



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Vorobel

**Redukční tahy na kombinatorických
površích a eulerovské sféry**

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc.,
DSc.

Studijní program: Obecná matematika

Studijní obor: MOMP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

V prvom rade by som chcel poďakovať vedúcemu práce Alešovi Drápalovi, bez ktorého pomoci a nápadov, by táto práca nebola dotiahnutá do úspešného konca.

Veľká vďaka patrí aj mojim rodičom a rodine, za ich lásku a podporu, ktorí mi venovali počas štúdia, ale aj mnoho rokov predtým.

Moja vďaka patrí aj mojim priateľom, hlavne tým, ktorí mi pomohli spoznať svet z inej perspektívy a tým, ktorí ma sprevádzali pri strastiplnej ceste štúdiom na Univerzite Karlovej.

A na záver, Peti, ďakujem ti za všetko.

Názov práce: Redukčné ťahy na kombinatorických povrchoch a eulerovské sféry

Autor: Michal Vorobel

Katedra: Katedra algebry

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc., Katedra algebry

Abstrakt: Práca sa týka štruktúry triangulácií kombinatorických povrchov. Analýzou niekoľkých lokálnych redukčných ťahov a jedného globálneho ťahu je dokázaných niekoľko známych výsledkov novým spôsobom. Ide o základnú nerovnosť pre Eulerovu charakteristiku, Fáryho vetu a existenciu dvoch lokálnych ťahov, ktorými sa dajú z osemstenu získať všetky eulerovské kombinatorické sféry, presnejšie triangulácie sféry, v ktorých má každý vrchol párný stupeň.

Kľúčové slová: kombinatorický povrch, rovinný graf, eulerovská sféra, redukčný ťah

Title: Reduction moves on combinatorial surfaces and eulerian spheres

Author: Michal Vorobel

Department: Department of Algebra

Supervisor: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc., Department of Algebra

Abstract: The work is focused on the structure of triangulations of combinatorial surfaces. By analyzing several local reduction moves and one global move, several known results are proven in a new way. This includes the fundamental inequality for the Euler characteristic, Fáry's theorem, and the existence of two local moves that can be used to obtain all Eulerian combinatorial spheres from an octahedron, more precisely every triangulation of sphere in which each vertex has even degree.

Keywords: combinatorial surface, planar graph, eulerian sphere, reduction move

Obsah

Úvod	2
1 Kombinatorické povrchy a trigon	3
1.1 Základné pojmy	3
1.2 Trigonová operácia	5
1.3 Redukčné ťahy	8
1.3.1 P redukcia	9
1.3.2 Q redukcia	10
1.4 Eulerova charakteristika	12
2 Nakreslenie a rovinné grafy	14
2.1 Redukčné ťahy	14
2.2 Zachovanie steny	15
2.3 Nakreslenie	17
3 Eulerovské sféry	21
3.1 Generovanie eulerovských sfér	21
3.2 Ofarbenie	24
Záver	26
Seznam použité literatury	27
Zoznam obrázkov	28

Úvod

Práca je zameraná na štruktúru triangulácií kombinatorických povrchov, čo je systém trojprvkových podmnožín danej množiny V , ktorý spĺňa určité podmienky. Výsledky práce sme dostali postupom, ktorý nepoužíva známe výsledky z kombinatorickej geometrie resp. teórie grafov. Väčšina dôkazov vznikla vlastnou úvahou a s pomocou konzultácií s vedúcim práce.

V prvej kapitole definujeme pojem trigon, čo je trojica bodov, ktoré sú spojené hranami ale netvoria stenu kombinatorického povrchu. Zavedieme trigonovú operáciu, ktorá tento trigon nahradí dvomi stranami a zachová štruktúru kombinatorického povrchu. Taktiež zavedieme redukčné ťahy P a Q, ktoré boli prevzaté z článku Batagelj (1989). Pomocou týchto ťahov a trigonovej operácie dokážeme známu nerovnosť pre Eulerovu charakteristiku $\chi \leq 2$. Ťahy P a Q sú nutné až v tretej kapitole pri eulerovských sférah a práca by sa dala koncipovať aj inak, a to len za použitia ťahov S a T, ktoré sú definované neskôr.

Druhá kapitola sa týka kombinatorických povrchov, ktorých Eulerova charakteristika je rovná dvom (teda kombinatorických sfér) a ich nakresleniu. Definujeme ďalšie redukčné ťahy S a T, pomocou ktorých v práci dokazujeme tvrdenie, ktoré je o niečo všeobecnejšie ako známa *Fáryho veta* (Fáry, 1948). Ide o tvrdenie, že pre ľubovoľnú stenu rovinného grafu vieme zvoliť rovinné úsečkové nakreslenie daného grafu tak, aby zvolená stena bola vonkajšou stenou tohto nakreslenia (citáciu na toto tvrdenie sa mi nepodarilo dohľadať).

Záverečná kapitola sa venuje eulerovským sféram, teda kombinatorickým povrchom, ktorých každý vrchol má párny stupeň a platí $\chi = 2$. Znova použijeme ťahy P a Q, ale v ich expanznej forme, aby sme dostali, že každú eulerovskú sféru vieme dostať aplikáciou konečnej postupnosti týchto ťahov na osemsten. Táto veta bola prvýkrát dokázaná v Batageljevom článku (Batagelj, 1989), súvisiaci algoritmus je realizovaný v programovom balíčku *plantri* (Brinkmann a McKay, 2007). Taktiež dokážeme, že vrcholy týchto sfér vieme ofarbiť práve tromi farbami a steny práve dvomi farbami, tak aby rovnako farebné prvky neboli spojené hranou (či už dva vrcholy alebo dve steny).

1. Kombinatorické povrchy a trigon

1.1 Základné pojmy

Aj keď objekty, ktoré sú náplňou tejto práce, sú svojou povahou geometrické, budeme z formálneho hľadiska pracovať najmä s kombinatorickými pojmami.

Nech V je neprázdna konečná množina a nech \mathcal{S} je systém trojprvkových podmnožín V taký, že pre každé $v \in V$ existuje $S \in \mathcal{S}$, kde $v \in S$. Zavedieme nasledujúce pojmy:

- Prvky \mathcal{S} nazveme *stenami* resp. *trojuholníkmi*.
- Lubovolnú dvojprvkovú podmnožinu steny nazveme *hrana*.
- Lubovolnú jednoprvkovú podmnožinu steny (teda prvky V) nazveme *vrchol*.

Ďalej budeme používať značenie E pre množinu hrán systému \mathcal{S} , a pre jej veľkosť $|E| = e$ (počet hrán). Množinu vrcholov – V resp. množinu stien – \mathcal{S} už máme označené, zavedieme ale v pre značenie počtu vrcholov a f pre značenie počtu stien. Pre stupeň vrcholu x (teda počet hrán, ktoré ho obsahujú) zavedieme značenie d_x .

Definícia 1.1. Pre systém \mathcal{S} a pre jeho množinu vrcholov V a množinu hrán E nazveme graf (V, E) ako *graf indukovaný systémom \mathcal{S}* (skrátene len graf indukovaný \mathcal{S}).

Zavedieme nasledujúce podmienky, ktoré vyžadujeme aby systém \mathcal{S} splňal:

- (E) Každá hrana prislúcha práve dvom stenám.
- (V) Pre vrchol v stupňa d existujú po dvoch rôzne vrcholy $\{w_1, \dots, w_d\}$ také, že pre $i = 1, \dots, d$ sú $\{w_i, v, w_{i+1}\}$ steny prislúchajúce vrcholu v , a kde $w_{d+1} = w_1$ (vždy teda platí $d \geq 3$).
- (G) Graf indukovaný \mathcal{S} je súvislý.

Definícia 1.2. Majme neprázdny konečný systém trojprvkových množín \mathcal{S} , ktorý splňa podmienky (E), (V) a (G). Takýto systém \mathcal{S} nazveme *triangulovanou 2-varietou*.

Lema 1.1. *Pre triangulovanú 2-varietu \mathcal{S} platí:*

$$3f = 2e = \sum_{x \in V} d_x$$

Dôkaz. Pre prvú rovnosť chceme spočítať počet párov (u, S) , kde u je hrana steny S , $S \in \mathcal{S}$. Ten je na jednej strane rovný $3f$ – každej stene prislúchajú práve tri hrany. No tiež sa tento počet bude rovnať aj $2e$ – keďže ku každej hrane prislúchajú práve dve steny. Dostávame teda, že $3f = 2e$.

A keďže každému vrcholu x prislúcha d_x hrán a zároveň každá hrana prislúcha práve dvom vrcholom, tak dostávame, že $2e = \sum_{x \in V} d_x$

□

Definícia 1.3. Pre triangulovanú 2-varietu \mathcal{S} budeme nazývať číslo $\chi := v - e + f$ Eulerovou charakteristikou \mathcal{S} .

Lema 1.2. Pre Eulerovu charakteristiku χ triangulovanej 2-variety \mathcal{S} platí:

$$\chi = v - f/2 = v - e/3 = v - (\sum_{x \in V} d_x)/6$$

Dôkaz. Dané rovnosti dostávame automaticky po dosadení vzťahov z Lema 1.1 do $\chi = v - e + f$. □

Je dobre známe, že vždy platí $\chi \leq 2$ a $\chi = 2$ práve vtedy, keď graf indukovaný \mathcal{S} je rovinný. Tieto vzťahy nebudeme dopredu predpokladať ale nižšie ich dokážeme.

Definujeme poslednú vlastnosť, ktorú budeme od systému \mathcal{S} vyžadovať:

Definícia 1.4. Systém \mathcal{S} je *orientovateľný*, ak je na ňom možné zvoliť koherentnú orientáciu.

Orientácia systému \mathcal{S} znamená, že vrcholy každej steny patriacej do \mathcal{S} sú cyklicky zoradené (t. j. (a, b, c) je rovnaká orientácia ako (c, a, b)).

Orientácia je *koherentná*, ak pre ľubovoľnú hranu $\{a, b\}$ majú práve dve jej prislúchajúce steny opačnú orientáciu. To znamená, že pre steny $\{a, b, c\}$ a $\{a, b, d\}$ ich príslušné orientácie sú (a, b, c) a (b, a, d) alebo (b, a, c) a (a, b, d) .

Definícia 1.5. Triangulovanú 2-varietu, ktorá je orientovateľná nazveme *kombinatorický povrch*.

Keď nepoviemme inak, tak v ďalšom texte budeme pracovať práve s kombinatorickými povrchmi (pre skrátenie budeme používať pomenovanie povrch resp. varieta).

Definícia 1.6. Majme na kombinatorickom povrchu \mathcal{S} zvolenú orientáciu. *Orientovanou stenou* nazveme cyklus (a, b, c) taký, že $\{a, b, c\}$ je stena \mathcal{S} a (a, b, c) je jej orientácia.

Pre každú z hrán $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ a $\{c, a\}$ orientovanej steny (a, b, c) definujeme *orientáciu hrany v stene*, postupne, ako cykly (a, b) , (b, c) a (c, a) .

Poznámka. V ďalšom texte ak použijeme spojenie „stena (a, b, c) “ budeme tým myslieť orientovanú stenu (a, b, c) . Stenou $\{a, b, c\}$ budeme myslieť stenu bez orientácie resp. stenu, ktorej orientáciu nevieme alebo nepotrebuje vedieť.

Lema 1.3. Pre kombinatorický povrch \mathcal{S} platí, že $v \geq 4$. Keď $v = 4$, tak \mathcal{S} nazveme *štvorsten*.

