



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Krtouš

Gravitační čočky s elipsoidální symetrií

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Zejména bych tímto rád poděkoval doc. Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D. za ochotu, trpělivost a spolehlivost během vedení práce. Rovněž bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, kteří mi byli při psaní práce velkou oporou.

Název práce: Gravitační čočky s elipsoidální symetrií

Autor: Michal Krtouš

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Gravitační čočkování je jev způsobený ohybem světla v zakřiveném prostoročase kolem astrofyzikálního objektu charakterizovaného jeho rozložením hmoty. V práci jsou zkoumány a následně porovnávány vlastnosti a chování několika modelů gravitačních čoček s elipsoidální symetrií, jež lze využít například k popisu galaxií nebo kup galaxií, resp. jejich hal temné hmoty. Studovanými modely jsou nedávno analyticky odvozená elipsoidální čočka s Navarroým-Frenkovým-Whiteovým hustotním profilem (NFW model) a dosud běžně používané modely nesingulární izotermální elipsoid (NIE) a omezený nesingulární izotermální elipsoid (TNIE). Zkoumáním jakobiánu čočkové rovnice jsme našli kritické křivky a kaustiky těchto modelů a popsali změny tvarů a rozměrů těchto křivek v závislosti na parametrech modelu. Tyto výsledky jsme využili k porovnání modelů z hlediska jejich režimů čočkování a členění jejich prostoru parametrů.

Klíčová slova: gravitační čočkování, kupy galaxií, galaxie, kritické křivky, kaustiky

Title: Gravitational lenses with ellipsoidal symmetry

Author: Michal Krtouš

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Gravitational lensing is a phenomenon caused by bending of light in the curved spacetime around an astrophysical object characterized by its distribution of mass. In this thesis we examine the properties and behaviour of several gravitational lens models with ellipsoidal symmetry. These models can be used for example for the description of galaxies or galaxy clusters, in particular, their dark-matter halos. The studied models include the recently analytically derived lens with mass distribution of Navarro-Frenk-White density profile (NFW model) and the commonly used models of a Nonsingular Isothermal Ellipsoid (NIE) and Truncated Nonsingular Isothermal Ellipsoid (TNIE). By examining the Jacobian of the lens equation we found critical curves and caustics of these models and we described the changes of the shapes and sizes of these curves as a function of the model parameters. Based on these results we compared the lensing regimes of the models and the structure of their parameter spaces.

Keywords: gravitational lensing, galaxy clusters, galaxies, critical curves, caustics

Obsah

1	Úvod	6
2	Základy gravitačního čočkování	8
2.1	Základní koncepty	8
2.2	Shear a jakobián čočkové rovnice	10
2.3	Vlastnosti jakobiánu čočkové rovnice	11
2.4	Příklad bodové čočky	12
3	Elipsoid s hustotním profilem Navarro–Frenka–Whitea	14
3.1	Definice elipsoidálního NFW modelu	14
3.2	Vlastnosti elipsoidálního NFW modelu	17
3.2.1	Kritické křivky a kaustiky	17
3.2.2	Rozměry kritických křivek a kaustik	24
3.2.3	Kontury částí jakobiánu	28
3.3	Omezený NFW model	32
4	Nesingulární izotermální elipsoid	33
4.1	Definice NIE modelu	34
4.2	Vlastnosti NIE modelu	37
4.2.1	Kritické křivky a kaustiky	37
4.2.2	Rozměry kritických křivek a kaustik	45
4.2.3	Limitní případy NIE	50
4.2.4	Kontury částí jakobiánu	53
5	Omezený nesingulární izotermální elipsoid	56
5.1	Definice	56
5.2	Vlastnosti	58
5.2.1	Prostor parametrů	58
5.2.2	Rozměry kritických křivek a kaustik	62
5.2.3	Kontury částí jakobiánu	64
6	Diskuze vlastností analyzovaných modelů	66
6.1	Prostor parametrů a kontury částí jakobiánu	66
6.2	Rozměry kritických křivek a kaustik	68
6.3	Zhodnocení výsledků v aktuálním kontextu oboru	69
7	Závěr	71
	Literatura	72
	Seznam obrázků	74

1 Úvod

Gravitační čočkování je jev způsobený ohybem světla v zakřiveném prostoročase kolem hmotného astrofyzikálního objektu ležícího mezi zdrojem světla a pozorovatelem. Jeho důsledkem dochází k zdánlivé změně poloh, orientací, tvarů a jasnosti světelných zdrojů na obloze oproti jejich hodnotám pozorovaným v případě, že by světlo nebylo čočkováno.

Historii výzkumu gravitačních čoček podrobně popisují Schneider, Ehlers a Falco (1992). Myšlenka gravitačního čočkování byla představena již v letech 1784 Henrym Cavendishem a 1801 Johannem Georgem Soldnerem a zakládala se na klasické newtonovské teorii gravitace. Podle ní hmotné objekty gravitační silou ohýbají světlo prolétávající v jejich blízkosti.

V roce 1915 byla Albertem Einsteinem představena nová teorie gravitace, obecná teorie relativity, mezi jejíž předpovědi patřil mj. i ohyb světla. Pomocí obecné relativity Einstein spočítal první správný výsledek pro ohyb světla, jehož hodnota byla dvojnásobná oproti předpovědi dané newtonovskou fyzikou. Platnost tohoto výsledku a významný experimentální důkaz správnosti obecné relativity byly zjištěny roku 1919, kdy v rámci expedice vedené Frankem W. Dysonem, pozorování Arthura Eddingtona potvrdila předpověď pro stáčení paprsků od Slunce během jeho úplného zatmění (Dyson, Eddington a Davidson (1920)).

