MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Mykyta Dubov

Filtrace modulů

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Trlifaj, CSc., DSc.
Studijní program: Obecná matematika
Studijní obor: Matematické struktury

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Tímto bych chtěl poděkovat vynikající osobnosti a svému vedoucímu prof. RNDr. Janu Trlifajovi, CSc., DSc. za jeho vedení a schopnost zprostředkovávat porozumění předmětů studia, za neustalou ochotu nasměrovávat, produktivitu a snahu předat studentovi všechny svoje znalosti a přiblížit studenta k pro čtenáře nejpřesnějším a nejkomfortnějším standardům psání bakalářské práce.

Název práce: Filtrace modulů

Autor: Mykyta Dubov

Katedra algebry: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Trlifaj, CSc., DSc., Katedra algebry

Abstrakt: Cílem této práce je seznámit čtenáře s pojmem $\mathcal{C}$-filtrace, ukázat vlastnosti speciálních případů $\mathcal{C}$-filtrací a zkonstruovat strukturu rozšiřující obecnou $\mathcal{C}$-filtraci. První kapitola se zabývá definicí $\mathcal{C}$-filtrace, transfinitní kompoziční řady a její délky, semiartinovského modulu, sokl-posloupnosti a její délky, důkazem Jordan-Hölderovy věty pro transfinitní kompoziční řady a důkazem vlastností, příslušných obecnému semiartinovskému modulu. Ve druhé kapitole se definuje pojem uzavřené podmnožiny ordinálu a jeho vlastnosti. Tento pojem je klíčový pro důkaz Hillova lemmatu, který pro dostatečně obecnou $\mathcal{C}$-filtraci poskytuje úplný, distributivní, hustý podsvaz obsahující danou $\mathcal{C}$-filtraci. Poslední třetí kapitola se zabývá duálním pojmem k pojmu sokl-posloupnosti, klesající Loewyho řadou, důkazem rovnosti jejich délek pro moduly konečné délky a analýzou vztahů jejích délek pro případy obecných modulů.

Klíčová slova: Filtrace modulu, Hillovo lemma, semiartinovský modul, rostoucí a klesající Loewyho řady, Jordan-Hölderova věta.

Title: Filtrations of modules

Author: Mykyta Dubov

Department of Algebra: Department of Algebra

Supervisor: prof. RNDr. Jan Trlifaj, CSc., DSc., Department of Algebra

Abstract: The aim of this thesis is to familiarise the reader with the concept of a $\mathcal{C}$-filtration, to show properties of special instances of $\mathcal{C}$-filtrations and to construct structures corresponding to general $\mathcal{C}$-filtrations. The first chapter deals with the definition of a $\mathcal{C}$-filtration, a transfinite composition series and its length, the semiartinian module, the socle-sequence and its length, a proof of the Jordan-Hölder Theorem for transfinite composition series and a proof of the properties relevant to general semiartinian modules. In the second chapter, the concept of a closed subset of an ordinal and its properties are defined and proved, this concept is key to the proof of Hill's Lemma, which for a general $\mathcal{C}$-filtration provides a complete, distributive, dense sublattice containing the given $\mathcal{C}$-filtration. The last third chapter deals with the dual concept to the concept of the socle-sequence, the decreasing Loewy series. We prove the equality of their lengths for modules of finite length and analyze the relations of their lengths for the case of general modules.

Keywords: Filtration of a module, Hill Lemma, semiartinian module, lower and upper Loewy series, Jordan-Hölder Theorem.

Obsah

Úvod

Pojem $\mathcal{C}$-filtrace je relativně novým pojmem v matematice a je transfinitním zobecněním pojmu konečné filtrace rostoucím řetězcem podmodulů. Tento pojem umožňuje zobecnit relevantní konstrukce pro konečně generované moduly a rozšířit je na nekonečně generované moduly.

Naším cílem je stručně popsat vlastnosti příslušející speciálním případům $\mathcal{C}$-filtrací, zobecňující konstrukce pro moduly konečné délky a sestrojit strukturu, příslušnou dostatečně obecným případům $\mathcal{C}$-filtrací pomoci konstrukce, objevené ve speciálním případě P. Hillem v 80-tých letech 20. století. Tato konstrukce dává dostatečně bohatou strukturu, obsahující danou $\mathcal{C}$-filtraci.

Podíváme se také na dualizaci k speciálním případům $\mathcal{C}$-filtrací a rozebereme případy, pro které délky těchto duálů jsou stejné a pro které se mohou libovolně lišit.

1. Základní pojmy a jejich vlastnosti

1.1 $\mathcal{C}$-filtrace

V této práci pod pojmem modul rozumíme pravý R-modul nad asociativním unitárním okruhem R. Definujeme základní pojmy pro další výzkum:

Definice 1.1. *Nechť R je okruh, M - modul a σ ordinál. Řetězec podmodulů $\mathcal{M}$ = ($M_\alpha|\alpha \leq \sigma$) modulu M se nazývá* ***spojitý****, pokud $M_0 = 0, M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$ pro každé $\alpha < \sigma$ a $M_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} M_\beta$ pro každý limitní ordinál $\alpha \leq \sigma$.*

Definice 1.2. *Nechť $\mathcal{C}$ $\subseteq$Mod-R. Pak spojitý řetězec $\mathcal{M}$ se nazývá* ***$\mathcal{C}$-filtrace*** *modulu M, pokud $M = M_\sigma$ a každý z modulů $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ ($\alpha < \sigma$) je izomorfní nějakému prvku z $\mathcal{C}$.*

Definice 1.3. *M nazveme* ***$\mathcal{C}$-filtrovaný*** *za předpokladu, že M má aspoň jednu $\mathcal{C}$-filtraci $\mathcal{M}$=(M_α | $\alpha \leq \sigma$).Pokud M je $\mathcal{C}$-filtrovaný modul, potom M také nazýváme* ***transfinitní rozšíření*** *modulů z $\mathcal{C}$. Pokud σ je konečný, potom M nazveme* ***konečně $\mathcal{C}$-filtrovaný****.*

Třídu všech $\mathcal{C}$-filtrovaných modulů budeme značit Filt($\mathcal{C}$).

Jako příklad můžeme uvést semiartinovské moduly, které definujeme později a klasické moduly konečné délky.

Definice 1.4. *Třídu modulů $\mathcal{A}$ nazýváme* ***uzavřenou na transfinitní rozšíření****, pokud $\mathcal{A}$ zahrnuje všechny $\mathcal{A}$-filtrované moduly. Zřejmě to implikuje, že $\mathcal{A}$ je uzavřená na rozšíření a direktní součty.*

Lemma 1.5. *Pokud třída modulů $\mathcal{C}$ je uzavřená na transfinitní rozšíření, potom třída $\mathcal{D}$ všech direktních sčítanců modulů z $\mathcal{C}$ je také uzavřená na transfinitní rozšíření.*

Důkaz. Dokážeme indukcí podle α, že každá $\mathcal{D}$-filtrace ($M_\alpha \mid \alpha \leq \sigma$) modulu M splňuje $M_\alpha \in \mathcal{D}$ pro každé $\alpha \leq \sigma$. Přesněji, indukcí podle α zkonstruujeme $\mathcal{C}$-filtraci ($P_\alpha \mid \alpha \leq \sigma$) a systém modulů ($E_\alpha \mid \alpha < \sigma$) $\subseteq \mathcal{D}$ takový, že $P_\alpha = M_\alpha \oplus \bigoplus_{\beta<\alpha} E_\alpha$ pro každé $\alpha \leq \sigma$.

Zaprvé, nechť $M_0 = E_0 = P_0 = 0$. V nelimitním kroku pro $\alpha < \sigma$, máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1} \to D_\alpha \to 0, \text{ pro nějaké } D_\alpha \in \mathcal{D}.$$

Podle indukčního předpokladu, $P_\alpha = M_\alpha \oplus \bigoplus\limits_{\beta<\alpha} E_\beta \in C$, takže máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to P_\alpha \subseteq (M_{\alpha+1} \oplus \bigoplus_{\beta<\alpha} E_\beta) \to D_\alpha \to 0.$$

Dále, existuje $E_\alpha \in \mathcal{D}$ takové, že $C_\alpha = D_\alpha \oplus E_\alpha \in \mathcal{C}$ a máme krátkou exáktní posloupnost:

$$0 \to P_\alpha \subseteq (M_{\alpha+1} \oplus \bigoplus_{\beta\leq\alpha} E_\beta) \to C_\alpha \to 0.$$

Jelikož $\mathcal{C}$ je uzavřený na transfinitní rozšíření, prostřední faktor

$P_{\alpha+1} := (M_{\alpha+1} \oplus \bigoplus_{\beta\leq\alpha} E_\beta) \in \mathcal{C}$, tedy $M_{\alpha+1} \in \mathcal{D}$.

Pokud $\alpha \leq \sigma$ je limitní ordinál, potom $\bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta \oplus \bigoplus_{\beta<\alpha} E_\beta$ podle konstukce výše. Nechť $P_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$, máme $P_\alpha \in \mathcal{C}$, jelikož $\mathcal{C}$ je uzavřený na transfinitní rozšíření. Protože $P_\alpha = M_\alpha \oplus \bigoplus_{\beta<\alpha} E_\beta$, máme $M_\alpha \in \mathcal{D}$.