Dôkaz. Keď by $v = 1$ alebo 2, tak by v \mathcal{S} nebola ani jedna stena. Ak $v = 3$, tak v \mathcal{S} by bola práve jedna stena a pre jej hrany by nebola splnená podmienka (E). Keď $v = 4$, môžeme uvažovať steny (a, d, b) , (a, c, d) , (d, c, b) a (a, b, c) . Jednoducho overíme, že tieto steny splňajú definíciu kombinatorického povrchu, a teda pre všeobecný kombinatorický povrch musí platiť $v \geq 4$. □

Následujúci pojem bude mať v ďalšej práci centrálnu úlohu.

Definícia 1.7. Nech \mathcal{S} je triangulovaná 2-varieta. *Trigon* nazveme trojprvkovú množinu $\{a, b, c\}$ tvorenú z vrcholov \mathcal{S} takú, že jej podmnožiny $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ a $\{b, c\}$ sú hranami \mathcal{S} ale samotná množina $\{a, b, c\}$ nie je stenou v \mathcal{S} .

Lema 1.4. *Nech \mathcal{S} je triangulovaná 2-varieta. Nech v \mathcal{S} existuje vrchol x stupňa 3. Potom je v \mathcal{S} trigon.*

Dôkaz. Pre vrchol x musia existovať vrcholy w_1, w_2 a w_3 také, že množiny $\{w_1, w_2, x\}$, $\{w_1, w_3, x\}$ a $\{w_2, w_3, x\}$ sú steny v \mathcal{S} . Potom množina $\{w_1, w_2, w_3\}$ je trigon. □

Definícia 1.8. Povieme, že $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$ je *disjunktné zjednotenie* triangulovaných 2-variet (resp. kombinatorických povrchov), ak každé \mathcal{S}_i , $i = 1, \dots, n$ je triangulovaná 2-varieta (resp. kombinatorický povrch) a množiny vrcholov \mathcal{S}_i a \mathcal{S}_j sú disjunktné, vždy keď $1 \leq i < j \leq n$.

Pre \mathcal{S} definujeme *Eulerovu charakteristiku* ako $\chi := v - e + f - 2(n - 1)$, kde v je počet vrcholov, e počet hrán a f je počet stien disjunktného zjednotenia \mathcal{S} .

Lema 1.5. *Nech $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$ je disjunktné zjednotenie kombinatorických povrchov. Pre daný kombinatorický povrch \mathcal{S}_i z \mathcal{S} označme χ_i jeho Eulerovu charakteristiku. Pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{S} potom platí $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_n - 2(n - 1)$.*

Dôkaz. Pre každú komponentu \mathcal{S}_i označme v_i, e_i, f_i postupne počet jej vrcholov, hrán a stien. Potom vieme, že platí $\chi_i = v_i - e_i + f_i$. Keďže jednotlivé komponenty pokrývajú celú varietu \mathcal{S} , tak pre počet vrcholov môžeme písať $v = v_1 + \dots + v_n$. Podobné vzťahy platia aj pre počty hrán a stien. Pre χ potom dostávame:

$$\begin{aligned} \chi &= v - e + f - 2(n - 1) \\ &= (v_1 + \dots + v_n) - (e_1 + \dots + e_n) + (f_1 + \dots + f_n) - 2(n - 1) \\ &= (v_1 - e_1 + f_1) + \dots + (v_n - e_n + f_n) - 2(n - 1) \\ &= \chi_1 + \dots + \chi_n - 2(n - 1) \end{aligned}$$

□

1.2 Trigonová operácia

Našou úlohou teraz bude ukázať ako eliminovať daný trigon v kombinatorickom povrchu \mathcal{S} spôsobom, ktorý možno geometricky chápať ako rez \mathcal{S} pozdĺž trigonu. To kombinatoricky znamená, že každý vrchol trigonu zdvojíme, a tak získame dve nové steny. Chceme to urobiť tak, aby štruktúra *kombinatorického povrchu* zostala zachovaná. Presnejšie povedané, po prevedení rezu dostaneme z \mathcal{S} jeden alebo dva kombinatorické povrchy.

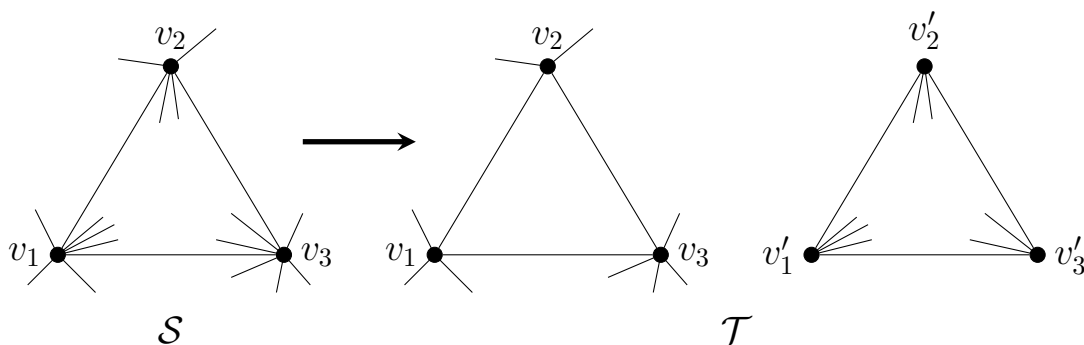
Pre trigon $\{v_1, v_2, v_3\}$ v \mathcal{S} definujeme nový systém stien \mathcal{T} . Pre $i = 1, 2, 3$ označíme vrcholy prislúchajúce v_i ako $w_{i,j}$, kde $j = 0, \dots, d$, pre $d = d_{v_i}$ a kde $w_{i,d} = w_{i,0} = v_{i-1}$ (ešte dodáme, že $v_0 = v_3$) a vyžadujeme aby každá trojica $(w_{i,j}, v_i, w_{i,j+1})$ pre $j \in \{0, \dots, d-1\}$ bola orientovaná stena povrchu \mathcal{S} .

Poznámka. Jednoduchým porovnaním orientácií hrán v stenách $(w_{i,j}, v_i, w_{i,j+1})$ pre $j \in \{0, \dots, d-1\}$ overíme, že orientácia je koherentná.

Tiež pre každé $i = 1, 2, 3$ existuje $k_i \in \{2, \dots, d_{v_i} - 2\}$ také, že musí platiť $w_{i,k_i} = v_{i+1}$ (teraz po správnosti platí $v_4 = v_1$). Pre predstavu poznamenajme, že keď je indukovaný graf \mathcal{S} rovinný (zatiaľ chápeme intuitívne, neskôr definujeme formálne), tak môžeme predpokladať, že vrcholy $w_{i,j}$, pre $1 \leq j < k_i$ sa nachádzajú mimo trigonu a vrcholy $w_{i,j}$, pre $k_i < j < d_{v_i}$ sa nachádzajú vnútri daného trigonu (Obr. 1.1 časť pred šípkou).

Ďalej uvažujme, že $i = 1, 2, 3$. Definujeme nový systém \mathcal{T} tak, že všetky vrcholy z \mathcal{S} budú vrcholmi aj v \mathcal{T} a pridáme ku nim nové vrcholy v'_i . Do systému \mathcal{T} pridáme steny (v_2, v_1, v_3) a (v'_1, v'_2, v'_3) . Každá stena v \mathcal{S} , ktorá neprislúcha žiadnemu vrcholu v_i je tiež stenou \mathcal{T} a ponecháme aj steny $(w_{i,j}, v_i, w_{i,j+1})$, pre $0 \leq j < k_i$. Zvyšné steny v \mathcal{S} , $(w_{i,j}, v_i, w_{i,j+1})$ pre $k_i \leq j < d_{v_i}$, nahradíme v \mathcal{T} stenami $(w_{i,j}, v'_i, w_{i,j+1})$.

Túto konštrukciu budeme nazývať *trigonová operácia*.



Obr. 1.1: Trigonová operácia

Všimnime si, že aj keď \mathcal{T} na obrázku vyzerá, že má dve komponenty, tak to nemusí byť pravda a tieto časti grafu indukovaného \mathcal{T} môžu byť spojené hranami, ktoré ale nie sú na obrázku znázornené.

Tvrdenie 1.6. *Nech je systém \mathcal{S} kombinatorický povrch. Systém \mathcal{T} , ktorý dostaneme aplikovaním trigonovej operácie na trigon $\{v_1, v_2, v_3\}$ v \mathcal{S} , bude buď kombinatorický povrch alebo disjunktné zjednotenie dvoch kombinatorických povrchov.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že nemôžeme dostať viac ako dve komponenty. Uvažujme, pre spor, že po trigonovej operácii budú \mathcal{T} tvoriť aspoň tri komponenty súvislosti. Pridaná stena (v_2, v_1, v_3) bude súčasťou jednej komponenty a stena (v'_1, v'_2, v'_3) bude súčasťou inej komponenty. Do zvyšných komponent nebola pridávaná žiadna stena, teda všetky steny týchto komponent sa museli zachovať spred trigonovej operácie. Z čoho vyplýva, že pred trigonovou operáciou museli \mathcal{S} tvoriť aspoň dve komponenty, čo vedie ku sporu.

Pre hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$, kde $i = 1, 2, 3$ a $v_4 = v_1$ majú im prislúchajúce steny tvar (v_2, v_1, v_3) a $(w_{i,k_i-1}, v_i, v_{i+1})$ (kde k_i je index z trigonovej operácie taký, že platí $w_{i,k_i} = v_{i+1}$).

Podobne aj pre hrany $\{v'_i, v'_{i+1}\}$, kde $i = 1, 2, 3$ a $v'_4 = v'_1$, im prislúchajúce steny budú tvaru (v'_1, v'_2, v'_3) a $(v'_{i+1}, v'_i, w_{i,k_i+1})$. Ostatným hranám sa nijak nemenil počet im prislúchajúcich stien, a teda podmienka (E) je splnená.

Pre všetky vrcholy v \mathcal{T} mimo vrcholov v_i a v'_i , $i = 1, 2, 3$ zostali im prislúchajúce steny nezmenené. Vrcholy v_i majú po trigonovej operácii stupeň $k_i + 1$ a pred operáciou sa zachovali po dvoch rôznych vrcholy $\{w_{i,0}, \dots, w_{i,k_i}\}$, také že pre $j = 0, \dots, k_i$ sú $(w_{i,j}, v_i, w_{i,j+1})$ steny prislúchajúce vrcholu v_i . Ako poslednú zarátavame aj stenu $(w_{i,k_i}, v_i, w_{i,0}) = (v_{i+1}, v_i, v_{i-1})$, ktorú sme trigonovou operáciou pridali.

Analogicky by sme dokázali, že také steny existujú aj pre vrcholy v'_i , ktoré majú po operácii stupeň $d_{v_i} - k_i + 1$ a máme toľko po dvoch rôznych vrcholov $\{w_{i,k_i}, \dots, w_{i,d_{v_i}}\}$, kde platí, že $w_{i,k_i} = v'_{i+1}$ a $w_{i,d_{v_i}} = v'_{i-1}$. A teda dostaneme, že v \mathcal{T} platí podmienka (V).

Porovnaním orientácií hrán v pridaných stenách s orientáciami tých istých hrán, ale v susedných stenách, dostávame, že orientovateľnosť \mathcal{T} sa zachovala.

