořený Rindlerovými a polárními souřadnicemi je zvolením nadplochy $\tau = \text{konst.}$ Můžeme volit hodnotu konstanty $\tau = 0$ nebo $\tau \neq 0$. V prvním případě bude osa s splývat s osou z a v druhém by se odkláněla osa s od osy z . Na obrázku 3.4 je vykreslena nadplocha $\tau = 0$. Protože je potlačena časová souřadnice, nelze zobrazit hranice Rindlerových souřadnic. Tento obrázek je rotačně symetrický v rovině x - y (kolem osy s).



Obrázek 3.4: Obrázek je vykreslen v souřadnicích x , y , s a je zvolena nadplocha $\tau = 0$. Dosazením $\tau = 0$ do vztahů (2.12), zjistíme, že osa s splývá s osou z . Uvnitř oranžových ploch je Killingův vektor $\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$ časupodobný a vně je prostorupodobný. Tento obrázek je rotačně symetrický v rovině x - y (kolem osy s).

Kapitola 4

Geometrie anti-de Sitterova prostoru času

V této kapitole zavedeme vhodné souřadnice k identifikování „bázových“ Killingových vektorů v anti-de Sitterově prostoročase. Anti-de Sitterův (AdS) prostoročas je jedním ze tří maximálně symetrických řešení Einsteinových rovnic. Je to vakuumové řešení se zápornou kosmologickou konstantou Λ a zápornou konstantní skalární křivostí. Jeho geometrie odpovídá spojení hyperbolického (Lobačovského) prostoru a času.

4.1 Třídímní prostoročas

V třídímním anti-de Sitterově prostoročase existuje celkem 6 „bázových“ Killingových vektorů. Všechny další, lze vytvořit jejich lineární kombinací.

Ony „bázové“ Killingovy vektory jsou: posun v čase T_τ , rotace v prostoru okolo počátku R_φ , prostorové translace T_x , T_y a boosty B_x , B_y . Všechny tyto Killingovy vektory existují globálně v celém prostoročase.

Jelikož posuny (diffeomorfismy) podél těchto Killingových vektorů navzájem nekomutují, nelze nalézt jedny souřadnice, ve kterých by byly všechny tyto symetrie realizovány, jako prostý posun v souřadnici. Z výše uvedené báze, lze vybrat vždy nejvýše dva komutující Killingovy vektory a lze tedy zavést souřadnice, které explicitně respektují pouze dvě symetrie. Pro popis všech šesti „bázových“ Killingových vektorů, bychom tak potřebovali troje typy souřadnic. Ukazuje se, že dvoje z těchto souřadnic mají stejné vlastnosti, a proto nám bude stačit zkoumat pouze dva typy souřadnic.

První typ, budou souřadnice přizpůsobené symetriím (Killingovým vektorům) T_τ a R_φ . Tyto souřadnice popisují celý anti-de Sitterův prostoročas spojitě, a tím pádem bude i Killingovo vektorové pole všude spojitě definované. Druhý typ budou souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x , které nepokrývají celý anti-de Sitterův prostoročas spojitě. V tomto případě, rozdělíme prostoročas na oblasti. Na hranicích oblastí souřadnice degenerují a my budeme moci zkoumat Killingovy vektory pouze v jednotlivých oblastech.

Zbývající „bázové“ Killingovy vektory T_x a B_y , lze vyjádřit analogicky ve třetím typu souřadnic, který lze však získat z druhého typu zarotováním podél R_φ nebo časovým posunem podél T_τ . Diskuze těchto Killingových vektorů a jim příslušných souřadnic, by tak byla zcela analogická, jako pro T_y a B_x . Dále se

proto zaměříme pouze na Killingovy vektory T_y a B_x .

Ke struktuře, interpretaci a označení Killingových vektorů v anti-de Sitterově prostoročase se vrátíme na konci této kapitoly, kde shrneme všechny důležité informace.

Prostoročasu geometrii zavedeme tak, že si třídímní anti-de Sitterův prostoročas reprezentujeme, jako pseudosféru v čtyřdímní ploché prostoročase signatury $(- - ++)$ s metrikou

$$g = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 . \quad (4.1)$$

Od čtyřdímního prostoročasu se k třídímnímu dostaneme aplikováním vazby na pseudosféru ve tvaru

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 = -\ell^2 . \quad (4.2)$$

V takové reprezentaci jsou body anti-de Sitterova prostoročasu popsány souřadnicemi $\{u, v, x, y, n\}$, kde $\{u, v, x, y\}$ jsou ortogonální souřadnice v čtyřdímní prostoročase.

Rovnice (4.2) určuje plochu (pseudosféru), která je symetrická vůči rotaci v rovině $u-v$, tento fakt implikuje periodicitu úhlové souřadnice τ (význam souřadnice τ je podrobněji rozebrán v oddílu 4.2). My však chceme prostoročas, který je v souřadnici τ neperiodický. To zařídíme násobným navinutím prostoru na zadanou plochu. Budeme předpokládat, že τ nabývá hodnot z \mathbb{R} a neidentifikujeme body odlišující se periodou 2π . O kolikáté navinutí na zadanou plochu jde, bude určovat číslo $n \in \mathbb{Z}$, tj. $\tau \in (-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n)$.

Ke specifikaci oblastí, na které rozdělí anti-de Sitterův prostoročas souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x , si zavedeme kvadráty „pseudo-radiálních“ souřadnic R a S v rovinách $u-x$ a $v-y$ vztahy

$$\begin{aligned} R^2 &= u^2 - x^2 , \\ S^2 &= v^2 - y^2 . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vazba na pseudosféru (4.2), má pak tvar

$$R^2 + S^2 = \ell^2 . \quad (4.4)$$

V následujícím textu podrobněji popíšeme výše zmíněné dva typy souřadnic. V obou případech zavedeme vhodné transformační vztahy k souřadnicím $\{u, v, x, y\}$ a dopočítáme tvar metriky definující geometrii prostoročasu.

4.2 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_τ a R_φ

Souřadnice přizpůsobené symetriím T_τ a R_φ popisují celý anti-de Sitterův prostoročas spojitě. Vazbu (4.2) na souřadnice $\{u, v, x, y\}$ můžeme vyřešit zavedením souřadnic $\{\tau, \rho, \varphi\}$ pomocí vztahů

$$\begin{aligned} u &= \ell \cosh \rho \cos \tau , \\ v &= \ell \cosh \rho \sin \tau , \\ x &= \ell \sinh \rho \cos \varphi , \\ y &= \ell \sinh \rho \sin \varphi . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ze vztahů je vidět, že souřadnice ρ , τ a φ mají bezrozměrný charakter. Z (4.5) spočítáme souřadnicové kovektory a přepíšeme pomocí nich metriku (4.2) do tvaru

$$g = \ell^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2 \right) . \quad (4.6)$$

V tomto tvaru, lze vytknout škálovací parametr ℓ a přesunout ho na levou stranu rovnice. Tímto krokem zavedeme bezrozměrnou metriku, parametr ℓ nebudeme dále psát a výpočty budeme provádět s touto bezrozměrnou metrikou. Bezrozměná metrika má tvar

$$\frac{g}{\ell^2} = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2 . \quad (4.7)$$

Lze nahlédnout, že řezy $\tau = \text{konst.}$ mají geometrii Lobačevského roviny. Dále si můžeme všimnout, že metrický koeficient je u časové souřadnice závislý na poloze. Z toho vyplývá, že vlastní čas statických pozorovatelů závisí na poloze. Tato vlastnost odpovídá působení kosmologického atraktivního gravitačního pole.

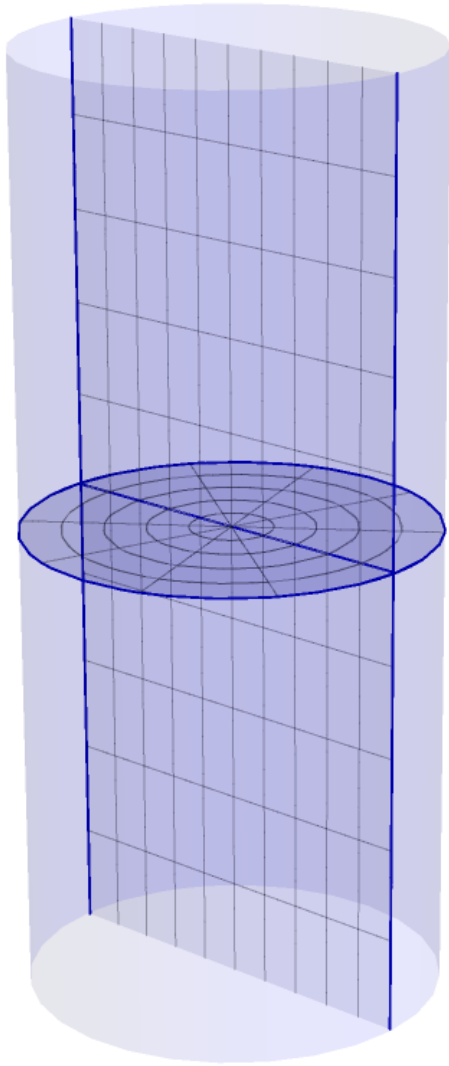
V rovnici (4.7) lze identifikovat dva „bázové“ Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv T_\tau , \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv R_\varphi . \quad (4.8)$$

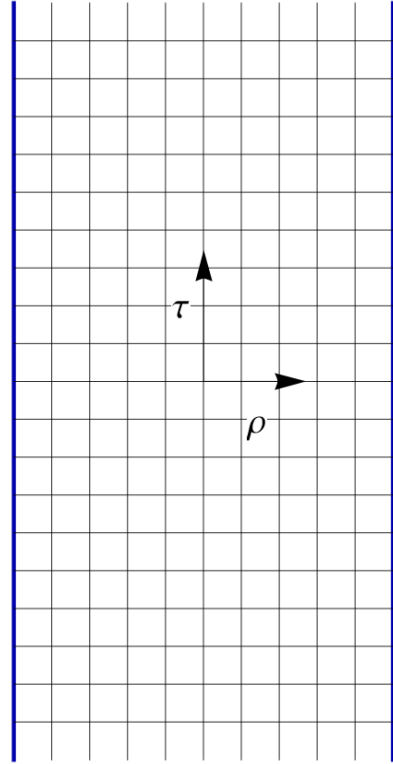
Vektor T_τ odpovídá posunu v čase a je tečný k orbitám statických pozorovatelů. Killingův vektor R_φ popisuje symetrii rotace okolo počátku.

Nekonečný anti-de Sitterův prostoročas lze zkompatifikovat v prostorových souřadnicích (podrobněji popsáné v oddíle 4.3). Výsledek má podobu nekonečně dlouhého válce zobrazeného na 4.1a. V tomto válci jsme vykreslili i dva řezy, které jsou znázorněny na obrázcích 4.1b a 4.1c.