Postupem času se správnost obecné relativity projevila při mnoha dalších příležitostech. Byly tak objeveny různé kosmické jevy (gravitační čočky, gravitační vlny) a objekty (černé díry, kvasary, pulsary), které je možné popisovat výhradně zákony této teorie.

Již krátce po předložení a prvních experimentálních ověřeních platnosti obecné relativity Einstein i další fyzici uvažovali o hvězdách coby vesmírných gravitačních čočkách (Einstein (1936)). Z počátku však převládal názor, že by efekt byl jen stěží pozorovatelný, a geometrická konstelace objektů potřebná k vytvoření gravitační čočky vysoce nepravděpodobná. Někteří fyzici (Zwicky (1937)) však již tehdy tvrdili, že by mělo být pozorovatelné čočkování galaxiemi, což se později potvrdilo.

První gravitační čočkou byl roku 1979 objevený „Twin QSO“ (Walsh, Carswell a Weymann (1979)). Jedná se o kvasar QSO 0957+561, jenž se zobrazuje dvojitě, neboť je čočkován galaxií YGKOW G1 nacházející se mezi ním a Zemí. Snímek této čočky lze vidět na Obrázku 1.1.

Od té doby bylo zaznamenáno již mnoho případů gravitačního čočkování. Objevenými čočkami byly jak galaxie, kupy galaxií a větší kosmologické struktury, tak i hala temné hmoty, ale i objekty hvězdných hmotností, jako hvězdy nebo černé díry, nebo dokonce i planety. Mezi nejvýznamnější výsledky studia gravitačních čoček patří možnost mapování rozložení hmoty ve vesmíru. V minulosti byla za tímto účelem vytvořena celá řada modelů popisujících rozložení hmoty ve vesmíru a jeho čočkovací vlastnosti.

Jako příklad lze uvést tzv. izotermální modely. Jde se o jedny z nejstarších a nejběžněji využívaných modelů čoček se sférickou či elipsoidální symetrií. Jiným modelem je sféricky symetrická čočka s Navarrovým-Frenkovým-Whiteovým (NFW) hustotním profilem (Navarro, Frenk a White (1996)), kterou představil Bartelmann (1996). Teprve o téměř tři desetiletí později pak byl v práci Heyrovský a Karamazov (2024) tento model rozšířen na čočku s elipsoidální symetrií,

tedy elipsoidální NFW model. Tyto modely čoček nacházejí uplatnění např. při zkoumání čočkovacího efektu galaxiemi a kupami galaxií, u nichž předpokládáme sférickou či elipsoidální symetrii.

V Kapitole 2 představíme základní koncepty související s gravitačními čočkami. Uvedeme předpoklady potřebné k odvození těchto konceptů ze zákonů obecné teorie relativity a následně rozebereme, jaké vlastnosti gravitačních čoček lze díky těmto konceptům studovat. Nakonec budeme využití těchto konceptů prezentovat na nejjednodušším příkladu bodové gravitační čočky.

V dalších kapitolách práce se zabýváme studiem jednotlivých modelů gravitačních čoček s elipsoidální symetrií, které jsou představeny v Kapitolách 3-5. Kapitola 3 je věnována modelům čoček, jejichž rozložení hmoty je dáno NFW hustotním profilem. V této kapitole jsou vesměs prezentovány definice a výsledky přejaté z Heyrovský a Karamazov (2024), Heyrovský a Karamazov (2022) a Heyrovský (2023).

V Kapitole 4 popisujeme skupinu tzv. izotermálních modelů. Zejména zde rozebíráme chování a vlastnosti nesingulárního izotermálního elipsoidu (NIE). Definice izotermálních modelů jsou přejaty z článku Kormann, Schneider a Bartelmann (1994), originální výsledky jsou prezentovány v Kapitolách 4.2.2 a 4.2.4, částečně i v Kapitolách 4.2.1 a 4.2.3.

V Kapitole 5 zkoumáme omezený nesingulární izotermální elipsoid (TNIE). Jedná se o úpravu NIE modelu diskutovaného v Kapitole 4, která odstraňuje jeho nedostatek divergující celkové hmoty. TNIE představuje aproximaci běžně používanou při analýze reálných pozorování čočkujících kup galaxií ve vesmíru. Pro TNIE jsou prezentovány originální výsledky v Kapitolách 5.2.1 - 5.2.3.

Kapitolu 6 věnujeme srovnání vlastností modelů prezentovaných v Kapitolách 3-5. V Kapitole 7 nakonec shrnujeme výsledky práce.