□

Můžeme zobecnit pojem kompoziční řady a definovat její délku jako ordinál. Potom pro dvě kompoziční řady jednoho modulů dokážeme zobecněnou Jordanovu-Hölderovu větu:

Definice 1.6. *Spojitý řetězec podmodulů $\mathcal{M} = (M_\alpha | \alpha \leq \sigma)$ se nazývá* ***transfinitní kompoziční řada modulu M****, pokud $M_0 = 0, M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$ pro každé $\alpha < \sigma$, $M = M_\sigma$ a $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ je jednoduchý modul pro každé $\alpha < \sigma$.*

Definice 1.7. *Okruh R je* ***zprava semiartinovský****, pokud jako regulární pravý R-modul má transfinitní kompoziční řadu. R-modul M je* ***semiartinovský****, pokud má aspoň jednu transfinitní kompoziční řadu.*

Také připomeňme si, že modul je konečné délky, pokud má konečnou kompoziční řadu, tedy je artinovský a noetherovský. Zřejmě každý artinovský modul je semiartinovský.

Definice 1.8. *Nechť M je modul obsahující dva trasfinitní řetězce podmodulů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$*

$\mathcal{X}$: $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_\alpha \subseteq X_{\alpha+1} \subseteq \ldots \subseteq X_\sigma = M$

a

$\mathcal{Y}$: $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq Y_\delta \subseteq Y_{\delta+1} \subseteq \ldots \subseteq Y_\tau = M$

Potom můžeme ***zjemnit $\mathcal{X}$ pomocí $\mathcal{Y}$*** *následujícím způsobem:*

Pro každé $\alpha < \sigma$ a $\delta \leq \tau$, $X_{\alpha\delta} = X_\alpha + (X_{\alpha+1} \cap Y_\delta)$.

Můžeme si všimnout, že pro každé $\alpha < \sigma$ máme řetězec

$X_\alpha = X_{\alpha 0} \subseteq X_{\alpha 1} \subseteq \ldots \subseteq X_{\alpha\delta} \subseteq X_{\alpha,\delta+1} \subseteq \ldots \subseteq X_{\alpha\tau} = X_{\alpha+1}$

tedy moduly $(X_{\alpha\delta} \mid \alpha \leq \sigma, \delta \leq \tau)$ a $M = X_{\sigma\tau}$ tvoří řetězec $\mathcal{U}$ podmodulů M, pojmenujeme jej ***zjemnění $\mathcal{X}$ pomocí $\mathcal{Y}$****.*

Podobným způsobem můžeme definovat ***zjemnění $\mathcal{Y}$ pomocí $\mathcal{X}$*** *jako řetězec $\mathcal{V} = (Y_{\delta\alpha} \mid \alpha \leq \sigma, \delta \leq \tau)$.*

Uvažujme sousední faktory řetězců $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$, přesněji :

$F_{\alpha\delta} = X_{\alpha,\delta+1}/X_{\alpha,\delta}$ *a* $G_{\delta\alpha} = Y_{\delta,\alpha+1}/Y_{\delta,\alpha}$

Lemma 1.9. ***(Zjemnění je spojité).*** *Pro výše definované zjemnění dokážeme, že pro každé $\alpha \leq \sigma$ a pro každý limitní ordinál $\delta \leq \tau$: $X_{\alpha,\delta} = \bigcup_{\gamma<\delta} X_{\alpha,\gamma}$*

Důkaz. $X_{\alpha,\delta} = X_\alpha + (Y_\delta \cap X_{\alpha+1}) = X_\alpha + ((\bigcup_{\gamma<\delta} Y_\gamma) \cap X_{\alpha+1}) = X_\alpha + \bigcup_{\gamma<\delta}(Y_\gamma \cap X_{\alpha+1})$, jelikož $(Y_\gamma \cap X_{\alpha+1})$ je řetězec podmodulů pro $\gamma < \delta$, potom $\bigcup_{\gamma<\delta}(Y_\gamma \cap X_{\alpha+1}) = \sum_{\gamma<\delta}(Y_\gamma \cap X_{\alpha+1})$, výsledně $X_\alpha + \bigcup_{\gamma<\delta}(Y_\gamma \cap X_{\alpha+1}) = X_\alpha + \sum_{\gamma<\delta}(Y_\gamma \cap X_{\alpha+1}) = \sum_{\gamma<\delta}(X_\alpha + (Y_\gamma \cap X_{\alpha+1})) = \bigcup_{\gamma<\delta}(X_\alpha + (Y_\gamma \cap X_{\alpha+1})) = \bigcup_{\gamma<\delta} X_{\alpha,\gamma}$

□

Tvrzení 1.10. ***(Zassenhausovo lemma pro transfinitní délky kompozičních řad).*** *$F_{\alpha\delta} \cong G_{\delta\alpha}$ pro každé $\alpha < \sigma$ a $\delta < \tau$*

Důkaz. Podle 2. věty o isomorfismu pro A $= X_{\alpha+1} \cap Y_{\delta+1}$ a $B = X_{\alpha\delta} = X_\alpha + (X_{\alpha+1} \cap Y_\delta)$, dostáváme:

$F_{\alpha\delta} = X_{\alpha,\delta+1}/X_{\alpha,\delta} = (A+B)/B \cong A/(A \cap B) = A/((X_\alpha \cap Y_{\delta+1}) + (X_{\alpha+1} \cap Y_\delta))$

Symetricky, pro A $= Y_{\delta+1} \cap X_{\alpha+1}$ a $C = Y_{\delta\alpha} = Y_\delta + (Y_{\delta+1} \cap X_\alpha)$

$G_{\delta\alpha} = Y_{\delta,\alpha+1}/Y_{\delta,\alpha} = (A+C)/C \cong A/(A \cap C) = A/((X_\alpha \cap Y_{\delta+1}) + (X_{\alpha+1} \cap Y_\delta))$.

□

Tvrzení 1.11. ***(Jordan-Höledrova věta pro transfinitní délky kompozičních řad).*** *Nechť' M je semiartinovský modul. Nechť' $\mathcal{X} = (X_i \mid i < \sigma)$ a $\mathcal{Y} = (Y_j \mid j < \delta)$ jsou dvě transfinitní kompoziční řady M délky σ a δ(kde σ a δ jsou ordinály).Potom $card(\sigma) = card(\delta)$ a pro každé $\gamma < \delta$ existuje $\theta < \sigma$ takové,že ${}^{X_{\theta+1}}/_{X_\theta} \cong {}^{Y_{\gamma+1}}/_{Y_\gamma}$.*

Důkaz. Jelikož kompoziční řada $\mathcal{X}$ nemůže být zjemněna, pro každé $\alpha < \sigma$ existuje právě jedno $\phi(\alpha) = \theta$, $\theta < \delta$ takové, že $X_\alpha = X_{\alpha,\theta}$ a $X_{\alpha+1} = X_{\alpha,\theta+1}$. Je to (unikátní) skok z X_α do $X_{\alpha+1}$ realizovaný v $\theta - tém$ kroku zjemnění $\mathcal{X}$ pomocí $\mathcal{Y}$.

Pomocí Zassenhausova lemmatu výše, také $Y_\theta = Y_{\theta\alpha}$ a $Y_{\theta+1} = Y_{\theta,\alpha+1}$, tedy (unikátní) skok z Y_θ do $Y_{\theta+1}$ je realizován v $\alpha - tém$ kroku zjemnění $\mathcal{Y}$ pomocí $\mathcal{X}$.

Záměnou rolí $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, dostaneme $\omega : \delta \to \sigma$ takový, že $\forall \theta < \delta\ \exists! \alpha < \sigma$: $\omega(\theta) = \alpha$.

Navíc $\omega \circ \phi = id_\sigma$ a $\phi \circ \omega = id_\delta$.Tedy ω a ϕ jsou navzájem inverzní bijekce a platí, že $\forall \gamma < \delta\ \exists \theta < \sigma$ takové, že ${}^{X_{\theta+1}}/_{X_\theta} \cong {}^{Y_{\gamma+1}}/_{Y_\gamma}$

□

Různé kompoziční řady jsou vždy stejných kardinalit, ale mohou být různých ordinálních typů.

Příklad 1.12. *Položíme $R = \mathbb{Z}$ a $\mathcal{C} = \{\mathbb{Z}_p\}$. Potom $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$-Prüferová p-grupa je $\mathbb{Z}$-modul. Nechť $A = \bigoplus_{n \in \aleph_0} \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Potom definujeme dvě různé kompoziční řady:*

- $A_n = \mathbb{Z}_{p^n} \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

$A_\omega = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

$A_{\omega+n} = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^n} \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

$A_{2\cdot\omega} = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

$A_{n\cdot\omega} = \underbrace{\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{n\text{-}krát} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

.....

$A_{\omega\cdot\omega} = \underbrace{\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus ,..., \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}}_{\omega\text{-}krát}$

Takovým to způsobem vybudujeme kompoziční řadu za $\omega \cdot \omega$ kroků, jelikož $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ v každé složce direktní sumy dostaneme po ω opakováních a tuto operaci uděláme ω-krát, takže ordinální typ této řady je $\omega \cdot \omega$.