Keď je graf indukovaný systémom \mathcal{T} súvislý, tak podmienka (G) zostáva splnená a \mathcal{T} je kombinatorický povrch. Uvažujme ale, že graf indukovaný systémom \mathcal{T} nebude súvislý. Vyššie sme ukázali, že \mathcal{T} bude mať dve komponenty \mathcal{T}_1 a \mathcal{T}_2 , no to na platnosti ostatných podmienok nič nemení, a teda dostávame, že \mathcal{T}_1 aj \mathcal{T}_2 sú kombinatorickými povrchmi a \mathcal{T} je ich disjunktným zjednotením. \square

Lema 1.7. *Nech je \mathcal{S} kombinatorický povrch s Eulerovou charakteristikou χ .*

- a) *Keď po trigonovej operácii je graf indukovaný \mathcal{T} súvislý, tak pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{T} platí $\chi' = \chi + 2$.*
- b) *Keď po trigonovej operácii dostaneme dve komponenty \mathcal{T}_1 a \mathcal{T}_2 , tak pre ich Eulerove charakteristiky χ_1 a χ_2 bude platiť $\chi_1 + \chi_2 = \chi + 2$.*

Dôkaz.

- a) Označme v' , e' a f' počty vrcholov, hrán a stien pre \mathcal{T} . Trigonovou operáciou sa počet vrcholov zvýšil o tri, počet hrán taktiež o tri a počet stien sa zvýšil o dva. Dostávame nasledovné vzťahy:

$$v' = v + 3, e' = e + 3 \text{ a } f' = f + 2$$

A teda musí platiť:

$$\begin{aligned} \chi' &= v' - e' + f' \\ &= (v + 3) - (e + 3) + (f + 2) \\ &= v - e + f + 2 \\ &= \chi + 2 \end{aligned}$$

b) Označme v_i, e_i a f_i počty vrcholov, hrán a stien pre \mathcal{T}_i , pre $i = 1, 2$. Počty jednotlivých veličín sa trigonovou operáciou zvýšili rovnako ako v a), a teda môžeme písať:

$$v_1 + v_2 = v + 3, e_1 + e_2 = e + 3 \text{ a } f_1 + f_2 = f + 3$$

A obdobným výpočtom ako v a) dostávame, že $\chi_1 + \chi_2 = \chi + 2$

□

Poznámka. V prípade b) si môžeme všimnúť, že keď $\chi_1 \leq 2$ a $\chi_2 \leq 2$, tak potom aj $\chi \leq 2$. Navyiac, keď platí $\chi_1 = 2 = \chi_2$ tak aj $\chi = 2$.

Dôsledok 1.8. *Nech $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$ je disjunktné zjednotenie kombinatorických povrchov s Eulerovou charakteristikou χ . Nech sa nejaký trigon nachádza v komponente \mathcal{S}_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Nazvime \mathcal{T} disjunktné zjednotenie kombinatorických povrchov, ktoré dostaneme z \mathcal{S} trigonovou operáciou na \mathcal{S}_i . Potom nastáva práve jedna z týchto možností:*

- a) *Keď je počet komponent v \mathcal{T} rovnaký ako v \mathcal{S} , teda \mathcal{S}_i zostala súvislá, tak pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{T} platí $\chi' = \chi + 2$.*
- b) *Keď sa po trigonovej operácii počet komponent v \mathcal{T} zvýšil, teda \mathcal{S}_i sa rozpadla na dve komponenty, tak pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{T} dostávame $\chi' = \chi$.*

Dôkaz. V prípade a) sa počet vrcholov, hrán a stien zmení rovnako ako v prípade a) v Lema 1.7 a keďže sa počet komponent nezmení, dostávame rovnaký výsledok, že $\chi' = \chi + 2$.

Pre prípad b) sa navýši aj počet komponent o jedna, a teda môžeme písať:

$$\begin{aligned} \chi' &= v' - e' + f' - 2(n' - 1) \\ &= (v + 3) - (e + 3) + (f + 2) - 2(n + 1 - 1) \\ &= v - e + f - 2(n - 1) + 3 - 3 + 2 - 2 \\ &= \chi \end{aligned}$$

□

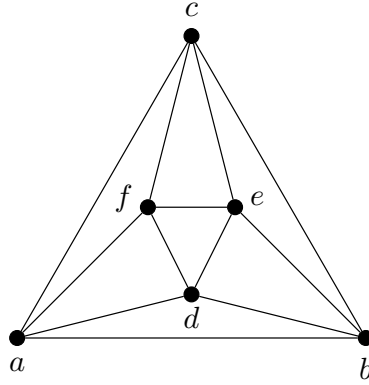
1.3 Redukčné ťahy

Definujeme redukčné ťahy, teda ťahy, ktoré znížia počet stien variety, no potrebné vlastnosti nechajú zachované. Pomocou týchto ťahov a trigonovej operácie rozložíme varietu na disjunktné zjednotenie štvorstenov a (pravidelných) osemstenov, aby sme potom mohli dokázať, že $\chi \leq 2$ platí vždy.

Definícia 1.9. Uvažujme kombinatorický povrch \mathcal{S} pozostávajúci zo stien:

$$\{\{a, b, c\}, \{a, d, b\}, \{d, e, b\}, \{e, c, b\}, \{a, c, f\}, \{a, f, d\}, \{f, e, d\}, \{f, c, e\}\}$$

Tento povrch nazveme osemsten.



Obr. 1.2: Indukovaný graf osemstenu

1.3.1 P redukcia

Lema 1.9. *Uvažujme kombinatorický povrch \mathcal{S} . Nech \mathcal{S} obsahuje vrcholy x a y stupňa 4, ktoré sú spojené hranou. Potom existujú vrcholy z_i pre $i = 1, \dots, 4$ a orientované steny:*

$$(z_1, z_2, x), (z_1, x, z_3), (x, z_2, y), (x, y, z_3), (y, z_2, z_4), (y, z_4, z_3) \quad (*)$$

Pritom nastane práve jedna z nasledujúcich situácií:

- (i) $z_1 = z_4$ a $v = 5$, potom je možné \mathcal{S} interpretovať ako šesťsten,
- (ii) z_1 a z_4 sú spojené hranou a aspoň jedna z trojíc $\{z_1, z_2, z_4\}$, $\{z_1, z_3, z_4\}$ je trigon,
- (iii) z_1 a z_4 sú spojené hranou o obidve trojice $\{z_1, z_2, z_4\}$, $\{z_1, z_3, z_4\}$ sú steny v \mathcal{S} , potom $v = 6$ a \mathcal{S} je možné interpretovať ako pravidelný osemsten,
- (iv) $z_1 \neq z_4$ a $\{z_1, z_4\}$ nie je hrana v \mathcal{S} .

Toto lema je priamočiarym rozborom možných prípadov, keď sa v \mathcal{S} nachádzajú dva vrcholy stupňa 4 spojené hranou, preto nie je potrebný jeho dôkaz.

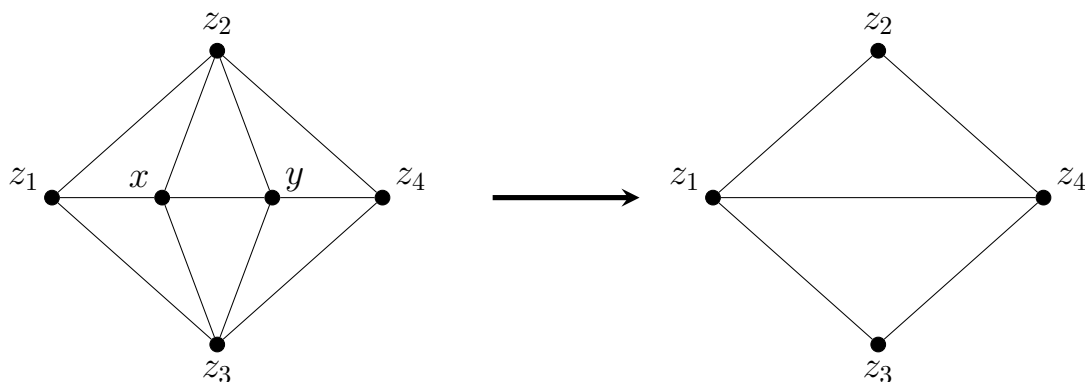
Pozrieme sa bližšie na prípad (iv) a na redukčný ťah, ktorý môžeme previesť:

Tvrdenie 1.10. *Nech \mathcal{S} je kombinatorický povrch s Eulerovou charakteristikou χ . Keď nastane prípad (iv) z Lema 1.9 definujeme nový systém \mathcal{S}' tak, že odstránime vrcholy x a y , steny (*) nahradíme orientovanými stenami (z_1, z_2, z_4) a (z_1, z_4, z_3) a ostatné vrcholy, hrany a steny z \mathcal{S} zostanú zachované. Potom \mathcal{S}' bude kombinatorický povrch s rovnakou Eulerovou charakteristikou χ .*

Tento proces nazveme P redukcia.

Dôkaz. Podmienka (G) zostane triviálne zachovaná.

Hneď vidíme, že každá z hrán $\{z_1, z_2\}$, $\{z_2, z_4\}$, $\{z_4, z_3\}$ a $\{z_3, z_1\}$ prislúcha práve dvom stenám. Keďže $z_1 \neq z_4$ a tieto vrcholy nie sú ani spojené hranou, môžeme pridať aj hranu $\{z_1, z_4\}$. Inak by táto hrana obsahovala dvakrát ten istý vrchol alebo by prislúchala viac ako dvom stenám, a teda podmienka (E) by bola porušená. Keďže táto hrana prislúcha práve pridaným dvom stenám, tak dokopy dostávame, že podmienka (E) pre \mathcal{S}' zostane zachovaná.



Obr. 1.3: P redukcia

Pre vrcholy z_1 a z_4 sa pri podmienke (V) nič nezmení. Stupeň vrcholov z_2 a z_3 sa zníži o dva, rovnako ako počet stien prislúchajúcich danému vrcholu, a teda podmienka (V) zostane zachovaná.

Jednoduchým porovnaním orientácií hrán, ktoré sa zachovali, v odobraných a pridaných stenách, dostávame, že tieto orientácie zostanú neporušené. Pre hranu $\{z_1, z_4\}$ hneď dostávame, že jej orientácie v prislúchajúcich stenách budú opačné. Orientovateľnosť sa teda zachová.

Označme χ' Eulerovu charakteristiku a v' , e' a f' počty vrcholov, hrán a stien pre varietu \mathcal{S}' . Tie sa oproti \mathcal{S} zmenili nasledovne:

$$v' = v - 2, e' = e - 6 \text{ a } f' = f - 4$$

Potom pre Eulerovu charakteristiku dostávame:

$$\begin{aligned} \chi' &= v' - e' + f' = (v - 2) - (e - 6) + (f - 4) \\ &= v - e + f = \chi \end{aligned}$$

□

Poznámka. Niekedy pre ľubovoľnú X redukciu budeme používať názov *redukčný ťah* X . Intuitívne budeme chápať pomenovanie X *expánzia* ako inverznú operáciu ku X redukciu. Pre trigonovú operáciu budeme používať pomenovanie *inverzná trigonová operácia*.

1.3.2 Q redukcia

Definujeme aj druhý redukčný ťah, ktorý môžeme použiť vo viacerých prípadoch.

