POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: *Redukční tahy na kombinatorických površích a eulerovské sféry*
Autor: *Michal Vorobel*

Práce se zabývá kombinatorickými povrchy, což jsou dvoudimenzionální triangulované orientovatelné variety (manifolds). Pomocí takzvaných redukcí se dokazuje, že Eulerova charakteristika disjunktního sjednocení kombinatorických povrchů je nejvýše dva (Věta 1.14), což se dále použije k důkazu mírně rozšířené Fáryho věty (Věta 2.8). V kapitole 3 se studují eulerovské sféry, tedy kombinatorické povrchy Eulerovy charakteristiky 2, pro které navíc platí, že každý vrchol má sudý stupeň.

Práce je myšlenkově pěkná a má velký potenciál. Text práce se špatně čte a matematická úroveň vyjadřování je slabší. Co velice oceňuji je, že autor většinu argumentů dokazuje/formuluje sám (patrně s dopomocí vedoucího). Důkazy se nespoléhají na známé věty z teorie grafů, nýbrž jsou vedeny elementárně, což by mělo být chápáno jako plus. Kdyby byla práce napsána srozumitelněji, mohla by sloužit jako podklad pro výuku, např pro talentované středoškolské studenty.

Konkrétní připomínky

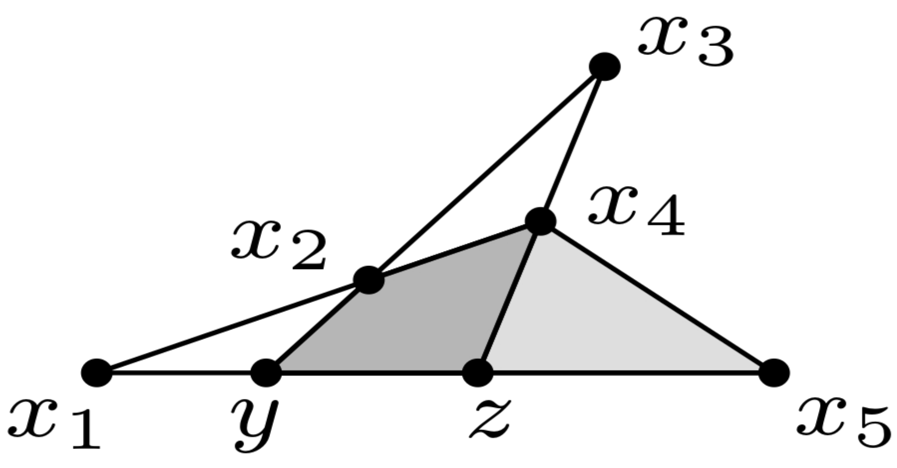
1. V závěru Lemmatu 1.4 chybí varianta, že S je čtyřstěn.
2. Běžně se Eulerova charakteristika definuje jako (počet vrcholů) – (počet hran) + (počet stěn), v práci se oproti tomu navíc uvažuje „normalizační” člen -2(n-1), kde n je počet komponent souvislosti. Modifikovaná definice ničemu nevadí a práce samotná je v pořádku, jen jsem chtěla podotknout, že uvedená definice není standardní. Toto se projeví např ve znění Věty 1.14, neb klasická Eulerova charakteristika je vzhledem k disjunktnímu sjednocení aditivní.
3. Mělo by se vysvětlit, co se myslí spojením „struktura kombinatorického povrchu”. Toto spojení se používá ve významu, že po provedení jistých operací zůstane struktura kombinatorického povrchu zachovaná, aniž by bylo jasné, co má autor na mysli. Jedna z možných interpretací je, že po provedení operací budeme mít stále kombinatorický povrch, taky si můžeme myslet, že nový objekt bude mít stejnou Eulerovu charakteristiku, nebo třeba stejný počet stěn…
4. na str 6 se píše: „.. keď je indukovaný graf S rovinný (zatiaĺ chápeme intuitívne, neskor definujeme formálne)”. Tato poznámka by měla zaznít dřív, neb zmínka o rovinném grafu se vyskytla už na stránce 4.
5. V Tvrzení 1.6 se píše, že po provedení trigonové operace na kombinatorický povrch S dostaneme buď kombinatorický povrch, nebo disjunktní sjednocení dvou kombinatorických povrchů. V důkaze ale není dostatečně vysvětleno, že oba případy můžou skutečně nastat. Disjunktní sjednocení je jasné, ale ten případ jediného kombinatorického povrchu by si zasloužil příklad. Po definování trigonové operace (před zněním Tvrzení 1.6) je toto uvedeno jako fakt, kterého si má čtenář všimnout sám (obrázek ilustrující trigonovou operaci návodný není).
6. Ve znění Lemmatu 1.9 se používá pojem šestistěn, který ovšem nebyl definován. Dále, co se případu (i) týče, pěti vrcholů se dá docílit i pokud $z_2 = z_3$, tedy není nutné aby $z_1=z_4$.
7. Ve znění Lemmatu 1.12 chybí zmínit, že vrcholy x_i sousedí s vrcholem y, tj nejedná se o libovolné(!) vrcholy, jak uvedená formulace naznačuje.
8. Poznámka na straně 12 (uvedená za zněním Lemmatu 1.12) mi nedává smysl.
9. V důkazu Lemmatu 1.13 se píše, že nemůže existovat hrana $\{z_3, w\}$, protože jinak by byla porušena podmínka (E). To ale není pravda, jak ukazuje příklad níže. Tímto netvrdím, že Lemma 1.13 neplatí, rozporuji jen argument v důkaze. Student by měl důkaz doplnit, tj ukázat proč není uvedený příklad protipříkladem na Lemma 1.13 a opravit argument