- *Druhou řadu očíslujeme jinak, přesněji "diagonální metodou hada", tedy bychom postupně vybudovali transfinitní rozšíření následně:*

  $A_0 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

  $A_1 = \mathbb{Z}_p \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

  $A_2 = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

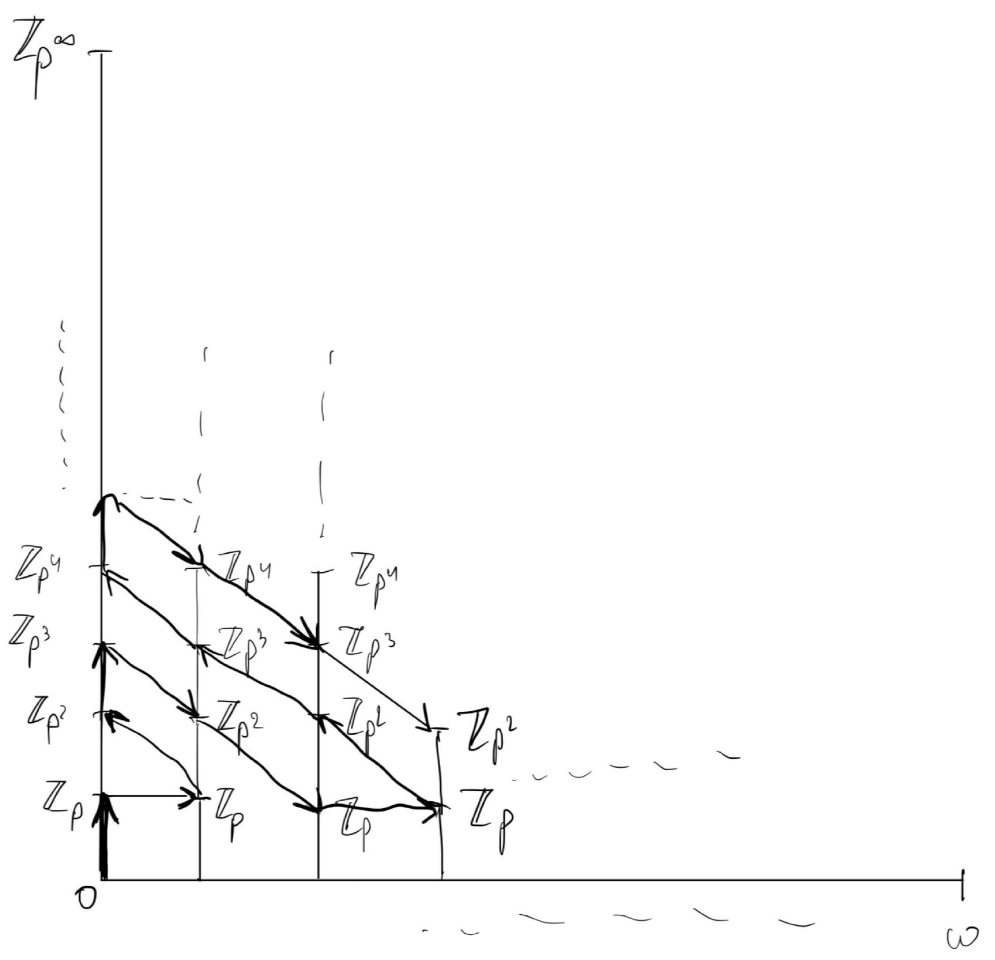
  $A_3 = \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

  $A_4 = \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

  $A_5 = \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

  $A_6 = \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$

  $A_7 = \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p ... \oplus 0$



Jelikož pro každá daná n a m dosáhneme modulu, majícího v prvních m složkách direktní sumy modul $\mathbb{Z}_{p^n}$, potom ordinální typ této řady je ω.

Z toho je hned vidět, že tyto dvě kompoziční řady jsou stejné délky, ale různých ordinálních typů.

1.2 Sokl-posloupnost a základní vlastnosti

Rozebereme podrobněji další příklad $\mathcal{C}$-filtrace, nazývající se sokl-posloupností a popíšeme zajímavé vlastnosti, které se dědí na podmoduly a faktor-moduly pro moduly s danou $\mathcal{C}$-filtraci.

Definice 1.13. *Nechť M je modul,definujeme **sokl-posloupnost** M následujícím způsobem:*

Pro každý nelimitní ordinál $\alpha < \sigma$ induktivně definujeme $soc^{\alpha}M$ následovně: $\mathbf{soc^0M = 0}$ a pokud $soc^{\alpha}M$ je už definované a $\pi : M \to M/soc^{\alpha}M$ definuje kanonický epimorfismus, položme

$\mathbf{soc^{\alpha+1}M} = \pi^{-1}(soc(M/soc^{\alpha}M))$

Pro každý limitní ordinál $\alpha < \sigma$ položme $\mathbf{soc^{\alpha}}M = \bigcup_{\beta<\alpha} soc^{\beta}M$

Tedy, podle definice, $soc^{\alpha}M \subseteq soc^{\alpha+1}M$ a dostáváme spojitý řetězec

$0 = soc^0M \subseteq soc(M) = soc^1M \subseteq soc^2M \subseteq ... \subseteq soc^{\alpha}M \subseteq ...M$

*podmodulů M. Pokud M je semiartinovský, potom existuje ordinál σ takový, že $soc^{\sigma}M = M$, pojmenujeme nejmenší takový ordinál **délkou sokl-posloupnosti** $(soc^{\alpha}M \mid \alpha \leq \sigma)$ modulu M. Pro obecný modul M, délkou sokl-posloupnosti rozumíme nejmenší ordinál σ takový, že $soc^{\sigma}M = M$, jinak řekneme, že sokl-délka není definována.*

Lemma 1.14. *Nechť M je semiartinovský modul sokl-délky σ a $N \leq M$, označíme-li jako $(S_{\alpha}|\alpha \leq \sigma)$ sokl-posloupnost M, potom pro spojité řetězce*

$(i)(N_{\alpha} : N_{\alpha} = N + S_{\alpha}|\alpha \leq \sigma)$

$(ii)N_{\alpha}$=$(N\cap S_{\alpha}|\alpha \leq \sigma)$

jsou faktory $N_{\alpha+1}/N_{\alpha}$ totálně rozložitelné moduly pro každé $\alpha < \sigma$.

Důkaz.

- (i) $N_{\alpha+1}/N_{\alpha} = N+S_{\alpha+1}/N+S_{\alpha} \cong S_{\alpha+1}/(N+S_{\alpha})\cap S_{\alpha+1}$ je totálně rozložitelný modul,jelikož $S_{\alpha} \subseteq (N+S_{\alpha}) \cap S_{\alpha+1} \subseteq S_{\alpha+1}$ a $S_{\alpha+1}/S_{\alpha}$ je totálně rozložitelný.
- (ii) N_{α}=(N$\cap S_{\alpha}|\alpha \leq \sigma$), potom $N_{\alpha+1}/N_{\alpha} = N\cap S_{\alpha+1}/N\cap S_{\alpha} = N\cap S_{\alpha+1}/(N\cap S_{\alpha+1})\cap S_{\alpha} \cong (N\cap S_{\alpha+1})+S_{\alpha}/S_{\alpha} \subseteq S_{\alpha+1}/S_{\alpha}$, což je totálně rozložitelný modul.

□

Lemma 1.15. *Nechť M je modul a $(M_{\alpha} \mid \alpha \leq \sigma)$ je spojitý řetězec v M, pro který platí, že každý sousední faktor je totálně rozložitelný a $M_{\sigma} = M$, potom M je semiartinovský sokl-délky $\leq \sigma$.*

Důkaz. Chceme ukázat, že pro každé $\alpha \leq \sigma$ platí, že $M_{\alpha} \subseteq soc^{\alpha}M$, potom $M = M_{\sigma} \subseteq soc^{\sigma}M \subseteq M$. Ukážeme to indukcí podle $\alpha \leq \sigma$:

$\alpha = 0$: $soc^{\alpha} = 0 = M_0 = 0$

$\alpha = n \rightsquigarrow n+1 : M_{\alpha} \subseteq soc^{\alpha}M \Rightarrow M_{\alpha+1} \subseteq soc^{\alpha+1}M.$

$(M_{\alpha+1}+soc^{\alpha}M)/soc^{\alpha}M \cong M_{\alpha+1}/M_{\alpha+1}\cap soc^{\alpha}M \subseteq M_{\alpha+1}/M_{\alpha}$ je totálně rozložitelný, potom $M_{\alpha+1} + soc^{\alpha}M/soc^{\alpha}M \subseteq soc(M/soc^{\alpha}M)$, tedy $M_{\alpha+1} \subseteq soc^{\alpha+1}M$.

α limitní ordinál: $M_{\alpha} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_{\beta} \subseteq \bigcup\limits_{\beta<\alpha} soc^{\beta}M = soc^{\alpha}M$.

□

Z Lemmat 1.14 a 1.15. okamžitě plyne následující důsledek:

Důsledek 1.16. *Nechť M je semiartinovský modul sokl-délky σ a $N \leq M$,potom*

(i) M/N je semiartinovský modul sokl-délky $\leq \sigma$.

(ii) N je semiartinovský modul sokl-délky $\leq \sigma$.

Tvrzení 1.17. *Nechť R je zprava semiartinovský okruh sokl-délky σ.Potom*

(i) σ je nelimitní ordinál.

(ii) Každý pravý R-Modul M je semiartinovský sokl-délky $\leq \sigma$

Důkaz.