Tvrdenie 1.11. *Uvažujme kombinatorický povrch \mathcal{S} s Eulerovou charakteristikou χ . Nech \mathcal{S} obsahuje vrchol y stupňa 4. Potom existujú vrcholy x_i pre $i = 1, \dots, 4$. Nech existuje vrchol $z \neq y$, taký, že $\{x_2, z, x_3\}$ je stena. Ak neexistuje ani jedna z hrán $\{x_1, z\}$, $\{x_4, z\}$ a platí, že $d_{x_2}, d_{x_3} \geq 5$, môžeme definovať nový systém \mathcal{S}' tak, že orientované steny:*

$$(x_1, x_2, y), (x_2, x_3, y), (x_3, x_4, y), (x_4, x_1, y), (x_2, z, x_3) \quad (**)$$

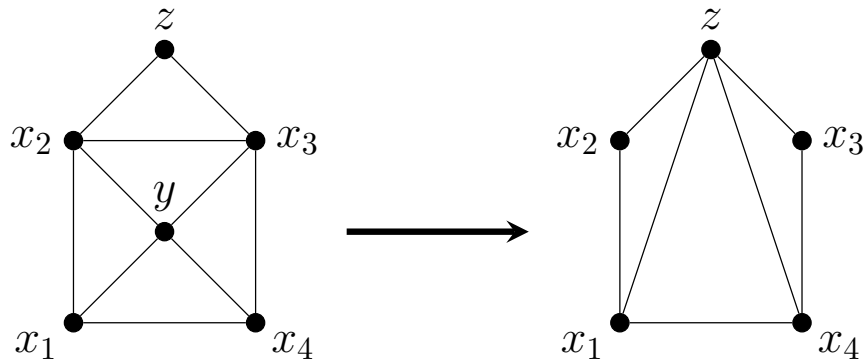
nahradíme stenami (x_1, x_2, z) , (x_1, z, x_4) a (x_3, x_4, z) a ostatné vrcholy, hrany a steny z \mathcal{S} zostanú zachované. \mathcal{S}' bude kombinatorický povrch s rovnakou Eulerovou charakteristikou χ .

Tento proces nazveme *Q redukcia*.

Dôkaz. Podmienka (G) zostáva znovu triviálne zachovaná.

Pre podmienku (V) máme, že vrcholu z sa zvýši stupeň o dva, ale o toľko sa zvýši aj počet jemu prislúchajúcich stien. Keďže pre vrcholy x_2 a x_3 platilo $d_{x_2}, d_{x_3} \geq 5$, teraz pre ne bude platiť $d_{x_2}, d_{x_3} \geq 3$ a počet im prislúchajúcich stien sa tiež znížil o dva. U ostatných vrcholov sa nič nezmenilo, a teda podmienka (V) zostáva zachovaná.

Keďže $\{x_1, z\}$ a $\{x_4, z\}$ neboli hranami v \mathcal{S} , tak tieto hrany po pridaní do \mathcal{S}' budú prislúchať práve dvom stenám, a teda podmienka (E) bude zachovaná.



Obr. 1.4: Q redukcia

Hranám $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, z\}$, $\{z, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$ a $\{x_4, x_1\}$ sa orientácia v pridanej stene oproti stene odobranej nezmenila a hrany $\{x_1, z\}$ a $\{x_4, z\}$ majú v im prislúchajúcich stenách opačné orientácie. Orientovateľnosť sa teda zachovala tiež.

Podobne ako pri *P redukcii* môžeme určiť ako sa zmenil počet vrcholov, hrán a stien ako aj Eulerova charakteristika χ' variety \mathcal{S}' :

$$v' = v - 1, e' = e - 3 \text{ a } f' = f - 2$$

Pre Eulerovu charakteristiku potom platí:

$$\begin{aligned} \chi' &= v' - e' + f' = (v - 1) - (e - 3) + (f - 2) \\ &= v - e + f = \chi \end{aligned}$$

□

Následujúce lema (podobne ako Lema 1.9) je priamočiarym rozborom prípadov, keď vrchol stupňa 4 nesusedí s ďalším vrcholom stupňa 4, a teda nie je potrebný jeho dôkaz.

Lema 1.12. *Majme kombinatorický povrch \mathcal{S} . Nech \mathcal{S} obsahuje vrchol y stupňa 4. Nech existujú vrcholy x_i , $i = 1, \dots, 4$ také, že $d_{x_i} \neq 4$ a vrchol $z \neq y$. Potom existujú orientované steny (**) a nastane práve jedna z nasledujúcich situácií:*

- (i) V \mathcal{S} existuje aspoň jedna z hrán $\{x_1, z\}$ a $\{x_4, z\}$ a tá z trojíc $\{x_1, x_2, z\}$, $\{x_3, x_4, z\}$, v ktorej sa daná hrana nachádza je trigon,
- (ii) vrchol z nie je spojený hranou ani s jedným z vrcholov x_1, x_4 a $d_{x_2}, d_{x_3} \geq 5$.

Poznámka. Keďže $d_{x_i} \geq 5, i = 1, \dots, 4$ môžeme uvažovať, že bude existovať strana $\{x_i, z, x_{i+1}\}, z \neq y$ a bez ujmy na všeobecnosti sme zvolili, že $i = 2$. Tiež prípady ako $z = x_1$ a zároveň $v = 5$ alebo keď jedna z trojíc $\{x_1, x_2, z\}, \{x_3, x_4, z\}$ je stenou \mathcal{S} sú už pokryté v Lema 1.9, keďže buď x_2 alebo x_3 majú stupeň 4.

Lema 1.13. *Nech \mathcal{S} je kombinatorický povrch taký, že v ňom nastala situácia (ii) z Lema 1.9 alebo situácia (ii) z Lema 1.12. Potom na \mathcal{S} môžeme previesť Q redukciu.*

Dôkaz. V prípade (ii) z Lema 1.12 sú názvy vrcholov zhodné s Q redukciou a nutné podmienky sú splnené.

Overíme nutné podmienky pre prípad (ii) z Lema 1.9. Bez ujmy na všeobecnosti zvolíme, že $\{z_1, z_2, z_4\}$ je trigon. Potom existuje vrchol $w \neq y$ taký, že (z_2, w, z_4) je orientovaná stena. Hneď vidíme, že musí platiť $d_{z_2}, d_{z_4} \geq 5$. Zároveň hrana $\{x, w\}$ určite neexistuje. Taktiež nemôže existovať ani hrana $\{z_3, w\}$, keďže by bola porušená podmienka (E). Čiže na stenách $(x, z_2, y), (z_2, z_4, y), (z_4, z_3, y), (z_3, x, y)$ a (z_2, w, z_4) môžeme previesť Q redukciu. □

1.4 Eulerova charakteristika

Teraz máme pripravené vhodné nástroje na dôkaz nasledujúcej vety.

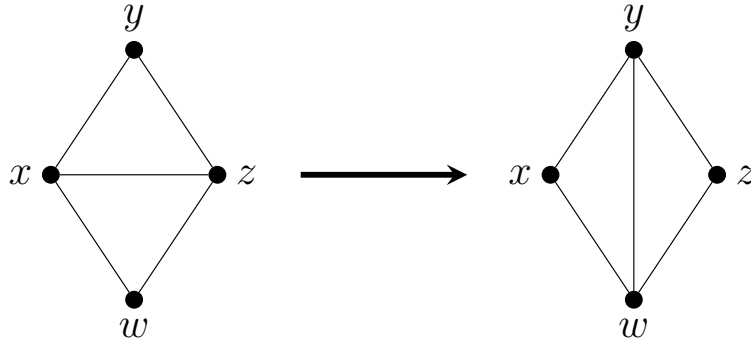
Veta 1.14. *Nech \mathcal{S} je disjunktné zjednotenie n kombinatorických povrchov. Potom pre Eulerovu charakteristiku χ platí, že je párne číslo a $\chi \leq 2$.*

Dôkaz. Najprv z každej komponenty \mathcal{S}_i kde $i = 1, \dots, n$ odstránime všetky trigony. Každá z týchto trigonových operácií nám podľa Dôsledku 1.8 buď Eulerovu charakteristiku \mathcal{S} zvýši o 2 alebo ju nezmení. Ďalej budeme pracovať s disjunktým zjednotením $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_m$, ktoré je tvorené z beztrigonových komponent.

Zvoľme komponentu \mathcal{R}_i . Keď v nej nájdeme vrchol x taký, že $d_x = 3$, tak buď $v_i = 4$ a \mathcal{R}_i je štvorsten alebo vrcholy susediace s x tvoria trigon. Môžeme teda predpokladať, že pre každý vrchol x komponenty \mathcal{R}_i platí $d_x \geq 4$.

Nech v \mathcal{R}_i je vrchol y stupňa 4. Keďže pracujeme s beztrigonovým kombinatorickým povrchom, tak možnosti (ii) z Lema 1.9 a (i) z Lema 1.12 nemôžu nastať. Nemôže nastať ani možnosť (i) z Lema 1.9, keďže na šesťsten vieme aplikovať trigonovú operáciu, po ktorej dostaneme dva štvorsteny. A teda buď môže nastať možnosť, že daná komponenta je osemsten alebo na danú komponentu vieme aplikovať P resp. Q redukciu.

Uvažujme teraz, že taký vrchol y stupňa 4 sa v \mathcal{R}_i nenachádza. Potom musí existovať vrchol x spĺňajúci $d_x \geq 5$. Zoberme vrcholy y, z a $w, y \neq w$, susediace s x také, že (x, y, z) a (x, z, w) sú orientovanými stenami prislúchajúcimi k x . Keďže



Obr. 1.5: Znižovanie stupňa vrcholu x

platí $d_z, d_x \geq 5$, tak $\{y, w\}$ nemôže byť hrana \mathcal{S}_i , keďže potom jedna z množín $\{x, y, w\}$, $\{z, y, w\}$ by bola trigon.

Teda môžeme nahradiť steny vyššie, stenami (x, y, w) a (y, z, w) . Podobne ako pri P resp. Q redukcii overíme, že orientovateľnosť a podmienky (V), (E) a (G) zostanú zachované. Touto operáciou môžeme vytvoriť niekoľko trigonov, podľa toho koľko mali vrcholy y a w spoločných susedov. Môžeme znovu previesť trigonové operácie a naďalej pracovať s beztrigonovými komponentami. V jednej z nich zostane aj vrchol x .

Takto znížime stupeň vrcholu x o 1. Opakovaním tejto úpravy vieme previesť vrchol x na vrchol stupňa 4 bez toho, aby sme porušili štruktúru kombinatorického povrchu.

Dostávame, že keď vybraná komponenta nie je štvorsten ani osemsten, tak v nej vieme nájsť resp. vytvoriť vrchol stupňa 4 a následne aplikovať P alebo Q redukciu. Opakovaním tohto postupu na konci dostaneme disjunktné zjednotenie štvorstenu a osemstenu. Označme ho \mathcal{T} a tiež označme počet štvorstenu ako k a počet osemstenu ako l . Každá komponenta \mathcal{T} má Eulerovu charakteristiku $\chi = 2$.

Z Lema 1.5 potom dostávame, že pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{T} platí:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_1 + \cdots + \chi_k + \chi_1 + \cdots + \chi_l - 2(k + l - 1) \\ &= 2k + 2l - 2k - 2l + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Keďže sa trigonovou operáciou resp. P a Q redukciou Eulerova charakteristika buď nemenila alebo sa navyšovala o 2, a keďže pre \mathcal{T} platí, že $\chi = 2$, dostávame, že pre \mathcal{S} bude jeho Eulerova charakteristika párne číslo a $\chi \leq 2$. □

Definícia 1.10. Kombinatorický povrch \mathcal{S} , pre ktorý platí, že jeho Eulerova charakteristika je $\chi = 2$ budeme nazývať kombinatorická sféra.

