MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lukáš Vlasák

Kosouvislé algebry

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Libor Barto, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji především doc. Mgr. Liboru Bartovi, Ph.D., který se mi průběžně věnoval a poradil mi ve věcech matematických i stylistických. Dále děkuji svojí rodině za podporu.

Název práce: Kosouvislé algebry

Autor: Lukáš Vlasák

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Libor Barto, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Algebra $\mathbf{A}$ je n-kosouvislá, pokud každý homomorfismus z její n-té mocniny, $\mathbf{A}^n$, do $\mathbf{A}$ závisí pouze na jedné proměnné. Pro každé přirozené $n \geq 2$ existuje algebra, která je n-kosouvislá a není $(n+1)$-kosouvislá. Zatím zkonstruované příklady těchto algeber jsou však velké z hlediska počtu prvků nebo počtu operací. Cílem této práce je zlepšit odhad počtu prvků, které taková algebra musí mít pro obecné n. Pro $n \geq 2$ je známa konkrétní konstrukce s $2n$ prvky a potenciálně nejmenší možný počet prvků takové algebry je $n+1$ pro $n \geq 3$. V této práci zkonstruujeme pro všechna $n \geq 2$ příklady nejmenších možných n-kosouvislých algeber, které nejsou $(n+1)$-kosouvislé.

Klíčová slova: kosouvislá algebra, n-kosouvislá, n-kosouvislost, homomorfismus, univerzální algebra

Title: Coconnected Algebras

Author: Lukáš Vlasák

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. Mgr. Libor Barto, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: If every homomorphism from the n-th power of an algebra $\mathbf{A}$ to $\mathbf{A}$ depends on one variable only, then we say that $\mathbf{A}$ is n-coconnected. For every integer $n \geq 2$ there exists a n-coconnected algebra, which is not $(n+1)$-coconnected. Examples of these algebras constructed in previous articles were large in terms of either cardinality of the algebra or the number of operations. The goal of this thesis is to improve the lower and upper estimate of the lowest possible cardinality of a n-coconnected and not $(n+1)$-coconnected algebra. There is already a construction of these algebras for every possible n with cardinality $2n$ and for $n \geq 3$ the lower estimate of the lowest possible cardinality is currently $n+1$. In this thesis we will construct examples of the smallest possible n-coconnected and not $(n+1)$-coconnected algebras for every $n \geq 2$.

Keywords: coconnected algebra, n-coconnected, n-coconnectedness, homomorphism, universal algebra

Obsah

Úvod

Algebra $\mathbf{A}$ je n-kosouvislá, pokud každý homomorfismus z její n-té mocniny, $\mathbf{A}^n$, do $\mathbf{A}$ závisí pouze na jedné proměnné. Cílem této práce je uvést čtenáře do tématu n-kosouvislých algeber a vylepšit výsledky konkrétního problému z předchozích článků.

V první kapitole čtenář najde většinu definic, které bude potřebovat, aby tématu porozuměl. Přímo z jednotlivých definic není vždy zřejmé, k čemu nám daný pojem bude a co je jeho podstatou, tyto informace jsou však uvedeny v poznámkách pod definicí.

Ve druhé kapitole zavedeme pojem n-kosouvislá algebra. Definice i několik základních vlastností jsem převzal z článku [1], ze kterého jsem zjistil většinu informací o n-kosouvislých algebrách a obsahuje i různá tvrzení, která jsou nad rámec této práce.

Otázka, která v tomto článku nebyla zodpovězena, je, zda pro každé přirozené $n \geq 2$ existuje algebra, která je n-kosouvislá a není $(n+1)$-kosouvislá. Algebrami s touto vlastností se zabýváme v kapitolách 3 – 5.

Na tuto otázku odpověděl článek [2], ve kterém je popsána konstrukce takové algebry pro každé $n \geq 2$. Takto zkonstruované příklady algeber s požadovanou vlastností jsou však velké z hlediska počtu prvků nebo počtu operací.

Cílem této práce je zlepšit odhad nejmenšího možného počtu prvků takové algebry pro obecné $n \geq 2$. Konstrukce z článku [2] má $2n$ prvků, ale potenciálně nejmenší počet prvků takové algebry pro dané $n \geq 3$ je $n + 1$.

Hlavním vlastním výsledkem této práce je konstrukce, která pro dané $n \geq 2$ vytvoří algebru mohutnosti $n+1$, která je n-kosouvislá a není $(n+1)$-kosouvislá. Takto zkonstruované příklady tedy budou mít nejmenší možnou mohutnost a v poslední kapitole ještě optimalizujeme počet operací této algebry na $n + 3$.

1. Základní pojmy

V této kapitole si uvedeme základní definice a značení, které budeme dále používat.

1.1 Použité značení

- $\mathbb{N}$ značí množinu přirozených čísel $\{1, 2, \dots\}$.
- Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N}$, pak X^n značí množinu všech n-tic prvků množiny X. Množinu X^n budeme nazývat n-tá mocnina množiny X.
- Zobrazení f definované po prvcích jako $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1 \dots$ budeme někdy zjednodušeně značit $(x_0 \mapsto y_0, x_1 \mapsto y_1, \dots)$.
- Pokud do nějakého zobrazení budeme dosazovat k-tici prvků a nebude hrozit nedorozumění, vynecháme druhý pár závorek. Tedy budeme psát $f(a, b, c, \dots)$ místo $f((a, b, c, \dots))$.

1.2 Potřebné definice

Definice základních pojmů vychází z knihy Universal algebra [3]. V několika případech nám budou stačit definice pouze pro případ direktních mocnin.

Definice 1 (n-ární operace na množině)**.** *Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak funkci $f : X^n \to X$ nazveme **n-ární operace** na X.*

Definice 2 (projekce na i-tou složku)**.** *Nechť X je množina, $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $f : X^n \to X$ nazveme **projekce na i-tou složku**, pokud pro každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ platí $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$. Značíme ji π_i^n.*

Definice 3 (signatura)**.** ***Signatura** Σ je množina spolu se zobrazením ar, které každému prvku $\sigma \in \Sigma$ přiřazuje nezáporné celé číslo $\mathrm{ar}(\sigma)$, které nazýváme **arita** σ. Prvky Σ nazýváme **funkční symboly**.*

Definice 4 (algebra)**.** *Nechť Σ je signatura. **Algebra signatury** Σ je dvojice $\mathbf{A} = (A, (\sigma^{\mathbf{A}} \colon \sigma \in \Sigma))$, kde $\sigma^{\mathbf{A}}$ je $\mathrm{ar}(\sigma)$-ární operace na A, kterou nazýváme **interpretace** symbolu σ v algebře $\mathbf{A}$.*

Poznámka: Jako mohutnost algebry $|\mathbf{A}|$ budeme označovat počet prvků nosné množiny A, nikoli počet operací.

Pokud bude zřejmé, o které algebře se bavíme, vynecháme index operací. Například pro $\mathbf{A} = (\{a_1, a_2, \dots\}, (\sigma^{\mathbf{A}}))$, $\mathrm{ar}(\sigma) = n$ píšeme $\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)$ místo $\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o operaci v $\mathbf{A}^n$, využijeme případně značení σ^n.

Definice 5 (homomorfismus)**.** *Nechť $\mathbf{A} = (A, (\sigma^{\mathbf{A}})_{\sigma \in \Sigma})$ a $\mathbf{B} = (B, (\sigma^{\mathbf{B}})_{\sigma \in \Sigma})$ jsou algebry stejné signatury. Potom zobrazení $h : B \to A$ nazveme **homomorfismus z $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$**, pokud pro každé $\sigma \in \Sigma$ a každá $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ platí, že $h(\sigma^{\mathbf{B}}(b_1, b_2, \dots, b_n)) = \sigma^{\mathbf{A}}(h(b_1), h(b_2), \dots, h(b_n))$, zde $n = \mathrm{ar}(\sigma)$.*

Pokud je z kontextu zřejmé, které algebry uvažujeme, budeme psát pouze **homomorfismus**.