(i) Pokud σ je limitní ordinál, potom $R = \bigcup_{\alpha<\sigma} R_\alpha = 1 \cdot R$.Potom existuje $\alpha < \sigma$ takové ,že $1 \in R_\alpha$, spor s tím, že $R_\alpha \subset R_\sigma = R$

(ii) Nechť G je množina R-generátorů M.Uvažujme modul F = $R^{(G)} := \bigoplus_{g\in G} R_g$, kde $R_g = R$ pro každé $g \in G$. Potom $soc^\alpha(F) = \bigoplus_{g\in G} soc^\alpha(R_g)$, viz. (4, Tvrzení 9.19). Dále definujeme epimorfismus $\varphi : F \to M$.Potom M, jako faktor-modul semi artinovského modulu sokl-délky σ je také semi artinovský sokl-délky $\leq \sigma$ podle Tvrzení 1.16(i).

φ definujeme následujícím způsobem: $\varphi((r_g)_{g\in G}) = \sum_{g\in G} g \cdot r_g$

Je to dobře definované zobrazení, jelikož $r_g = 0$ pro skoro všechna $g \in G$ a definuje to R-lineární zobrazení. Navíc $Im(\varphi)$ zahrňuje všechna g z G, tedy φ je surjekce. $\square$

2. Hillovo lemma

Při studiu konkrétního modulu s $\mathcal{C}$-filtrací často potřebujeme nahradit původní $\mathcal{C}$-filtraci jinou, která lépe odpovídá případu studia. Pozoruhodnou konstrukci sloužící tomuto účelu objevil Hill(6). Rozšiřuje danou $\mathcal{C}$-filtraci,$\mathcal{M}$, modulu M do velké rodiny, $\mathcal{H}$, sestávající z $\mathcal{C}$-filtrovaných podmodulů M. Navíc $\mathcal{H}$ zdědí klíčovou vlastnost $\mathcal{M}$: tvoří úplný distributivní podsvaz modulárního svazu všech podmodulů M.

2.1 Klíčový pojem pro důkaz Hillova lemmatu a jeho vlastnosti

Definice 2.1. *Nechť R je okruh a $\mathcal{M} = (M_\alpha \mid \alpha \leq \sigma)$ je spojitý řetězec R-modulů. Uvažujme systém R-modulů $(A_\alpha \mid \alpha < \sigma)$ takový, že $M_{\alpha+1} = M_\alpha + A_\alpha, \forall \alpha < \sigma$.*

Nazveme podmnožinu S ordinálu σ ***uzavřenou****, pokud $\forall \alpha \in S$ platí*

$$M_\alpha \bigcap A_\alpha \subseteq \textstyle\sum_{\beta \in S, \beta < \alpha} A_\beta$$

Výšku*, hgt(x), elementu $x \in M_\sigma$ definujeme jako nejmenší ordinál $\alpha < \sigma$ takový, že $x \in M_{\alpha+1}$. Pro každou S podmnožinu σ, definujeme*

$$M(S) = \textstyle\sum_{\alpha \in S} A_\alpha$$

Pro každý ordinál $\alpha \leq \sigma$, máme $\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}$ a $M_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} A_\beta = M(\alpha)$. Tedy α je uzavřená podmnožina σ.

Lemma 2.2. *Nechť S je uzavřená podmnožina σ a $x \in M(S)$. Nechť $S' = \{\alpha \in S | \alpha \leq hgt(x)\}$. Potom $x \in M(S')$.*

Důkaz. Nechť $x \in M(S)$. Potom $x = x_1 + x_2 + ... + x_k$, kde $x_i \in A_{\alpha_i}$ pro nějaká $\alpha_i \in S$,$1 \leq i \leq k$.Búno, $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_k$ a α_k je minimální. Pokud $\alpha_k >$ hgt(x), potom $x_k = x - x_1 - ... - x_{k-1} \in M_{\alpha_k} \bigcap A_{\alpha_k} \subseteq \sum_{\alpha \in S, \alpha < \alpha_k} A_\alpha$, jelikož S je uzavřená, dostáváme spor s minimalitou α_k. $\square$

Důsledek 2.3. *Nechť S je uzavřená podmnožina σ a $x \in M(S)$. Potom hgt(x)$\in S$.*

Lemma 2.4. *Nechť $(S_i | i \in I)$ je systém uzavřených podmnožin σ. Potom*

$$M(\bigcap_{i \in I} S_i) = \bigcap_{i \in I} M(S_i) \text{ a } M(\bigcup_{i \in I} S_i) = \sum_{i \in I} M(S_i)$$

Důkaz. Pro první nerovnost, nechť T $= \bigcap_{i \in I} S_i$. Z definice ihned plyne, že $M(T) \subseteq \bigcap_{i \in I} M(S_i)$. Předpokládejme nyní, že existuje $x \in \bigcap_{i \in I} M(S_i)$ takové, že $x \notin M(T)$, vybereme takové x, aby jeho délka byla nejmenší. Potom x = y + z pro $y \in A_{hgt(x)}$ a $z \in M_{hgt(x)}$. Z předchozího důsledku plyne, že $hgt(x) \in S_i \forall i \in I$, potom $hgt(x) \in T$ a $y \in M(T)$. Z toho plyne, že $z \in \bigcap_{i \in I} M(S_i), z \notin M(T)$ a $hgt(z) < hgt(x)$, spor s minimalitou.

Druha rovnost plyne ihned z Definice 2.1. $\square$

Poznámka 2.5. *Nechť* $\mathcal{M} = (M_\alpha|\alpha \leq \sigma)$ *je spojitý řetězec modulů. Pokud* N *je podmodul* $M = M_\sigma$*, potom* $\mathcal{M}$ *indukuje spojitý řetězec* $\mathcal{N} = (N \cap M_\alpha|\alpha \leq \sigma)$ *podmodulů* N*.*

Navíc, pokud $N = M(S)$ *pro* $S \subseteq \sigma$*, potom jiný spojitý řetězec podmodulů* N *je popsán vzorcem* $\mathcal{N}' = (M(S \cap \alpha)|\alpha \leq \sigma)$*.*

Můžeme si také všimnout, že S *je uzavřená v* σ *pravě tehdy, když se řetězce* $\mathcal{N}$ *a* $\mathcal{N}'$ *shodují. Přesněji, implikace zleva doprava platí, jelikož* $M(S) \cap M_\alpha = M(S) \cap M(\alpha) = M(S \cap \alpha) \forall \alpha \leq \sigma$ *podle Lemmatu 2.4. Obráceně, pokud* $\alpha \in S$*, potom* $M_\alpha \cap A_\alpha \subseteq M(\alpha) \cap M(S) = M(S \cap \alpha) = \sum_{\beta \in S, \beta < \alpha} A_\beta$*.*

Tvrzení 2.6. *Nechť* $(S_i|i \in I)$ *je systém uzavřených podmnožin . Potom jak průnik, tak sjednocení tohoto systému jsou opět uzavřené v* σ*.*

Důkaz. Pro sjednocení, pokud $\beta \in S = \bigcup_{i \in I} S_i$, potom $\beta \in S_i$ pro nějaké $i \in I$ a $M_\beta \cap A_\beta \subseteq \sum_{\alpha \in S_i, \alpha < \beta} A_\alpha \subseteq \sum_{\alpha \in S, \alpha < \beta} A_\alpha$.

Pro průnik, nechť $\beta \in T = \bigcap_{i \in I}$. Potom $M_\beta \cap A_\beta \subseteq M(S_i \cap \beta) \forall i \in I$. Proto Lemma 2.4. implikuje

$$M_\beta \cap A_\beta \bigcap_{i \in I} M(S_i \cap \beta) = M(T \cap \beta),$$

což přesně říká, že T je uzavřená. □

Podle Tvrzení 2.6., uzavřené podmnožiny tvoří úplný distributivní podsvaz, $C(\sigma)$, úplného Booleového svazu všech podmnožin σ.

Tvrzení 2.7. *Předpokládejme, že řetězec* $\mathcal{M}$ *je ostře rostoucí a* $S, S' \in C(\sigma)$*. Potom* $S \subseteq S'$ *právě tehdy, když* $M(S) \subseteq M(S')$*.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je triviální, abychom dokázali opačnou implikaci, uvažujme $M(S) \subseteq M(S')$ a existuje ordinál $\alpha \in S \backslash S'$. Potom $A_\alpha \subseteq M(S \cap (\alpha + 1)) = M(S) \cap M(\alpha+1) \subseteq M(S') \cap M(\alpha+1) = M(S' \cap (\alpha+1)) = M(S' \cap \alpha) \subseteq M_\alpha$, tudíž $M_{\alpha+1} = M_\alpha$, spor.

□

Nechť $M = M_\sigma$ a necháme označit jako L(M) svaz všech podmodulů M.

Výše uvedené můžeme shrnout jako:

Důsledek 2.8. *Mějme ostře rostoucí řetězec* $\mathcal{M}$*. Potom zobrazení* $\theta : S \to M(S)$ *je izomorfismus mezi úplným distributivním svazem* $C(\sigma)$ *a úplným distributivním podsvazem L(M).*

I když $\mathcal{M}$ není ostře rostoucí, protože je homomorfním obrazem distributivního svazu, obraz θ je stále distributivním podsvazem L(M). Tento obraz poskytuje požadovanou rodinu podmodulů $\mathcal{H}$, které rozšířují daný souvislý řetězec $\mathcal{M}$.

