Errata k bakalárskej práci
Michal Vorobel
Redukčné ťahy na kombinatorických povrchoch a eulerovské sféry

- strana 4, riadok -11: Nahradiť „cykly“ za „usporiadané dvojice“.
- strana 5, riadok 6: Nahradiť: „Potom je v $\mathcal{S}$ trigon.“ za „Potom, ak $\mathcal{S}$ nie je štvorsten, v $\mathcal{S}$ sa nachádza trigon.“
- strana 5, riadok 9: Doplniť: ...je trigon, keďže $\mathcal{S}$ nie je štvorsten.
- strana 5, riadok -2: Doplniť: ...zostala zachovaná, t.j. výsledný systém bude opäť kombinatorický povrch resp. ich disjunktné zjednotenie, Eulerova charakteristika sa ale môže zmeniť.
- strana 6, riadok 1: Doplniť: ...systém stien $\mathcal{T}$, spolu s ich orientáciami.
- strana 6, riadky 5-6: Nahradiť: „Jednoduchým porovnaním orientácií hrán v stenách $(w_{i,j}, v_i, w_{i,j+1})$ pre $j \in \{0, \ldots, d-1\}$ overíme, že orientácia je koherentná.“ za „Keďže máme koherentnú orientáciu, tak môžeme predpokladať, že steny prislúchajúce vrcholu v_i, majú orientáciu, ako sme uviedli.“
- strana 6, riadok -11: Doplniť: ...znázornené. To sa môže stať napríklad vtedy, keď trigon leží na obvode „trubice“ torusu a trigonovou operáciou ho „rozrežeme“, teda odstránime jeho dieru a dostávame sféru.
- strana 9, riadok 7: Doplniť: ...ako šesťsten, t.j. ako systém stien $\mathcal{T} = \{\{a,b,c\}, \{a,d,b\}, \{d,e,b\}, \{e,c,b\}, \{a,c,e\}, \{a,e,d\}\}$.
- strana 11, riadok -2: Nahradiť: „. Potom existujú orientované steny (∗∗) a“ za „také, že orientované steny (∗∗) sú stenami $\mathcal{T}$. Potom“
- strana 12, riadky 16-17: Nahradiť: „keďže by bola porušená podmienka (E).“ za „keďže, za predpokladu, že platí podmienka (V), tak by bola porušená podmienka (E) resp. naopak, teda aspoň jedna z týchto podmienok by neplatila.“
- strana 15, riadok -3: Doplniť: ...kombinatorická sféra a $\mathcal{S}$ nie je štvorsten.
- strana 16, pred Lemma 2.4: Doplniť: **Definícia 2.0.** Povieme, že stena $\{a,b,c\}$ sa zachová, ak po prevedení nejakého redukčného ťahu na systém $\mathcal{S}$, dostaneme systém $\mathcal{T}$ taký, že $\{a,b,c\} \in \mathcal{T}$.

- strana 16, riadok -14: Nahradiť: „dôsledok Lema 2.3 je“ za „z dôkazu Lema 2.3 máme“.
- strana 16, riadok -2: Nahradiť: „tak by steny prislúchajúce týmto vrcholom tvorili trigon ekvivalentný osemstenu“ za „tak by s nimi susediace vrcholy, ktoré do steny (a, b, c) nepatria, tvorili trigon“.
- strana 17: Opravený dôkaz Lema 2.5: Vnútro útvaru budeme chápať intuitívne geometricky. Uvažujme nejaký n-uholník $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Keď povieme, že bod a bude vidieť na bod b, znamená to, že úsečka medzi týmito bodmi bude vnútri n-uholníka.

  Keď sú vnútorné uhly päťuholníka menšie ako 180°, tak môžeme vnútri voliť ľubovoľný bod y, ktorý bude vidieť na všetky vrcholy päťuholníka.