2. Nakreslenie a rovinné grafy

V tejto sekcii, ak nepoviem inak, budeme pracovať s kombinatorickými sférami. Definujeme ďalšie pomocné redukčné ťahy a ako výsledok tejto kapitoly dostaneme mierne všeobecnejšiu *Fáryho vetu*.

2.1 Redukčné ťahy

Tvrdenie 2.1. *Nech \mathcal{S} je beztrigonový kombinatorický povrch. Nech v \mathcal{S} existuje vrchol y stupňa 4. Potom existujú vrcholy x_i a orientované steny (x_i, x_{i+1}, y) , $i = 1, \dots, 4$ a $x_5 = x_1$.*

Môžeme definovať nový systém \mathcal{R} tak, že tieto steny nahradíme orientovanými stenami (x_1, x_2, x_4) a (x_2, x_3, x_4) a ostatné vrcholy, hrany a steny z \mathcal{S} zostanú zachované. Potom \mathcal{R} bude kombinatorický povrch s rovnakou Eulerovou charakteristikou ako \mathcal{S} .

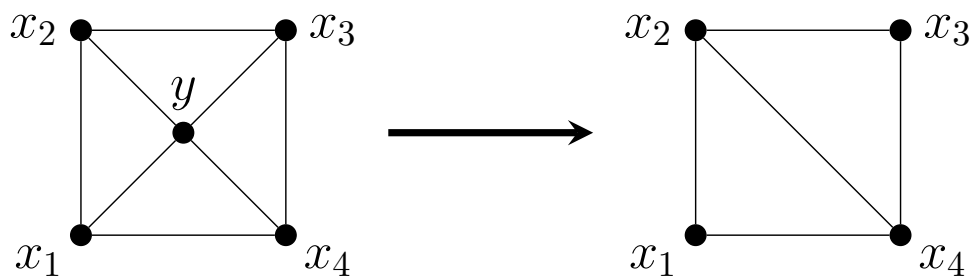
Tento proces nazveme \mathcal{S} redukcia.

Dôkaz. Existencia orientovaných stien (x_i, x_{i+1}, y) , $i = 1, \dots, 4$ a $x_5 = x_1$, ihneď vyplýva z podmienky (V) pre y .

Podmienka (G) zostáva znovu triviálne zachovaná.

Keďže \mathcal{S} je beztrigonová varieta tak z Lema 1.4 platí, že v \mathcal{S} pre každý vrchol x platí, že $d_x \geq 4$. Potom pre vrcholy x_1 a x_3 zostáva podmienka (V) zachovaná, keďže sa ich stupeň znížil o jedna rovnako ako počet im prislúchajúcich stien. Vrcholom x_2 a x_4 sa stupeň nemení, a teda \mathcal{R} spĺňa podmienku (V).

Pre hrany $\{x_i, x_{i+1}\}$ kde $i = 1, \dots, 4$ a $x_5 = x_1$ sa počet im prislúchajúcich strán nemení, rovnako ako orientácie týchto hrán zostávajú v pridaných stenách rovnaké, aké boli v stenách odobraných. Hranu $\{x_2, x_4\}$ sme do \mathcal{R} mohli pridať, lebo keby bola aj v \mathcal{S} , tak $\{x_2, x_4, y\}$ by bol trigon. Potom pre túto hranu platí, že prislúcha práve dvom stenám a jej orientácie v týchto stranách sú opačné. Dostávame, že \mathcal{R} bude orientovateľná a bude spĺňať aj podmienku (E).



Obr. 2.1: \mathcal{S} redukcia

Označme χ' Eulerovu charakteristiku a v' , e' a f' počty vrcholov, hrán a stien pre varietu \mathcal{R} . Tie sa oproti \mathcal{S} zmenili nasledovne:

$$v' = v - 1, e' = e - 3 \text{ a } f' = f - 2$$

Pre Eulerovu charakteristiku potom platí:

$$\begin{aligned}\chi' &= v' - e' + f' = (v - 1) - (e - 3) + (f - 2) \\ &= v - e + f = \chi\end{aligned}$$

□

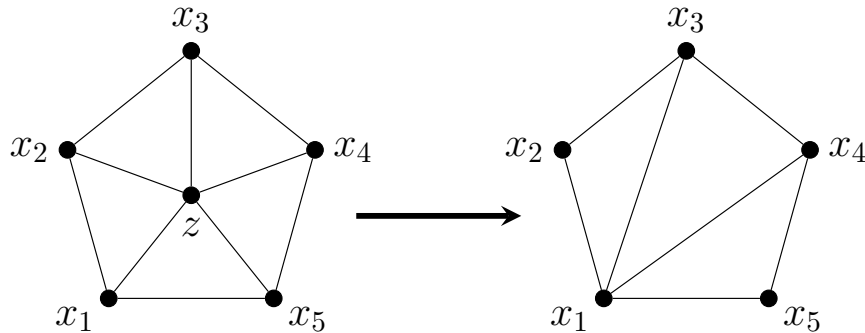
Tvrdenie 2.2. *Nech \mathcal{S} je beztrigonový kombinatorický povrch. Nech v \mathcal{S} existuje vrchol z stupňa 5. Potom existujú vrcholy x_i a orientované steny (x_i, x_{i+1}, z) , $i = 1, \dots, 5$ a $x_6 = x_1$.*

Môžeme definovať nový systém \mathcal{M} tak, že tieto steny nahradíme orientovanými stenami (x_1, x_2, x_3) , (x_1, x_3, x_4) a (x_1, x_4, x_5) a ostatné vrcholy, hrany a steny z \mathcal{S} zostanú zachované. Potom \mathcal{M} bude kombinatorický povrch s rovnakou Eulerovou charakteristikou ako \mathcal{S} .

Tento proces nazveme T redukcia.

Dôkaz. Rovnako ako pri S redukcii, existencia orientovaných stien (x_i, x_{i+1}, y) , $i = 1, \dots, 5$ a $x_6 = x_1$, ihneď vyplýva z podmienky (V) pre y .

Tiež sa úplne rovnako ako pri S redukcii bude dokazovať splnenie podmienok (G) a (E), orientovateľnosť a aj zachovanie Eulerovej charakteristiky.



Obr. 2.2: T redukcia

Pripomeňme, že hrany $\{x_1, x_3\}$ a $\{x_1, x_4\}$ môžeme pridať, keďže sa nenachádzali vo variete \mathcal{S} (inak by množina $\{x_1, z, x_i\}$ pre $i = 3$ alebo $i = 4$ tvorila trigon).

Vrcholom x_2 a x_5 sa stupeň znížil o jedna rovnako ako počet im prislúchajúcich stien. Vrcholu x_1 sa stupeň zvýšil o jedna, podobne ako aj počet jemu prislúchajúcich stien. Ostatné vrcholy majú stupeň aj počet im prislúchajúcich stien nezmenený. Dostávame teda, že podmienka (V) bude tiež v \mathcal{M} splnená.

□

2.2 Zachovanie steny

Lema 2.3. *Nech \mathcal{S} je beztrigonová kombinatorická sféra. Keď v \mathcal{S} budú maximálne 2 vrcholy stupňa 4, tak v \mathcal{S} musí byť aspoň 8 vrcholov stupňa 5. Keď v \mathcal{S} nebude vrchol stupňa 5, tak v \mathcal{S} musí byť aspoň 6 vrcholov stupňa 4.*

Dôkaz. Z Lema 1.2 vieme, že platí $\chi = v - (\sum_{x \in V} d_x)/6$. Keďže $\chi = 2$ môžeme písať:

$$\begin{aligned} v - (\sum_{x \in V} d_x)/6 &= 2 \\ 6v &= 12 + \sum_{x \in V} d_x \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pre ľubovoľný kombinatorický povrch označme v_i , $i \in \mathbb{N}$ počet vrcholov stupňa i , ktoré sa v danom povrchu nachádzajú. Potom pre kombinatorickú sféru \mathcal{S} môžeme písať $v = (v_4 + v_5 + v_6 + \dots)$ a $\sum_{x \in V} d_x = (4v_4 + 5v_5 + 6v_6 + \dots)$ (z Lema 1.4 vieme, že v \mathcal{S} nie sú vrcholy stupňa 3). Dosadíme tieto hodnoty do 2.1 a upravme:

$$\begin{aligned} 6v &= 12 + \sum_{x \in V} d_x \\ 6(v_4 + v_5 + v_6 + \dots) &= 12 + (4v_4 + 5v_5 + 6v_6 + \dots) \\ 6(v_4 + v_5 + v_6 + \dots) &\geq 12 + 4v_4 + 5v_5 + 6v_6 + 6v_7 + \dots \\ 6v_4 + 6v_5 &\geq 12 + 4v_4 + 5v_5 \\ v_5 &\geq 12 - 2v_4 \\ 2v_4 &\geq 12 - v_5 \end{aligned}$$

Teraz keď budú v \mathcal{S} najviac 2 vrcholy stupňa 4, tak vrcholov stupňa 5 bude aspoň $12 - 2v_4 = 12 - 2 \cdot 2 = 8$.

Podobnou úvahou dostávame, že keď v \mathcal{S} nebude vrchol stupňa 5, tak vrcholov stupňa 4 bude aspoň $12/2 = 6$.

□

Lema 2.4. *Nech \mathcal{S} je beztrigonová kombinatorická sféra. Zvoľme ľubovoľnú stenu v \mathcal{S} . Ak \mathcal{S} nie je štvorsten vieme v \mathcal{S} previesť S alebo T redukciu tak, že zvolená stena zostane neporušená.*

Dôkaz. To, že stena zostane neporušená resp. zachovaná chápeme tak, že pri redukcii ju neodoberieme a celá sa prenesie do zredukovaného kombinatorického povrchu. Zvoľme stenu (a, b, c) . Podľa Lema 2.3 môžeme v \mathcal{S} uvažovať aspoň jeden vrchol stupňa 4 alebo 5. Keď by v \mathcal{S} nebol vrchol stupňa 4, tak dôsledok Lema 2.3 je, že v \mathcal{S} bude aspoň 12 vrcholov stupňa 5, a teda vieme zvoliť taký vrchol z stupňa 5, že nebude patriť stene (a, b, c) a na jemu prislúchajúce steny vieme previesť T redukciu.

Uvažujme teraz, že sa v \mathcal{S} nachádza vrchol y stupňa 4, ktorý neprislúcha stene (a, b, c) . Potom môžeme na jemu prislúchajúce steny (x_i, x_{i+1}, y) , $i = 1, \dots, 4$ a $x_5 = x_1$ previesť S redukciu.

Keď jeden (resp. dva) z vrcholov steny (a, b, c) má (resp. majú) stupeň 4 a viac vrcholov stupňa 4 v \mathcal{S} nie je, tak znova podľa Lema 2.3 máme, že existujú aspoň 4 vrcholy stupňa 5, ktoré neprislúchajú stene (a, b, c) . Zvoľme jeden z nich a označme ho z . Potom môžeme na jemu prislúchajúce steny (x_i, x_{i+1}, z) , $i = 1, \dots, 5$ a $x_6 = x_1$ previesť T redukciu.

Ak by všetky vrcholy steny (a, b, c) mali stupeň 4, tak by steny prislúchajúce týmto vrcholom tvorili trigon ekvivalentný osemstenu.