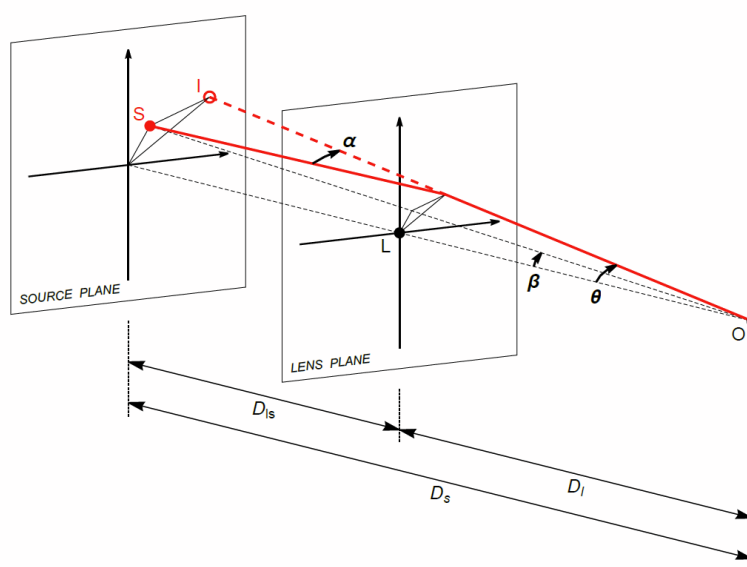
Obrázek 1.1 Snímek první objevené gravitační čočky. Dva obrazy čočkováného kvasaru QSO 0957+561 lze vidět uprostřed, čočkující galaxie leží bezprostředně vlevo nad dolním obrazem. Zdrojem fotografie je ESA/Hubble; NASA, 2014.

2 Základy gravitačního čočkování

2.1 Základní koncepty

Odvození efektu gravitačního čočkování a základních konceptů s ním souvisejících se opírá o obecnou teorii relativity a pracuje s několika předpoklady. Předně uvažujeme, že ohyb světla je velmi malý. Pracujeme v aproximaci geometrické optiky a předpokládáme platnost Fermatova principu. Gravitační čočku považujeme za tenkou, tedy považujeme její tloušťku (rozměr ve směru, kterým prochází světlo) za výrazně menší než jsou vzdálenosti k pozorovateli a ke zdroji světla.

Geometrie problému je zobrazena na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1 Obecná geometrie gravitačního čočkování. Vyznačen je pozorovatel O, čočka (její střed) L ležící v rovině čočky (lens plane), zdroj světla S ležící v rovině zdroje (source plane) a obraz zdroje I (zde zobrazen v rovině zdroje). Převzato z Heyrovský (2021), Obrázek 2.1

Za těchto předpokladů lze ze zákonů obecné relativity odvodit základní vztahy pro gravitační čočkování a převést problém z obecného 4-dimenzionálního křivého prostoročasu do dvou euklidovských rovin kolmých na směr k čočce - roviny zdroje a roviny čočky. Podrobné odvození lze nalézt ve čtvrté kapitole Schneider, Ehlers a Falco (1992)¹.

Získá se tak vztah pro úhel odklonu světelných paprsků kolem gravitační čočky aproximované hmotným bodem, jenž poprvé odvodil již Einstein (1915):

$$\alpha(\theta) = \frac{4GM}{c^2 D_l \theta^2} \theta. \quad (2.1)$$

Ve vztahu 2.1 D_l představuje vzdálenost mezi pozorovatelem a rovinou čočky, M hmotnost bodové čočky, a konstanty c a G představují rychlost světla a New-

¹V knize je využito několik různých sad jednotek. Zde jsou odvozené vztahy uvedené jako funkce úhlů θ a β .

tonovu gravitační konstantu. Úhel $\boldsymbol{\theta}$ je sevřený osou O-L a spojnicí O-I (vizte Obrázek 2.1), jedná se tedy o polohu obrazu vyjádřenou pomocí úhlového vektoru s obecně dvěma složkami.

Úhel odklonu $\boldsymbol{\alpha}$ je rovněž daný úhlovým vektorem se dvěma složkami. Gravi- tační čočky mají obecně složitější strukturu než jednoduchou sférickou symetrii, kterou lze vně objektu popsat hmotným bodem. Jedná-li se o skupinu několika hmotných bodů, je nutné vztah 2.1 upravit do podoby:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1} \frac{4GM_i}{c^2 D_l} \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'_i}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'_i|^2}, \quad (2.2)$$

kde index i čísluje jednotlivé hmotné body, M_i jsou jejich hmotnosti a vektory $\boldsymbol{\theta}'_i$ označují jejich polohu.

Pro obecné prostorové rozložení hmoty je pak úhel odklonu definován výrazem:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4GD_l}{c^2} \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2\boldsymbol{\theta}', \quad (2.3)$$

v němž $\Sigma(\boldsymbol{\theta}')$ představuje plošnou hustotu hmoty, kterou získáme z prostorové hustoty hmoty integrací přes rozměr kolmý na rovinu čočky (tloušťku). Výraz 2.3 lze přepsat do podoby:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_s}{\pi D_{ls}} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2\boldsymbol{\theta}', \quad (2.4)$$

v níž $\kappa(\boldsymbol{\theta}')$ se nazývá konvergence a je definována jako:

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}') = \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}')}{\Sigma_{cr}}, \quad (2.5)$$

přičemž konstanta Σ_{cr} se nazývá kritická plošná hustota a je rovna:

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_l D_{ls}}. \quad (2.6)$$

D_s představuje vzdálenost mezi pozorovatelem a rovinou zdroje, D_{ls} pak vzdálenost mezi rovinami čočky a zdroje.