Definice 6 (direktní mocnina algebry)**.** *Nechť* $\mathbf{A} = (A, (\sigma^{\mathbf{A}} : \sigma \in \Sigma))$ *je algebra a* $n \in \mathbb{N}$*. Potom* ***n-tou (direktní) mocninu algebry*** $\mathbf{A}$ *definujeme jako algebru* $\mathbf{A}^n = (A^n, (\sigma^{\mathbf{A}^n} : \sigma \in \Sigma))$*, kde pro* $\mathrm{ar}(\sigma) = i$ *platí:*

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathbf{A}^n}&((x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1), \ldots, (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i)) \\ &= (\sigma^{\boldsymbol{A}}(x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1), \ldots, \sigma^{\boldsymbol{A}}(x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i)).\end{aligned}$$

Tedy direktní mocnina algebry je direktní mocnina nosné množiny spolu s operacemi „po složkách“.

V této práci nám bude stačit speciální typ homomorfismů, homomorfismy mocnin unárních algeber.

Nechť $\mathbf{A} = (A, (\sigma^{\mathbf{A}} : \sigma \in \Sigma))$ je algebra pouze s unárními operacemi (neboli $\mathrm{ar}(\sigma) = 1$ pro všechna $\sigma \in \Sigma$) a $n \in \mathbb{N}$. Potom zobrazení $h : A^n \to A$ je homomorfismus z $\mathbf{A}^n$ do $\mathbf{A}$, pokud platí

$$h(\sigma^{\mathbf{A}}(x_1), \sigma^{\mathbf{A}}(x_2), \ldots, \sigma^{\mathbf{A}}(x_n)) = \sigma^{\mathbf{A}}(h(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

pro každé $\sigma \in \Sigma$. Pouze jsme použili definici homomorfismu a operace $\sigma^{\mathbf{A}^n}$ na tento konkrétní případ.

Množinu homomorfismů z $\mathbf{A}^n$ do $\mathbf{A}$ budeme označovat $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$. Homomorfismům z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{A}$ se říká endomorfismy a jejich množinu budeme označovat $\mathrm{End}(\mathbf{A})$.

2. Kosouvislost

Definice 7 (n-kosouvislá algebra)**.** *Nechť* $\mathbf{A}$ *je algebra a* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Pak* $\mathbf{A}$ *je* ***n-kosouvislá algebra****, pokud každý homomorfismus* $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$ *lze rozložit jako* $f = h \circ \pi_i^n$*, kde* $h \in \mathrm{End}(\mathbf{A})$ *a* π_i^n *je projekce na i-tou složku.*

Vlastnost z této definice můžeme přeložit tak, že každé $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$ „závisí pouze na jedné složce“, a tak ji budeme dále označovat.

Zde $f = h \circ \pi_i^n$ znamená, že $f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_i)$ a tedy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x'_1, \ldots, x'_n),$$

kdykoli $x_i = x'_i$. Pak řekneme, že f **závisí pouze na i-té složce**. Například f konstantní homomorfismus závisí pouze na první složce, ale zároveň závisí pouze na druhé složce, ..., závisí pouze na n-té složce.

2-kosouvislou algebru nazveme **kousouvislá**. Pokud je $\mathbf{A}$ n-kosouvislá pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, nazveme ji **úplně kosouvislá**.

2.1 Základní vlastnosti n-kosouvislých algeber

Definice 8 (úplná unární algebra)**.** ***Úplná unární algebra*** *mohutnosti* $n \in \mathbb{N}$ *je algebra, jejíž nosná množina obsahuje* n *prvků a množina operací této algebry je právě množina všech unárních operací na* n *prvcích.*

Poznámka: Unární algebra je algebra, která obsahuje pouze unární operace, ale ne nutně všechny.

Z následujících tří vět odvodíme několik obecných důsledků o n-kosouvislých algebrách. Všechny tři věty se vyskytují v článku [1] i se stručným důkazem. Věta 2 tam má jinou, ekvivalentní, formulaci.

Věta 1. *Úplná unární algebra mohutnosti* $n \geq 2$ *je* n*-kosouvislá.*

Důkaz. Zvolíme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a úplnou unární algebru na n prvcích označíme $\mathbf{A} = (\{1, 2, \ldots, n\}, (\sigma^{\mathbf{A}} \colon \sigma \in \Sigma))$. Dále zvolíme libovolný homomorfismus $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$ a dokážeme, že je to přímo projekce na i-tou složku. To je ještě silnější vlastnost než ta v definici n-kosouvislosti.

Nechť $h(1, 2, \ldots, n) = i \in \{1, \ldots, n\}$. Aby h byla projekce na i-tou složku, ověříme, že platí $h = \pi_i^n$. Libovolný prvek $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$ lze vyjádřit jako

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$$

pro nějakou operaci σ z $\mathbf{A}$. To platí, protože operace σ, která je definována jako

$$\sigma(j) = x_j, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

je zřejmě unární operace a algebra $\mathbf{A}$ obsahuje všechny unární operace na své nosné množině. Protože h je homomorfismus, máme

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)) = \sigma(h(1, \ldots, n)) = \sigma(i) = x_i,$$

takže $h = \pi_i^n$. Tedy $\mathbf{A}$ je n-kosouvislá.

$\square$

Z této věty plyne, že n-kosouvislá algebra existuje pro každé přirozené $n \geq 2$. Následující věta je ekvivalentní větě 1.5 z článku [1].

Věta 2. *Pro všechna $n \geq 3$, každá n-kosouvislá algebra je $(n-1)$-kosouvislá.*

Důkaz je podrobně rozepsán ve zmíněném článku.

Idea důkazu: Homomorfismus $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A})$ lze přirozeně rozšířit na homomorfismus $h' \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$. Ten závisí pouze na jedné složce z předpokladu, tedy i h závisí pouze na jedné složce.

Věta 3. *Unární algebra $\mathbf{A}$ mohutnosti alespoň 2 pouze s konstantními či injektivními operacemi není 3-kosouvislá.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A} = (A, (\sigma^{\mathbf{A}} : \sigma \in \Sigma))$. Abychom ukázali, že není 3-kosouvislá, definujeme funkci „duální diskriminátor“ t a ověříme, že závisí na více složkách a že $t \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^3, \mathbf{A})$. Definujeme $t : A^3 \to A$, že

$$t(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{pro } x = y, \\ z & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

Pak speciálně pro $x \neq y$ prvky A máme

$$t(x, x, y) = t(x, y, x) = t(y, x, x) = x.$$

Tedy t nezávisí pouze na první složce, protože

$$x = t(y, x, x) \neq t(y, y, x) = y$$

pro $x \neq y$. Obdobně pro další složky, $t(x, y, x) \neq t(y, y, x), t(x, x, y) \neq t(x, y, y)$. Ještě je třeba ověřit, že t je homomorfismus, tedy pro každou operaci σ má platit

$$t(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = \sigma \circ t(x, y, z).$$

Ověřujeme tři případy:

- $x = y$, potom $\sigma(x) = \sigma(y)$, tedy $t(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = \sigma(x) = \sigma \circ t(x, y, z)$.
- $(x \neq y) \wedge \sigma$ je konstantní operace, potom $\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = a$ a máme $t(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = t(a, a, a) = a = \sigma \circ t(x, y, z)$.
- $(x \neq y) \wedge \sigma$ je injektivní operace, potom $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. Z toho už platí $t(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = \sigma(z) = \sigma \circ t(x, y, z)$.

Ověřili jsme, že $t \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^3, \mathbf{A})$. Tedy $\mathbf{A}$ není 3-kosouvislá.

$\square$

Tedy ověřili jsme, že ne všechny algebry jsou úplně kosouvislé a má smysl se tímto pojmem dále zabývat.

2.2 Algebry n-kosouvislé a ne $(n+1)$-kosouvislé

Jedna z hlavních nezodpovězených otázek článku [1] byla, zda pro každé přirozené $n \geq 2$ existuje algebra, která je n-kosouvislá a není $(n+1)$-kosouvislá.

Tuto otázku zodpověděla konstrukce v článku [2]. Je tam pro obecné n zkonstruovaná n-kosouvislá algebra, která není $(n+1)$-kosouvislá. Tato konstrukce má $2n$ prvků a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 8$ unárních operací. V dalších kapitolách vylepšíme tento výsledek převážně snížením mohutnosti dané algebry.

3. Malé příklady

V této kapitole jsou popsány příklady malých algeber, které jsou kosouvislé a nejsou 3-kosouvislé.