2.2 Důkaz Hillova lemmatu

Věta 2.9. ***(Hillovo lemma).*** *Nechť R je okruh, κ je nekonečný regulární kardinál a $\mathcal{C}$ je systém $< \kappa$-presentovaných modulů. Nechť M je modul s $\mathcal{C}$-filtrací $\mathcal{M} = (M_\alpha | \alpha \leq \sigma)$. Potom existuje systém $\mathcal{H}$ podmodulů M takový, že:*

- *(H1) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$*
- *(H2) $\mathcal{H}$ je uzavřen na direktní součty a průniky. $\mathcal{H}$ je úplný distributivní podsvaz modulárního svazu všech podmodulů M.*
- *(H3) Nechť N,$P \in \mathcal{H}$ takové, že $N \subseteq P$. Potom modul P/N je $\mathcal{C}$-filtrovaný.*
- *(H4) Nechť $N \in \mathcal{H}$ a X podmnožina M kardinality $< \kappa$. Potom existuje $P \in \mathcal{H}$ takový, že $N \cup X \subseteq P$ a P/N je $< \kappa$-prezentovaný.*

Důkaz. Důkaz začneme fixaci systému $< \kappa$-presentovaných modulů $(A_\alpha | \alpha < \sigma)$ takového,že pro každé $\alpha < \sigma$:

$$M_{\alpha+1} = M_\alpha + A_\alpha,$$

jako v Definici 2.1. Takový systém existuje, jelikož $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ je $< \kappa$-presentovaný pro každé $\alpha < \sigma$. Tvrdíme, že

$$\mathcal{H} = \{M(S) | S \text{ je uzavřená podmnožina } \sigma\}$$

splňuje vlastnosti (H1)-(H4).

Vlastnost (H1) máme dokázanou rovnou z definice $\mathcal{H}$, jelikož každý ordinál $\alpha \leq \sigma$ je uzavřená podmnožina σ.

První část vlastnosti (H2) jsme dokázali v Tvrzení 2.6. a Lemmatu 2.4. a druhou část v Důsledku 2.8., jelikož $\mathcal{H}$ je obrazem θ.

Abychom dokázali vlastnost (H3) ukážeme, že existuje ordinál $\tau \leq \sigma$ a spojitý řetězec $(F_\gamma | \gamma \leq \tau)$ elementů $\mathcal{H}$ takový, že $\mathcal{Q} = (F_\gamma / N | \gamma \leq \tau)$ je $\mathcal{C}$-filtrace P/N a pro každé $\gamma < \tau$ existuje $\beta < \sigma$ takové, že $F_{\gamma+1}/F_\gamma$ je izomorfní $M_{\beta+1}/M_\beta$.

Zaprvé máme N=M(S) a P=M(T) pro nějaké uzavřené S a T podmnožiny σ. Jelikož $S \cup T$ je uzavřená, BÚNO můžeme předpokládat, že $S \subseteq T$. Pro každé $\beta \leq \sigma$, položíme

$$F_\beta = N + \sum_{\alpha \backslash S, \alpha < \beta} A_\alpha = M(S \cup (T \cap \beta)) \qquad \text{a} \qquad \bar{F}_\beta = F_\beta / N.$$

Potom $(\bar{F}_\beta | \beta \leq \sigma)$ je filtrací P/N takovou, že $\bar{F}_{\beta+1} = \bar{F}_\beta + (A_\beta + N)/N$ pro $\beta \in T \backslash S$ a $\bar{F}_{\beta+1} = \bar{F}_\beta$ pro ostatní β. Nechť $\beta \in T \backslash S$. Potom

$$\bar{F}_{\beta+1}/\bar{F}_\beta \cong F_{\beta+1}/F_\beta \cong A_\beta / (F_\beta \cap A_\beta),$$

a

$$M_\beta \cap A_\beta = (\sum_{\alpha \in T, \alpha < \beta} A_\alpha) \cap A_\beta \subseteq F_\beta \cap A_\beta,$$

kde druhá rovnost platí, protože $\beta \in T$ a T je uzavřená v σ.

Nicméně, pokud $x \in F_\beta \cap A_\beta$, potom hgt(x)$\leq \beta$, z toho plyne, že $x \in M(T')$ podle Lemmatu 2.2., kde $T' = \{\alpha \in S \cup (T \cap \beta) | \alpha \leq \beta\}$. Podle Tvrzení 2.6., dostáváme $x \in M_\beta$, protože $\beta \notin S$. Z toho plyne, že $F_\beta \cap A_\beta = M_\beta \cap A_\beta$ a $\bar{F}_{\beta+1}/\bar{F}_\beta \cong A_\beta/(M_\beta \cap A_\beta) \cong M_{\beta+1}/M_\beta$. Požadována $\mathcal{C}$-filtrace, $\mathcal{Q}$, P/N se získá z

$(\bar{F}_\beta|\beta \leq \sigma)$ odstráněním možných opakování a z toho plyne vlastnost (H3). Jako τ' označíme ordinální typ ostře uspořádané množiny (T\S,<). Všimneme si, že délka τ filtrace by se dálo brát jako $1+\tau'$(ordinální součet, tedy $\tau = \tau'$ pro τ' nekonečný).

Pro vlastnost (H4) zaprvé ukážeme, že každá podmnožina σ kardinality $< \kappa$ je obsažena v uzavřené podmožině kardinality $< \kappa$. Protože κ je nekonečný regulární kardinál, podle Tvrzení 2.6, toho stačí, abychom to dokázali jenom pro jednoprvkové podmnožiny σ. Dokážeme tedy, že každé $\beta < \sigma$ je obsaženo v uzavřené podmnožině mohutnosti $< \kappa$, indukcí podle β. Pro $\beta < \kappa$, jen položíme $S = \beta + 1$. Jinak krátká exaktní posloupnost

$$0 \to M_\beta \cap A_\beta \to A_\beta \to M_{\beta+1}/M_\beta \to 0$$

ukazuje, že $M_\beta \cap A_\beta$ je $<\kappa$-generovaný. Tedy $M_\beta \cap A_\beta \subseteq \sum_{\alpha \in S_0} A_\alpha$ pro $S_0 \subseteq \beta$ podmnožinu kardinality $< \kappa$. Navíc můžeme předpokládat, že S_0 je uzavřena v σ podle indukčního předpokladu a položíme $S = S_0 \cup \{\beta\}$. Abychom ukázali, že S je uzavřená, potřebujeme ověřit definici jen pro β. Ale $M_\beta \cap A_\beta \subseteq M(S_0) = \sum_{\alpha \in S, \alpha < \beta} A_\alpha$.

Konečně, nechť N=M(S), kde S je uzavřená podmnožina σ. A nechť X je podmnožina M kardinality $< \kappa$. Potom $X \subseteq \sum_{\alpha \in T} A_\alpha$ pro T podmnožinu σ kradinality $< \kappa$. Podle předchozího odstavce můžeme předpokládat, že T je uzavřená v σ. Nechť P $= M(S \cup T)$. Potom P/N je $\mathcal{C}$-filtrovaný podle vlastnosti (H3) a filtraci lze zvolit indexovanou 1+ ordinálním typem T/S, což je jistě menší, než κ. Zejména, P/N je $< \kappa$-prezentovaný. □

2.3 Důsledky Hillova lemmatu

Tvrzení 2.10. *Nechť R je okruh,κ nekonečný regulární kardinál a $\mathcal{C}$- systém $<\kappa$-presentovaných modulů. Nechť $\mathcal{C}'$ je systém $\mathcal{C}$-filtrovaných modulů délky $<\kappa$(tedy Filt($\mathcal{C}'$)=Filt(C)).*

Nechť M je $\mathcal{C}$-filtrovaný modul a $\{m_\beta|\beta < \mu\}$ je množina R -generátorů modulu M. Potom existuje $\mathcal{C}'$-filtrace $\mathcal{M}' = (M'_\beta|\beta \leq \mu)$ modulu M taková, že $m_\beta \in M'_{\beta+1}$ pro každé $\beta < \mu$. Navíc, pokud $\mu =$ gen(M) $\geq \kappa$, potom gen(M'_β) $< \mu$,$\forall \beta < \mu$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{M} = (M_\alpha|\alpha \leq \sigma)$ je $\mathcal{C}$-filtrace modulu M. Uvažujme odpovídající rodinu $\mathcal{H}$ z Hillova lemmatu.

Nechť $\mathcal{C}'$-filtrace $\mathcal{M}'$ je indukčně vybrána z $\mathcal{H}$ následujícím způsobem: $M'_0 = 0$; pokud $M'_\beta \in \mathcal{H}$ je definován a $m_\beta \in M'_\beta$, potom položíme $M'_{\beta+1} = M'_\beta$. Jinak, je-li $m_\beta \notin M'_\beta$, použijeme vlastnost (H4) Hillova lemmatu, abychom našli modul $M'_{\beta+1} \in \mathcal{H}$ takový, že $M'_\beta \subseteq M'_{\beta+1}, m_\beta \in M'_{\beta+1}$ a $M'_{\beta+1}/M'_\beta$ je $<\kappa$-prezentovaný. Podle vlastnosti (H3), $M'_{\beta+1}/M'_\beta$ má $\mathcal{C}$-filtraci délky $<\kappa$, tedy $M'_{\beta+1}/M'_\beta \in \mathcal{C}'$.