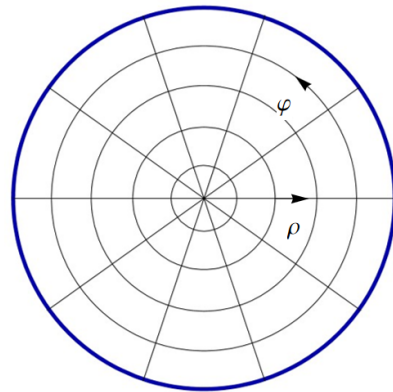
Na obrázku 4.1b je zobrazen řez $\varphi = \text{konst.}$ (např. $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$). Uvnitř jsou vykresleny souřadnicové čáry τ a ρ . Souřadnicová čára souřadnice τ je orbitou Killingova vektoru T_τ a udává posun v čase. Obrázek 4.1c zobrazuje řez $\tau = \text{konst.}$ a jsou v něm vykresleny souřadnicové čáry ρ a φ . Z tohoto obrázku je vidět, že souřadnice ρ určuje prostorovou vzdálenost od počátku a souřadnice φ udává prostorové otočení v rovině $\tau = \text{konst.}$ Souřadnicové čáry vykreslené na obrázku 4.1 jsou přízpůsobeny symetriím T_τ a R_φ . Modře je znázorněno nekonečno.



(a) Anti-de Sitterův prostoročas zkompatifikovaný v prostorových souřadnicích. Tato kompaktifikace vytvoří válec. Jsou v něm vykresleny řezy $\varphi = \text{konst.}$ a $\tau = \text{konst.}$ Povrch válce reprezentuje prostorové nekonečno prostoročasu.



(b) Řez anti-de Sitterovým prostoročasem v $\varphi = \text{konst.}$ (například $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$). Na obrázku jsou vidět souřadnicové čáry τ a ρ . Souřadnicová čára souřadnice τ je orbitou Killingova vektoru T_τ .



(c) Řez anti-de Sitterovým prostoročasem v $\tau = \text{konst.}$ Na obrázku jsou znázorněny souřadnicové čáry ρ a φ . Souřadnicová čára souřadnice φ je orbitou Killingova vektoru R_φ .

Obrázek 4.1: Na obrázcích je znázorněn anti-de Sitterův prostoročas zkompatifikovaný v prostorových souřadnicích. Souřadnicové čáry jsou přizpůsobeny symetriím T_τ a R_φ . Modře je znázorněné nekonečno.

4.3 Vizualizace anti-de Sitterova prostoročasu

V tomto oddílu si ukážeme, jak lze vizualizovat anti-de Sitterův prostoročas. Tento prostoročas je nekonečně velký. Abychom ho mohli celý zobrazit, je výhodné použít kompaktifikaci. Kompaktifikaci budeme aplikovat pouze na prostorovou část anti-de Sitterova prostoročasu.

Prostorová část má Lobačovského (hyperbolickou) geometrii. Hyperbolická geometrie je neeuklidovská geometrie, která nesplňuje pátý euklidův postulát. Ten říká, že: „ve dvourozměrném prostoru pro přímku p a bod A ležící mimo ni, existuje právě jedna přímka, která bodem A prochází a zároveň neprotíná p . Neboli je rovnoběžná s p “. V hyperbolické geometrii existuje takových přímek nekonečně mnoho, jak je vidět z obrázků 4.2 a 4.3.

Cílem kompaktifikace je tedy zobrazení nekonečné Lobačovského roviny. V dalších pododdílech si postupně ukážeme Beltrami-Kleinovu, Poincarého a konformně einsteinovskou kompaktifikaci. Pro všechny tři platí, že rovinu konstantního času τ zobrazují do kružnice s poloměrem $r = 1$. Body na hranici kružnice představují nekonečno.

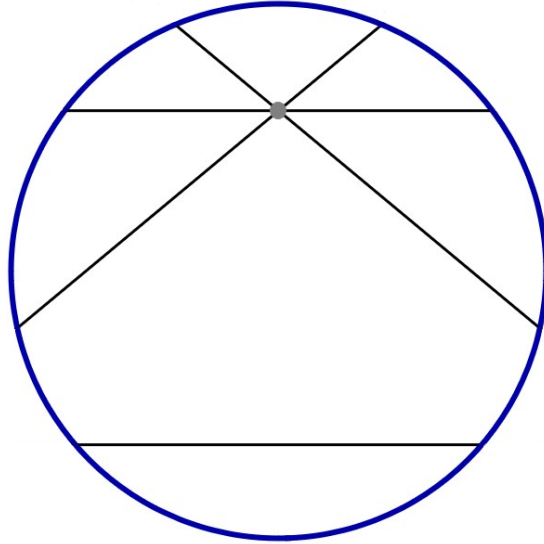
Kompaktifikované prostorové souřadnice vytvoří s časovým směrem válec. Ten vidíme na obrázku 4.1a a již zobrazuje celý kompaktifikovaný anti-de Sitterův prostoročas. V obrázku je znázorněn vertikální řez plochou $\varphi = \text{konst.}$ a horizontální řez plochou $\tau = \text{konst.}$ Řezy $\tau = \text{konst.}$ uvidíme na obrázcích 4.2, 4.3 a řezy $\varphi = \text{konst.}$ budou použity na obrázku 4.4. Oba dva řezy využijeme k vykreslení oblastí a souřadnicových čar v oddílu 4.4 na obrázcích 4.8 a 4.9.

Beltrami-Kleinova kompaktifikace

Beltrami-Kleinova kompaktifikace je definována transformací $r = \tanh \rho$. Její charakteristikou je, že zobrazuje Lobačovského geodetiky na úsečky. Přímky začínají a končí na okraji kružnice, kde je kompaktifikované nekonečno.

Z obrázku 4.2 vidíme, že v této geometrii existuje ke zvolené přímce a bodu mimo ní nekonečno mnoho přímek procházejících bodem, které zároveň neprotínají přímku původní. Všechny tyto přímky jsou tedy rovnoběžné s původní přímkou, což je charakteristické pro hyperbolické geometrie.

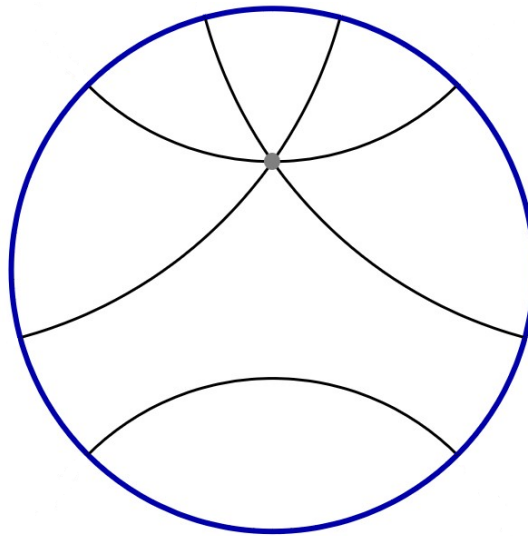
Nevýhodou Beltrami-Kleinovy kompaktifikace je, že nezobrazuje věrně úhly mezi přímkami. To znamená, že pokud mezi sebou Lobačovského geodetiky v anti-de Sitterově prostoročasu svírají konkrétní Lobačovského úhel α , tak po zobrazení těchto geodetik do kompaktifikovaného kruhu budou svírat jiný euklidovský úhel β . Pro úplnost, nezobrazuje věrně ani vzdálenosti, ale to je přímo vlastnost kompaktifikace.



Obrázek 4.2: Grafické znázornění Beltrami-Kleinovy kompaktifikace prostorové části anti-de Sitterova prostoročasu. Z Lobačevského geodetik vykreslených na obrázku, vidíme, že se jedná o hyperbolickou geometrii. Modře je znázorněné kompaktifikované nekonečno.

Poincarého kompaktifikace

Poincarého kompaktifikace je definovaná transformací $r = \tanh \frac{\rho}{2}$ a jedná se o transformaci konformní. Její charakteristikou je zachování úhlů mezi přímkami. Tedy pokud použijeme symboliku uvedenou u Beltrami-Kleinovy kompaktifikace, platí $\alpha = \beta$. Tato kompaktifikace zobrazuje Lobačevského geodetiky na oblouky, které jsou kolmé na okraj kružnice. Obdobné geodetiky, jako na obrázku 4.2, máme vykreslené na obrázku 4.3.



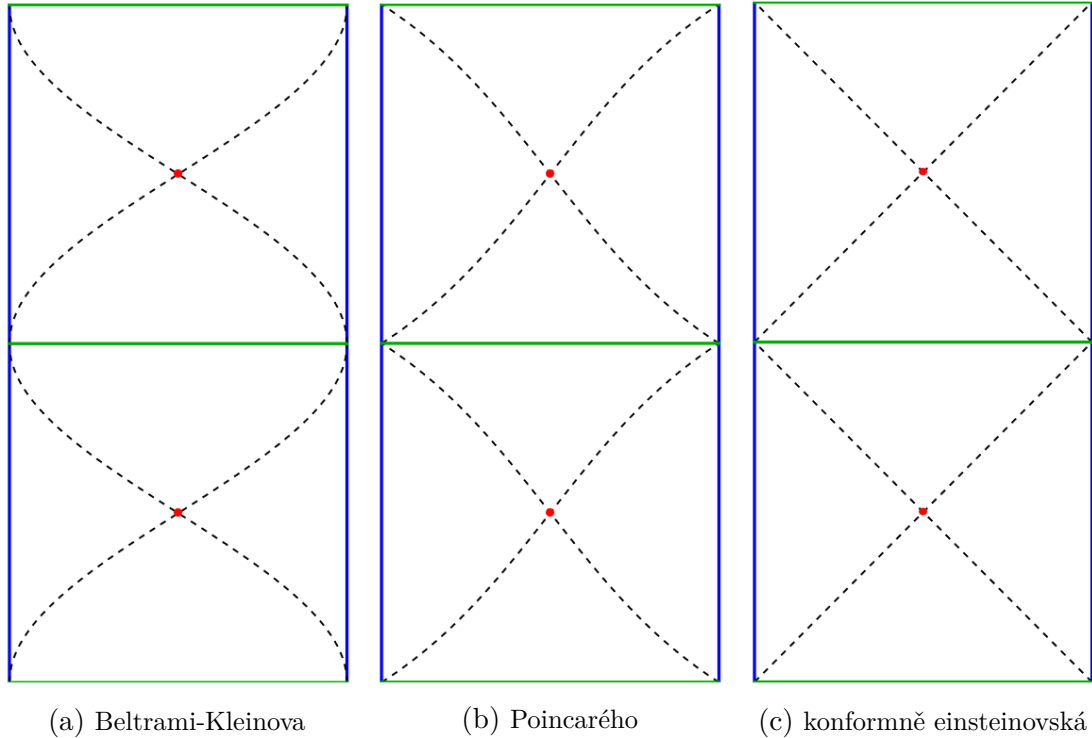
Obrázek 4.3: Grafické znázornění Poincarého kompaktifikace prostorové části anti-de Sitterova prostoročasu. Z Lobačevského geodetik vykreslených na obrázku, vidíme, že se jedná o hyperbolickou geometrii. Modře je znázorněné kompaktifikované nekonečno.