Věta 4. *Nechť $n \geq 3$. Pak každá n-kosouvislá algebra A mohutnosti $\leq n$ je úplně kosouvislá.*

Tato věta i její důkaz jsou popsány jako důsledek lemmatu 4.1 v článku [1]. Zároveň pro $n \geq 4$ plyne přímo z lemmatu 9 této práce (kapitola 4).

Z této věty plyne, že pro $n \geq 3$ musí mít hledaná algebra mohutnost alespoň $n + 1$. Proto se budeme nejdřív zabývat případem $n = 2$, pro který tato věta neplatí.

3.1 $|\mathbf{A}| = 2$

Zkonstruujeme kosouvislou algebru mohutnosti 2, která není 3-kosouvislá. Ta je zřejmě nejmenší možná, protože jednoprvková algebra $\mathbf{C}$ je úplně kosouvislá ($f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ je vždy konstantní zobrazení, tedy závisí pouze na 1. složce).

Věta 5. *Úplná unární algebra mohutnosti* 2 *je* 2*-kosouvislá a není* 3*-kosouvislá.*

Důkaz. Větu dokážeme nejdřív jednoduše ze dvou předchozích tvrzení. Algebru označíme $\mathbf{A} = (A, (\text{všechny unární operace na } A))$, kde $A = \{0, 1\}$. Z věty 1 víme, že úplná unární algebra mohutnosti $n \geq 2$ je n-kosouvislá, tedy $\mathbf{A}$ je kosouvislá. Dále z věty 3 víme, že netriviální unární algebra s pouze konstantními či injektivními operacemi není 3-kosouvislá. Na dvou prvcích ani jiné unární operace nejsou, tedy $\mathbf{A}$ není 3-kosouvislá.

□

Ještě si ukážeme druhý důkaz, který čtenáři lépe nastíní, jak s danými pojmy pracovat, a nebude se odkazovat na obecná tvrzení.

Důkaz. Nejdřív se podíváme, jaké homomorfismy obsahuje množina $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}^2, \mathbf{A})$. Víme, že $h(\sigma(x_0), \sigma(x_1)) = \sigma \circ h(x_0, x_1)$ pro $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^2, \mathbf{A}), \sigma$ operaci z $\mathbf{A}$. Pak zřejmě $h(1, 1) = 1$, $h(0, 0) = 0$, to získáme z předchozí rovnosti, pokud za σ vybereme konstantní zobrazení $\sigma_0(x) = 0$ pro všechna $x \in A$ a $\sigma_1(x) = 1$ pro všechna $x \in A$.

Potom už zbývají pouze dvě možnosti.

- $h(1, 0) = 1$, potom vezmeme za σ transpozici $(0 \leftrightarrow 1)$ a máme
$$h(0, 1) = h(\sigma(1), \sigma(0)) = \sigma(1) = 0.$$
Celkem je tedy toto zobrazení projekce na první složku.
- Volba $h(1, 0) = 0$ je projekce na druhou složku ze stejného důvodu.

Tedy algebra $\mathbf{A}$ je kosouvislá. Avšak $\mathbf{A}$ není 3-kosouvislá, protože $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}^3, \mathbf{A})$ obsahuje například duální diskriminátor

$$t(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{pro } x = y, \\ z & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

Že to je homomorfismus a závisí na více složkách jsme ukázali v důkazu věty 3.

□

3.2 $|\mathbf{A}| = 3$

Pro každé větší n už nebude možné takto postupovat, protože dle věty 4 je mohutnost n-kosouvislé a ne $(n-1)$-kosouvislé algebry alespoň $n+1$. Dále si tedy ještě ukážeme příklad kosouvislé algebry, která není 3-kosouvislá, mohutnosti 3. Nejmenší příklad tím nezískáme, ale můžeme zkusit podobný postup zobecnit na obecné n, abychom dostali algebry mohutnosti $n+1$.

Zároveň v sekci 4.2 článku [1] je popsán postup konstrukce algebry kosouvislé a ne 3-kosouvislé, mohutnosti 4 a více. Tedy touto konstrukcí doplníme příklady kosouvislých algeber, které nejsou 3-kosouvislé.

Věta 6. *Nechť* $\mathbf{A} = (A, (\alpha_1, \alpha_2))$*, kde*

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 2\} \\ \alpha_1 &: 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1 \\ \alpha_2 &: 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1 \end{aligned}$$

Tato algebra je kosouvislá, ale ne 3*-kosouvislá.*

Důkaz. Abychom ověřili kosouvislost, rozepíšeme všechny možnosti, jak může vypadat homomorfismus $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^2, \mathbf{A})$. Těch bude málo a uvidíme, že závisí pouze na jedné složce.

Rovnou máme, že $f(0,0) = 0$, protože

$$f(0,0) = f(\alpha_1^2(0,0)) = \alpha_1(f(0,0))$$

a jedině prvek 0 se operací α_1 zobrazí sám na sebe, tedy $f(0,0) = 0$. Dále vidíme, že $f(1,1) = 1$, protože

$$f(1,1) = f(\alpha_2^2(0,0)) = \alpha_2 \circ f(0,0) = \alpha_2(0) = 1.$$

Potom i $f(2,2) = 2$, protože

$$f(2,2) = f(\alpha_1^2(1,1)) = \alpha_1 \circ f(1,1) = \alpha_1(1) = 2.$$

Dále $f(0,1) \neq 2$, protože

$$f(0,1) = f(\alpha_2^2(1,2)) = \alpha_2 \circ f(1,2),$$

ale 2 není v obrazu α_2. Tři z devíti prvků tedy mají pevně určený obraz, ale teď máme na výběr dvě možnosti $f(0,1) = 0$ nebo $f(0,1) = 1$. Zvolíme tedy nejdřív $f(0,1) = 0$ a v průběhu důkazu okomentujeme, co by se v daném kroku stalo při opačné volbě $f(0,1) = 1$.

$$f(1,0) = f(\alpha_2^2(0,1)) = \alpha_2 \circ f(0,1) = \alpha_2(0) = 1$$

(při volbě $f(0,1) = 1$ bychom stejným způsobem dostali $f(1,0) = 0$)

$$f(0,2) = f(\alpha_1^2(0,1)) = \alpha_1 \circ f(0,1) = \alpha_1(0) = 0$$

$$f(2,0) = f(\alpha_1^2(1,0)) = \alpha_1 \circ f(1,0) = \alpha_1(1) = 2$$

(pro opačnou volbu bychom získali $f(2,0) = 0, f(0,2) = 2$)

$f(1,2) = 1$, protože

$$\alpha_2 \circ f(1,2) = f(\alpha_2^2(1,2)) = f(0,1) = 0$$

a jediný prvek, který operace α_2 zobrazí na 0, je 1 (při opačné volbě bychom tímto způsobem získali $f(2,1) = 1$).

$$f(2,1) = f(\alpha_1^2(1,2)) = \alpha_1 \circ f(1,2) = \alpha_1(1) = 2$$

(při opačné volbě bychom tímto způsobem získali $f(1,2) = 2$).

Celkem tedy máme dva možné homomorfismy.

Pro volbu $f(0,1) = 0$:

$$\begin{array}{lll} (2{,}0) \mapsto 2, & (2{,}1) \mapsto 2, & (2{,}2) \mapsto 2, \\ (1{,}0) \mapsto 1, & (1{,}1) \mapsto 1, & (1{,}2) \mapsto 1, \\ (0{,}0) \mapsto 0, & (0{,}1) \mapsto 0, & (0{,}2) \mapsto 0. \end{array}$$

Pro volbu $f(0,1) = 1$:

$$\begin{array}{lll} (2{,}0) \mapsto 0, & (2{,}1) \mapsto 1, & (2{,}2) \mapsto 2, \\ (1{,}0) \mapsto 0, & (1{,}1) \mapsto 1, & (1{,}2) \mapsto 2, \\ (0{,}0) \mapsto 0, & (0{,}1) \mapsto 1, & (0{,}2) \mapsto 2. \end{array}$$

První z nich je zřejmě projekce na první složku a druhý je projekce na druhou složku. Tedy tato algebra je kosouvislá.