Pokud $\beta \leq \mu$ je limitní ordinál, potom nechť $M'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} M'_\gamma$, což je modul, náležející do $\mathcal{H}$ podle vlastnosti (H2). Jelikož $m_\beta \in M'_{\beta+1}$ pro každé $\beta < \mu$,$M'_\mu = M$.

Konečně, pro každé $\beta < \mu$, $(M'_\gamma|\gamma \leq \beta)$ je $\mathcal{C}'$-filtrace M'_β délky β. Tedy $\mu =$ gen(M) $\geq \kappa$, potom gen(M'_β) $< \mu$, jelikož κ je regulární.

□

Definice 2.11. *Nechť R je okruh, M je modul, a $\mathcal{C}$ je systém modulů. Spojitý řetězec $\mathcal{N} = (N_\beta|\beta \leq \tau)$ podmodulů M nazveme* ***$\mathcal{C}$-sokl posloupnosti*** *modulu M, pokud $N_\tau = M$ a $N_{\beta+1}/N_\beta$ je izomorfní direktní sumě elementů z $\mathcal{C}$ pro každé $\beta < \tau$. Ordinál τ budeme nazývat* ***délkou*** *$\mathcal{C}$-sokl posloupnosti $\mathcal{N}$.*

Věta 2.12. *Nechť R je okruh, κ je nekonečný regulární kardinál a $\mathcal{C}$ je systém $< \kappa$-prezentovaných modulů. Nechť M je $\mathcal{C}$-filtrovaný modul. Potom M má $\mathcal{C}$-sokl posloupnost délky $\leq \kappa$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{M} = (M_\alpha|\alpha \leq \sigma)$ je $\mathcal{C}$-filtrace M a $(A_\alpha|\alpha < \sigma)$ je systém $< \kappa$-generovaných podmodulů M takových, že $M_{\alpha+1} = M_\alpha + A_\alpha$ pro nějaké $\alpha < \sigma$. Nechť $\mathcal{H} = \{$M(S)$|$ S je uzavřená podmnožina $\sigma\}$ je systém podmodulů M z Hillova lemmatu.

Nechť $\alpha < \sigma$. Podle Tvrzení 2.6. a (důkazu) vlastnosti (H4) z Hillova lemmatu, existuje nejmenší uzavřená S_α podmnožina σ taková, že S_α je kardinality $< \kappa$ a $\alpha \in S_\alpha \subseteq \alpha + 1$(takové, že α je největší element S_α).

Položíme-li sup($\emptyset$)=0, potom definujeme funkci úrovně $\mathcal{C}$-sokl posloupnosti $l : \sigma \to \kappa$ indukcí podle $\alpha < \sigma$ následně:

$$l(\alpha) = sup\{l(\gamma) + 1|\alpha \neq \gamma \in S_\alpha\}.$$

Všimněme si, že $l(\alpha) = 0$ je ekvivalentní tomu, že $S_\alpha = \{\alpha\}$, a tedy $M_{\alpha+1} = M_\alpha \oplus A_\alpha$.

Pro každé $\beta \leq \kappa$, nechť $T_\beta = \{\gamma < \sigma|l(\gamma) < \beta\}$ a $N_\beta = M(T_\beta)$. Dokážeme, že $\mathcal{N} = (N_\beta|\beta \leq \kappa)$ je $\mathcal{C}$-sokl posloupnost M.

Zaprvé tvrdíme, že T_β je uzavřená, potom $N_\beta \in \mathcal{H}$, pro každé $\beta \leq \kappa$. Tohle bude plynout z toho, že $T_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\sigma,l(\gamma)<\beta} S_\gamma$. Nicméně, pokud $\gamma \in T_\beta$, potom $l(\gamma) < \beta$, a tedy $\gamma \in S_\gamma$. Naopak, pokud budeme předpokládat, že $\alpha \in S_\gamma$ pro nějaké $\gamma < \sigma, l(\gamma) < \beta$. Potom, pokud $\alpha = \gamma$, potom $\alpha \in T_\beta$. V opačném případě $\alpha < \gamma$, tedy $l(\alpha) + 1 \leq l(\gamma) < \beta$ a $\alpha \in T_\beta$, což dokazuje počáteční předpoklad.

Jistě, $\mathcal{N}$ je spojitý řetězec podmodulů N a $N = N_\kappa$. Zbývá ukázat, že pro každé $\beta < \kappa$,$N_{\beta+1}/N_\beta \cong \bigoplus\limits_{\gamma\in T_{\beta+1}\backslash T_\beta} \overline{M}_\gamma$, kde $\overline{M}_\gamma$ je izomorfní elementu z $\mathcal{C}$ pro každé $\gamma \in T_{\beta+1}\backslash T_\beta$.

Definujeme $\overline{M}_\gamma = (M(T_\beta) + A_\gamma)/M(T_\beta)$. Potom
$\overline{M}_\gamma = M(T_\beta \cup S_\gamma)/M(T_\beta) \cong M(S_\gamma)/(M(S_\gamma) \cap M(T_\beta))$
$= M(S_\gamma)/M(S_\gamma \cap T_\beta) = M(S_\gamma)/M(S_\gamma \cap \gamma) \cong A_\gamma/(A_\gamma \cap M(S_\gamma \cap \gamma))$
$= A_\gamma/(A_\gamma \cap M_\gamma) \cong M_{\gamma+1}/M_\gamma$,

jelikož $\gamma \in S_\gamma$ a S_γ je uzavřená. Nicméně, $M_{\gamma+1}/M_\gamma$ je izomorfní elementu z $\mathcal{C}$, poněvadž $\mathcal{M}$ je $\mathcal{C}$-filtrací M.

Jistě, $N_{\beta+1}/N_\beta \cong \sum_{\gamma\in T_{\beta+1}\backslash T_\beta} \overline{M}_\gamma$.

Ukážeme, že $\overline{M}_\gamma \cap \sum_{\gamma\neq\delta\in T_{\beta+1}\backslash T_\beta} \overline{M}_\delta = 0$, neboli ekvivalentně,

$$(M(T_\beta) + A_\gamma) \cap (M(T_\beta) + \sum_{\gamma\neq\delta\in T_{\beta+1}\backslash T_\beta} A_\delta) = M(T_\beta).$$

Máme $M(T_\beta) + A_\gamma = M(T_\beta \cup S_\gamma)$, a $M(T_\beta) + \sum_{\gamma\neq\delta\in T_{\beta+1}\backslash T_\beta} A_\delta = M(T_\beta \cup \bigcup_{\gamma\neq\delta\in T_{\beta+1}} S_\delta)$. Navíc,

$$M(T_\beta \cup S_\gamma) \cap M(T_\beta \cup \bigcup_{\gamma \neq \delta \in T_{\beta+1}} S_\delta) = M(T_\beta \cup (S_\gamma \cap \bigcup_{\gamma \neq \delta \in T_{\beta+1}} S_\delta)) = M(T_\beta),$$

jelikož podle definice funkce l,$S_\gamma \cap S_\delta \subseteq T_\beta$, pro všechna $\gamma \neq \delta \in T_{\beta+1}$. $\square$

Pro semiartinovské moduly výsledek věty 2.12., dává obecně hrubší odhad délky sokl-posloupnosti, než tvrzení 1.17.

Příklad 2.13. *Pokud R je zprava artinovský okruh, $\mathcal{C}$ = simp-R,M je libovolný R-modul. Pak M má $\mathcal{C}$-filtraci a tedy věta 2.12. tvrdí, že M má sokl-délku $\leq \omega$. Ovšem R má sokl-délku $n < \omega$. Potom ale tvrzení 1.17. dává, že M má sokl-délku $\leq n$.*

3. Loewyho řady

Pro tuto část práce rad(M) značí Jakobsonův radikál modulu M, tj. průnik všech maximálních podmodulů modulu M. Pokud modul M nemá žádné maximální podmoduly, potom je rad(M)=M.

Definice 3.1. *Pro modul M, uvažujme klesající posloupnost podmodulů M definovanou následujícím způsobem*

$$M \supseteq rad(M) \supseteq rad^2(M) \supseteq ... \supseteq rad^i(M) \supseteq ..., \text{ kde}$$

$\mathbf{rad^0(M)} = M$.
Pro α *ordinál položíme* $\mathbf{rad^{\alpha+1}(M)} = rad(rad^\alpha(M))$,
Pro α *limitní ordinál* $\mathbf{rad^\alpha(M)} = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} rad^\beta(M)$.

Všimneme si, že existuje ordinál α*, že pro každé* $\beta \geq \alpha : rad^\beta(M) = rad^\alpha(M)$*. Neboli v nějakém kroku se tato posloupnost nutně stabilizuje.*

Nazveme tuto posloupnost ***řada radikálů****, neboli* ***klesající Loewyho řada*** *modulu M.*

Pokud existuje ordinál σ*, že* $rad^\sigma(M) = 0$*, nazveme modul s touto vlastnosti* ***seminoetherovský*** *a nejmenší takový ordinál nazveme* ***délkou klesající Loewyho řady****, kterou budeme označovat jako rl(M). Jinak řekneme, že délka není definována.*

Například každý noetherovský modul je seminoetherovský, což plyne z Nakayamova lemmatu.

Pro M konečné délky, M je speciálně noetherovský a artinovský, tedy existuje nejmenší m přirozené, že $rad^m M = 0$.