Schneider, Ehlers a Falco (1992) dále odvozují Fermatův potenciál:

$$\phi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.7)$$

v němž se objevuje čočkový potenciál:

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d^2\boldsymbol{\theta}'. \quad (2.8)$$

Podle Obrázku 2.1 je $\boldsymbol{\beta}$ úhel mezi osou O-L a spojnicí O-S, jedná se tedy o polohu zdroje vyjádřenou pomocí úhlového vektoru s obecně dvěma složkami.

Transformační vztah mezi polohou obrazu a polohou zdroje se nazývá čočková rovnice:

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \frac{D_{ls}}{D_s} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.9)$$

jejíž geometrické odvození lze vidět z trojúhelníku v rovině zdroje na Obrázku 2.1.

Za pomoci Fermatova potenciálu je možné čočkovou rovnici přepsat jako:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \phi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = 0. \quad (2.10)$$

2.2 Shear a jakobián čočkové rovnice

Čočkový potenciál má pro naše účely velké využití. Lze pomocí něj zavést několik dalších konceptů užitečných pro popis čoček. Definice jsou převzaté z druhé kapitoly Heyrovský (2021).

Z výrazů 2.4 a 2.8 si lze všimnout, že je možné vyjádřit úhel odklonu jako gradient čočkového potenciálu:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_s}{D_{ls}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \psi(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.11)$$

tedy ve složkách:

$$\alpha_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_s}{D_{ls}} \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}, \quad (2.12)$$

$$\alpha_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_s}{D_{ls}} \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2}. \quad (2.13)$$

Zapůsobením Laplaceova operátoru na čočkový potenciál obdržíme dvojnásobek konvergence:

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \Delta_{\boldsymbol{\theta}} \psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{ls}}{D_s} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \alpha_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \right). \quad (2.14)$$

Pro účely zkoumání vlastností gravitačních čoček si zadefinujeme další kombinace druhých derivací čočkového potenciálu:

$$\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{ls}}{D_s} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \alpha_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \right), \quad (2.15)$$

$$\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{ls}}{D_s} \frac{\partial \alpha_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = \frac{D_{ls}}{D_s} \frac{\partial \alpha_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}. \quad (2.16)$$

γ_1 a γ_2 tvoří složky shearu $\boldsymbol{\gamma}$. Velikost shearu je definována jako:

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\gamma_1(\boldsymbol{\theta})^2 + \gamma_2(\boldsymbol{\theta})^2}. \quad (2.17)$$

Za pomocí výrazu 2.11 lze čočkovou rovnici 2.9 přepsat jako:

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \psi(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.18)$$

Při studiu gravitačních čoček je užitečné zkoumat jakobián této rovnice. Jacobiho matici čočkové rovnice lze pomocí konvergence a shearu zapsat jako:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_1(\boldsymbol{\theta}) & -\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \\ -\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) & 1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) + \gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Jakobián (její determinant) je pak roven:

$$\det \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = |1 - \kappa(\boldsymbol{\theta})|^2 - \gamma(\boldsymbol{\theta})^2. \quad (2.20)$$

2.3 Vlastnosti jakobiánu čočkové rovnice

Jakobián čočkové rovnice daný výrazem 2.20 poskytuje důležité informace o vlastnostech gravitačních čoček (např. Schneider, Ehlers a Falco (1992), Heyrovský (2021)).

Převrácená hodnota jakobiánu $1/|\det\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})|$ představuje zjasnění světelného toku. Hodnota $\det\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ obecně může být kladná i záporná, popřípadě nulová. Znaménko jakobiánu odpovídá kladné či záporné paritě obrazů nacházejících se v dané oblasti čočkové roviny. Podmínka $\det\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ představuje definiční podmínku pro kritickou křivku v rovině čočky. Kritická křivka se obecně sestává z (obecně více) uzavřených křivek dvou typů - radiální a tangenciální kritické křivky. Tyto dva typy lze identifikovat rozepsáním 2.20 jako:

$$\det\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = |1 - \kappa(\boldsymbol{\theta})|^2 - \gamma(\boldsymbol{\theta})^2 = (1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) + \gamma(\boldsymbol{\theta}))(1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) - \gamma(\boldsymbol{\theta})). \quad (2.21)$$

Radiální, respektive tangenciální části kritické křivky jsou poté definovány podmínkami:

$$1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) + \gamma(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (2.22)$$

$$1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) - \gamma(\boldsymbol{\theta}) = 0. \quad (2.23)$$

V závislosti na parametrech čočky může kritická křivka obsahovat části obou typů, nebo pouze jednoho z nich, nebo žádnou (tedy jakobián není nikde nulový a kritická křivka neexistuje). Části kritické křivky jsou obecně spojité, uzavřené, hladké křivky, které se navzájem nekříží a většinou ani nedotýkají. Výjimku tvoří hraniční případy oddělující různé režimy čočkování, při kterých se části kritické křivky mohou dotknout, propojit, rozpojit, objevit, nebo zaniknout. Režimy čočkování jsou primárně charakterizovány celkovou topologií kritické křivky, tedy počtem a vzájemnou polohou jejích částí. Jemnějšího členění lze dosáhnout posouzením změn tvaru částí (např. přítomností a počtem inflexních bodů), nebo posouzením změn geometrie kaustiky.