Rozobrali sme teda všetky prípady, ktoré môžu nastať a vždy vieme spraviť redukčný ťah tak, aby stena (a, b, c) zostala neporušená. □

2.3 Nakreslenie

Definícia 2.1. Podmnožinu \mathbb{R}^2 tvaru $\sigma([0,1])$, kde $\sigma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je nejaké spojité a prosté zobrazenie intervalu $[0,1]$ do roviny nazveme *oblúk*. Body $\sigma(0)$ a $\sigma(1)$ nazveme *koncové body*.

Poznámka. Význam slova oblúk v definícii vyššie tu podrobnejšie špecifikovať nebudeme a pridržíme sa intuitívneho chápania. Ak by bola nutná presná definícia, môžeme oblúk chápať ako postupnosť na seba nadväzujúcich úsečiek, ktoré sa nikde navzájom nepretínajú (t.j. aproximácia oblúku lomenou čiarou).

Definícia 2.2. *Nakreslením grafu* $G = (V, E)$ nazveme zobrazenie h , ktoré každému vrcholu $v \in V$ priradí bod $h(v) \in \mathbb{R}^2$ a každej hrane $e = \{u, v\}$ priradí oblúk $h(e) \mapsto \sigma_e : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ s koncovými bodmi $h(u)$ a $h(v)$. Pritom predpokladáme, že toto zobrazenie je prosté (rôznym vrcholom priradí rôzne body v rovine a rôznym hranám priradí rôzne oblúky – tie ale môžu mať spoločné body) a tiež, že každý z bodov $h(v)$ je koncovým bodom nejakého z oblúkov σ_e .

Definícia 2.3. *Nakreslením kombinatorického povrchu* \mathcal{S} rozumieme také nakreslenie grafu indukovaného \mathcal{S} , že, až na jednu stenu (a, b, c) , ktorú nazveme *vonkajšia*, všetky ostatné steny majú svoje vrcholy a oblúky nakreslené vnútri steny (a, b, c) .

Definícia 2.4. Nakreslenie grafu G je *rovinné*, ak ľubovoľné dva rôzne oblúky zdieľajú nanajvýš koncové body. Graf je *rovinný*, ak má rovinné nakreslenie.

Stenou nakreslenia rovinného grafu G nazveme súvislú množinu v $\mathbb{R}^2 \setminus X$, kde X je zjednotenie všetkých oblúkov v G . Každú stenu teda môžeme zapísať ako cyklus vrcholov, ktoré sa nachádzajú v oblúkoch, ktoré ju ohraničujú.

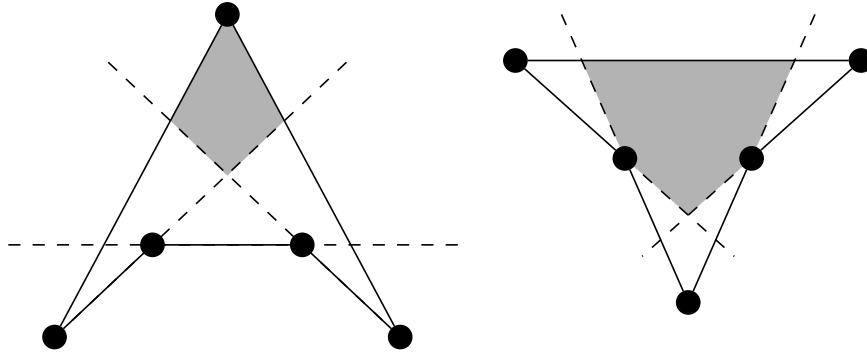
Nakreslenie grafu G nazveme *úsečkové*, ak je každý oblúk úsečkou.

Lema 2.5. *Majme rôzne body* $x_i \in \mathbb{R}^2$ *pre* $i = 1, \dots, 5$, *ktoré tvoria päťuholník. Vnútri tohto päťuholníka vieme zvoliť bod* y *tak, že úsečky* $yx_i, i = 1, \dots, 5$ *budú obsiahnuté v jeho vnútri.*

Dôkaz. Vnútro útvaru budeme chápať intuitívne geometricky. Uvažujme nejaký n -uholník $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Keď povieme, že bod a bude vidieť na bod b , znamená to, že úsečka medzi týmito bodmi bude vnútri n -uholníka.

Keď sú vnútorné uhly päťuholníka menšie ako 180° , tak môžeme vnútrivoliť ľubovoľný bod y . Keďže súčet uhlov v päťuholníku je 540° , tak najviac dva uhly môžu mať viac ako 180° .

Bez ujmy na všeobecnosti, predpokladajme, že platí $|x_1x_2x_3| \geq 180^\circ$. Uvažujme teraz „štvrtrovinu“, ktorú vyznačíme polpriamkami x_1x_2 a x_3x_2 a jej prienik s našim päťuholníkom. Každý bod z tohto prieniku bude vidieť na body x_1, x_2, x_3 a na aspoň jeden z bodov x_4 a x_5 . Keď neexistuje ďalší uhol väčší ako 180° , tak bude vidieť na všetky vrcholy päťuholníka.



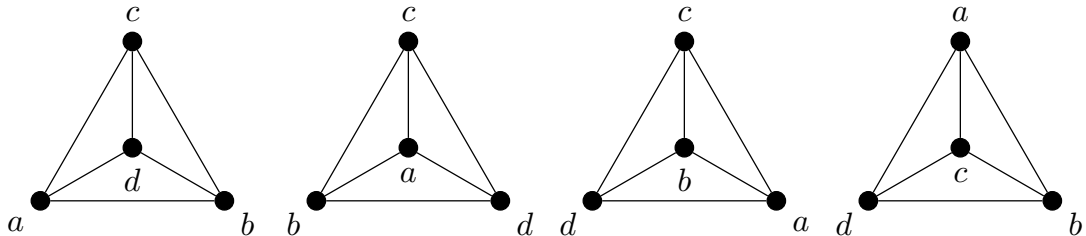
Obr. 2.3: Časti päťuholníka, ktoré vidia na každý vrchol

Nech existuje ešte nejaký uhol väčší ako 180° (Obr. 2.3), tak postup opakujeme a budeme uvažovať prienik štvrtroviny, ktorú dostaneme s prienikom, ktorý už máme. Dostávame, že každý bod v tomto prieniku vidí na vrcholy päťuholníka. Vyberieme z nich nejaký bod y .

□

Veta 2.6. *Nech \mathcal{S} je kombinatorická sféra. Zvoľme ľubovoľnú stenu $(a, b, c) \in \mathcal{S}$. Potom vieme zvoliť rovinné úsečkové nakreslenie grafu indukovaného \mathcal{S} , že stena (a, b, c) bude vonkajšia stena tohoto nakreslenia.*

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou podľa počtu vrcholov \mathcal{S} . Z Lema 1.3 dostávame, že pre prvý krok indukcie môžeme uvažovať štvorsten, kde $v = 4$. Pre každú stenu štvorstenu vieme určiť rovinné nakreslenie, tak aby bola vonkajšia (Obr. 2.4). Toto nakreslenie bude tiež úsečkové.



Obr. 2.4: Rovinné úsečkové nakreslenia štvorstenu, pre danú vonkajšiu stenu

Uvažujme teraz, že tvrdenie platí pre povrchy, kde $v - 1 \geq 4$. Nech \mathcal{S} je beztrigonová sféra s počtom vrcholov v . Zvoľme stenu $(a, b, c) \in \mathcal{S}$. Keďže \mathcal{S} je beztrigonová a nie je to štvorsten, tak z Lema 2.4 vieme, že môžeme previesť \mathcal{S} resp. T redukciu tak, aby stena (a, b, c) bola zachovaná. Dostávame kombinatorickú sféru \mathcal{R} s počtom vrcholov $v - 1$. Môžeme využiť indukčný predpoklad, a teda pre \mathcal{R} vieme zvoliť také rovinné úsečkové nakreslenie h , že stena (a, b, c) bude vonkajšia.

Uvažujme, že na \mathcal{S} sme previedli \mathcal{S} redukciu a tak sme v \mathcal{R} dostali steny (x_1, x_2, x_4) a (x_2, x_3, x_4) . Tieto steny zostanú v nakreslení h pri sebe, a teda môžeme na nich previesť \mathcal{S} expanziu: pridáme vrchol y a steny (x_i, x_{i+1}, y) kde $i = 1, \dots, 4$ a $x_5 = x_1$. Z povrchu \mathcal{R} sme touto expanziou dostali naspäť kombinatorický povrch \mathcal{S} . Definujeme nové nakreslenie \tilde{h} tak, že $\tilde{h}(y) = h(\{x_2, x_4\})$ (0.5)

a $\tilde{h}(\{y, x_i\}) = \sigma([0,1])$ je oblúk s koncovými bodmi $\sigma(0) = \tilde{h}(y)$ a $\sigma(1) = h(x_i)$ pre $i = 1, \dots, 4$. Pre ostatné vrcholy a hrany platí, že $\tilde{h} = h$. Analogicky by sme postupovali aj keby sme na \mathcal{S} previedli T redukciu - podľa Lema 2.5 vieme zvoliť v päťuholníku $x_1x_2x_3x_4x_5$ bod y tak, že ho vieme spojiť s každým vrcholom úsečkou, ktorá nevyjde z tohto päťuholníka.

Dostávame, že \tilde{h} je rovinné úsečkové nakreslenie kombinatorickej sféry \mathcal{S} také, že stena (a, b, c) je vonkajšia stena tohoto nakreslenia.

Ak by \mathcal{S} nebola beztrigonová sféra, uvažujme trigon $\{k, l, m\}$. Môžeme na ňom previesť trigonovú operáciu a tak dostaneme dve komponenty \mathcal{T}_1 a \mathcal{T}_2 , ktoré majú počet vrcholov nanajvyš $v - 1$. To plynie z toho, že pre \mathcal{S} platí $\chi = 2$ a potom nám Veta 1.14 spolu s Dôsledkom 1.8 hovoria, že po trigonovej operácii na \mathcal{S} musíme dostať dve disjunktné komponenty. Aj keď dokopy teraz máme viac vrcholov ako bolo pôvodne v \mathcal{S} , tak v každej z týchto komponent sa musel počet vrcholov oproti \mathcal{S} znížiť aspoň o jedna.

Stena (a, b, c) sa musela v jednej z týchto komponent zachovať. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme voľiť $(a, b, c) \in \mathcal{T}_1$. Tiež pre steny, ktoré sme trigonovou operáciou pridali, platí $(l, k, m) \in \mathcal{T}_1$ a $(k', l', m') \in \mathcal{T}_2$. Z indukčného predpokladu vieme pre povrch \mathcal{T}_1 zvoliť rovinné úsečkové nakreslenie h_1 také, že stena (a, b, c) je vonkajšou stenou tohto nakreslenia a rovnako pre \mathcal{T}_2 vieme zvoliť rovinné úsečkové nakreslenie h_2 , že (k', l', m') bude jeho vonkajšou stenou.

Nakreslenie h_2 môžeme afinne zobrazit tak, že bude platiť $h_2(k') = h_1(k)$, $h_2(l') = h_1(l)$ a $h_2(m') = h_1(m)$. Teda stotožnili sme steny (k', l', m') a (k, l, m) . Môžeme uvažovať nakreslenie f , pre ktoré na vrcholoch a hranách \mathcal{T}_1 bude platiť $f = h_1$ a na vrcholoch a hranách \mathcal{T}_2 bude platiť, že $f = h_2$.