Duálním pojmem k řadě radikálů je už známá **sokl-posloupnost**, kterou jsme definovali dříve 1.13, budeme ji také nazývat **rostoucí Loewyho řada** modulu M. Potom délku sokl-posloupnosti budeme zkráceně značit jako $sl(M)$. Pro M konečné délky, $sl(M)$ je přirozeným číslem, ale sl(M) může být konečné i pro moduly nekonečné (transfinitní) délky.

Dokážeme, že pro každý modul M konečné délky platí, že $sl(M) = rl(M)$.

Lemma 3.2. *Pro modul M a N podmodul v M dokážeme následující implikace:*
(i) *Pro M artinovský,* $rad(M) \subseteq N \Rightarrow M/N$ *je totálně rozložitelný.*
(ii) *Modul* M/N *je totálně rozložitelný* $\Rightarrow rad(M) \subseteq N$.

Důkaz.
(i) Pokud $rad(M) \subseteq N$, potom existuje epimorfismus $M/rad(M) \twoheadrightarrow M/N$. Pokud rad(M)=M, implikaci máme dokázánou. Jinak stačí ukázat, že je M/rad(M) totálně rozložitelný. Jelikož M je artinovský, potom existuje konečné n takové, že $rad(M) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$, pro nějaké $M_i \subseteq M$ maximální ($i \leq n$). Pokud by takové n neexistovalo, potom kdybychom induktivně vytvářeli průnik $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$, dostali bychom nekonečný klesající řetězec podmodulů, což je ve sporu s artinovskosti. Potom ale $M/rad(M) = M/\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i \xhookrightarrow{m+\bigcap_{i=1}^{n} M_i \to (m+M_i)_{i=1}^{n}} \prod\limits_{i=1}^{n} M/M_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M/M_i$,

kde $\forall i \leq n : M/M_i$ je jednoduchý modul . Tedy M/rad(M) je totálně rozložitelný.

(ii): uvažujme M/N totálně rozložitelný a α ordinál:

$$M/N = \bigoplus_{i<\alpha} S_i,$$

kde jsou S_i jednoduché. Potom pro každé $j < \alpha : M_j = \pi^{-1}(\bigoplus_{i<\alpha, i\neq j} S_i)$ je maximální podmodul v M, kde π je kanonická projekce $M \twoheadrightarrow M/N$.

Pak ale $\bigcap_{i<\alpha}(\bigoplus_{j<\alpha, j\neq i} S_j) = 0$, tedy $rad(M) \subseteq \bigcap_{j<\alpha} M_j = N$.

□

Lemma 3.3. *Pro každý semiartinovský modul M konečné sokl-délky platí, že* $rl(M) \leq sl(M)$.

Důkaz. Dokážeme, že pro každé i $\leq sl(M)$: $rad^i(M) \subseteq soc^{sl(M)-i}(M)$.

Pro i=1, použijeme Lemma 3.2.(ii) a jelikož $M/soc^{sl(M)-1}(M)$ je totálně rozložitelný, potom $rad(M) \subseteq soc^{sl(M)-1}(M)$.

$i = n \rightsquigarrow n+1 : rad^n(M) \subseteq soc^{sl(M)-n}(M) \Rightarrow rad^{n+1}(M) \subseteq soc^{sl(M)-n-1}(M)$.

$rad^n(M) \subseteq soc^{sl(M)-n}(M) \Rightarrow rad^{n+1}(M) = rad(rad^n(M)) \subseteq rad(soc^{sl(M)-n}(M))$, ale $soc^{sl(M)-n}(M)/soc^{sl(M)-n-1}(M)$ je totálně rozložitelný, tedy

$rad(soc^{sl(M)-n}(M) \subseteq soc^{sl(M)-n-1}(M)$. A z toho už plyne, že $rad^{n+1}(M) \subseteq soc^{sl(M)-n-1}(M)$.

Tedy pro n = sl(M) plyne, že $rad^n(M) \subseteq 0$, tedy roven 0 a z toho plyne, že $rl(M) \leq sl(M)$.

□

Tvrzení 3.4. *Pro každý modul M konečné délky platí, že* $rl(M) = sl(M)$.

Důkaz. Nerovnost $rl(M) \leq sl(M)$ plyne rovnou z Lemmatu 3.3. Dokážeme obrácenou nerovnost.

Jelikož M je konečné délky, speciálně je artinovský. Potom použijeme Lemma 3.2(i), které říká, že každý faktor klesající Loewyho řady M je totálně rozložitelný. Potom máme řetězec konečné délky s totálně rozložitelnými sousedními faktory. Potom použijeme Lemma 1.15. a máme, že $sl(M) \leq rl(M)$.

□

Dále rozebereme situaci, když M má nekonečnou sl(M) a/nebo nekonečnou rl(M).

Pro M semiartinovský nekonečné sl(M), rl(M) nemusí být definována.

Příklad 3.5. *Uvažujme okruh* $R = \mathbb{Z}$ *a* $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, *potom sl(M)=*$\omega$, *ale* $rad(M) = M$, *jelikož* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *nemá žádné maximální podgrupy.*

Pro semiartinovský modul M nekonečné délky, rl(M) může být libovolně menší, než sl(M).

Ukážeme následující lemma, které se v článku (3) vyskytuje pod číslem 2.4., ono umožňuje rozšířit sokl-délku konstrukce, kterou uvedeme hned po tomto lemmatu na libovolně velký ordinál.

Lemma 3.6. *Nechť κ je nekonečný kardinál a $\mathbb{K}$ je těleso. Pro každé $\alpha < \kappa$, nechť R_α je $\mathbb{K}$-algebra a nechť $I_\kappa = \bigoplus_{\alpha<\kappa} R_\alpha$, což je ideál $\prod_{\alpha<\kappa} R_\alpha$. Pro každé $\alpha < \kappa$ definujeme ν_α jako α-tou složku vnoření R_α do $\prod_{\alpha<\kappa} R_\alpha$. $\mathbb{K}$-algebru R definujeme jako podmodul $I_\kappa + \mathbb{K} \cdot 1$ v $\prod_{\alpha<\kappa} R_\alpha$. Potom platí:*

Předpokládejme, že každý R_α, $\alpha < \kappa$, je (von Neumannovsky) regulární zprava semiartinovský sokl-délky σ_α. Nechť $\tau = sup_{\alpha<\kappa}(\sigma_\alpha)$. Potom R je (von Neumannovsky) regulární zprava semiartinovský sokl-délky $\tau + 1$. Navíc pro každé $\alpha < \kappa$, ν_α zobrazuje sokl-posloupnost pravého R_α-modulu R_α na sokl-posloupnost pravého R-modulu $\nu_\alpha(R_\alpha)$.

Důkaz. Nechť $\alpha < \kappa$ a $(S_{\alpha\beta}; \beta \leq \sigma_\alpha)$ je sokl-posloupnost R_α. Pokud $\sigma_\alpha < \beta \leq \tau$, položme $S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\sigma_\alpha} (= R_\alpha)$. Pro každé $\beta \leq \tau$, potom $S_\beta = \bigoplus_{\alpha<\kappa} \nu_\alpha(S_{\alpha\beta})$ a nechť $S_{\tau+1} = R$. Potom $(S_\beta; \beta \leq \tau + 1)$ je sokl-posloupnost R.

□

Příklad 3.7. *Nechť R={skoro konstantní posloupnosti prvků tělesa $\mathbb{K}$} je $\mathbb{K}$-podalgebra v $\mathbb{K}^\omega$. Tedy pro každý prvek R existuje přirozený index, po kterém už je ta posloupnost konstantní. Potom každý jednoduchý podmodul R je generován posloupnosti e_i, mající všude 0 a na i-té pozici 1, tedy soc(R)= $\mathbb{K}^{(\omega)}$ a $R/soc(R) \cong \mathbb{K}$ je totálně rozložitelný, tedy sl(R)=2. Ale rad(R)=1 : nechť $M_i = R/(R \cdot e_i)$, potom M_i je maximální, jehož prvky mají na i-tém místě 0. Potom $rad(R) \subseteq \bigcap_i M_i = 0$.*

Pomocí konstrukce z lemmatu 3.6., můžeme zkonstruovat modul s větší sl a stejnou rl. Položíme $\forall \alpha < \omega : R_\alpha = R$, kde R je definováno výše. Potom $I_\omega + \mathbb{K} \cdot 1$ má sl=3 podle lemmatu 3.6. a rl=1.

Takto můžeme transfinitní indukcí zkonstruovat $\mathbb{K}$-algebry R, které mají libovolně velkou sl(R), ale rl(R)=1(neboť okruh R je regulární).

Pro M semiartinovský nekonečné sl(M), rl(M) může být libovolně větší, než sl(M).