  Keďže súčet uhlov v päťuholníku je 540°, tak najviac dva uhly môžu mať viac ako 180°. Uvažujme najprv, že práve jeden uhol má viac ako 180°. Bez ujmy na všeobecnosti, predpokladajme, že to je uhol $x_1x_2x_3$. Priamka x_1x_2 pretne lomenú čiaru $x_3x_4x_5$ v bode a a priamka x_2x_3 pretne lomenú čiaru $x_4x_5x_1$ v bode b. Je zrejmé, že tieto prieniky budú existovať, a keďže všetky ostatné uhly v päťuholníku majú menej ako 180°, tak trojuholník x_2ab bude celý ležať vnútri päťuholníka. Každý bod z vnútra tohto trojuholníka bude vidieť na body x_i pre $i = 1, \ldots, 5$. Vyberieme si nejaký bod y (množina bodov, ktoré vidia na všetky vrcholy päťuholníka môže byť väčšia, nám však stačí jeden bod).

  Nech okrem uhla $x_1x_2x_3$ existuje ešte nejaký uhol väčší ako 180°, musíme rozobrať dva prípady.

  1. Ďalší takýto uhol je pri susednom vrchole vrcholu x_2. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to uhol $x_2x_3x_4$. Podobne ako v prípade vyššie dostávame, že priamka x_1x_2 pretne úsečku x_4x_5 v bode a a priamka x_2x_3 pretne úsečku x_5x_1 v bode b a trojuholník ax_5b bude vnútri nášho päťuholníka. Každý bod z jeho vnútra teda bude vidieť na všetky vrcholy päťuholníka, vyberieme si nejaký bod y.
  2. Ďalší takýto uhol nie je pri susednom vrchole vrcholu x_2. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to uhol $x_3x_4x_5$. Znova dostávame, že priamka x_2x_3 pretne úsečku x_1x_5 v bode a a priamka x_3x_4 pretne úsečku x_1x_5 v bode b. Teraz ale môžu nastať dve situácie:
     a) Priamka x_1x_2 pretne úsečku x_4x_5, potom sa táto priamka pretína s priamkou x_3x_4 v bode c, ktorý je vnútri päťuholníka (môže nastať aj $c = x_4$, ale to nám neprekáža). Dostávame,

že každý bod z vnútra štvoruholníka $abcx_2$ vidí na všetky vrcholy päťuholníka, vyberieme si nejaký bod y.

b) Priamka x_1x_2 pretne úsečku x_3x_4 v bode d. Potom priamka x_4x_5 pretne lomenú čiaru ax_2d v bode e, ktorý bude ležať vnútri päťuholníka (alebo $e = x_2$ ale to nám tiež neprekáža). Znovu dostávame, že každý bod z vnútra trojuholníka abe vidí na všetky vrcholy päťuholníka, vyberieme si nejaký bod y.

Teda v ľubovoľnom päťuholníku vieme zvoliť bod y tak, aby videl na všetky vrcholy daného päťuholníka, čo sme chceli dokázať.

- strana 21, Opravený dôkaz Lema 3.3: Podľa Lema 3.1 existuje v $\mathcal{S}$ aspoň 6 vrcholov stupňa 4. Označme graf indukovaný $\mathcal{S}$ ako graf G a uvažujme jeho podgraf, ktorý indukujú vrcholy stupňa 4, označme ho H. Rozoberieme viacero prípadov:

  1. Ak by všetky vrcholy steny (a, b, c) mali stupeň 4, tak by steny prislúchajúce týmto vrcholom tvorili osemsten alebo by im prislúchajúce vrcholy, ktoré nepatria do steny (a, b, c), tvorili trigon. Teda najviac dva vrcholy steny (a, b, c) majú stupeň 4.
  2. Stena (a, b, c) neobsahuje vrchol stupňa 4.
     a) Ak sú niekde spojené dva vrcholy stupňa 4, tak môžeme na im prislúchajúcich stenách previesť *P redukciu.* Dodajme, že tieto dva vrcholy stupňa 4 nemôžu mať spoločného suseda stupňa 4, keďže by sa potom v $\mathcal{S}$ nachádzal trigon (podobný argument ako v bode 1.), a teda podmienky pre *P redukciu* sú splnené.
     b) Ak také vrcholy nevieme nájsť, potom existuje vrchol y a steny $(x_i, x_{i+1}, y), i = 1, \ldots, 4$, kde $x_5 = x_1$ a $d_{x_i} \geq 6$. Na týchto stenách vieme previesť *Q redukciu.* Musíme ale dať pozor, aby stena (a, b, c) nebola stenou (x_2, z, x_3) z Tvrdenia 1.11, lebo tak by sme túto stenu nezachovali. Ale keďže $d_{x_i} \geq 6$, tak vieme vybrať takú stenu $(x_i, w, x_{i+1}), w \neq y, i \neq 2$ aby sa nerovnala stene (a, b, c), ako znázorňuje obrázok 3.1.
  3. Nech stena (a, b, c) obsahuje vrchol stupňa 4, ktorý je izolovaný v H (nemá suseda stupňa 4 v G).
     a) Potom keď v H je ďalší takýto izolovaný bod, tak vieme naňho previesť *Q redukciu.* Znova si musíme dať pozor na to, že stena (a, b, c) nie je stenou (x_2, z, x_3) z Tvrdenia 1.11 – to sa môže stať len pre jeden taký bod y (Obr. 3.2) a keďže $d_{x_i} \geq 6$,

$i = 1, \ldots, 4$, opäť sa môžeme posunúť o stenu vedľa a previesť *Q redukciu.*

b) Keď tam takýto vrchol nie je, máme dvojicu vrcholov stupňa 4 spojenú hranou. Na stenách, ktoré im prislúchajú, môžeme previesť *P redukciu*, keďže sme v beztrigonovej sfére a vrcholy z_2 a z_3 z Tvrdenia 1.10 majú stupeň väčší ako 6.

4. Keď máme, že stena (a, b, c) obsahuje dva vrcholy stupňa 4, môžeme uvažovať dva prípady:

   a) Podgraf H má viac ako jednu komponentu. Potom môžeme previesť rovnaký rozbor prípadov ako v bode 3. Teda vieme previesť P resp. *Q redukciu.*

   b) Podgraf H má práve jednu komponentu. Tak potom musí existovať reťaz vrcholov stupňa 4 to znamená, že x_i sú vrcholy a množiny $\{x_i, x_{i+1}\}$ pre $i = 0, \ldots, n$ a $n \geq 6$ sú hrany v grafe G a pre každé $i = 1, \ldots, n$ platí, že $d_{x_i} = 4$. Potom pre nejaké $i = 1, \ldots, n-1$ musí platiť, že $\{x_i, x_{i+1}\} \subset \{a, b, c\}$. Môžeme teraz voliť buď steny prislúchajúce vrcholom x_{i-2}, x_{i-1} alebo vrcholom x_{i+2}, x_{i+3} (aspoň jedna z týchto možností bude existovať keďže $n \geq 6$) a prevedieme na nich *P redukciu* (Obr. 3.3).

5. Keď máme, že stena (a, b, c) obsahuje len jeden vrchol stupňa 4, ktorý je ale spojený s ďalším vrcholom stupňa 4, znova môžeme uvažovať dva prípady:

   a) Podgraf H má viac ako jednu komponentu. Znovu môžeme previesť rovnaký rozbor prípadov ako v bode 3. Teda opäť vieme previesť P resp. *Q redukciu.*

   b) Podgraf H má práve jednu komponentu. Znova musí existovať reťaz vrcholov ako v prípade 4. b). Stena (a, b, c) bude ale v tomto prípade na kraji tejto reťaze a môžeme zvoliť steny prislúchajúce vrcholom x_2, x_3 alebo vrcholom x_{n-2}, x_{n-1} a previesť na nich *P redukciu.*

Rozobrali sme teda všetky prípady, ktoré môžu nastať a vždy vieme spraviť redukčný ťah P alebo Q tak, aby stena (a, b, c) zostala zachovaná.