Dostávame, že f je rovinné úsečkové nakreslenie kombinatorickej sféry \mathcal{S} , ktoré má stenu (a, b, c) ako vonkajšiu. □

Tvrdenie 2.7. *Pre kombinatorický povrch \mathcal{S} platí, že jeho Eulerova charakteristika $\chi = 2$ práve vtedy, keď nakreslenie grafu indukovaného \mathcal{S} je rovinné.*

Dôkaz. \Rightarrow Táto implikácia je priamym výsledkom Tvrdenia 2.6.

\Leftarrow Keďže je nakreslenie povrchu \mathcal{S} rovinné, tak keď sa v ňom nachádza trigon, po aplikovaní trigonovej operácie dostávame dve disjunktné komponenty (viď Obr. 1.1). Z Obr. 1.3 a Obr. 1.4 vidíme, že P a Q redukcia nemenia rovinnosť nakreslenia povrchu \mathcal{S} . Ich použitím a podobným postupom ako vo Vete 1.14, potom môžeme \mathcal{S} zredukovať na disjunktné zjednotenie štvorstenov a osemstenov.

P ani Q redukcia nemenia Eulerovu charakteristiku \mathcal{S} , tú nezmenila ani žiadna z trigonových operácií (Dôsledok 1.8 prípad b). Priamym výpočtom charakteristiky pre štvorsten a osemsten dostávame, že $\chi = 2$ a z Lema 1.5 potom dostávame že pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{S} platí $\chi = 2$. □

Definícia 2.5. *Kombinatorickou trianguláciou rovinného grafu $G = (V, E)$ rozumieme kombinatorickú sféru \mathcal{S}_G , ktorá ma za vrcholy množinu $(V \cup D)$, kde V je množina vrcholov a D množina stien grafu G a ktorej steny sú tvaru (v_i, v_{i+1}, d) , kde (v_1, \dots, v_n) je cyklus steny $d \in D$ a $v_{n+1} = v_1$.*

Veta 2.8. *Nech $G = (V, E)$ je graf pre ktorý platí, že $\chi = 2$. Potom pre ľubovoľnú stenu d v G vieme zvoliť rovinné úsečkové nakreslenie tak, aby stena d bola vonkajšou stenou tohto nakreslenia.*

Dôkaz. Keďže pre graf G platí $\chi = 2$, tak z Tvrdenia 2.7 dostávame, že tento graf bude rovinný. Potom môžeme uvažovať kombinatorickú trianguláciu \mathcal{S}_G tohto grafu. Pre kombinatorickú sféru \mathcal{S}_G a nejakú jej stenu (a, b, c) vieme podľa Vety 2.6 zvoliť také nakreslenie, že (a, b, c) bude vonkajšia stena tohto nakreslenia.

Nech d je nejaká stena grafu G . Túto stenu môžeme zapísať cyklom vrcholov (x_1, \dots, x_n) , $n \geq 3$. V \mathcal{S}_G sa potom budú nachádzať steny (x_i, x_{i+1}, d) , $i = 1, \dots, n$ a $x_{n+1} = x_1$. Pre stenu (x_1, x_2, d) určíme rovinné úsečkové nakreslenie sféry \mathcal{S}_G tak aby táto stena bola vonkajšia.

Z tohto nakreslenia odoberieme vrcholy d pre všetky strany v grafe G a všetky im prislúchajúce hrany. Toto odobratie vrcholov a hrán nemá žiaden vplyv na rovinnosť resp. úsečkovosť grafu. Teda dostávame, že výsledné nakreslenie je rovinné úsečkové nakreslenie grafu G , ktoré má zvolenú stenu d ako vonkajšiu. □

Táto veta je zovšeobecnením *Fáryho vety*, ktorá hovorí, že pre každý rovinný graf vieme zvoliť rovinné úsečkové nakreslenie.

3. Eulerovské sféry

Definícia 3.1. Kombinatorický povrch \mathcal{S} nazveme *eulerovský*, ak pre každý vrchol v \mathcal{S} platí, že má párny stupeň.

Keď navyše pre Eulerovu charakteristiku \mathcal{S} bude platíť $\chi = 2$, tak povieme, že \mathcal{S} je *eulerovská sféra*.

3.1 Generovanie eulerovských sfér

Lema 3.1. *Nech \mathcal{S} je eulerovská sféra. Potom v \mathcal{S} je aspoň 6 vrcholov stupňa 4.*

Dôkaz. Vyplýva priamo z Lema 2.3, keďže v \mathcal{S} nemáme vrcholy stupňa 3 ani 5. □

Poznámka. Eulerovská sféra s najmenším počtom vrcholov je teda osemsten, pre ktorý platí $v = 6$.

Lema 3.2. *P a Q redukcia zachovávajú eulerovskosť.*

Dôkaz. Už sme si dokázali, že P a Q redukcie zachovávajú štruktúru kombinatorického povrchu a aj jeho Eulerovu charakteristiku.

Pozrime sa na stupne vrcholov, ktoré v redukciách vystupujú. Tie sa buď nezmenili, znížili o dva alebo zvýšili o dva, teda parita jednotlivých stupňov zostáva zachovaná. Keď sme pred P resp. Q redukciou mali eulerovský povrch, tak zostane eulerovský aj po prevedení nejakej z redukcií. □

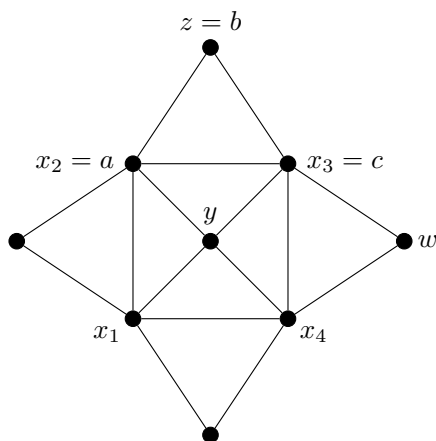
Lema 3.3. *Nech \mathcal{S} je beztrigonová eulerovská sféra. Zvoľme ľubovoľnú stenu $(a, b, c) \in \mathcal{S}$. Ak \mathcal{S} nie je osemsten vieme v \mathcal{S} previesť P alebo Q redukciu tak, že stena (a, b, c) zostane neporušená.*

Dôkaz. Podľa Lema 3.1 existuje v \mathcal{S} aspoň 6 vrcholov stupňa 4. Keď stena (a, b, c) neobsahuje vrchol stupňa 4, tak môžeme previesť P redukciu, ak sú niekde spojené dva vrcholy stupňa 4. Ak také vrcholy nevieme nájsť, potom existuje vrchol y a steny $(x_i, x_{i+1}, y), i = 1, \dots, 4$ a kde $x_5 = x_1$, na ktorých vieme previesť Q redukciu. Nechceme ale, aby stena (a, b, c) bola stenou (x_2, z, x_3) z Lema 1.11, lebo tak by sme zvolenú stenu porušili. Ale keďže $d_{x_i} \geq 6$, tak vieme vybrať takú stenu $(x_i, w, x_{i+1}), w \neq y, i \neq 2$ aby sa nerovnal stene (a, b, c) , ako znázorňuje obrázok 3.1.

Ak by všetky vrcholy steny (a, b, c) mali stupeň 4, tak by steny prislúchajúce týmto vrcholom tvorili osemsten alebo trigon ekvivalentný osemstenu. Teda najviac dva vrcholy steny (a, b, c) majú stupeň 4.

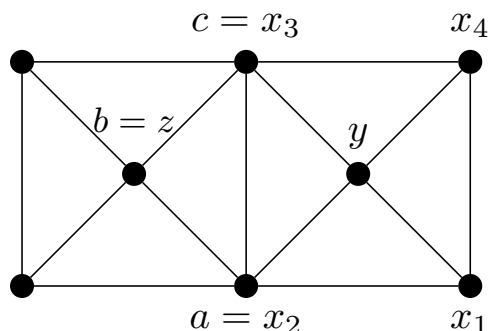
Pre graf indukovaný \mathcal{S} uvažujme podgraf, ktorý pozostáva zo stien, ktoré obsahujú vrchol stupňa 4, označme ho H .

Nech stena (a, b, c) obsahuje jeden vrchol stupňa 4, ktorý je izolovaný v H (nemá suseda stupňa 4). Potom keď v H je ďalší takýto izolovaný bod, tak vieme



Obr. 3.1: Potrebný posun pre Q redukciu

naňho previesť Q redukciu. Ale tento bod musí spĺňať, že stena (a, b, c) nie je stenou (x_2, z, x_3) z Tvrdenia 1.11 – to sa môže stať len pre jeden taký bod y (Obr. 3.2) a keďže $d_{x_i} \geq 6, i = 1, \dots, 4$, opäť sa môžeme posunúť o hranu vedľa. Keď tam takýto vrchol nie je, máme dvojicu vrcholov stupňa 4 spojenú hranou. Na stenách, ktoré im prislúchajú, môžeme previesť P redukciu, keďže sme v beztrigonovej sfére a vrcholy z_2 a z_3 z Tvrdenia 1.10 majú stupeň väčší ako 6.

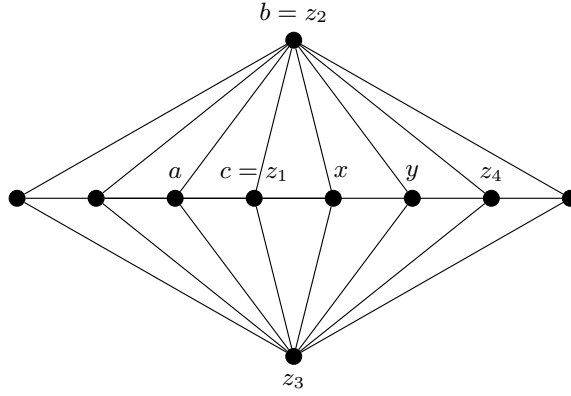


Obr. 3.2: Opäť nemôžeme hneď previesť Q redukciu

Keď máme, že stena (a, b, c) obsahuje dva vrcholy stupňa 4 (alebo len jeden takýto vrchol, ktorý je ale spojený s ďalším vrcholom stupňa 4) a H má viac ako jednu komponentu, rovnakou úvahou dostávame, že vieme previesť P resp. Q redukciu.

Ak H má práve jednu komponentu, tak potom musí existovať reťaz vrcholov stupňa 4 – množiny $\{x_i, x_{i+1}\}$ pre $i = 0, \dots, n$ a $n \geq 6$ sú hrany v \mathcal{S} a pre každé $i = 1, \dots, n$ platí, že $d_{x_i} = 4$. Potom pre nejaké $i = 1, \dots, n - 1$ musí platiť, že $\{x_i, x_{i+1}\} \subset (a, b, c)$ (alebo len $x_1 \in (a, b, c)$ resp. $x_n \in (a, b, c)$ a ostatné vrcholy v stene majú vyšší stupeň).

Pre prípad zo zátvorky – stena (a, b, c) je na kraji tejto reťaze, zvolíme steny prislúchajúce vrcholom x_2, x_3 resp. x_{n-2}, x_{n-1} a prevedieme na nich P redukciu. Pre prípad $\{x_i, x_{i+1}\} \subset (a, b, c)$ pre nejaké $i = 1, \dots, n - 1$ môžeme voliť buď steny prislúchajúce vrcholom x_{i-2}, x_{i-1} alebo vrcholom x_{i+2}, x_{i+3} (aspoň jedna z týchto možností bude existovať keďže $n \geq 6$) a prevedieme na nich P redukciu (Obr. 3.3).