Příklad 3.8. *Pro β ordinál, zkonstruujeme komutativní p-grupu P_β pomoci generátorů, určených konečnými posloupnostmi*

$$\beta\beta_1\beta_2...\beta_n$$

ordinalů β_i, kde $\beta > \beta_1 > \beta_2 > ... > \beta_n$, splňujicích relace, které dávají strukturu p-grupy:

$$p \cdot \beta\beta_1\beta_2...\beta_n\beta_{n+1} = \beta\beta_1\beta_2...\beta_n \text{ a } p \cdot \beta = 0.$$

Abychom ukázali vlastnosti této konstrukce, definujeme pro každé $\alpha \leq \beta$, X_α podmodul P_β, následujícím způsobem:

$$X_\alpha = \langle \beta\beta_1\beta_2...\beta_n\alpha \mid \beta > \beta_1 > ... > \beta_n > \alpha \rangle.$$

Pro každé $\gamma < \alpha \leq \beta$, definujeme

$$S_{\gamma\alpha} = \{\beta\beta_1\beta_2...\beta_n\gamma \mid \beta_n \geq \alpha\} \text{ a } \kappa_{\gamma\alpha} = |S_{\gamma\alpha}|.$$

Před tím, než ukážeme vlastnosti výše uvedené konstrukce, musíme definovat násobení p v ordinální mocnině pro libovolnou komutativní grupu G:

$$p^\sigma G = \begin{cases} G & \text{pro } \sigma = 0, \\ \mathrm{p}(\mathrm{p}^{\sigma-1}G) & \text{pro } \sigma \text{ nelimitní}, \\ \bigcap\limits_{\beta<\sigma} p^\beta G & \text{pro } \sigma \text{ limitní}. \end{cases}$$

Lemma 3.9. *Pro uvedenou definici násobení platí, že pG přesně odpovídá radikálu p-grupy G.*

Důkaz. Ukážeme dvě inkluze:

Jelikož $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z}$ je těleso, tedy jednoduchý okruh a $G/pG \cong \mathbb{Z}_p^{(\kappa_{12})}$, potom dle Lemmatu 3.2(ii), $rad(G) \subseteq pG$. Naopak, G/rad(G) se dá injektivně vnořit do $(\cong \mathbb{Z}_p^{(\beta_G)}) \prod\limits_{|genG|} \mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z}$ a tedy p(G/rad(G))=0. Potom $pG \subseteq rad(G)$.

□

Ukážeme vlastnosti definované konstrukce v následujícím lemmatu:

Lemma 3.10. *Pro každé $\alpha \leq \beta$, máme:*

(i) $P_\beta/X_\alpha \cong \bigoplus\limits_{\gamma<\alpha} P_\gamma^{(\kappa_{\gamma\alpha})}$, obzvlášť $P_\beta/\langle\beta\rangle = \bigoplus\limits_{\gamma<\beta} P_\gamma$;

(ii) $p^\alpha P_\beta = X_\alpha$, obzvlášť $p^{\beta+1}P_\beta = 0$, tedy délka P_β je rovna $\beta + 1$;

Důkaz. (i) Zkonstruujeme příslušný izomorfismus:

Definujeme homomorfismus $f : P_\beta \to \bigoplus\limits_{\gamma<\alpha} P_\gamma^{(\kappa_{\gamma\alpha})}$ na generátorech P_β. Pokud generátor obsahuje jen prvky $\geq \alpha$, potom se zobrazí na nulu, jelikož jsou to přesně všechny prvky X_α, neboli $f(\beta\beta_1\beta_2\beta_3....\alpha) = 0$. Jinak, nechť máme prvek $\beta\beta_1\beta_2\beta_3....\beta_n\gamma\sigma....$,

kde $\gamma < \alpha$, $\beta_n \geq \alpha$ a $\sigma < \gamma$, potom takovému prvku přiřadíme prvek $\gamma\sigma...$ v P_γ, ale musíme rozlišovat prvky, mající různé posloupnosti před γ, kupříkladu $\beta\beta_1\gamma$ a $\beta\beta_2\gamma$. Počet různých posloupnosti před γ je přesně $\kappa_{\gamma\alpha}$, potom každému prvku, obsahujícím $\gamma\sigma...$ přiřadíme prvek kopie P_γ, odpovídající příslušnému prvku $S_{\gamma\alpha}$, přesněji $f(\beta\beta_1\beta_2....\beta_n\gamma\theta...) = \gamma\theta....^{\beta\beta_1\beta_2....\beta_n}$, kde $\gamma\theta....^{\beta\beta_1\beta_2....\beta_n}$ je prvek $\gamma\theta...$, kopie P_γ, příslušející prvku $\beta\beta_1\beta_2...\beta_n$. Tedy jsme přesně sestrojili homomorfismus, jehož jádro je X_α a obraz $\bigoplus\limits_{\gamma<\alpha} P_\gamma^{(\kappa_{\gamma\alpha})}$.

(ii) Dokážeme transfinitní indukcí podle $\alpha \leq \beta$:

- $\alpha = 0$: $P_\beta = X_0$,
- $\alpha = \gamma \rightsquigarrow \gamma + 1$: $p^{\gamma+1}P_\beta = pX_\gamma$, ale $X_{\gamma+1}$ se skládá z prvků, generovaných posloupnostmi prvků, menších nebo rovných γ, což přesně odpovídá pX_γ,
- α limitní ordinál: $p^\alpha P_\beta = \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} p^\gamma P_\beta = \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} X_\gamma = X_\alpha$.

□

Z Lemmatu 3.10 plyne, že $rl(P_\beta) = \beta+1$ a $sl(P_\beta) = \omega$, jelikož každý $soc^n(P_\beta)$ obsahuje všechny generátory řádu p^n, tedy $soc^\omega(P_\beta)$ obsahuje všechny generátory, tedy cele P_β.

Nakonec využijeme konstrukci z Příkladu 3.8., abychom ukázali existenci modulu M s rl(M)=1, který není semiartinovský.

Příklad 3.11. *Položíme* $M = P_\beta \bigoplus \mathbb{Z}$ *je* $\mathbb{Z}$*-modul. Potom* $rl(P_\beta) = \beta + 1$ *a* $rl(\mathbb{Z}) = 1$*. Ale* $sl(\mathbb{Z})$ *není definováno, jelikož* $\mathbb{Z}$ *nemá žádné jednoduché podgrupy. Tedy, jelikož sokl-posloupnost se počítá po složkách,*$sl(M)$ *není definováno.*

Závěr

Shrňme nejprve stručně obsah jednotlivých kapitol.

V první kapitole jsme definovali pojem $\mathcal{C}$-filtrace a ukázali speciální případy $\mathcal{C}$-filtrací pro $\mathcal{C}$ množinu jednoduchých modulů a $\mathcal{C}$ třídu totálně rozložitelných modulů. Dále jsme si zavedli pojmy transfinitní kompoziční řady, semiartinovskosti a sokl-posloupnosti s příslušnou sokl-délkou. Pomocí dokázaného transfinitního případu Zassenhausova lemmatu jsme zobecnili Jordan-Hölderovu větu na transfinitní kompoziční řady . Na konci první kapitoly jsme si ukázali, že pro podmoduly a faktor-moduly semiartinovského modulu zadané sokl-délky už nutně platí, že jsou semiartinovské a jejich sokl-délky nejsou větší, než délka zadaného modulu.

Druhá kapitola zavádí definici uzavřené podmnožiny daného ordinálu a buduje aparát vlastnosti tohoto pojmu pro důkaz Hillova lemmatu, konstruujícího dostatečně jemný a bohatý podsvaz obecného svazu podmodulů s zadanou $\mathcal{C}$-filtraci. Dále následují důsledky tohoto lemmatu. Ukazujeme ale, že pro semiartinovské okruhy dává tento přístup hrubší odhady sokl-délky, než lemmata, dokázána na konci první kapitoly.

Ve třetí kapitole definujeme duální pojem k pojmu sokl-posloupnosti, který nazýváme klesající Loewyho řadou, a délku této řady. Ukazuje se, že pro moduly konečné délky se délky těchto řad rovnají, ale pro nekonečné délky situace už tak hezká není: konstruujeme příklady modulů, ukazující ,že rozdíl těchto délek může být obecně libovolně velký.

$\mathcal{C}$-filtrace je velice obecný pojem, nicméně pro speciální případy se ukazuje, že mají dobrou strukturu. Zároveň se ukazuje jak disproporční mohou být délky speciálních filtrací v nekonečně generovaných modulech. Čtenáře by mohla napadnout otázka existence dualizace pojmu $\mathcal{C}$-filtrace. Ano, takový pojem existuje a nazývá se $\mathcal{C}$-kofiltrace, definuje se pomocí rozšíření modulů a jejich inverzních limit(5, Definice 6.34.).

Seznam použité literatury

[1] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowronski. *Elements of the Representaion Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory,* Cambridge University Press, Cambridge 2006;

[2] S.Bazzoni, J.Šťovíček. *On the abelianization of derived categories and a negative solution to Rosický's problem,* Compositio Math. 149 (2013), 125–147;

[3] P.C.Eklof, K.R.Goodearl and J.Trlifaj *Dually slender modules and steady rings,* Forum Math. **9** (1997), 61–74;

[4] Kent R.Fuller, Frank W.Anderson. *Rings and Categories of Modules,* 2nd ed., Springer-Verlag, New-York, 1992, ISBN 978-0387978451

[5] R.Goebel, J.Trlifaj. *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules,* Berlin: W. de Gruyter, 2012, ISBN 9783110110791.

[6] P.Hill. *The third axiom of countability for abelian groups,* Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 347–350;

[7] J.Trlifaj. *Approximations of modules, lecture notes.* https://www.karlin.mff.cuni.cz/ trlifaj/AM_2.pdf

[8] E.A.Walker. *The groups P_β,* Symposia Mathematica, vol. XIII (Convegno di Gruppi Abeliani, INDAM, Rome, 1974) (Academic Press, London, 1974), 245–255;