zdůvodňující neexistenci hrany $\{z_3,w\}$. Koncepčně by mi přišlo lepší už v Lemmatu 1.9(ii) dokázat, že **právě** jedna z dvojic $\{z_1, z_2, z_4\}$, $\{z_1, z_3, z_4\}$ je trigon. Pak by byl důkaz Lemmatu 1.13 přímočarý.

Příklad – uvedeny jsou stěny: $\{x,z_1, z_3\}$, $\{x, y, z_3\}$, $\{y, z_3, z_4\}$, $\{x, z_1, z_2\}$, $\{x, y ,z_2\}$, $\{y, z_2, z_4\}$, $\{w, z_1, z_2\}$, $\{w, z_2, z_4\}$, $\{w, z_1, z_3\}$, $\{w, z_3, z_4\}$, $\{a, z_1, z_4\}$, $\{b, z_1, z_4\}$, $\{a, b, z_1\}$, $\{a, b, z_4\}$. Lze snadno ověřit, že každá hrana (dvojice) se vyskytuje právě ve dvou stěnách (trojicích), tedy podmínka (E) je splněna.

10. Důkaz Věty 1.4 je matoucí, uvedu hlavní příklad. V 3. odstavci se předpokládá, že v komponentě R_i existuje vrchol y stupně 4. Tvrdí se, že možnosti popsané v Lemmatu 1.9(i), (ii), resp. Lemmatu 1.12(i) nemůžou nastat, a proto pokud R_i není osmistěn, lze na něj provést P respektive Q redukci. Už se ale neověřují předpoklady, za kterých je P redukce definovaná (tj máme dva vrcholy stupně 4 spojené hranou).