Konformně einsteinovská kompaktifikace

Pro nás nejdůležitější kompaktifikace je konformně einsteinovská. Pomocí ní budeme zobrazovat kompaktifikovaný anti-de Sitterův prostoročas a jeho řezy. Konformně einsteinovská kompaktifikace je určena transformací $r = \frac{2}{\pi} \arcsin \tanh \rho$.

Její podstatná vlastnost je, že při řezu středem válce anti-de Sitterova prostoročasu, jsou světelné paprsky zobrazeny jako rovné přímky. To neplatí pro kompaktifikaci Beltrami-Kleinovu ani Poincarého.

Na obrázcích 4.4a, 4.4b a 4.4c jsou vykresleny světelné paprsky, zobrazené v Beltrami-Kleinově, Poincarého a konformně einsteinovské kompaktifikaci.



Obrázek 4.4: Na obrázcích jsou řezy plochou $\varphi = \text{konst.}$ zkompaktifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu. Byli použity všechny výše popsané způsoby kompaktifikace. Z porovnání je vidět rozdíl mezi tvary světelných trajektorií. Tyto světelné paprsky určují hranice oblastí diskutovaných v oddílu 4.4.

4.4 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x

Nyní zavedeme souřadnice přizpůsobené dalším dvěma z šesti „bázových“ Killingových vektorů. Tyto souřadnice budou přizpůsobeny translačnímu Killingovu vektoru T_y a boostovému Killingovu vektoru B_x .

Narozdíl od předchozích souřadnic, které popisovali celý anti-de Sitterův prostoročas spojitě, budou tyto souřadnice dělit prostoročas na šest typů oblastí.¹ Hranice mezi oblastmi tvoří světelné plochy (plochy tvořené světelnými paprsky). Každá oblast je popsána vlastními transformačními vztahy.

Killingovy vektory vyjádříme v každé z těchto oblastí. Přestože budou popsány v každé z oblastí zvlášť, tvoří dohromady globálně definovaná vektorová

¹Celkem bude oblastí nekonečně mnoho, ale každá bude jedním ze šesti typů.

pole, reprezentující generátory symetrií celého prostoročasu.²

Šest oblastí, lze rozdělit do tří dvojic, tyto dvojice budou mít, až na znaménko stejné transformační vztahy. Tyto dvojice jsou L – left (vlevo) a R – right (vpravo), F – front (vpředu) a B – back (vzadu), U – up (nahoru) a D – down (dolu). V některých případech budeme k popisu oblastí používat i výše představené globální souřadnice $\{\tau, \rho, \varphi\}$, protože pomocí nich bude popis vybraných konceptů pro čtenáře intuitivnější.

Souřadnice v oblastech L-R

Oblasti L – left (vlevo) a R – right (vpravo) jsou definovány podmínkami na „pseudo-radiální“ souřadnice

$$R^2 > 1, S^2 < 0. \quad (4.9)$$

Oblasti L-R budeme popisovat pomocí souřadnic $\{\mathcal{X}, \Phi, \Psi\}$. V oddíle 4.1 jsme zavedli popis anti-de Sitterova prostoročasu pomocí souřadnic $\{u, v, x, y\}$. Nyní aplikujeme transformační vztahy

$$\begin{aligned} u &= \pm \ell \cosh \mathcal{X} \cosh \Psi, \\ v &= \ell \sinh \mathcal{X} \sinh \Phi, \\ x &= \pm \ell \cosh \mathcal{X} \sinh \Psi, \\ y &= \ell \sinh \mathcal{X} \cosh \Phi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

abychom od souřadnic $\{u, v, x, y\}$ přešli k $\{\mathcal{X}, \Phi, \Psi\}$. Oblasti R a L jsou rozlišeny znaménky \pm . Kladné odpovídá oblastem R a záporné oblastem L. Oblasti L-R jsou centrovány na přímkách $\varphi = 0, \pm \pi \cap \tau = m\pi$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Dvojice s lichou a sudou hodnotou m se liší orientací souřadnice Φ . Aplikováním (4.10) získáme pro „pseudo-radiální“ souřadnice vztahy

$$\begin{aligned} R^2 &= \ell^2 - S^2 = \ell^2 \cosh^2 \mathcal{X}, \\ S^2 &= \ell^2 - R^2 = -\ell^2 \sinh^2 \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Z (4.10) spočítáme bázové kovektory a přepíšeme metriku (4.1) do tvaru

$$\frac{g}{\ell^2} = -\sinh^2 \mathcal{X} d\Phi^2 + d\mathcal{X}^2 + \cosh^2 \mathcal{X} d\Psi^2. \quad (4.12)$$

Stejně, jako jsme diskutovali v oddílu 4.2, přesuneme škálovací parametr ℓ na levou stranu a dále budeme vše počítat pomocí bezrozměrné metriky. Z metriky (4.12) lze určit Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial}{\partial \Psi}. \quad (4.13)$$

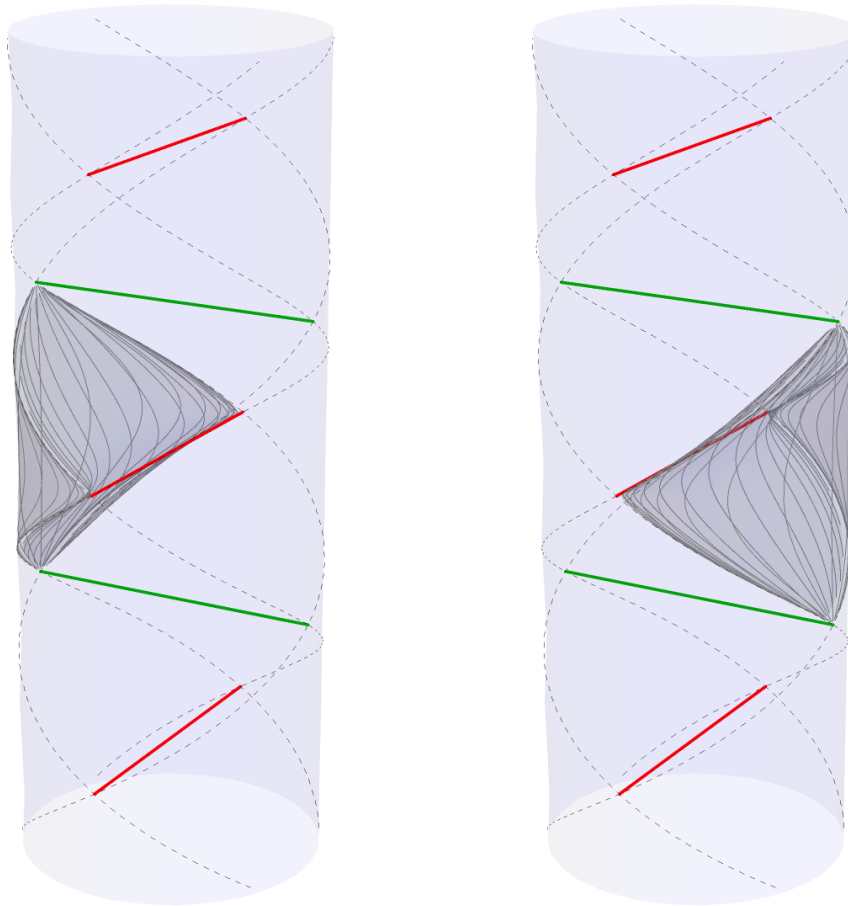
Metrický koeficient u $d\Phi^2$ v (4.12) je vždy záporný. Z toho vyplývá, že souřadnice Φ má v oblastech L-R časový charakter. Můžeme tedy v těchto oblastech

²To, že Killingovy vektory existují jako globální spojitá vektorová pole, lze dokumentovat jejich vyjádřením v globálních souřadnicích $\{\tau, \rho, \varphi\}$.

příslušnou souřadnici chápat jako čas a označit ji zde písmenem $\Phi \equiv T$, toho důsledkem je i rovnost vektorů

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \equiv \frac{\partial}{\partial T} . \quad (4.14)$$

Na obrázcích 4.5a a 4.5b je zobrazen anti-de Sitterův prostoročas, ve kterém jsou vyznačeny oblasti L a R. Hranici oblasti L (resp. R) tvoří dvě světelné plochy a část nekonečna (povrchu válce). Obrázky byly vygenerovány v systému Wolfram Mathematica s částečným využitím podkladů [1].



(a) oblast L

(b) oblast R

Obrázek 4.5: Grafické znázornění zkompatifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu. Byla využita konformně einsteinovská kompaktifikace. V prostoročase jsou vykresleny oblasti L a R. Hranici oblasti L (resp. R) tvoří dvě světelné plochy a část nekonečna (povrchu válce).

Souřadnice v oblastech F-B

Oblasti F – front (vpředu) a B – back (vzadu) jsou určeny podmínkami na „pseudo-radiální“ souřadnice

$$R^2 < 0, S^2 > 1 . \quad (4.15)$$

K popisu oblastí F-B použijeme souřadnice $\{\Upsilon, \Phi, \Psi\}$. Od souřadnic $\{u, v, x, y\}$ přejdeme k $\{\Upsilon, \Phi, \Psi\}$ transformačními vztahy

$$\begin{aligned} u &= \ell \sinh \Upsilon \sinh \Psi , \\ v &= \pm \ell \cosh \Upsilon \cosh \Phi , \\ x &= \ell \sinh \Upsilon \cosh \Psi , \\ y &= \pm \ell \cosh \Upsilon \sinh \Phi . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Oblasti F a B jsou rozlišeny znaménky \pm . Kladné znaménko odpovídá oblasti F a záporné znaménko oblasti B. Tyto oblasti jsou centrovány na přímkách $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \cap \tau = m\pi + \frac{\pi}{2}$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Páry se sudou nebo lichou hodnotou m se liší orientací souřadnice Ψ . Z (4.16) vychází pro „pseudo-radiální“ souřadnice vztahy

$$\begin{aligned} R^2 &= \ell^2 - S^2 = -\ell^2 \sinh^2 \Upsilon , \\ S^2 &= \ell^2 - R^2 = \ell^2 \cosh^2 \Upsilon . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Z (4.16) spočítáme bázové kovektory a přepíšeme metriku (4.1) do tvaru

$$\frac{g}{\ell^2} = -\sinh^2 \Upsilon d\Psi^2 + d\Upsilon^2 + \cosh^2 \Upsilon d\Phi^2 . \tag{4.18}$$