Že tato algebra není 3-kosouvislá ukážeme na $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^3, \mathbf{A})$, který definujeme jako

$$h(x,x,x) = h(x,x,y) = h(y,x,x) = h(x,y,x) = x, h(x,y,z) = 0$$

pro libovolná $x, y, z \in A, \{x,y,z\} = \{0,1,2\}$.

Toto zobrazení nezávisí pouze na jedné složce.

$$h(0,1,1) = 1 \neq 2 = h(0,2,2),$$

tedy nezávisí pouze na první složce. Podobně pro druhou a třetí složku

$$h(1,0,1) = 1 \neq 2 = h(2,0,2),$$

$$h(1,1,0) = 1 \neq 2 = h(2,2,0).$$

Ještě je třeba ověřit, že je to opravdu homomorfismus. Zřejmě, pokud na prvek $(x,x,y) \in A^3$ použijeme libovolnou operaci σ, máme rovnost

$$h(\sigma(x), \sigma(x), \sigma(y)) = \sigma(x) = \sigma \circ h(x,x,y)$$

a tedy na těchto prvcích h splňuje definici homomorfismu (na jiných prvcích, kde jsou alespoň dvě složky stejné, to platí obdobně).

Stačí ještě ověřit definici pro prvky $(x, y, z) : \{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$, kde platí $h(x, y, z) = 0$. Zřejmě, pokud na takovýto prvek použijeme injektivní operaci α_1, dostaneme zase prvek se třemi různými složkami $\alpha_1^3(x, y, z)$ a na pravé straně $\alpha_1(0) = 0$.

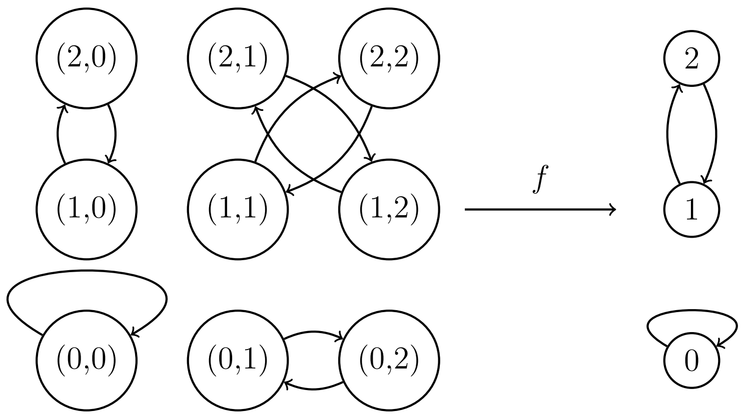
Pokud ale použijeme $\alpha_2^3(x, y, z)$, pak získáme trojici, kde je právě dvakrát 1 a jednou 0. Tento prvek h zobrazí na 1. Tedy

$$h(\alpha_2^3(x, y, z)) = h(\alpha_2(x), \alpha_2(y), \alpha_2(z)) = 1 = \alpha_2(0),$$

což také odpovídá definici. Celkem tedy $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^3, \mathbf{A})$.

□

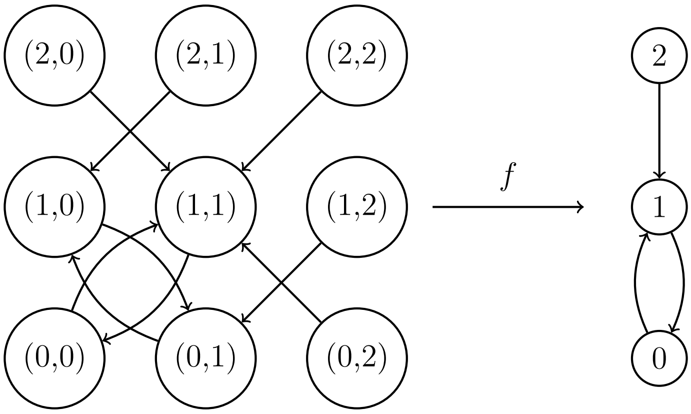
Jednodušší způsob ověření kosouvislosti je nahlédnout na dané zobrazení jako na grafový homomorfismus. Aby zobrazení $f : A^2 \to A$ byl homomorfismus, musí to být grafový homomorfismus dvojice grafů znázorňujících operaci α_1^2 na A^2 a operaci α_1 na A.



Obrázek 3.1: Schéma grafů operace α_1

Vrcholy grafu jsou prvky algebry a orientované hrany znázorňují, kam se příslušný prvek zobrazí operací σ_1^2 respektive σ_1. Podmínka grafového homomorfismu je ekvivalentní podmínce zachování operací homomorfismem f, protože „orientovaná hrana se zobrazí na stejně orientovanou hranu“ je zřejmě pouze přeformulovaná podmínka $f(\alpha_1(x), \alpha_1(y)) = f(\alpha_1^2(x, y)) = \alpha_1 \circ f(x, y)$.

Stejnou myšlenku můžeme použít i pro grafy znázorňující operaci σ_2^2 respektive σ_2.



Obrázek 3.2: Schéma grafů operace α_2

Z těchto grafů je přehledněji vidět, jak jsme zjistili jednotlivé obrazy prvků. Z $(0,0)$ vede šipka do sebe a to platí i pro 0, tím jsme získali první obraz. Dále pokud už máme určený obraz prvku a a z prvku a vede šipka do b, máme určený i obraz b. Pro $n \geq 3$ už by takovéto ověřování bylo velmi složité, protože grafy operací budou vícedimenzionální a i kdybychom je promítli do roviny, jejich velikost rychle poroste.

4. Konstrukce pro obecné n

Nejdříve si ukážeme jednu obecnou vlastnost homomorfismů, která zásadně omezí počet možných homomorfismů v $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A})$.

Nechť $\mathbf{A}$ je n-kosouvislá algebra, pak pro každý $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A})$ platí následující vlastnost. Zúžení f na prvky typu $(x_1, x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}) \in A^{n+1}$ závisí pouze na jedné složce. Stejně to platí pro zúžení na množinu prvků typu $(x_1, x_2, x_2, x_4, \dots, x_{n+1}) \in A^{n+1}$ a pro všechny ostatní množiny prvků s pevnou dvojicí pozic, na kterých se prvky rovnají. Obecně je to zapsáno v následujícím lemmatu.

Lemma 7. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je* n*-kosouvislá algebra, pak pro každý* $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A})$ *platí následující vlastnost. Pro libovolná* $i \neq j \in \{1, \dots, n+1\}$*, zúžení* f *na množinu* $M_{i,j} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in A^{n+1} \mid x_i = x_j\}$ *je zobrazení, které závisí pouze na jedné složce.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $i = 1, j = 2$, tedy máme homomorfismus f zúžený na prvky s prvními dvěma složkami stejnými. Pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in M_{1,2}$ je $f(x)$ určený složkami x_2 až x_{n+1}, protože x_1 je určeno druhou složkou.

Definujeme tedy $g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$, že

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Potom g je opravdu homomorfismus, neboť máme

$$\begin{aligned} g(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) &= f(\sigma(x_1), \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n) \\ &= \sigma(f(x_1, x_1, \dots, x_n)) = \sigma(g(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

pro σ libovolnou operaci v $\mathbf{A}$. Dále z n-kosouvislosti víme, že g závisí pouze na jedné složce – například na k-té pomocí endomorfismu α. Potom

$$\alpha(x_k) = \alpha \circ \pi_k^n(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

tedy f zúžené na $M_{1,2}$ závisí pouze na $(k+1)$-ní složce.

□

Dále ukážeme, že endomorfismus určující závislost f na jedné složce je stejný pro všechny $M_{i,j}$.

Značení $M_{i,j}$ budeme dále používat pro množiny definované v lemmatu 7.