Kaustika je křivka získaná promítnutím kritické křivky pomocí čočkové rovnice z roviny čočky do roviny zdroje. Podobně jako kritická křivka má i kaustika obecně více částí dvou typů - radiální a tangenciální vzniklé promítnutím radiální a tangenciální části kritické křivky. Části kaustiky jsou rovněž spojité a uzavřené. Na rozdíl od kritické křivky však kaustika není obecně hladká, a její části se mohou protínat. Kaustiky se sestávají z hladkých částí, tzv. foldů, které jsou tečně propojené hroty nazývanými kaspky.

Kaustika čočky je důležitá mj. pro studium počtu obrazů. Pokud je zdroj světla zobrazen gravitační čočkou, v závislosti na jeho poloze v rovině zdroje může pozorovatel vidět různý počet jeho obrazů. Oblasti v rovině zdroje s různými počty obrazů jsou odděleny právě kaustikami, přičemž při překročení kaustiky se mění počet obrazů o dva (či obecněji o sudý počet při překročení bodu křížení více částí kaustiky).

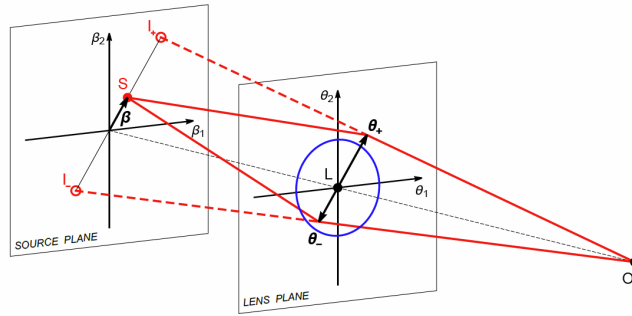
Kritické křivky představují kritické obrazy kaustik. Zdroje ležící na kaustice tak mají obecně více obrazů, z nichž alespoň jeden leží na kritické křivce. Takový obraz by teoreticky měl mít nekonečné zjasnění. To by ovšem platilo pouze za

předpokladu bodového zdroje². Žádný astrofyzikální zdroj však není bodový, nýbrž má nějakou plochu a nemůže tedy ležet celý pouze na kaustice. V takovém případě jeho obraz nemá nekonečné zjasnění, neboť je třeba udělat vážený průměr přes celou jeho plochu.

2.4 Příklad bodové čočky

Mezi jednoduché příklady čoček patří čočky se sférickou symetrií, přičemž nejjednodušší čočkou je pak bodová čočka. Za bodovou čočku lze považovat systémy jako jsou např. jednotlivé planety, hvězdy, černé díry, případně tak lze popsat obecně jakékoliv sféricky symetrické čočky konečného rozměru vně jejich rozložení hmoty.

Bodová čočka má charakter hmotného bodu o hmotnosti M . Ze vztahu 2.5 tak vyplývá, že má konvergence charakter delta funkce, a všude mimo čočku samotnou je tedy nulová. Díky sférické symetrii čočky se body O, L, S a I z Obrázku 2.1 nacházejí všechny v jedné rovině (na rozdíl od obecné čočky, kdy tomu tak být nemusí). Odpovídající geometrii tak lze překreslit do podoby na Obrázku 2.2



Obrázek 2.2 Gravitační čočkování bodovou čočkou pro zdroj neležící na ose O-L. Konkrétní příklad obecné situace z Obrázku 2.1. Pozorovatel O, čočka L, zdroj S a dva jeho obrazy I_+ a I_- leží ve stejné rovině. Převzaté z Heyrovský (2021), Obrázek 3.1

Vztahy pro obecnou gravitační čočku tak přecházejí do jednodušší podoby, v níž se objevují α , β a θ jakožto úhly, nikoliv již jako úhlové vektory.

Čočkový potenciál, úhel odklonu a shear tak lze zapsat následujícími vztahy:

$$\psi_{point}(\theta) = \theta_E^2 \ln |\theta|, \quad (2.24)$$

$$\alpha_{point}(\theta) = \frac{D_s}{D_{ls}} \theta_E^2 \frac{1}{\theta}, \quad (2.25)$$

$$\gamma_{point} = \frac{\theta_E^2}{\theta^2}, \quad (2.26)$$

v nichž vystupující Einsteinův poloměr θ_E je definován vztahem:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{ls}}{D_l D_s} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (2.27)$$

²Ve skutečnosti by to neplatilo ani v tomto případě. Při odvozování vztahů pro gravitační čočkování byla využita aproximace geometrické optiky, která skutečně přináší nekonečné zjasnění. V tomto případě je nutno vzít v potaz vlnové vlastnosti světla.

Čočkovou rovnicí lze pro bodovou čočku zapsat ve tvaru:

$$\beta = \left(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) \theta. \quad (2.28)$$

Jelikož je konvergence κ mimo čočku nulová, a shear γ je větší než nula, bude radiální část jakobiánu 2.21 kladná. Bodová čočka tak bude mít pouze tangenciální kritickou křivku danou $1 - \gamma = 0$, což vede na velmi jednoduchý předpis kritické křivky $\theta^2 = \theta_E^2$.

Kritická křivka je tedy kružnice se středem v bodové čočce a poloměrem rovným Einsteinovu poloměru. Tato tangenciální kritická křivka se čočkovou rovnicí promítne do degenerované tangenciální kaustiky tvořené jediným bodem splývajícím s bodovou čočkou, tedy se souřadnicí $\beta = 0$.