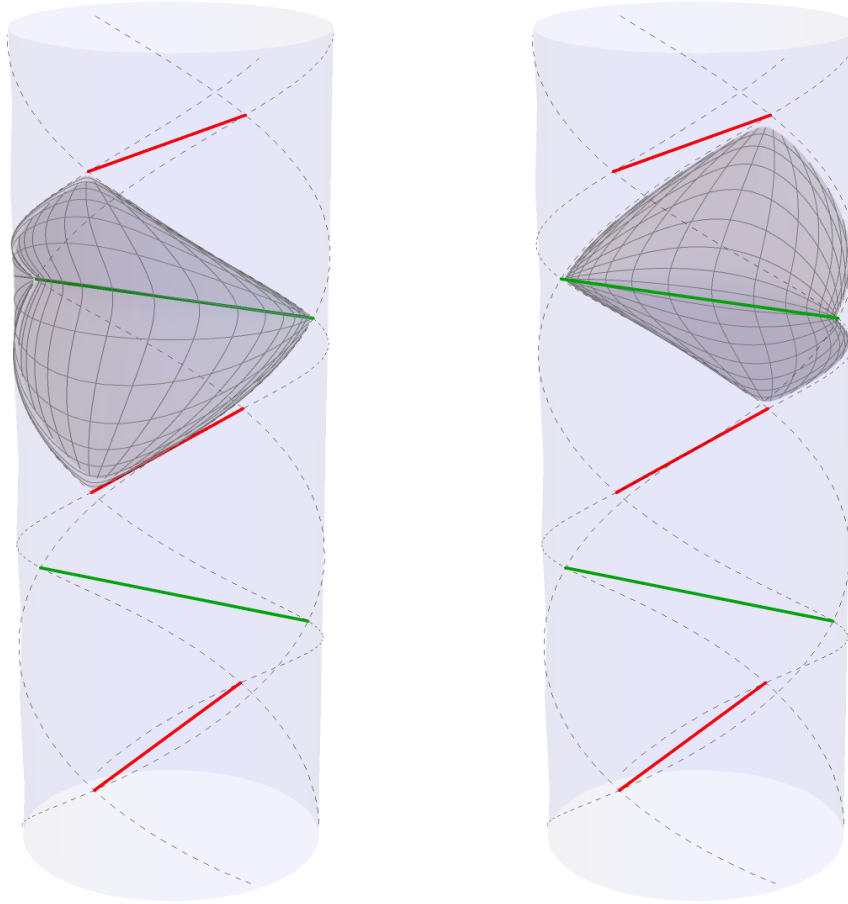
Z tohoto vyjádření určíme Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} , \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} . \tag{4.19}$$

Metrický koeficient u $d\Psi^2$ v (4.18) je vždy záporný, a tak v oblastech F-B můžeme označit Ψ jako časovou souřadnici $\Psi \equiv T$. Z označení vyplývá

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \equiv \frac{\partial}{\partial T} . \tag{4.20}$$

Na obrázcích 4.6a a 4.6b jsou v anti-de Sitterově prostoročase zobrazeny příklady oblastí F a B. Hranici oblasti F (resp. B) tvoří dvě světelné plochy a část nekonečna (povrchu válce).



(a) oblast F

(b) oblast B

Obrázek 4.6: Grafické znázornění zkompaktifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu. Byla využita konformně einsteinovská kompaktifikace. V prostoročase jsou vykresleny oblasti F a B. Hranici oblasti F (resp. B) tvoří dvě světelné plochy a část nekonečna (povrchu válce).

Souřadnice v oblastech U-D

Oblasti U – up (nahoru) a D – down (dolu) jsou definovány podmínkami na „pseudo-radiální“ souřadnice

$$R^2 < 1, S^2 < 1. \quad (4.21)$$

K popisu oblastí použijeme souřadnice $\{\Theta, \Phi, \Psi\}$. Přejít od souřadnic $\{u, v, x, y\}$ k $\{\Theta, \Phi, \Psi\}$ provedeme aplikování transformačních vztahů

$$\begin{aligned} u &= \ell \cos \Theta \cosh \Psi, \\ v &= \ell \sin \Theta \cosh \Phi, \\ x &= \ell \cos \Theta \sinh \Psi, \\ y &= \ell \sin \Theta \sinh \Phi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Oblasti mají krajní hodnoty v $\Theta = n \frac{\pi}{2}$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Ze vztahů vyplývají vazby na „pseudo-radiální“ souřadnice

$$\begin{aligned} R^2 &= \ell^2 - S^2 = \ell^2 \cos^2 \Theta, \\ S^2 &= \ell^2 - R^2 = \ell^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

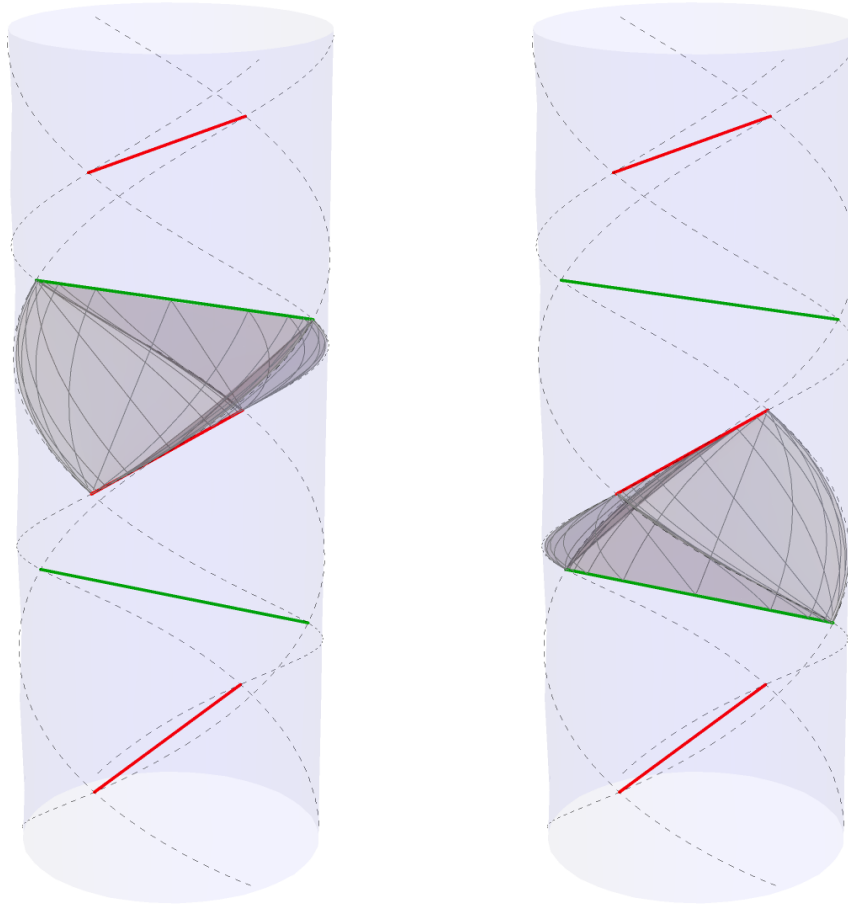
Ze vztahů (4.22) spočítáme bázové kovektory a opět přepíšeme metriku (4.1) na

$$\frac{g}{\ell^2} = -d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2 + \cos^2\Theta d\Psi^2 \quad (4.24)$$

Ze zápornosti metrického koeficientu $d\Theta^2$ vidíme, že roli času tentokrát hraje souřadnice Θ , ta je ovšem nekillingovská. Naopak metrické koeficienty $d\Phi^2$ a $d\Psi^2$ killingovských souřadnic Φ a Ψ jsou vždy kladné, a tak dva Killingovy vektory, které určíme z (4.24) budou prostorupodobného charakteru. Jsou jimi

$$\frac{\partial}{\partial\Psi}, \quad \frac{\partial}{\partial\Phi}. \quad (4.25)$$

Na obrázcích 4.7a a 4.7b jsou v anti-de Sitterově prostoročase vykresleny konkrétní oblasti U a D. Hranici oblasti U (resp. D) tvoří čtyři světelné plochy.



(a) oblast U

(b) oblast D

Obrázek 4.7: Grafické znázornění zkompatifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu. Byla využita konformně einsteinovská kompaktifikace. V prostoročase jsou vykresleny oblasti U a D. Hranici oblasti U (resp. D) tvoří čtyři světelné plochy.

Souřadnicové plochy

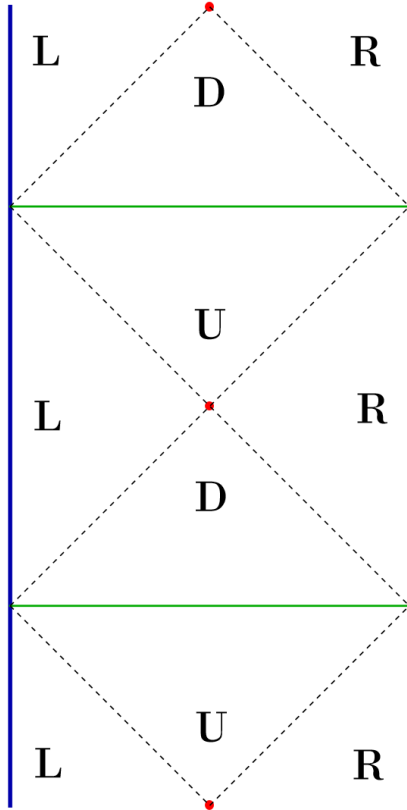
Nyní, se blíže podíváme na řezy zkompatifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu. V řezech vyznačíme, jak jsou rozděleny oblasti L-R, F-B a U-D. V těchto oblastech poté vykreslíme souřadnicové plochy. Konkrétně se budeme zabývat řezy

plochami $\tau = \text{konst.}$ a $\varphi = \text{konst.}$ Připomeňme, že zkompatifikovaný anti-de Sitterův prostoročas má podobu válce a zmíněné řezy jsou naznačeny na obrázku 4.1a.

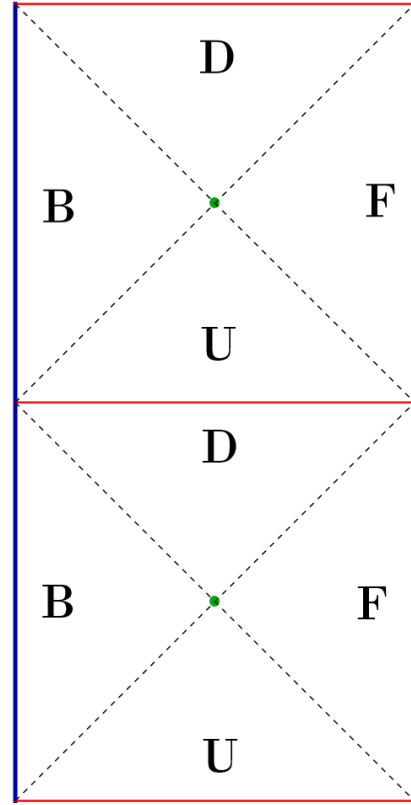
Na obrázcích 4.8a a 4.8b jsou zobrazeny řezy anti-de Sitterovým prostoročasem v ploše $\varphi = \text{konst.}$ a na obrázcích 4.8c a 4.8d řezy $\tau = \text{konst.}$ Červené body na obrázku 4.8a a zelené body na obrázku 4.8b znázorňují úsečky, které míří do papíru. Červené úsečky se na obou obrázcích nachází v polohách $\tau = -\pi, 0, \pi$ a zelené v $\tau = \pm\pi/2$. Obrázky 4.8c (resp. 4.8d) jsou natočeny tak, aby odpovídali pohledu na obrázky 4.8a (resp. 4.8b). Na obrázcích 4.8a a 4.8b roste souřadnice τ vertikálně nahoru a souřadnice ρ roste horizontálně ze středu ke krajům. Hranice oblastí jsou světelné plochy vypuštěné z nekonečna a procházející výše zmíněnými úsečkami. Obrázek 4.8b zobrazuje stejnou oblast válce, jako obrázek 4.8a ovšem z pootočeného pohledu. Na obrázcích 4.8c a 4.8d je vykreslena projekce podél časového směru $\frac{\partial}{\partial\tau}$ anti-de Sitterova prostoročasu. V této projekci jsou vidět pozice červených a zelených úseček z obrázků 4.1a a 4.1b. Ve všech obrázcích je nekonečno znázorněné modrou barvou.