Obr. 3.3: Nutný posun na steny prislúchajúce vrcholom x_{i+2} a x_{i+3}

Rozobrali sme teda všetky prípady, ktoré môžu nastať a vždy vieme spraviť redukčný ťah P alebo Q tak, aby stena (a, b, c) zostala zachovaná. □

Veta 3.4. *Nech \mathcal{S} je eulerovská sféra. Zvoľme ľubovoľnú stenu $v(a, b, c) \in \mathcal{S}$. Na \mathcal{S} vieme aplikovať konečnú postupnosť P a Q redukcií tak, že z \mathcal{S} dostaneme osemsten a stena (a, b, c) zostane zachovaná.*

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou podľa počtu vrcholov. Keď $v = 6$, tak \mathcal{S} bude osemsten, konečná postupnosť P a Q redukcií bude prázdna, (a, b, c) sa zachová a veta platí.

Nech teraz veta platí pre všetky eulerovské sféry, kde $v \leq k - 1, k \in \mathbb{N}$. Uvažujme eulerovskú sféru \mathcal{S} pre ktorú platí, že $v = k$.

Keď \mathcal{S} bude beztrigonová, tak podľa Lema 3.3 na nej vieme previesť P alebo Q redukciu tak, že (a, b, c) nebude porušená. Dostávame eulerovskú sféru s počtom vrcholov $k - 2$ alebo $k - 1$, a teda existuje konečná postupnosť P a Q redukcií taká, že na konci dostaneme osemsten. Keď na začiatok tejto postupnosti pridáme tú redukciu, ktorú sme aplikovali na \mathcal{S} , veta platí.

Keď sa v \mathcal{S} bude nachádzať trigon, môžeme aplikovať trigonovú operáciu. Keďže pre \mathcal{S} platí $\chi = 2$, tak rovnakým argumentom ako vo Vete 2.6 dostávame po trigonovej operácii dve disjunktné komponenty \mathcal{T}_1 a \mathcal{T}_2 , ktorá každá má najviac $k - 1$ vrcholov. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme voľiť $(a, b, c) \in \mathcal{T}_1$. Z indukčného predpokladu, ak \mathcal{T}_2 nie je osemsten, vieme v nej previesť nejaký redukčný ťah tak, aby stena, ktorú sme do tejto komponenty pridali trigonovou operáciou, zostala zachovaná.

Táto redukcia neovplyvní stenu (a, b, c) . Na \mathcal{S} vieme aplikovať P alebo Q redukciu, ktorú pridáme, k postupnosti z indukčného predpokladu a ktorá zachováva stenu (a, b, c) , veta teda platí.

No čo ak je \mathcal{T}_2 osemsten? Potom aspoň dve zo stien, ktoré susedia hranou s trigonom, nechceme zachovať. Teda jednu z nich môžeme uvažovať ako stenu (x_2, z, x_3) z Tvrdenia 1.11 a ostatné steny z množiny $(**)$ z tohto Tvrdenia budú steny z osemstenu. Potom na nich môžeme aplikovať Q redukciu, ktorá zachová stenu (a, b, c) . Dostali sme sféru, ktorá má počet vrcholov $k - 1$, a teda z indukčného predpokladu máme postupnosť redukcií, ku ktorým môžeme túto Q redukciu

pridať a z \mathcal{S} dostaneme osemsten so zachovanou stenou (a, b, c) . Veta teda platí. \square

Veta 3.5. Každú eulerovskú sféru vieme dostať z osemstenu použitím konečnej postupnosti P a Q expanzií.

Dôkaz. V Lema 3.2 sme dokázali, že P a Q redukcie zachovávajú eulerovskosť. To bude platiť aj pre P a Q expanzie. Teda trieda eulerovských sfér, ktoré dostaneme aplikáciou konečnej postupnosti P a Q expanzií na osemsten, je podtriedou všetkých eulerovských sfér. Veta 3.4 nám hovorí, že to platí aj naopak. \square

3.2 Ofarbenie

Definícia 3.2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Zobrazenie $b_V : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ nazveme *ofarbením vrcholov grafu G pomocou k farieb*, ak pre každú hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b_V(x) \neq b_V(y)$.

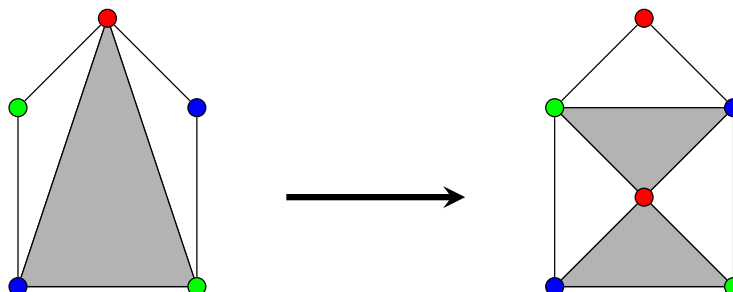
Keď pre graf $G = (V, E)$ takéto zobrazenie b_V pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ existuje, povieme, že graf G je *vrcholovo k -ofarbitelný*.

Definícia 3.3. Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Zobrazenie $b_F : F \rightarrow \{1, \dots, k\}$, kde F je množina stien grafu G nazveme *ofarbením stien grafu G pomocou k farieb*, ak pre dve rôzne steny c a d , ktoré majú spoločnú hranu platí $b_F(c) \neq b_F(d)$.

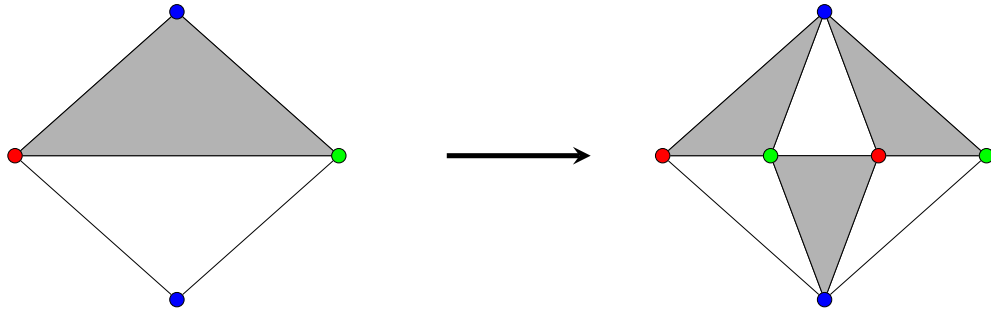
Keď pre graf $G = (V, E)$ takéto zobrazenie b_F pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ existuje, povieme, že graf G je *stenovo k -ofarbitelný*.

Lema 3.6. Nech \mathcal{S} je kombinatorický povrch. Predpokladajme, že graf indukovaný \mathcal{S} je vrcholovo 3-ofarbitelný a stenovo 2-ofarbitelný. P a Q expanzia tieto vlastnosti nezmenia.

Dôkaz. Toto lema jednoducho vyplýva z nasledujúcich obrázkov 3.4 a 3.5:



Obr. 3.4: Q expanzia zachováva farebnosť



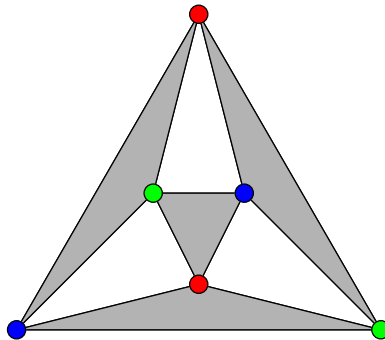
Obr. 3.5: P expanzia zachováva farebnosť

Vyplýva to z toho, že farby stien a vrcholov, ktoré prislúchajú vonkajším hránám útvaru, na ktorom prevádzame expanziu, svoju farbu nemenia. Zmeny farieb sú len lokálne a pôvodné ofarbenia sa zachováva.

□

Veta 3.7. *Nech \mathcal{S} je ľubovoľná eulerovská sféra. Graf indukovaný \mathcal{S} je vrcholovo 3-ofarbitelný a stenovo 2-ofarbitelný.*

Dôkaz. Graf osemstenu je vrcholovo 3-ofarbitelný a stenovo 2-ofarbitelný, ako môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:



Obr. 3.6: Vrcholové a stenové ofarbenie osemstenu

Keďže podľa Vety 3.5 vieme každú eulerovskú sféru dostať aplikáciou konečnej postupnosti expanzných ťahov P a Q na osemsten, a keďže tieto expanzné ťahy podľa Lema 3.6 zachovávajú vrcholovú 3-ofarbitelnosť a stenovú 2-ofarbitelnosť, dostávame, že indukovaný graf ľubovoľnej eulerovskej sféry \mathcal{S} je vrcholovo 3-ofarbitelný a stenovo 2-ofarbitelný.

□

Záver

Niektoré známe výsledky, ktoré by bolo vhodné v rámci tejto práce uviesť, sa už z časových a priestorových dôvodov do práce nedostali. Je to najmä súvislosť s latinskými zámenami (Cavenagh a Lisoněk, 2008) a možnosť všetko previesť len ťahom Q, ak sa vychádza z nekonečnej množiny začiatočných triangulácií zodpovedajúcich $4n$ -stenom, $n \geq 2$ (Drápal a Lisoněk, 2010).

Otvoreným a zaujímavým problémom zostáva, či sa podobný postup dá použiť pre eulerovské triangulácie toroidu ($\chi = 0$). Ak vyjdeme z triangulácií, v ktorých každý vrchol má stupeň 6, ich štruktúra je známa. V tejto súvislosti zdôrazníme, že aj keď výsledky tejto práce sú takmer všetky známe, je tu predsa len drobný výsledok, ktorý nebol doposiaľ publikovaný. A to je práve fakt, že redukčné ťahy P a Q vieme previesť tak, že predom zvolená stena zostane zachovaná. Pre problém redukcie toroidov, by bolo vhodné poznať zosilnené verzie tohto výsledku, ako napríklad za akých okolností sa dá previesť redukčný ťah tak, aby zostali zachované dve dopredu vybrané steny.

Seznam použité literatury

- BATAGELJ, V. (1989). An improved inductive definition of two restricted classes of triangulations of the plane. *Banach Center Publications*, **25**, 11–18.
- BRINKMANN, G. a MCKAY, B. (2007). Fast generation of planar graphs. *Match*, **58**, 323–357.
- CAVENAGH, N. a LISONĚK, P. (2008). Planar eulerian triangulations are equivalent to spherical latin bitrades. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **115**, 193–197.
- DRÁPAL, A. a LISONĚK, P. (2010). Generating spherical eulerian triangulations. *Discrete Mathematics*, **310**, 1403–1405.
- FÁRY, I. (1948). On straight line representation of planar graphs. *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **11**, 229–233.

Zoznam obrázkov

1.1	Trigonová operácia	6
1.2	Indukovaný graf osemstenu	9
1.3	P redukcia	10
1.4	Q redukcia	11
1.5	Znižovanie stupňa vrcholu x	13
2.1	S redukcia	14
2.2	T redukcia	15
2.3	Časti päťuholníka, ktoré vidia na každý vrchol	18
2.4	Rovinné úsečkové nakreslenia štvorstenu, pre danú vonkajšiu stenu	18
3.1	Potrebný posun pre Q redukciu	22
3.2	Opäť nemôžeme hneď previesť Q redukciu	22
3.3	Nutný posun na steny prislúchajúce vrcholom x_{i+2} a x_{i+3}	23
3.4	Q expanzia zachováva farebnosť	24
3.5	P expanzia zachováva farebnosť	25
3.6	Vrcholové a stenové ofarbenie osemstenu	25