Lemma 8. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je* n*-kosouvislá algebra a* $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A})$*. Potom existuje* $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{A})$*, že pro libovolná* $i \neq j \in \{1, \dots, n+1\}$ *platí:*

$$f|_{M_{i,j}} = \alpha \circ \pi_{k_{i,j}}^{n+1}|_{M_{i,j}}$$

pro nějaké $k_{i,j} \in \{1, \dots, n+1\}$*.*

Důkaz. Zvolíme libovolná $i, j, l, m \in \{1, \dots, n+1\}$, že $i \neq j, l \neq m$. Z lemmatu 7 už máme rozklady

$$\begin{aligned} f|_{M_{i,j}} &= \alpha_1 \circ \pi_{k_{i,j}}^{n+1}|_{M_{i,j}}, \\ f|_{M_{l,m}} &= \alpha_2 \circ \pi_{k_{l,m}}^{n+1}|_{M_{l,m}}. \end{aligned}$$

Stačí tedy ověřit, že $\alpha_1 = \alpha_2$. Tato rovnost platí, pokud $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ pro každý prvek $x \in A$. Nechť $x \in A$ libovolné, potom $(x, x, \ldots, x) \in M_{i,j} \cap M_{l,m}$, tedy

$$\alpha_1(x) = \alpha_1 \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}(x, x, \ldots, x) = f(x, x, \ldots, x) = \alpha_2 \circ \pi^{n+1}_{k_{l,m}}(x, x, \ldots, x) = \alpha_2(x).$$

Celkem tedy endomorfismus závislosti f na jedné složce je stejný pro všechny $M_{i,j}$.

□

Nyní dokážeme nejsilnější verzi tohoto lemmatu, že na všech $M_{i,j}$ závisí homomorfismus f na stejné jedné složce. To nám tedy značně omezuje množinu homomorfismů mocnin n-kosouvislých algeber.

Lemma 9. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je n-kosouvislá algebra a $n \geq 4$. Definujeme množinu*

$$M = \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{1,\ldots,n+1\}}} M_{i,j}.$$

Potom pro každé $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A})$ platí, že $f|_M = \alpha \circ \pi^{n+1}_k|_M$ pro nějaké $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{A}), k \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Tedy zúžení f na ty prvky A^{n+1}, které nemají všechny složky různé, závisí pouze na jedné složce.

Důkaz. Z lemmatu 8 už pro každou množinu $M_{i,j}$ máme rozklad

$$f|_{M_{i,j}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}|_{M_{i,j}}.$$

Pokud α je konstantní zobrazení, potom už můžeme vybrat libovolnou složku, například první, a máme

$$f|_M = \alpha \circ \pi^{n+1}_1|_M,$$

čímž je důkaz u konce. Tedy nechť $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{A})$ není konstantní zobrazení. Nejdřív ukážeme, že existují $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}, i \neq j$, že $k_{i,j} \notin \{i, j\}$.

Pro spor předpokládejme, že taková i, j neexistují. Potom máme rozklady

$$f|_{M_{1,2}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{1,2}}|_{M_{1,2}},$$
$$f|_{M_{3,4}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{3,4}}|_{M_{3,4}},$$

kde $k_{1,2} \in \{1, 2\}, k_{3,4} \in \{3, 4\}$. Potom pro libovolná $x, y \in A$ definujeme prvek $\phi \in A^{n+1}$, že

$$\phi(I) = \begin{cases} x & \text{pro } I \in \{i, j\}, \\ y & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\phi \in M_{1,2} \cap M_{3,4}$, tedy

$$\alpha(x) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{1,2}}(\phi) = f(\phi) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{3,4}}(\phi) = \alpha(y).$$

Tato rovnost platí pro libovolná $x, y \in A$, tedy α je na A konstantní zobrazení, což je ve sporu s předpokladem. Nyní tedy vezmeme tu dvojici $i \neq j \in \{1, \ldots, n+1\}$, kde $k_{i,j} \notin \{i, j\}$. Chceme ukázat, že platí

$$f|_M = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}|_M.$$

Pro libovolnou množinu $M_{l,m}$, kde $l \neq m \in \{1, \ldots, n+1\}, k_{i,j} \notin \{l, m\}$, platí $k_{l,m} = k_{i,j}$. To získáme tím, že pro libovolná $x, y \in A$ definujeme $\phi \in A^{n+1}$, že

$$\phi(I) = \begin{cases} x & \text{pro } I = k_{i,j}, \\ y & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\phi \in M_{i,j} \cap M_{l,m}$, tedy

$$\alpha(x) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}(\phi) = f(\phi) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{l,m}}(\phi).$$

Všechny složky ϕ kromě $k_{i,j}$-té jsou y a tato rovnost platí pro všechna $x, y \in A$. Tedy aby α nebylo konstantní zobrazení, musí platit $k_{l,m} = k_{i,j}$.

Už nám tedy stačí ověřit, jak f vypadá na množinách $M_{o,p}$, pro které platí $o \neq p \in \{1, \ldots, n+1\}, k_{i,j} \in \{o, p\}$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $k_{i,j} = o$. Máme rozklad

$$f|_{M_{o,p}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{o,p}}|_{M_{o,p}}.$$

Pokud $k_{o,p} \in \{o, p\}$, pak platí

$$f|_{M_{o,p}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{o}|_{M_{o,p}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}|_{M_{o,p}},$$

protože na této množině se o-tá a p-tá složka rovnají. Dále tedy předpokládáme $k_{o,p} \notin \{o, p\}, k_{i,j} = o$.

- Pokud $\{i, j\} \cap \{o, p\} = \emptyset$, pak pro libovolná $x, y \in A$ definujeme $\phi \in A^{n+1}$, že

  $$\phi(I) = \begin{cases} x & \text{pro } I \in \{o, p\}, \\ y & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Potom $\phi \in M_{i,j} \cap M_{o,p}$, tedy

  $$\alpha(x) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{o}(\phi) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}(\phi) = f(\phi) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{o,p}}(\phi) = \alpha(y).$$

  Tato rovnost platí zase pro všechna $x, y \in A$, což je ve sporu s tím, že α není konstantní zobrazení. Tedy $\{i, j\} \cap \{o, p\} = \emptyset$ nemůže nastat.

- Zbývá vyšetřit pouze případ, kdy $k_{o,p} \notin \{o, p\}, k_{i,j} = o, \{i, j\} \cap \{o, p\} \neq \emptyset$. Potom $\{i, j, o, p\}$ je tříprvková množina, tedy existují $a \neq b \in \{1, \ldots, n+1\}$, že platí

  $$\{i, j\} \cap \{a, b\} = \emptyset = \{o, p\} \cap \{a, b\},$$

  protože $n + 1 \geq 5$. Z první rovnosti už máme rozklad

  $$f|_{M_{a,b}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{o}|_{M_{a,b}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}|_{M_{a,b}},$$

  protože jsme to převedli na případ už dokázaný. Tedy $k_{a,b} = k_{i,j} = o$ a můžeme pro libovolná $x, y \in A$ definovat $\phi \in A^{n+1}$, že

  $$\phi(I) = \begin{cases} x & \text{pro } I \in \{o, p\}, \\ y & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Potom $\phi \in M_{a,b} \cap M_{o,p}$, tedy

  $$\alpha(x) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{o}(\phi) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{a,b}}(\phi) = f(\phi) = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{o,p}}(\phi) = \alpha(y).$$

  Tato rovnost platí zase pro všechna $x, y \in A$, což je ve sporu s tím, že α není konstantní zobrazení.

Ve všech případech, které mohou nastat (tj. nevedou ke sporu) jsme ukázali, že pro libovolnou množinu $M_{l,m}$, kde $l \neq m \in \{1, \ldots, n+1\}$, platí

$$f|_{M_{l,m}} = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}|_{M_{l,m}}.$$

Tím je lemma dokázáno.

$$f|_M = \alpha \circ \pi^{n+1}_{k_{i,j}}|_M$$

□

Pro $n = 2$ toto lemma neplatí, protipříklad je třeba kosouvislá algebra z věty 5 a duální diskriminátor $t \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^3, \mathbf{A})$. Pro $n = 3$ věta také platí, ale případný důkaz by vyžadoval delší rozbor případů, protože pro $\{i, j\} \cap \{l, m\} \neq \emptyset$ na čtyřech prvcích nelze vždy najít třetí dvojici s nimi disjunktní. Toto lemma je méně obecná verze lemmatu 4.1 z článku [1], které například platí i pro $n = 3$.

Nyní zkonstruujeme hledanou algebru nejmenší možné mohutnosti $|\mathbf{A}| = n+1$ pro obecné $n \in \mathbb{N}$.

Věta 10. *Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ existuje algebra mohutnosti $n + 1$, která je n-kosouvislá, ale není $(n + 1)$-kosouvislá.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A} = (A, (\sigma^{\mathbf{A}} \colon \sigma \in \Sigma))$ je algebra, kde $A = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, $(\sigma^{\mathbf{A}} \colon \sigma \in \Sigma) =$ (všechny unární operace σ na A, že $\sigma(1) = \sigma(n + 1)$).