Oblasti L-R a F-B zobrazené na 4.8a a 4.8b jsou mezi sebou izomorfní, mohou na sebe přejít rotací a časovým posunutím. Jeden typ oblasti se ve zkompatifikovaném válci nekonečněkrát opakuje.

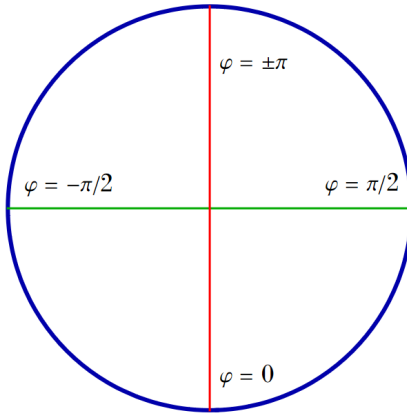
Na obrázcích 4.9a, 4.9b, 4.9c a 4.9d jsou vykresleny souřadnicové plochy ve stejných řezech anti-de Sitterova prostoročasu jako na obrázcích 4.8a, 4.8b, 4.8c a 4.8d. Souřadnicové plochy se v těchto řezech budou jevit jako čáry, jelikož jejich druhý rozměr je v řezu potlačen. Vykresleny jsou souřadnicové plochy souřadnic přizpůsobených symetriím T_y a B_x . Na obrázcích znázorňuje červená souřadnicovou plochu $\Phi = \text{konst.}$ a zelená souřadnicovou plochu $\Psi = \text{konst.}$ Nekillingovská souřadnicová plocha $\mathcal{X} = \text{konst.}$ (v oblastech L-R) nebo $\Upsilon = \text{konst.}$ (v oblastech F-B) nebo $\Theta = \text{konst.}$ (v oblastech U-D) má černou barvu.



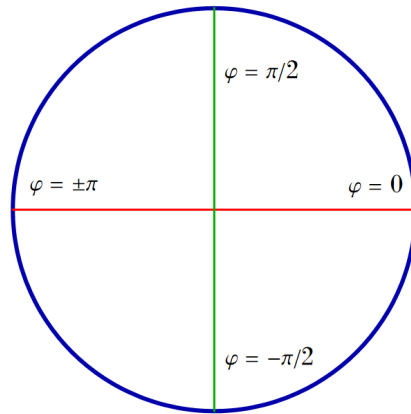
(a) Řez v $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. V obrázku jsou pojmenovány oblasti L-R a U-D.



(b) Řez v $\varphi = 0, \pm \pi$. V obrázku jsou pojmenovány oblasti F-B a U-D.

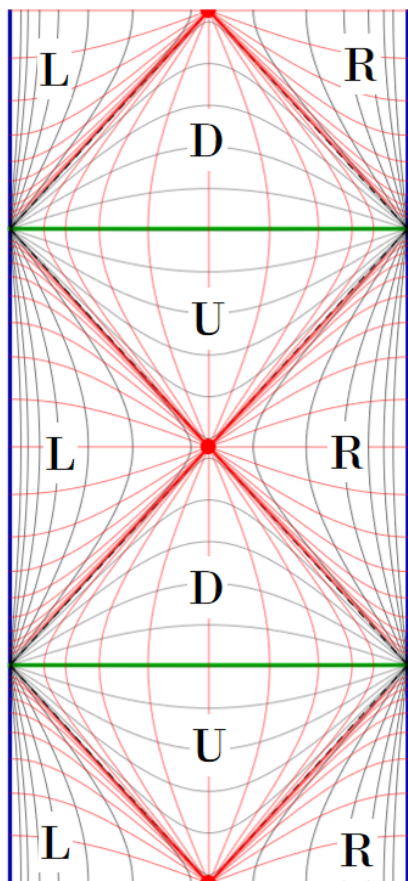


(c) Přizpůsobeno řezu $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

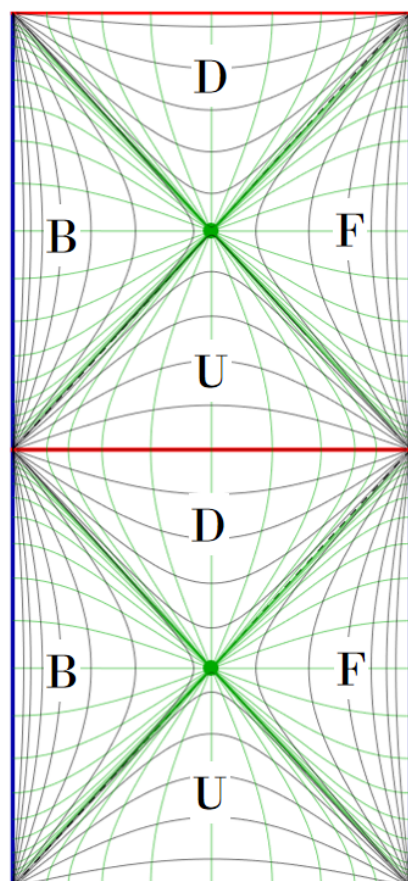


(d) Přizpůsobeno řezu $\varphi = 0, \pm \pi$.

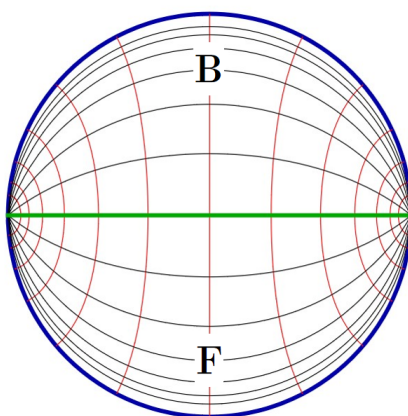
Obrázek 4.8: Na obrázcích (a) a (b) jsou znázorněny řezy zkompatifikovaným anti-de Sitterovým prostoročasem. V řezech jsou vyznačeny oblasti L-R, F-B a U-D. Na obrázcích (c) a (d) je vykreslena projekce podél časového směru $\frac{\partial}{\partial \tau}$ anti-de Sitterova prostoročasu. V této projekci jsou vidět pozice červených a zelených úseček z obrázků (a) a (b). Modře je znázorněno nekonečno.



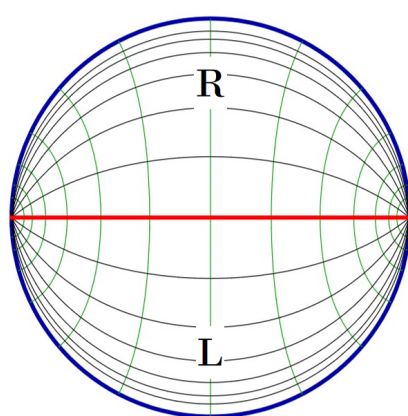
(a) Řez v $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. V oblastech L-R jsou zobrazeny souřadnicové plochy $\Phi = \text{konst.}$ (červeně) a $\mathcal{X} = \text{konst.}$ (černě). V oblastech U-D jsou zobrazeny souřadnicové plochy $\Phi = \text{konst.}$ (červeně) a $\Theta = \text{konst.}$ (černě).



(b) Řez v $\varphi = 0, \pm \pi$. V oblastech F-B jsou zobrazeny souřadnicové plochy $\Psi = \text{konst.}$ (zeleně) a $\Upsilon = \text{konst.}$ (černě). V oblastech U-D jsou zobrazeny souřadnicové plochy $\Psi = \text{konst.}$ (zeleně) a $\Theta = \text{konst.}$ (černě).



(c) Řez v $\tau = k\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V diagramu jsou zobrazeny oblasti F-B a vykresleny souřadnicové plochy $\Phi = \text{konst.}$ (červeně) a $\Upsilon = \text{konst.}$ (černě).



(d) Řez v $\tau = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V diagramu jsou zobrazeny oblasti L-R a vykresleny souřadnicové plochy $\Psi = \text{konst.}$ (zeleně) a $\mathcal{X} = \text{konst.}$ (černě).

Obrázek 4.9: Souřadnicové plochy vykreslené v řezech zkompatifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu. V obrázcích jsou vykresleny souřadnicové plochy $\Phi = \text{konst.}$ červeně a $\Psi = \text{konst.}$ zeleně. Černě jsou vykresleny souřadnicové plochy nekillingovských souřadnic $\mathcal{X} = \text{konst.}$ (v oblastech L-R), $\Upsilon = \text{konst.}$ (v oblastech F-B) nebo $\Theta = \text{konst.}$ (v oblastech U-D). Všechny tyto plochy se jeví jako jednodimenzionální křivky, protože druhý rozměr je v řezu potlačen. Modře je zobrazeno nekonečno.

4.5 Struktura symetrií anti-de Sitterova prostoročasu

V tomto oddíle shrneme vlastnosti „bázových“ Killingových vektorů v třídímním anti-de Sitterově prostoročase. Vysvětlíme, jaký mají mezi sebou vztah v závislosti na poloze a jak je lze na sebe převádět.

Třídímní anti-de Sitterův prostoročas má stejný počet symetrií jako třídímní Minkowského prostoročas, tedy 6. Tyto symetrie jsou popsány „bázovými“ Killingovými vektory T_τ , R_φ , T_x , T_y , B_x a B_y .

Killingovy vektory T_τ a R_φ mají globálně neměnný kauzální charakter. Vektor T_τ je globálně všude časupodobný a vektor R_φ je globálně všude prostorupodobný. Proto s nimi lze zvolit globálně dobře definované souřadnice $\{\tau, \rho, \varphi\}$.

Zbývající 4 „bázové“ Killingovy vektory T_x , T_y a B_x , B_y mění svůj kauzální charakter a lze je interpretovat různým způsobem, podle toho na kterou oblast prostoročasu se zaměříme. Všechny tyto Killingovy vektory mají bifurkační charakter lokálně podobný boostovému Killingovu vektoru z Minkowského prostoročasu. Existuje pro ně tzv. bifurkační přímka, kolem které Killingův vektor mění svůj charakter. Na této přímce Killingův vektor vymizí.