Pokud se bude zdroj nacházet na kaustice, bude jeho obraz pokrývat celou délku kritické křivky, a vytvoří tzv. Einsteinův prstenec. Pokud je zdroj bodový, bude jeho obrazem přesně kružnice totožná s kritickou křivkou. V případě plošného zdroje je obrazem plocha obklopující kritickou křivku.

V případě, že se zdroj nalézá mimo kaustiku (tedy $\beta \neq 0$), bude mít právě dva obrazy, jak schematicky naznačuje i Obrázek 2.2. Čočkovou rovnicí 2.28 lze invertovat a získat tak polohy dvou obrazů v závislosti na poloze zdroje:

$$\theta_{\pm} = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\theta_E^2}{\beta^2}}\right) \beta. \quad (2.29)$$

3 Elipsoid s hustotním profilem Navarro–Frenka–Whitea

V této kapitole popíšeme vlastnosti modelů čoček, jejichž rozložení hmoty je dáno Navarovým-Frenkovým-Whiteovým hustotním profilem (NFW modely).

Definice, vlastnosti a popis chování elipsoidálního NFW modelu byly přejaty z Heyrovský a Karamazov (2024) a Heyrovský a Karamazov (2022).

Původní sférický NFW model lze získat jako limitu obecnějšího elipsoidálního, pro nějž se vztahy redukuje do jednodušší podoby. Definice tohoto modelu, jeho vlastnosti a popis chování byly přejaty rovněž z Heyrovský a Karamazov (2024).

3.1 Definice elipsoidálního NFW modelu

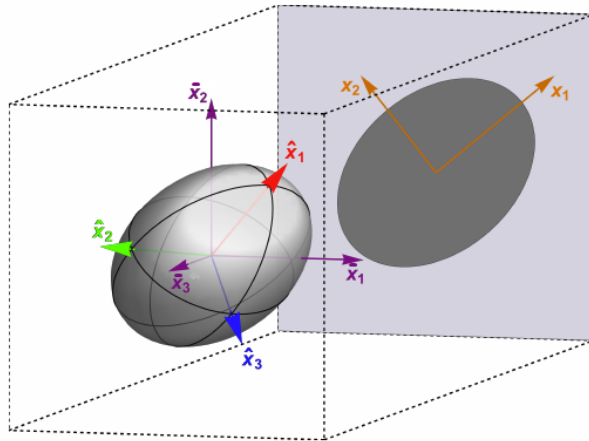
Elipsoidální NFW model uvažuje gravitační čočku s rozložením hmoty daným NFW hustotním profilem se symetrií obecně orientovaného tříosého elipsoidu. Jeho rozložení hustoty lze popsat jako funkci hlavní poloosy \hat{a} :

$$\rho_{NFW}(\hat{a}) = \rho_s \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_s} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\hat{a}}{\hat{a}_s} \right)^{-2}, \quad (3.1)$$

kde

$$\hat{a}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 / (1 - e_1^2) + \hat{x}_3^2 / (1 - e_2^2)}. \quad (3.2)$$

Parametry \hat{a}_s a ρ_s nesou informaci o škálování. Poloosa \hat{a}_s je definována tak, aby $d \ln \rho / d \ln \hat{a} = -2$, a hustota $\rho_s = 4\rho(\hat{a}_s)$. Excentricity e_1 a e_2 splňují $0 \leq e_1 \leq e_2 < 1$. Kartézské souřadnice $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ jsou orientované podél hlavní, střední a vedlejší poloosy elipsoidu, jak naznačuje Obrázek 3.1



Obrázek 3.1 Schéma plochy s konstantní hustotou tříosého elipsoidálního rozložení hmoty s vyznačenými třídimenzionálními souřadnicovými systémy $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ vázaným na elipsoid a $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ vázaným na vnější prostor (kladný směr \bar{x}_3 směřuje k pozorovateli) a dvoudimenzionálním souřadnicovým systémem x_1, x_2 vázaným na systém hlavních os průmětu elipsoidu do roviny nebe. Převzato z Heyrovský a Karamazov (2024), Obrázek 1

Střed elipsoidální čočky leží v bodě L (vizte Obrázek 2.1) a souřadnice $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ tvoří kartézský souřadnicový systém orientovaný tak, aby osa \bar{x}_3 splývala se spojnicí L-O. Integrací přes tuto souřadnici obdržíme z elipsoidálního rozložení hmoty eliptické rozložení v rovině čočky, které má konvergenci:

$$\kappa_{NFW}(a) = \begin{cases} 2 \frac{1-\mathcal{F}(a)}{a^2-1} \kappa_s, & \text{je-li } a \neq 1, \\ \frac{2}{3} \kappa_s, & \text{je-li } a = 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

kteřá je funkcí hlavní poloosy průmětu elipsoidu do roviny čočky a , pro níž platí:

$$a(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + \frac{x_2^2}{1-e^2}}, \quad (3.4)$$

kde e představuje excentricitu průmětu. Souřadnice x_1 a x_2 jsou paralelní s hlavní, respektive vedlejší osou průmětu čočky, a jsou v jednotkách škálové poloosy průmětu a_s . Tyto souřadnice odpovídají souřadnicím obrazu $\boldsymbol{\theta}$ a platí mezi nimi transformační vztah:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} \frac{D_l}{a_s}. \quad (3.5)$$

Ve vztahu 3.3 se objevuje funkce $\mathcal{F}(a)$, která je definována jako:

$$\mathcal{F}(a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}, & \text{je-li } a < 1, \\ 1, & \text{je-li } a = 1, \\ \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}}, & \text{je-li } a > 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

a dále konvergenční parametr κ_s škálující plošnou hustotu hmoty.