Zřejmě $|\mathbf{A}| = n + 1$, což jsme chtěli.

Nejdřív ukážeme, že $\mathbf{A}$ není $(n + 1)$-kosouvislá. Definujeme homomorfismus $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A})$, že

$$h(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{cases} n+1 & \text{pro } (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (1, 2, \ldots, n+1), \\ x_1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Toto zobrazení nezávisí pouze na jedné složce, na většině prvků je to projekce na první složku, ale $h(1, 2, \ldots, n + 1) \neq h(1, 1, \ldots, 1)$.

Stačí ověřit, že je to homomorfismus. Prvek $(1, 2, \ldots, n + 1)$ není v obrazu žádné operace z $\mathbf{A}^{n+1}$, protože žádná operace $\mathbf{A}$ není bijekce. Tedy pro $\mathbf{x} \in A^{n+1}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \neq (1, 2, \ldots, n + 1)$ platí

$$h(\sigma(\mathbf{x})) = \sigma(x_1) = \sigma(h(\mathbf{x}))$$

pro všechny σ operace z $\mathbf{A}$.

Ještě se podíváme, na co se naopak $(1, 2, \ldots, n + 1)$ může zobrazit nějakou operací. Víme, že vztah $\sigma(1) = \sigma(n+1))$ platí pro všechny operace σ z $\mathbf{A}$. Potom

$$\begin{aligned} h(\sigma(1, 2, \ldots, n + 1)) &= h((\sigma(1), \sigma(2) \ldots, \sigma(n + 1))) = \sigma(1) \\ &= \sigma(n + 1) = \sigma(h(1, 2, \ldots, n + 1)). \end{aligned}$$

Tedy h je homomorfismus, který nezávisí pouze na jedné složce a tedy $\mathbf{A}$ není $(n + 1)$-kosouvislá.

Abychom ověřili n-kosouvislost, podíváme se, jaké homomorfismy f obsahuje množina $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A})$. Nejdřív určíme hodnotu $x = f(1, 2, \ldots, n)$.

- $x = n+1$. V $\mathbf{A}$ máme operaci σ, že $\sigma(i) = i$ pro všechna $i \leq n$. Potom

$$\begin{aligned}\sigma(f(1,2,\dots,n)) = \sigma(n+1) = 1 \neq n+1 &= f(1,2,\dots,n) \\ &= f(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)).\end{aligned}$$

  To by bylo ve sporu s tím, že f je homomorfismus. Tedy $x \neq n+1$.

- $x = i, i \leq n$. Z toho už určíme obraz všech prvků $\mathbf{A}^n$. Nechť $(x_1,\dots,x_n)$ je libovolný prvek $\mathbf{A}^n$. Pak nechť $\sigma_{x_1,\dots,x_n} \in \mathbf{A}$ je operace definovaná vztahem

$$\sigma_{x_1,\dots,x_n}(j) = \begin{cases} x_j & \text{pro } j \leq n, \\ x_1 & \text{pro } j = n+1. \end{cases}$$

  Potom máme vztah

$$\begin{aligned}f(x_1,\dots,x_n) = f(\sigma_{x_1,\dots,x_n}(1),\dots,\sigma_{x_1,\dots,x_n}(n)) &= \sigma_{x_1,\dots,x_n}(f(1,2,\dots,n)) \\ &= \sigma_{x_1,\dots,x_n}(i) = x_i.\end{aligned}$$

  Tedy homomorfismus f závisí pouze na jedné složce, protože je to přímo projekce na i-tou složku $f = \pi_i^n$.

Tedy $\mathbf{A}$ je n-kosouvislá a není $(n+1)$-kosouvislá.

$\square$

Tím jsme vyřešili otázky horního i spodního odhadu nejmenší možné mohutnosti. Dále se budeme zabývat snížením počtu operací algebry $\mathbf{A}$ tak, aby zůstala n-kosouvislá a ne $(n+1)$-kosouvislá.

5. Snížení počtu operací

V důkazu věty 10 jsme zkonstruovali algebru s těmi unárními operacemi σ na množině $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, že $\sigma(1) = \sigma(n+1)$. Tolik operací ale nepotřebujeme. Odebráním či přidáním operace, která se dá složit ze zbylých operací se n-kosouvislost nemění. Nemění se totiž příslušná množina homomorfismů. Ukážeme to v následujícím lemmatu.

Lemma 11. *Nechť $n \in \mathbb{N}, \mathbf{A} = (A, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ je unární algebra. Nechť σ je unární operace na množině A, $\sigma \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, ale lze složit jako $\sigma = \alpha_{i_1} \circ \cdots \circ \alpha_{i_k}$ pro nějaká $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbb{N}$. Nechť $\mathbf{A}' = (A, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \sigma)), m \geq 2$. Potom $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^m, \mathbf{A})$ právě tehdy, když $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}'^m, \mathbf{A}')$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in A^m$ libovolné. Pokud $h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^m, \mathbf{A})$, pak platí

$$\begin{aligned} h(\sigma(\mathbf{x})) = h(\alpha_{i_1} \circ \cdots \circ \alpha_{i_k}(\mathbf{x})) &= \alpha_{i_1}(h(\alpha_{i_2} \circ \cdots \circ \alpha_{i_k}(\mathbf{x}))) \\ &= \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2}(h(\alpha_{i_3} \circ \cdots \circ \alpha_{i_k}(\mathbf{x}))) \\ &\ \ \vdots \\ &= \alpha_{i_1} \circ \cdots \circ \alpha_{i_k}(h(\mathbf{x})) = \sigma(h(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Opačná implikace je zřejmá, pokud h zachovává všechny operace $\mathbf{A}'$, pak zachovává $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

□

Nyní se tedy pokusíme nagenerovat operace algebry z důkazu věty 10 menším počtem generujících operací.

Lemma 12. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ a Q je množina všech unárních operací σ na množině $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ takových, že $\sigma(1) = \sigma(n+1)$. Pak existuje $Q' \subseteq Q$ mohutnosti $n+3$, že každá operace $\sigma \in Q$ lze zapsat jako*

$$\sigma = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k$$

pro nějaká $a_1, \ldots, a_k \in Q', k \in \mathbb{N}$. (Řekneme, že ji lze nagenerovat operacemi z Q.)

Důkaz. Chceme nagenerovat všechny operace z Q. Definujeme operace z množiny $Q' = \{\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \delta\}$ na prvcích $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

$$\alpha(i) = \begin{cases} i-1 & \text{pro } i \geq 2, \\ n & \text{pro } i = 1. \end{cases}$$

$$\beta(i) = \begin{cases} 2 & \text{pro } i \in \{1, n+1\}, \\ 1 & \text{pro } i = 2, \\ i & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\gamma_k(i) = \begin{cases} n+1 & \text{pro } i = k, \\ i & \text{pro } i \leq n, i \neq k, \\ \gamma_k(1) & \text{pro } i = n+1. \end{cases}$$

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i \in \{2, n+1\} \\ i & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vlastnost $\sigma(1) = \sigma(n+1)$ nebudeme stále opakovat a v tomto důkazu pod pojmem operace budeme uvažovat pouze tyto speciální. Víme, že n-cyklus a jedna transpozice generují všechny permutace na n prvcích, tedy operace α, β generují všechny operace, které permutují prvky $\{1, 2, \ldots, n\}$, v tomto důkazu jim budeme říkat „permutace“. Každá operace z Q je jednoznačně určená obrazem prvků $\{1, 2, \ldots, n\}$, takže další operace už nebudeme explicitně definovat pro $n+1$. Nejdřív ukážeme, že z operací Q' lze složit libovolnou operaci prostou na $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Nechť $\sigma \in Q$ je libovolná operace prostá na $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pokud to není „permutace“, existuje $k \leq n$, že $\sigma(k) = n+1$ a také existuje $m \leq n$, které není v obrazu σ. Pak operaci σ lze složit jako

$$\sigma = \gamma_m \circ \phi,$$

kde ϕ je definována následovně.

$$\phi(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{pro } i \neq k, \\ m & \text{pro } i = k. \end{cases}$$

Tedy našli jsme „permutaci“ ϕ, co se s operací σ rovná na $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ a tu jsme složili s operací, která pouze dané $\phi(k)$ zobrazí na $n+1$. Tím jsme získali libovolnou operaci prostou na $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Zbylé operace, které nejsou prosté na $\{1, 2, \ldots, n\}$ složíme s pomocí δ, která „slepí“ dva prvky do jednoho.