Pro popis takových Killingových vektorů, lze nalézt souřadnice, které jsou zároveň přízpůsobené pouze dvěma z těchto čtyř „bázových“ Killingových vektorů. Pro popis všech čtyř, by tedy bylo potřeba zavést dva různé systémy souřadnic. My budeme diskutovat pouze souřadnice přízpůsobené Killingovým vektorům T_y a B_x . Zbylé dva „bázové“ Killingovy vektory (T_x a B_y), bychom identifikovali pokud bychom souřadnice přízpůsobené symetriím T_y a B_x posunuli v čase o $\frac{\pi}{2}$ nebo zarotovali o $\frac{\pi}{2}$. Rozbor Killingových vektorů T_x a B_y by byl zcela analogický, jako rozbor vektorů T_y a B_x . A proto budeme diskutovat pouze jeden systém souřadnic, protože ten druhý by byl obdobný.

Jak bylo vyloženo v oddílu 4.4, tento systém souřadnic se skládá ze šesti typů souřadnicových oblastí. Ve všech těchto oblastech máme dvě souřadnice Φ a Ψ přízpůsobené dvěma komutujícím Killingovým vektorům. Bifurkační přímky pro vektory $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ a $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ jsou vykresleny v obrázcích 4.8 a 4.9. Červené přímky jsou bifurkační pro vektor $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ (směr přímky nazýváme y) a zelené přímky jsou bifurkační pro vektor $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ (jejich směr nazýváme x). Kolem nich tyto Killingovy vektory vypadají jako boosty. Vektor $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ má boostový charakter okolo červených bifurkačních přímek a vektor $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ má boostový charakter okolo zelených přímek.

V jiných částech prostoročasu, ale tyto Killingovy vektory vypadají jako prostorové či časové translace. Je proto otázka, jak je označit. V této práci použijeme konvenci, ve které vybereme jednu plochu $\tau = \text{konst.}$ a vzhledem k ní Killingovy vektory označíme.

Vybereme konkrétně řez $\tau = 0$ (nebo $\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), tj. řezy obsahující červené bifurkační přímky. V tomto řezu má kolem bifurkační přímky boostový charakter Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ a proto ho označíme B_x . Podél této bifurkační přímky funguje vektor $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ jako posunutí, a proto ho označíme T_y .

Kdybychom vybrali řezy posunuté o $\frac{\pi}{2}$ ve směru τ , tj. řezy obsahující zelené bifurkační přímky, mohli bychom zavést analogické značení, ale s přidanou vlnkou. Dostali bychom $\frac{\partial}{\partial\Phi} = \tilde{T}_x$ a $\frac{\partial}{\partial\Psi} = \tilde{B}_y$. Zřejmě platí $T_y = \tilde{B}_y = \frac{\partial}{\partial\Psi}$ a $B_x = \tilde{T}_x = \frac{\partial}{\partial\Phi}$.

Nebo-li nevlknované názvy Killingových vektorů odvíjíme od okolí řezů $\tau = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Ty Killingovy vektory, co vypadají jako posunutí, nazýváme T_x a T_y ,

kdežto ty, co mají v tomto řezu bifurkační přímku, nazýváme B_x a B_y .

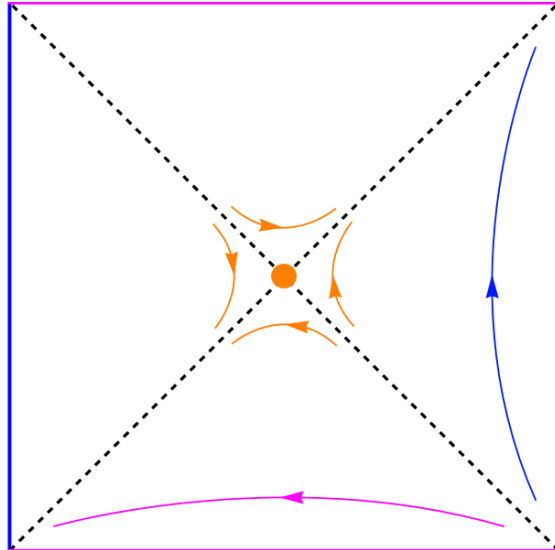
A obdobně vlnkované názvy Killingových vektorů odvíjíme od interpretace v okolí řezů $\tau = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Killingovy vektory co tam vypadají jako posunutí, nazýváme \tilde{T}_x a \tilde{T}_y , kdežto ty, co mají v tomto řezu bifurkační přímku, nazýváme \tilde{B}_x a \tilde{B}_y . Mezi způsoby značení platí vztahy $T_y = \tilde{B}_y = \frac{\partial}{\partial \Psi}$ a $B_x = \tilde{T}_x = \frac{\partial}{\partial \Phi}$.

Analogicky bychom mohli zavést $T_x = \tilde{B}_x$ a $B_y = \tilde{T}_y$. Tyto Killingovy vektory se od těch předchozích liší o otočení o $\frac{\pi}{2}$ ve φ směru či o posun o $\frac{\pi}{2}$ v τ směru. Pro tyto Killingovy vektory bychom museli zavést příslušnou analogii souřadnic Φ a Ψ .

Blízko nekonečna, má Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial \Psi}$) v oblastech L-R (resp. F-B) časupodobný charakter a tak jsme ho zde označili $\frac{\partial}{\partial T}$ (jedná se o jiné T v různých oblastech). Aplikováním rotace a translace lze na sebe vektory z oblastí L-R a F-B převádět.

Při pohledu na obrázek 4.9a vidíme, že Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ mezi oblastmi L-R a U-D „navazuje“, neboli jeho souřadnicové plochy v jistém smyslu pokračují (obdobné „navazování“ je znázorněno na obrázku 4.9b pro souřadnicové plochy Ψ).

Jak jsme naznačili výše, interpretace Killingových vektorů závisí na části anti-de Sitterova prostoročasu ve které je pozorujeme. K lepšímu znázornění tohoto faktu jsme vykreslili obrázek 4.10, ve kterém je část řezu anti-de Sitterova prostoročasu okolo zvolené bifurkační přímky. Oranžový bod na tomto obrázku reprezentuje bifurkační přímku. V jejím blízkém okolí má část Killingova pole označená oranžově charakter boostů. Část Killingova pole označená modře se nacházejí ve „velké“ prostorové vzdálenosti od bifurkační přímky a má spíše charakter časového posunutí. Část Killingova pole znázorněná fialově má charakter prostorové translace.



Obrázek 4.10: Část řezu anti-de Sitterova prostoročasu okolo zvolené bifurkační přímky. Na obrázku je oranžově naznačena oblast, kde má Killingův vektor boostový charakter, známý z diskuze Rindlerových souřadnic v Minkowského prostoročasu. Fialově je naznačena oblast, kde má stejný Killingův vektor význam prostorového posunutí a modře je naznačena oblast, kde má tento Killingův vektor interpretaci časové translace. Podle výběru bifurkační přímky, tento obrázek popisuje kterýkoliv „bázový“ Killingův vektor mající bifurkační charakter.

Obrázek 4.10 je vykreslen obecně tak, aby platil pro libovolnou bifurkační přímku. Pro vektor $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ platí, že oranžově znázorněna bifurkační přímka by měla červenou barvu. Pro vektor $\frac{\partial}{\partial \Psi}$ by bifurkační přímka byla zelená.

Shrneme-li to, celkem máme 6 „bázových“ Killingových vektorů. Vektory T_r a R_φ jsou spojené s globálními souřadnicemi. A vektory T_x, T_y a B_x, B_y jsou spojené se souřadnicemi rozdělující prostoročas na 6 oblastí, mají bifurkační charakter a různou interpretaci v různých částech prostoročasu.

Kapitola 5

Analýza Killingových vektorů v anti-de Sitterově prostoročase

V této kapitole budeme analyzovat Killingovy vektory, identifikované v anti-de Sitterově prostoročase pomocí souřadnic $\{\tau, \rho, \varphi\}$ přizpůsobených symetriím T_τ , R_φ a souřadnic $\{\mathcal{X}, \Phi, \Psi\}$ ¹ přizpůsobených symetriím T_y , B_x . Podíváme se na samotné „bázové“ Killingovy vektory, ale také vytvoříme a budeme zkoumat jejich lineární kombinace.

5.1 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_τ a R_φ

Z metriky (4.7) se nám podařilo určit dva „bázové“ Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv T_\tau, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv R_\varphi. \quad (5.1)$$

Jejich charakter nám přiblíží obrázek 4.1. První Killingův vektor odpovídá posunutí v čase a je tečný k orbitám statických pozorovatelů. Druhý popisuje prostorovou rotační symetrii a nemůže být tečný k orbitám fyzikálních pozorovatelů. Pokud spočítáme kvadráty jejich velikosti

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 = -\cosh^2 \rho, \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 = \sinh^2 \rho, \quad (5.3)$$

zjistíme, že vektor $\frac{\partial}{\partial \tau}$ je časupodobný a vektor $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ je prostorupodobný. Právě prostorupodobnost $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ způsobuje, že nemůže být tečný k orbitám fyzikálních pozorovatelů. Pokud by tečný být měl, pak by se pozorovatelé museli pohybovat nadsvětelnou rychlostí.

Vytvoříme lineární kombinaci (5.2), (5.3) a u Killingova vektoru $\frac{\partial}{\partial \tau}$ zvolíme konstantu rovnu jedné, protože má časupodobný charakter

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (5.4)$$

¹Souřadnice $\{\mathcal{X}, \Phi, \Psi\}$ jsou použity pouze v oblastech L-R, v oblastech F-P jsou použity $\{\Upsilon, \Phi, \Psi\}$ a souřadnice $\{\Theta, \Phi, \Psi\}$ jsou použity v oblastech U-D.

Spočítáme jeho kvadrát velikosti

$$\xi^2 = -\cosh^2\rho + \omega^2 \sinh^2\rho \quad (5.5)$$

a z této rovnice vyjádříme, kde má vektor světelný charakter

$$\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \tanh^2\rho = \frac{1}{\omega^2}. \quad (5.6)$$

Při interpretaci si můžeme všimnout, že hyperbolický tangens je vždy menší než jedna. To znamená, že pro $\omega < 1$ nemůže být podmínka (5.6) splněna pro žádné ρ a vektor bude mít pro všechna ρ časupodobný charakter. S orbitou takového Killingova vektoru, v libovolné vzdálenosti od osy, lze spojit fyzikální pozorovatele. Například v Minkowského prostoročasu tento případ nenastává, v něm existuje pouze jediný časupodobný Killingův vektor v nekonečnu odpovídající volbě $\omega = 0$.

Pro hodnotu parametru $\omega = 1$, by byla podmínka (5.6) splněna v $\rho \rightarrow \infty$. V nekonečnu by pak byl vektor světelný a jinde časupodobný. Tedy pro $\omega = 1$, lze také v libovolné vzdálenosti od osy spojit fyzikální pozorovatele s orbitou Killingova vektoru.