Čočkovou rovnicí 2.9 zapíšeme ve tvaru:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Vektor \mathbf{y} popisuje polohu zdroje v jednotkách škálového parametru a_s a odpovídá poloze zdroje $\boldsymbol{\beta}$ transformačním vztahem:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta} \frac{D_l}{a_s}. \quad (3.8)$$

$\boldsymbol{\alpha}_0$ představuje přeškálovaný úhel odklonu vyjádřený jako funkce \mathbf{x} :

$$\boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{x}) = \frac{D_l D_{ls}}{D_s a_s} \boldsymbol{\alpha}_{NFW}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.9)$$

Složky tohoto přeškálovaného úhlu odklonu získané integrací konvergence (vztah 2.4) mají hodnoty:

$$\begin{aligned} \alpha_{01}(\mathbf{x}) = & \frac{4\kappa_s x_1 \sqrt{1-e^2}}{((x_1-e)^2 + x_2^2)((x_1+e)^2 + x_2^2)} \\ & \cdot \left[((x_1^2 - e^2)(1-e^2) + x_2^2(1+e^2)) \frac{\mathcal{F}(a)}{\sqrt{1-e^2}} + (x_1^2 + x_2^2 - e^2) \ln \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \right. \\ & \left. - \frac{x_2}{x_1} (x_1^2 + x_2^2 + e^2) \arctan \frac{x_1 x_2 (1 - \sqrt{1-e^2})}{x_1^2 \sqrt{1-e^2} + x_2^2} \right], \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{02}(\mathbf{x}) &= \frac{4\kappa_s x_2 \sqrt{1-e^2}}{((x_1-e)^2+x_2^2)((x_1+e)^2+x_2^2)} \\
&\cdot \left[(x_1^2(1-2e^2)+x_2^2+e^2) \frac{\mathcal{F}(a)}{\sqrt{1-e^2}} + (x_1^2+x_2^2+e^2) \ln \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_1}{x_2} (x_1^2+x_2^2-e^2) \arctan \frac{x_1 x_2 (1-\sqrt{1-e^2})}{x_1^2 \sqrt{1-e^2} + x_2^2} \right]. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Z úhlu odklonu lze pomocí vztahů 2.15 určit složky shearu:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1NFW}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_{01}(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_{02}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) = \frac{4\kappa_s \sqrt{1-e^2}}{((x_1-e)^2+x_2^2)^2((x_1+e)^2+x_2^2)^2} \\
&\cdot \left[((x_1-e)^2+x_2^2)((x_1+e)^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2-e^2) \left(\frac{\sqrt{1-e^2}(x_1^2+x_2^2+e^2-2)}{2((1-e^2)(1-x_1^2)-x_2^2)} + 1 \right) \right. \\
&\quad - ((x_1^2-x_2^2-e^2)((x_1^2+x_2^2)^2-e^4) - 8e^2 x_1^2 x_2^2) \ln \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \\
&\quad \left. + 2x_1 x_2 ((x_1^2+x_2^2+e^2)^2 - 4e^2(x_2^2+e^2)) \arctan \frac{x_1 x_2 (1-\sqrt{1-e^2})}{x_1^2 \sqrt{1-e^2} + x_2^2} \right. \\
&+ \left[12x_1^2 x_2^2 (e^2-1)(x_1^2-x_2^2-e^2) + 4e^2(x_1^2-1)((x_1^2-x_2^2-e^2)^2 - 4x_1^2 x_2^2) - (x_1^2-x_2^2-e^2)^3 \right. \\
&\quad \left. \cdot (3+e^2) + ((x_1-e)^2+x_2^2)((x_1+e)^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2-e^2) \frac{(1-e^2)(1-e^2 x_1^2)}{(1-e^2)(1-x_1^2)-x_2^2} \right] \\
&\quad \left. \cdot \frac{\mathcal{F}(a)}{2\sqrt{1-e^2}} \right], \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{2NFW}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \alpha_{01}(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{4\kappa_s \sqrt{1-e^2}}{((x_1-e)^2+x_2^2)^2((x_1+e)^2+x_2^2)^2} \\
&\cdot \left[x_1 x_2 ((x_1-e)^2+x_2^2)((x_1+e)^2+x_2^2) \left(2 + \frac{\sqrt{1-e^2}(x_1^2+x_2^2+e^2-2)}{(1-e^2)(1-x_1^2)-x_2^2} \right) \right. \\
&\quad - 2x_1 x_2 ((x_1^2+x_2^2+e^2)^2 - 4e^2(x_2^2+e^2)) \ln \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \\
&\quad - ((x_1^2-x_2^2-e^2)((x_1^2+x_2^2)^2-e^4) - 8e^2 x_1^2 x_2^2) \arctan \frac{x_1 x_2 (1-\sqrt{1-e^2})}{x_1^2 \sqrt{1-e^2} + x_2^2} \\
&+ x_1 x_2 \left[(x_1^2+x_2^2+e^2)((5e^2-3)x_1^2 - 3(1+e^2)x_2^2 + (5-3e^2)e^2) - 4e^2(1+e^2)x_1^2 \right. \\
&\quad \left. + ((x_1-e)^2+x_2^2)((x_1+e)^2+x_2^2) \frac{(1-e^2)(1-e^2 x_1^2)}{(1-e^2)(1-x_1^2)-x_2^2} \right] \cdot \frac{\mathcal{F}(a)}{\sqrt{1-e^2}} \right]. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