Nechť $j \neq k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $\sigma \in Q$ je libovolná operace. Nyní ukážeme jak lze vytvořit operaci σ' takovou, že

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{pro } i = k, \\ \sigma(i) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tuto operaci vytvoříme tak, že vybereme libovolnou „permutaci“ τ, pro kterou platí

$$\tau(j) = 1, \tau(k) = 2.$$

Dále τ' označíme „permutaci“, pro kterou platí $\tau' \circ \tau = \mathrm{id}$ na $\{1, 2, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sigma' = \sigma \circ \tau' \circ \delta \circ \tau.$$

Operace $\tau' \circ \delta \circ \tau$ totiž nedělá na prvcích $\{1, 2, \dots, n\}$ nic jiného, než že k zobrazí na j. Potom už rovnost plyne přímo z definice σ'.

Nejdřív jsme tedy nagenerovali všechny operace prosté na $\{1, 2, \dots, n\}$ a nyní jsme ukázali, že z Q' a libovolné operace σ můžeme nagenerovat operaci obdobnou, která ale vybraný prvek $k \leq n$ zobrazí na obraz prvku $j \leq n$.

Opakováním tohoto procesu získáme všechny operace, jejichž obraz je množina mohutnosti $n-1, n-2, \dots, 1$.

□

V důkazu této věty jsme nagenerovali množinu operací algebry $\mathbf{A}$ z důkazu věty 10. Stačilo nám k tomu pouze $n+3$ operací místo $(n+1)^n$.

Věta 13 (důsledek lemmatu 12 a věty 10)**.** *Pro každé $n \geq 2$ existuje algebra $\mathbf{A}$ mohutnosti $n+1$ s $n+3$ unárními operacemi, která je n-kosouvislá, ale ne $(n+1)$-kosouvislá.*

Důkaz. V důkazu věty 10 jsme pro dané $n \geq 2$ zkonstruovali algebru mohutnosti $n+1$ s $(n+1)^n$ unárními operacemi, která je n-kosouvislá, ale není $(n+1)$-kosouvislá. Na začátku kapitoly 5 jsme zdůvodnili, že odebráním operace, kterou lze nagenerovat (tj. vytvořit konečně mnoha složeními) ze zbylých operací, se k-kosouvislost nemění pro žádné $k \geq 2$.

Důkaz lemmatu 12 je konkrétní postup, jak nagenerovat těch $(n+1)^n$ unárních operací z konstrukce důkazu věty 10 pomocí $n+3$ unárních operací. Tímto postupem tedy získáme algebru s požadovanými vlastnostmi.

□

Nakonec ještě na námi zkonstruovanou algebru z důkazu věty 10 použijeme konstrukci z článku [1]. Ta z n-kosouvislé a ne $(n+1)$-kosouvislé algebry vytvoří algebru, která bude mít stále tuto vlastnost a zároveň bude obsahovat pouze dvě unární operace.

Věta 14. *Nechť $\mathbf{A} = (A, (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ je k-kosouvislá, ale ne $(k+1)$-kosouvislá unární algebra, $k \in \mathbb{N}$. Pak existuje unární algebra $\mathbf{B} = (A^{n+1}, (\sigma, \gamma))$, která je k-kosouvislá, ale ne $(k+1)$-kosouvislá.*

Důkaz. Větu dokážeme přímo zkonstruováním $\mathbf{B}$ a ukázáním, že si zachová dané vlastnosti. Počet operací v $\mathbf{A}$ je n.

Potom definujeme $\mathbf{B} = (A^{n+1}, (\sigma, \gamma))$, kde pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in A^{n+1}$ jsou operace definovány vztahem

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x}) &= (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}),\\ \gamma(\mathbf{x}) &= (\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_n(x_1), x_1).\end{aligned}$$

Direktní mocniny označíme $\mathbf{A}^k = (A^k, (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)), \mathbf{B}^k = ((A^{n+1})^k, (\sigma^k, \gamma^k))$.

Definujeme zobrazení Q, které každému zobrazení $f : A^k \to A$ přiřadí zobrazení $f' : (A^{n+1})^k \to A^{n+1}$ tak, že

$$f'((x_1^1, \dots, x_{n+1}^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_{n+1}^k)) = (f(x_1^1, \dots, x_1^k), \dots, f(x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^k)).$$

Nejdřív ukážeme, že pokud $\mathbf{A}$ není k-kosouvislá, pak i $\mathbf{B}$ není k-kosouvislá pro $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Nechť $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^k, \mathbf{A})$ je homomorfismus, který nelze rozložit na $f = \epsilon \circ \pi_i^k$ pro žádné $\epsilon \in \mathrm{End}(\mathbf{A}), i \in \{1, \ldots, k\}$. Chceme ukázat, že f' nezávisí pouze na jedné složce, a že $f' \in \mathrm{Hom}(\mathbf{B}^k, \mathbf{B})$. První vlastnost ukážeme sporem, nechť $f' = \epsilon \circ \pi_1^k$ (bez újmy na obecnosti f' závisí pouze na první složce). Potom platí

$$\begin{aligned}(f(x^1, \ldots, x^k), \ldots, f(x^1, \ldots, x^k)) &= f'((x^1, \ldots, x^1), \ldots, (x^k, \ldots, x^k)) \\ &= \epsilon(x^1, \ldots, x^1).\end{aligned}$$

Tedy pro libovolné $(x^1, \ldots, x^k) \in A^k$ platí

$$f(x^1, \ldots, x^k) = \epsilon(x^1).$$

To je ve sporu s tím, že f nelze rozložit jako $f = \epsilon \circ \pi_1^k$.

Že f' je homomorfismus ověříme pro obě operace zvlášť.

$$\begin{aligned}&f'(\sigma(x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, \sigma(x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k)) \\ &\qquad = f'((x_2^1, \ldots, x_{n+1}^1, , x_{n+1}^1), \ldots, (x_2^k, \ldots, x_{n+1}^k, x_{n+1}^k)) \\ &\qquad = (f(x_2^1, \ldots, x_2^k), \ldots, f(x_{n+1}^1, \ldots, x_{n+1}^k), f(x_{n+1}^1, \ldots, x_{n+1}^k)) \\ &\qquad = \sigma(f(x_1^1, \ldots, x_1^k), \ldots, f(x_{n+1}^1, \ldots, x_{n+1}^k)) \\ &\qquad = \sigma \circ f'((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f'(\gamma(x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, \gamma(x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k)) \\ &\qquad = f'((\alpha_1(x_1^1), \ldots, \alpha_n(x_1^1), (x_1^1)), \ldots, (\alpha_1(x_1^k), \ldots, \alpha_n(x_1^k), (x_1^k))) \\ &\qquad = (f(\alpha_1(x_1^1), \ldots, \alpha_1(x_1^k)), \ldots, f(\alpha_n(x_1^1), \ldots, \alpha_n(x_1^k)), f(x_1^1, \ldots, x_1^k))) \\ &\qquad = (\alpha_1 \circ f((x_1^1), \ldots, (x_1^k)), \ldots, \alpha_n \circ f((x_1^1), \ldots, (x_1^k)), f(x_1^1, \ldots, x_1^k))) \\ &\qquad = \gamma(f(x_1^1, \ldots, x_1^k), \ldots, f(x_{n+1}^1, \ldots, x_{n+1}^k)) \\ &\qquad = \gamma \circ f'((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k))\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že f' zachovává obě operace, tedy je to homomorfismus. Tím jsme ukázali, že pokud $\mathbf{A}$ není k-kosouvislá, pak i $\mathbf{B}$ není k-kosouvislá pro $k \geq 2$.

Zbývá dokázat, že pokud $\mathbf{A}$ je k-kosouvislá, pak i $\mathbf{B}$ je k-kosouvislá.

Nejdřív ukážeme, že

$$g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{B}^k, \mathbf{B}) \implies g = f' = Q(f)$$

pro nějaké $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^k, \mathbf{A})$.