Pro $\omega > 1$, může být Killingův vektor (5.4) v závislosti na vzdálenosti od osy ρ časupodobný, světelný nebo prostorupodobný. Podmínka (5.6) je splněna pro $\rho = \operatorname{arccoth}|\omega|$, pro tuto hodnotu ρ je vektor světelný. Vektor je časupodobný na intervalu $\tanh\rho < \frac{1}{|\omega|}$ a prostorupodobný na $\tanh\rho > \frac{1}{|\omega|}$. Z těchto intervalů vyplývá, že pouze ve vzdálenosti od osy menší než $\operatorname{arccoth}\omega$, lze spojit s orbitou Killingova vektoru fyzikální pozorovatele.

Tedy pro vzdálenosti $\tanh\rho < \frac{1}{|\omega|}$ od osy z , lze zavést souřadnou soustavu přizpůsobenou rotujícím pozorovatelům. Tj. souřadnice přizpůsobené zkoumanému Killingovu vektoru ξ . Transformační vztahy do takových souřadnic jsou

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \tau, \\ \tilde{\rho} &= \rho, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi - \omega\tau. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Z těchto vztahů spočítáme báze kovektory a přepíšeme metriku (4.7). Metrika nám vyjde v nediagonálním tvaru

$$\frac{\tilde{g}}{\ell^2} = (\omega^2 \sinh^2\tilde{\rho} - \cosh^2\tilde{\rho})d\tilde{\tau}^2 + d\tilde{\rho}^2 - \omega \sinh^2\tilde{\rho} (d\tilde{\varphi}d\tilde{\tau} + d\tilde{\tau}d\tilde{\varphi}) + \sinh^2\tilde{\rho} d\tilde{\varphi}^2. \quad (5.8)$$

Z metriky určíme Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}, \quad \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}, \quad (5.9)$$

kteří mají k báze vektorům v původních souřadnicích vztah

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \omega \frac{\partial}{\partial\varphi} = \xi, \quad \frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (5.10)$$

Diskuze bude obdobná, jako v oddíle 3.1 s Killingovými vektory v polárních souřadnicích.

V případě souřadnic $\{\tau, \rho, \varphi\}$ spojených se statickými pozorovateli, jsme z metriky (4.7) identifikovali symetrie reprezentované Killingovými vektory $\frac{\partial}{\partial\tau}$ a $\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Jejich lineární kombinace reprezentuje další symetrii danou $\frac{\partial}{\partial\tau} + \omega\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

V souřadnicích $\{\tilde{t}, \tilde{\rho}, \tilde{\varphi}\}$ přizpůsobených rotujícím pozorovatelům, jsme stejné symetrie identifikovali jiným způsobem. Z metriky (5.8) jsme určili Killingovy vektory $\frac{\partial}{\partial\tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \omega\frac{\partial}{\partial\varphi} = \xi$, který odpovídá rotujícím pozorovatelům a $\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}$, který reprezentuje rotační symetrii prostoročasu. Lineární kombinací předchozích dvou bychom našli Killingův vektor statických pozorovatelů $\frac{\partial}{\partial\tau}$.

5.2 Souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x

V tomto oddíle se budeme zabývat Killingovými vektory, nalezenými pomocí souřadnic přizpůsobených symetriím T_y a B_x . Jelikož, tyto souřadnice rozdělují anti-de Sitterův prostoročas na oblasti, tak budeme Killingovy vektory analyzovat odděleně.

Killingovy vektory v oblastech L-R

Z metriky (4.12) jsme určili Killingovy vektory

$$\frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial \Psi}. \quad (5.11)$$

Kde jsme využili intuitivní označení $\frac{\partial}{\partial\Phi} \equiv \frac{\partial}{\partial T}$, protože vektor $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ má v oblastech L-R časupodobný charakter. V oddílu 4.5 jsme pojmenovali

$$\frac{\partial}{\partial T} \equiv B_x, \quad \frac{\partial}{\partial \Psi} \equiv T_y. \quad (5.12)$$

V obrázku 4.9a jsou červeně vykreslené souřadnicové plochy killingovské souřadnice Φ . Vektor $\frac{\partial}{\partial T}$ roste kolmo na tyto červené souřadnicové plochy. V blízkosti červené bifurkační přímky má charakter boostu (centrální oblast obrázku 4.9a a Killingovo vektorové pole znázorněné oranžovou barvou na obrázku 4.10) a v blízkosti nekonečna má charakter časového posunutí (oblast blízko vertikální hranice v obrázku 4.9a a Killingovo vektorové pole znázorněné modrou barvou na obrázku 4.10).

Na obrázku 4.9d jsou vykreslené souřadnicové plochy Ψ , Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ má v oblastech L-R prostorupodobný charakter a tím pádem ho lze interpretovat jako translaci T_y .

Kauzální charakter obou Killingových vektorů můžeme ověřit spočítáním kvadrátů velikostí

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^2 = -\sinh^2 \mathcal{X}, \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Psi}\right)^2 = \cosh^2 \mathcal{X}. \quad (5.14)$$

Vskutku, vektor $\frac{\partial}{\partial T}$ je vždy časupodobný a vektor $\frac{\partial}{\partial \Psi}$ je vždy prostorupodobný.

Vytvoříme jejich lineární kombinaci

$$\xi = \frac{\partial}{\partial T} + \Omega \frac{\partial}{\partial \Psi} \quad (5.15)$$

a určíme její kvadrát velikosti

$$\xi^2 = -\sinh^2 \mathcal{X} + \Omega^2 \cosh^2 \mathcal{X} . \quad (5.16)$$

Získáme podmínku pro světelnost vektoru

$$\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \tanh^2 \mathcal{X} = \Omega^2 . \quad (5.17)$$

Hyperbolický tangens je vždy menší než jedna. To znamená, že pro $\Omega > 1$ Killingův vektor nemění svůj charakter a v celém prostoročase je prostorupodobný.

Naopak pro $\Omega < 1$ Killingův vektor (5.15) svůj charakter měnit může. Vektor je časupodobný na intervalu $\tanh \mathcal{X} > |\Omega|$ a jedná se o oblast blízko nekonečna, kde převažuje charakter časového posunutí. Prostorupodobný je na intervalu $\tanh \mathcal{X} < |\Omega|$, tedy v oblasti blízko červené bifurkační přímky a v tomto případě převažuje charakter prostorové translace. Ke změně jeho prostoročasového charakteru dochází v $\mathcal{X} = \operatorname{arctanh} |\Omega|$, pro tuto hodnotu je vektor světelný.

Pro hodnotu parametru $\Omega = 1$ by byl vektor všude prostorupodobný a světelnosti by se blížil pro $\mathcal{X} \rightarrow \infty$.

Killingovy vektory v oblastech F-B

Killingovy vektory určené z (4.18) jsou

$$\frac{\partial}{\partial T} , \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} , \quad (5.18)$$

kde jsme obdobně, jako v oblastech L-R, použili intuitivní označení pro časupodobný Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial \Psi} \equiv \frac{\partial}{\partial T}$.

Zelené souřadnicové plochy killingovské souřadnice Ψ jsou vykresleny na obrázku 4.9b. Vidíme z nich, že v oblastech F-B má Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial T}$ charakter časového posunutí v blízkosti nekonečna (oblast blízko vertikální hranice v obrázku 4.9b a Killingovo vektorové pole znázorněné modrou barvou na obrázku 4.10) a v blízkosti zelené bifurkační přímky má charakter boostového Killingova vektoru \tilde{B}_y (centrální oblast obrázku 4.9b a Killingovo vektorové pole znázorněné oranžovou barvou na obrázku 4.10).

Dle souřadnicových ploch vykreslených na obrázku 4.9c má Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ v oblastech F-B charakter prostorového posunutí \tilde{T}_x .

Kauzální charakter Killingových vektorů (5.18) ověříme spočítáním kvadrátů velikostí

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \right)^2 = -\sinh^2 \Upsilon , \quad (5.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Phi} \right)^2 = \cosh^2 \Upsilon . \quad (5.20)$$

Vektor $\frac{\partial}{\partial T}$ má vždy časupodobný charakter a vektor $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ má vždy prostorupodobný charakter.

Jejich lineární kombinace

$$\xi = \frac{\partial}{\partial T} + \Omega \frac{\partial}{\partial \Phi} \quad (5.21)$$

má kvadrát velikosti

$$\xi^2 = -\sinh^2\Upsilon + \Omega^2 \cosh^2\Upsilon \quad (5.22)$$

a z ní plynoucí podmínku pro světelnost vektoru

$$\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \tanh^2\Upsilon = \Omega^2. \quad (5.23)$$

Pokud je parametr $\Omega > 1$, potom Killingův vektor (5.21) nemění svůj prostorovo-časový charakter a je v celém prostoročase prostorupodobný.

Pro $\Omega < 1$ tento charakter měnit může. Vektor tento charakter mění a je světelný v $\Upsilon = \operatorname{arctanh}|\Omega|$. Na intervalu $\tanh\Upsilon > |\Omega|$ je vektor časupodobný a jedná se o oblast blízko nekonečna, kde převažuje charakter časového posunutí. Na intervalu $\tanh\Upsilon < |\Omega|$ je vektor prostorupodobný. V tomto případě se nachází v oblasti blízko zelené bifurkační přímky a převažuje jeho charakter prostorové translace.

Pro hodnotu parametru $\Omega = 1$ by byl vektor všude prostorupodobný a světelnosti by se blížil pro $\Upsilon \rightarrow \infty$.

Killingovy vektory v oblastech U-D

Killingovy vektory určené z (4.24) jsou

$$\frac{\partial}{\partial\Phi} \equiv B_x, \quad \frac{\partial}{\partial\Psi} \equiv T_y. \quad (5.24)$$

V tomto případě, nemůžeme ani jeden z nich spojit s časovou souřadnicí, protože nemají v oblastech U-D charakter časového posunutí. To lze ověřit ze souřadnicových ploch na obrázku 4.9a a 4.9b, kde vidíme, že růst vektorů $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ a $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ v oblastech U-D má všude prostorupodobný charakter. Výpočtem se lze přesvědčit, že jejich kvadrát velikosti je vždy kladný

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Psi}\right)^2 = \cos^2\Theta, \quad (5.25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Phi}\right)^2 = \sin^2\Theta. \quad (5.26)$$

Oba vektory jsou všude prostorupodobné. Ověříme že, stejnou vlastnost bude mít jejich lineární kombinace

$$\xi = \alpha \frac{\partial}{\partial\Psi} + \beta \frac{\partial}{\partial\Phi}. \quad (5.27)$$

Vskutku, kvadrát velikosti je vždy kladný,

$$\xi^2 = \alpha^2 \cos^2\Theta + \beta^2 \sin^2\Theta. \quad (5.28)$$

BTZ černé díry

V tomto pododdíle vysvětlíme, že naše diskuze Killingových vektorů v oblastech L-R (resp. F-P) je relevantní i pro diskuze systémů s rotační symetrií, konkrétně pro diskuze tzv. BTZ černých děr [7].

V oblastech L-R máme přítomné dva Killingovy vektory, jsou jimi časový Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial T}$ a translační Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\Psi}$.