    Pomohlo by důkaz lépe strukturovat: 1. R_i je buď čtyřstěn, nebo všechny vrcholy v R_i mají stupeň aspoň 4. Předpokládejme tedy, že R_i není čtyřstěn. 2a) R_i obsahuje dva vrcholy stupně 4, ty jsou spojeny hranou 2b) R_i obsahuje vrchol stupně 4, ale všichni jeho sousedi mají stupeň aspoň 5. 3) každý vrchol v R_i má stupeň aspoň 5. V případě 2a) odargumentujeme, že buď je R_i osmistěn nebo lze provést P redukci (tj případy Lemmatu 1.9 (iii), (iv); případy (i) a (ii) nemůžou nastat, neboť přepokládáme, že R_i neobsahuje trigon). Zbytek analogicky dle myšlenek v práci.
11. Důkazy Tvrzení 2.1 a 2.2: zachování podmínky (V) se zdůvodňuje tím, že se stupeň vrcholu snížil o stejné číslo jako se snížil počet stěn incidentních s tímto vrcholem. Tento argument působí zkratkovitě, protože podmínka (V) je silnější – požaduje, že okolí každého bodu lokálně vypadá jako kruh (tj je homeomorfní R^2).
12. Znění Lemmatu 2.3 ignoruje případ, kdy S je čtyřstěn, přičemž čtyřstěn je taky příklad beztrigonové kombinatorické sféry. Tato chyba se projeví i v důkazu, je přenesená ze špatné formulace Lemmatu 1.4, viz první bod výše.
13. Lemma 2.4: význam toho, že stěna je neporušená, by měl zaznít před zněním lemmatu, ne na začátku důkazu
14. str 16, tvrdí se, že kdyby v S nebyl vrchol stupně 4, tak důsledek Lemmatu 2.3 je, že v S bude aspoň 12 vrcholů stupně 5. Striktně vzato toto tvrzení neplyne z Lemmatu 2.3, nýbrž z jeho důkazu.
15. str 16, výraz „trigon ekvivalentní osmistěnu" nedává smysl
16. důkaz Lemmatu 2.5: V případě, že úhel $x_1x_2x_3$ je větší než 180 stupňů, se tvrdí, že definovaná část pětiúhelníku má tu vlastnost, že z každého bodu této množiny jsou vidět všechny tři body x_1, x_2, x_3. Zaprvé mi přijde, že výše uvedená množina není v práci dobře definovaná, protože není jasné, která „čtvrtrovina" se myslí. Navíc pro minimálně jednu možnou interpretaci dané tvrzení neplatí, viz obrázek níže. Jedna z možných interpretací je vyznačená šedě (množina ohraničená body x_2, x_4, x_5, y), ovšem žádný bod z vnitřku světle vyznačené části nevidí bod x_3. Další problém s důkazem nastává v případě, kdy dva vnitřní úhly pětiúhelníku jsou větší než 180 stupňů. Chybí tu zdůvodnění, proč je průnik „druhé čtvrtroviny" s předchozím útvarem neprázdný.



17. Důkaz Lemmatu 3.3 je veden rozborem případů, kdy některé jsou uvedené v závorce, což není úplně šťastné. Přehlednosti důkazu by výrazně prospěla logická struktura a oddělení jednotlivých případů, takto si čtenář občas není jistý, jestli se to náhodou nezacyklí. Opět se vyskytuje nelogický výraz „trigon ekvivalentní osmistěnu”. Definice grafu H nedává smysl, podgraf přece nemůže sestávat ze stěn.

Drobné překlepy

- str 8, Důsledek 1.8: „disjunktné zjednotenie kombinatorický povrch”
- str 9, znění Lemmatu 1.9(iii): o → a (spojené hranou „o” obidve trojice)
- str 15, začátek důkazu Tvrzení 2.2: místo vrcholu y má být vrchol z
- str 15, rovanko → rovnako

Závěr

Předloženou práci doporučuji uznat jako práci bakalářskou, návrh klasifikace však bude záviset na tom, jak se autor vypořádá s hlavními výtkami uvedenými výše. Autora prosím o připravení errat pro body 9, 16 a 17 (tj písemné vypracování opravených důkazů Lemmat 1.13, 2.5 a 3.3), která je nutno vložit do systému SIS nejpozději 17. 6. 2024.

Návrh klasifikace sdělí oponent předsedovi zkušební komise emailem po přečtení dodaných oprav.

Zuzana Patáková
katedra algebry
12. 6. 2024