Posudek oponenta k bakalářské práci
Kosouvislé algebry
Lukáše Vlasáka

Předložená práce studuje n-kosouvislé unární algebry. Algebra A se nazývá n-kosouvislá, pokud každý homomorfismus z A^n do A je složením jedné z projekcí a endomorfismu A. Pojem n-kosouvislosti lze zavést pro objekty každé kategorie s konečnými součiny a byl původně studován v kategorii topologických prostorů jako v jistém smyslu pojem duální k pojmu souvislosti topologického prostoru.

V roce 2003 publikovali J. Sichler a V. Trnková článek o kosouvislých algebrách v jehož úvodu je formulován problém, zda je každá 3-kosouvislá algebra úplně kosouvislá tj. n-kosouvislá pro každé $n \geq 2$. Později se ukázalo, že toto tvrzení neplatí a autor této práce ukazuje, že pro každé $n \geq 2$ existuje unární algebra na $n+1$ prvkové množině, která je n-kosouvislá, ale není $n+1$-kosouvislá (Věta 10). Tato konstrukce je původní výsledek a spolu s Větou 1 ukazuje, že jde o nejmenší možný příklad takové algebry.

V poslední kapitole je zredukován počet operací v konstrukci z $(n+1)^n$ na $n+3$ (Věta 13) a je zde ukázáno, jak vyrobit příklad algebry, která má pouze 2 unární operace (Věta 14).

Práci považuji za vynikající. Autor sice nemusel studovat žádnou složitou teorii, ale například důkaz Věty 14 je založen na Proposition 3.2 článku Sichlera a Trnkové, která je formulována v abstraktnějším jazyce teorie kategorií.

Hlavní výsledek práce je zajímavý, stylistická, jazyková a formální stránka je vysoce nadstandardní. Drobnou připomínku mám pouze k práci s literaturou - v několika případech je odkazováno do článku [1], odkaz by mohl být přesnější (konkrétní stránka nebo konkrétní tvrzení).

Z uvedených důvodů doporučuji práci uznat jako bakalářskou.

V Praze, 12. 6. 2024

Pavel Příhoda

Další komentář k práci

- str. 17, nahoře: $x = n + 1$. Bylo by lepší napsat předpokládejme, že $x = n + 1$
- str. 23: Komentář k ϵ v předposledním odstavci důkazu - podobný problém s 'dvěma různými ϵ' je též na straně 21 nahoře.
- str. 11: Není mi jasné v jakém smyslu je ověřování kosouvislosti přes grafové homomorfismy snažší.

- kosouvislost (resp. n-kosouvislost) ve Větě 6 (resp. Větě 10) lze též nahlédnout z toho, že algebra A^2 (resp. A^n) je generovaná jedním prvkem, označme ho $a = (a_1, \dots, a_n)$ a každý homomorfismus $h\colon A^n \to A$ splňuje $h(a) \in \{a_1, \dots, a_n\}$. Bylo by hezké mít obecné tvrzení z něhož by šlo podmínku $h(a) \in \{a_1, \dots, a_n\}$ snadno ověřit.

- Struktura kapitoly 4 dává tušit, že konstrukce algebry ve Větě 10 je poměrně koncepční. Přijde mi, že by mohlo platit, že algebra na $n + 1 \geq 5$ prvcích, která je n-kosouvislá, není $n + 1$-kosouvislá, má pouze unární operace z nichž žádná není bijekce a je strnulá (má pouze jeden endomorfismus) obsahuje dvojici prvků $x \neq y$ takových, že $\sigma(x) = \sigma(y)$ pro každou operaci σ.