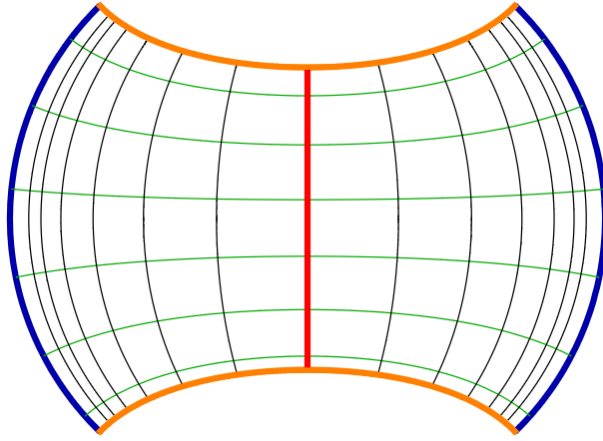
V naší práci nás především zajímají lineární kombinace časového a rotačního Killingova vektoru. V oblasti L-R je časový Killingův vektor přítomen, ale chybí nám vektor rotační. Prostorčas však lze přizpůsobit tak, že z translačního vektoru $\frac{\partial}{\partial \Psi}$ získáme rotační Killingův vektor.

Trik spočívá v tom, že omezíme hodnoty souřadnice Ψ . Z původního intervalu $\Psi \in (-\infty, \infty)$ přejdeme k $\Psi \in (-\Psi_0, \Psi_0)$. Na obrázku 5.1 jsou v oblastech L-R oranžově vyznačeny tyto hodnoty $\pm\Psi_0$.

Dalším krokem je zperiodizování tohoto intervalu. Nebo-li slepení dvou oranžových ploch, které jsou navzájem izometrické. Tímto zperiodizováním, získáme z translačního vektoru $\frac{\partial}{\partial \Psi}$ rotační Killingův vektor. A tím pádem lineární kombinace

$$\xi = \frac{\partial}{\partial T} + \Omega \frac{\partial}{\partial \Psi} \quad (5.29)$$

již reprezentuje kombinaci statické a rotační symetrie. Tímto postupem jsme „uměle“ vytvořili rotačně symetrický prostorčas.



Obrázek 5.1: Řez anti-de Sitterovým prostorčasem v $\tau = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Na obrázku je v oblasti L-R znázorněno omezení souřadnice $\Psi \in (-\Psi_0, \Psi_0)$. Tyto hranice ($\pm\Psi_0$) jsou vyznačeny oranžovou barvou.

Ukazuje se (např. [3]), že touto konstrukcí se dostane velmi zajímavý prostorčas reprezentující BTZ černou díru [7] (zkratka se odkazuje k autorům M. Bañados, C. Teitelboim a J. Zanelli). Oblasti L a R v něm reprezentují dvě různé vnější oblasti černé díry (spojené Einsteinový-Rösenovým mostem) a oblast U (resp. D) reprezentuje vnitřek černé (resp. bílé) díry.

Samozřejmě, zperiodizování souřadnice Ψ je nutno provést v celém prostorčase, nejen v řezu $\tau = 0$, jak je znázorněno v obrázku 5.1. Inspekci obrázku 4.9b lze nahlédnout, že plochy $\Psi = \pm\Psi_0$ (reprezentované zelenými křivkami) se nakonec protnou v zelených bifurkačních přímkách na $\tau = \frac{\pi}{2}$ a $\tau = -\frac{\pi}{2}$. Výsledný prostorčas je v těchto průsečících singulární – tato singularita odpovídá singularitě uvnitř černé díry.

Další diskuze BTZ černých děr [7] přesahuje rozsah této práce. Pro stručný úvod do problematiky a názornou vizualizaci viz [3]. Obecné vlastnosti černých děr ve čtyřech dimenzích lze nalézt v [5] a [6].

Konečně poznamenejme, že analogicky bychom zavedli rotačně symetrický prostorčas v oblastech F-B, pokud bychom zperiodizovali souřadnici Φ .

Závěr

V této práci jsme zkoumali vlastnosti Killingových vektorů, které mohou mít interpretaci rotační a statické symetrie.

Zavedli jsme pojem metriky a ukázali, jak lze z jejího tvaru určit Killingovy vektory. Poté jsme vyložili geometrický popis Minkowského prostoročasu. V třídimenziálním prostoročasu jsme diskutovali polární souřadnice. K popisu čtyřdimenziálního prostoročasu jsme zavedli cylindrické a Rindlerovy souřadnice. Ukázali jsme, že souřadnice přizpůsobené boostové symetrii mají singulární charakter a kolem tzv. bifurkační roviny (přímky ve třech dimenzích) rozdělují prostoročas na čtyři sousedící oblasti. Na závěr druhé kapitoly jsme diskutovali strukturu symetrií v Minkowského prostoročasu.

Ve třetí kapitole jsme analyzovali Killingovy vektory z třídimenziálního a čtyřdimenziálního Minkowského prostoročasu. V polárních souřadnicích jsme našli dva Killingovy vektory a vykreslili orbity jejich lineární kombinace. V cylindrických souřadnicích jsme našli tři Killingovy vektory a vykreslili prostorovou stopu jejich lineární kombinace. Analyzovali jsme i její podpřípady s lineární kombinací dvou Killingových vektorů. Při sjednocení Rindlerových a polárních souřadnic jsme našli jeden boostový a jeden rotační Killingův vektor. Na obrázcích jsme vykreslili, jak vypadají hranice světelnosti konkrétního Killingova vektoru.

Dále jsme rozebrali geometrii třídimenziálního anti-de Sitterova prostoročasu. Použili jsme souřadnice přizpůsobené symetriím T_τ a R_φ a souřadnice přizpůsobené symetriím T_y a B_x . Ukázali jsme, jak lze vizualizovat anti-de Sitterův prostoročas. Popsali jsme tři druhy kompaktifikace, byli jimi Beltrami-Kleinova, Poincarého a konformně einsteinovská kompaktifikace. U souřadnic přizpůsobených symetriím T_y a B_x jsme zavedli transformační vztahy do oblastí L-R, F-B a U-D. Na řezech kompaktifikovaného anti-de Sitterova prostoročasu jsme ukázali, jak je rozdělen na jednotlivé oblasti a jak v těchto řezech vypadají souřadnicové plochy. V závěru 4. kapitoly jsme diskutovali strukturu a označení symetrií třídimenziálního anti-de Sitterova prostoročasu. Popsali jsme „bázové“ Killingovy vektory T_τ , R_φ , T_x , T_y , B_x a B_y .

V poslední kapitole, jsme analyzovali Killingovy vektory nalezené v třídimenziálním anti-de Sitterově prostoročase. U Killingových vektorů jsme určili jejich prostoročasový charakter v závislosti na souřadnicích a parametru.

Shrnutí našich výsledků je následující. V třídimenziálním Minkowského prostoročase jsme pomocí polárních souřadnic našli Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Zjistili jsme, že v dostatečně blízkém okolí osy z bude mít vektor časupodobný charakter a v této oblasti ho lze spojit s rotujícími pozorovateli.

Zavedením cylindrických souřadnic v čtyřdimenziálním Minkowského prostoročase jsme našli Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + v \frac{\partial}{\partial z}$. Tato lineární kombinace

má obdobný charakter, jako kombinace získaná z polární symetrie. Tedy dostatečně blízko osy z bude mít vektor časupodobný charakter a v této oblasti s ním lze spojit rotující pozorovatele. Oba dva vektory mají globální charakter.

Spojením Rindlerových a polárních souřadnic jsme našli Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\beta} + \Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}$ v oblastech F-P a vektor $\frac{\partial}{\partial\tau} + \Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}$ v oblastech L-R. Tyto vektory tvoří kombinaci rotace a boostu. Zjistili jsme, že kombinace vektorů v oblasti F-P bude obsahovat dva prostorupodobné Killingovy vektory, a proto s nimi nikde nelze spojit fyzikální pozorovatele. Naopak v oblasti L-R může být pro dostatečně malé ρ vektor časupodobný a lze ho v této oblasti spojit s fyzikálními pozorovateli. Vektory $\frac{\partial}{\partial\beta}$ a $\frac{\partial}{\partial\tau}$ dohromady tvoří jeden Killingův vektor, který má globální charakter. Jeho interpretace závisí na oblasti ve které ho pozorujeme.

V anti-de Sitterově prostoročase jsme v souřadnicích $\{\tau, \rho, \varphi\}$ našli Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial\tau} + \omega\frac{\partial}{\partial\varphi}$. V dostatečně blízkosti počátku je vektor časupodobný, lze s ním spojit fyzikální pozorovatele a v nekonečné vzdálenosti je prostorupodobný a nelze s ním zavést fyzikální pozorovatele.

V souřadnicích přizpůsobených symetriím T_y a B_x jsme našli Killingovy vektory $\frac{\partial}{\partial T} + \Omega\frac{\partial}{\partial\Psi}$ v oblastech L-R, $\frac{\partial}{\partial T} + \Omega\frac{\partial}{\partial\Phi}$ v oblastech F-B a $\alpha\frac{\partial}{\partial\Psi} + \beta\frac{\partial}{\partial\Phi}$ v oblastech U-D. V oblastech L-R (resp. F-B) je charakter Killingova vektoru $\frac{\partial}{\partial T} + \Omega\frac{\partial}{\partial\Psi}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial T} + \Omega\frac{\partial}{\partial\Phi}$) závislý na velikosti parametru Ω . Pro velikost parametru větší než jedna jsou oba Killingovy vektory vždy prostorupodobné a pro velikost parametru menší než jedna mohou měnit charakter. Prostorupodobné jsou pak v blízkosti bifurkační přímky a časupodobné ve velké vzdálenosti od ní. V oblastech U-D jsou vektory vždy prostorupodobné. Killingovy vektory $\frac{\partial}{\partial\Phi}$ a $\frac{\partial}{\partial\Psi}$ mají bifurkační charakter a jejich interpretace závisí na části prostoročasu, ve které je pozorujeme.

Přínos bakalářské práce vidím v tom, že přibližuje problematiku Killingových vektorů v Minkowském a anti-de Sitterově prostoročase. K tomuto účelu jsme vykreslili velké množství obrázků usnadňující jejich pochopení.

Literatura

- [1] KRTOUŠ, P. *Interní materiály a konzultace*. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, 2024.
- [2] KRTOUŠ, P. *Proseminář z teoretické fyziky*. Záznamy přednášek, <https://utf.mff.cuni.cz/vyuka/NOFY070/2022/prednasky7681.html>, 2022.
- [3] KLOZOVÁ, E. *Geometrie 2+1 dimenzionálních černých děr*. Bakalářská práce, vedoucí Krtouš, Pavel. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, 2013.
- [4] LUBER, T. *Lobačevského geometrie v anti-de Sitterově vesmíru*. Bakalářská práce, vedoucí Krtouš, Pavel. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, 2008.
- [5] GRIFFITHS, J.B., PODOLSKÝ, J. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [6] HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. New York: Cambridge University Press, 1973.
- [7] BAÑADOS, M., TEITELBOIM, C., ZANELLI, J. *The Black Hole in Three Dimensional Spacetime*. Phys.Rev.Lett. 69 (1992), 1849-1851.