Definujeme operace $p_j, j \in \{1, \ldots, n+1\}$, na množině A^{n+1}, že

$$p_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_j, \ldots, x_j).$$

Tyto operace lze nagenerovat z operací σ, γ. Pokud alespoň n-krát složíme operaci σ, získáme operaci p_{n+1}.

$$p_{n+1} = (\sigma)^n = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n\text{-krát}}$$

Pro $j < n+1$ pak stačí složit $(\sigma)^{j-1}$ s operací γ, tím získáme x_j „na poslední pozici" a pak už stačí zase alespoň n-krát složit s operací σ a dostaneme p_j.

$$p_j = (\sigma)^n \circ \gamma \circ (\sigma)^{j-1} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n\text{-krát}} \circ \gamma \circ \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{(j-1)\text{-krát}}$$

Potom homomorfismus g musí zachovávat operace p_j, protože zachovává σ, γ (to jsme si rozmysleli v lemmatu 11). Jako p_j^k budeme značit příslušnou operaci „po složkách" v B^k.

Pro libovolné $\mathbf{x} = ((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k)) \in (A^{n+1})^k$ a index $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ tedy musí platit

$$g(p_j^k(\mathbf{x})) = p_j(g(\mathbf{x})).$$

Potom $g(\mathbf{x})$ označíme $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ a dostaneme

$$(y_j, \ldots, y_j) = p_j(g(\mathbf{x})) = g(p_j^k(\mathbf{x})) = g((x_j^1, \ldots, x_j^1), \ldots, (x_j^k, \ldots, x_j^k)).$$

Nyní už ukážeme, že $g = f' = Q(f)$ pro f definované jako

$$f(x^1, \ldots, x^k) = g((x^1, \ldots, x^1), \ldots, (x^k, \ldots, x^k))(1)$$

pro všechna $(x_1, \ldots, x_k) \in A^k$. Již jsme dokázali, že g zobrazí takovéto prvky na nějaké $(y_j, \ldots, y_j) \in A^{n+1}$, tedy v definici jsme mohli vybrat jakoukoli složku místo (1).

Že $g = f'$ ukážeme po složkách. Pro $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ platí

$$\begin{aligned}
g((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, &(x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k))(j) \\
&= p_j(g((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k)))(j) \\
&= g(p_j^k((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k)))(j) \\
&= g((x_j^1, \ldots, x_j^1), \ldots, (x_j^k, \ldots, x_j^k))(j) \\
&= g((x_j^1, \ldots, x_j^1), \ldots, (x_j^k, \ldots, x_j^k))(1) \\
&= f(x_j^1, \ldots, x_j^k) \\
&= (f(x_1^1, \ldots, x_1^k), \ldots, f(x_{n+1}^1, \ldots, x_{n+1}^k))(j). \\
&= f'((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k))(j)
\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že $g = f'$ pro nějaké $f : A^k \to A$.

Dále ověříme, že $g = f' \in \mathrm{Hom}(\mathbf{B}^k, \mathbf{B}) \implies f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^k, \mathbf{A})$. Celkem tedy ukážeme, že homomorfismy v množině $\mathrm{Hom}(\mathbf{B}^k, \mathbf{B})$ jsou všechny tvaru f' pro nějaká $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^k, \mathbf{A})$.

Předpokládáme, že f' je homomorfismus.
Pak pro každé $\mathbf{x} = ((x_1^1, \ldots, x_{n+1}^1), \ldots, (x_1^k, \ldots, x_{n+1}^k)) \in (A^{n+1})^k$ máme rovnost

$f'(\gamma^k(\mathbf{x})) = \gamma(f'(\mathbf{x}))$. Abychom ověřili, že f zachovává operace $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, využijeme tuto rovnost po složkách. Pro $j < n+1$ máme

$$(f' \circ \gamma^k(\mathbf{x}))(j) = f(\alpha_j(x_1^1), \dots, \alpha_j(x_1^k)),$$

$$(\gamma \circ f'(\mathbf{x}))(j) = \alpha_j(f(x_1^1, \dots, x_1^k)).$$

Pro každé $j \leq n+1$ se levé strany rovnají, tedy také platí

$$f(\alpha_j^k(x_1^1, \dots, x_1^k)) = \alpha_j(f(x_1^1, \dots, x_1^k)).$$

Prvek $(x_1^1, \dots, x_1^k)$ jsme vybrali libovolně při výběru $\mathbf{x}$. Tedy f je opravdu homomorfismus.

Dokázali jsme, že homomorfismy v množině $\mathrm{Hom}(\mathbf{B}^k, \mathbf{B})$ jsou všechny tvaru f' pro nějaká $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^k, \mathbf{A})$. Už nám stačí pouze dokázat, že pokud f závisí pouze na jedné složce, pak i f' závisí pouze na jedné složce.

Nechť $f = \epsilon \circ \pi_1^k$ (bez újmy na obecnosti f závisí pouze na první složce) pro nějaké $\epsilon \in \mathrm{End}(\mathbf{A})$. Potom

$$\begin{aligned} f'((x_1^1, \dots, x_{n+1}^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_{n+1}^k)) &= (f(x_1^1, \dots, x_1^k), \dots, f(x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^k)) \\ &= (\epsilon(x_1^1), \dots, \epsilon(x_{n+1}^1)) \\ &= \epsilon \circ \pi_1^k((x_1^1, \dots, x_{n+1}^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_{n+1}^k)) \end{aligned}$$

V posledním řádku jsme písmenem ϵ označili endomorfismus algebry $\mathbf{B}$, který je pouze ϵ aplikovaný po složkách. Tedy pokud všechny $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}^k, \mathbf{A})$ závisí pouze na jedné složce, pak i všechny $g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{B}^k, \mathbf{B})$ závisí pouze na jedné složce. Tedy ($\mathbf{A}$ je k-kosouvislá) implikuje ($\mathbf{B}$ je k-kosouvislá).

Ukázali jsme, že $\mathbf{A}$ je k-kosouvislá právě tehdy, když $\mathbf{B}$ je k-kosouvislá pro libovolné $k \geq 2$.

$\square$

Využitím této konstrukce na algebru z důkazu věty 10 bychom získali pro dané $n \geq 2$ algebru, která je n-kosouvislá, není $(n+1)$-kosouvislá, obsahuje pouze dvě unární operace, ale $(n+1)^{n+1}$ prvků.

Závěr

Hlavním cílem práce bylo vylepšit odhad nejmenšího možného počtu prvků n-kosouvislé algebry, která není $(n+1)$-kosouvislá pro obecné $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Původní horní odhad byl $2n$ pro $n \geq 2$ a spodní $n+1$ pro $n \geq 3$.

Případ $n = 2$ jsme rozebrali speciálně v kapitole malé příklady, kde jsme ukázali, že zde skutečně nastane výjimka a existuje taková algebra s pouze dvěma prvky. Zároveň je zde zkonstruována 3-prvková kosouvislá algebra, která není 3-kosouvislá.

Řešením otázky obou odhadů je věta 10, kde jsme ukázali, že nejmenší možný počet prvků n-kosouvislé algebry, která není $(n+1)$-kosouvislá, pro $n \geq 3$ je přesně $n+1$. V důkazu jsme zkonstruovali algebry, které pro dané n mají nejmenší možnou mohutnost $(n+1)$ a obsahují $(n+1)^n$ unárních operací.

V poslední kapitole jsme ještě snížili počet operací takto zkonstruovaných algeber. Počet operací při nejmenší možné kardinalitě takovéto algebry jsme snížili na $n+3$. Zda to je nejmenší možný počet operací při nejmenší kardinalitě jsme neověřovali, tedy pokud by čtenáře téma n-kosouvislých algeber zaujalo, je zde prostor ke zlepšení.

Seznam použité literatury

[1] J. Sichler and V. Trnková. On coconnected algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 179(1–2):175–197, 2003.

[2] P. Příhoda. Homomorphisms of direct powers of algebras. *Algebra Universalis*, 54(4):489–493, 2005.

[3] C. H. Bergman. *Universal algebra : fundamentals and selected topics*. Pure and applied mathematics. A program of monographs, textbooks, and lecture notes. CRC Press, Boca Raton, 2012.