3.2 Vlastnosti elipsoidálního NFW modelu

Úhel odklonu, a tedy i konvergence a shear jsou pro elipsoidální NFW model funkce závislé na souřadnicích \mathbf{x} a dvou parametrech - excentricitě e a konvergenčním parametru κ_s . V této kapitole popíšeme vybrané vlastnosti elipsoidálního NFW modelu v závislosti na hodnotě těchto dvou parametrů.

Nejprve se soustředíme na tvary kritických křivek a kaustik a hranice v prostoru parametrů e a κ_s , kdy na sebe jejich různé tvary přecházejí. Pro tyto účely byl využit software Wolfram Mathematica (verze 13.2), jenž umožňoval numerické řešení potřebných rovnic, a rovněž grafickou simulaci. Při zkoumání ostatních vlastností byly převzaty výsledky z prací Heyrovský a Karamazov (2024) a Heyrovský a Karamazov (2022).

Excentricita se může pohybovat v intervalu $[0; 1)$. Speciální případ $e = 0$, kdy elipsoidální NFW model přechází v jednodušší sférický, diskutujeme na konci Kapitoly 3.2.1 a v Kapitole 3.2.2. Konvergenční parametr může nabývat libovolné kladné hodnoty, zde však diskutujeme primárně případy nalézající se v intervalu zhruba $[0.05; 1.5]$, které jsou pro ilustraci chování modelu v režimu nižší hustoty a následného porovnání s dalšími modely dostačující. Podrobnější analýzu včetně rozboru chování pro větší interval konvergenčního parametru lze nalézt v Heyrovský a Karamazov (2024).

3.2.1 Kritické křivky a kaustiky

Definiční rovnice pro kritickou křivku má pro NFW model podobu:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J}_{NFW}(\mathbf{x}) &= |1 - \kappa_{NFW}(\mathbf{x})|^2 - \gamma_{NFW}(\mathbf{x})^2 \\ &= (1 - \kappa_{NFW}(\mathbf{x}) + \gamma_{NFW}(\mathbf{x}))(1 - \kappa_{NFW}(\mathbf{x}) - \gamma_{NFW}(\mathbf{x})) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Numerickým řešením rovnice 3.14 ve Wolfram Mathematica byly nalezeny body tvořící kritickou křivku NFW modelu s konkrétními hodnotami parametrů e a κ_s . Tyto body byly následně transformovány čočkovou rovnicí 3.7, čímž byly získány body tvořící příslušnou kaustiku.

Při změně parametrů e a κ_s se obecně mění velikost i tvar kritické křivky i kaustiky. Jednotlivé režimy tvarů a přechody mezi nimi při konstantním konvergenčním parametru $\kappa_s = 0.5$ a proměnné excentricitě e jsou zobrazeny na Obrázcích 3.2-3.8. Na obrázcích je vlevo vždy zobrazena kritická křivka a vpravo kaustika.

Pro všechny hodnoty e má kritická křivka i kaustika tangenciální (zobrazena oranžově) i radiální (zobrazena modře) část. Tangenciální část je po celou dobu větší než radiální, která je v ní celá obsažena (až na dále popsany speciální případ hyperbolické umbiliky, kdy se dotýkají).

Na Obrázku 3.2 je na příkladu $e = 0.5$ zobrazen režim, v němž se kritická křivka a kaustika nalézá pro dostatečně nízké hodnoty e při libovolném κ_s . V tomto režimu má tangenciální kaustika tvar čtyřcípé křivky orientované podél os symetrie a je plně obsažena v radiální kaustice. Tangenciální kaustika má tedy čtyři kasy propojené hladkými foldy. Radiální kaustika je zcela hladká. Pro nulovou excentricitu jsou obě části kritické křivky kružnice. S rostoucí excentricitou se tangenciální kritická křivka protahuje podél osy x_1 a tangenciální kaustika se

zvětšuje podél obou os. Radiální kritická křivka i kaustika se zplošťují podél osy x_1 . Vzdálenosti na ose y_1 a y_2 mezi oběma částmi kaustiky se tedy zmenšují. Obě části kritické křivky zůstávají konvexní.

Hranicí tohoto režimu je tzv. cusp piercing, kdy kasy tangenciální kaustiky ležící na vodorovné ose leží na radiální kaustice. Tato situace je znázorněna na Obrázku 3.3 odpovídajícímu hodnotě $e = 0.645$.

Následuje krátký interval excentricity, v němž má nový režim velmi podobné chování, jako předchozí popsany, pouze s tím rozdílem, že tangenciální kaustika již není celá obsažena v radiální, ale vystupuje z ní ve směru vodorovné osy.

Další hranice režimů nastává ve chvíli, kdy stále se protahující tangenciální kritická křivka přestává být konvexní. V tomto momentu (zobrazeno na Obrázku 3.4 pro $e = 0.71303$) se na ní objevují inflexní body.

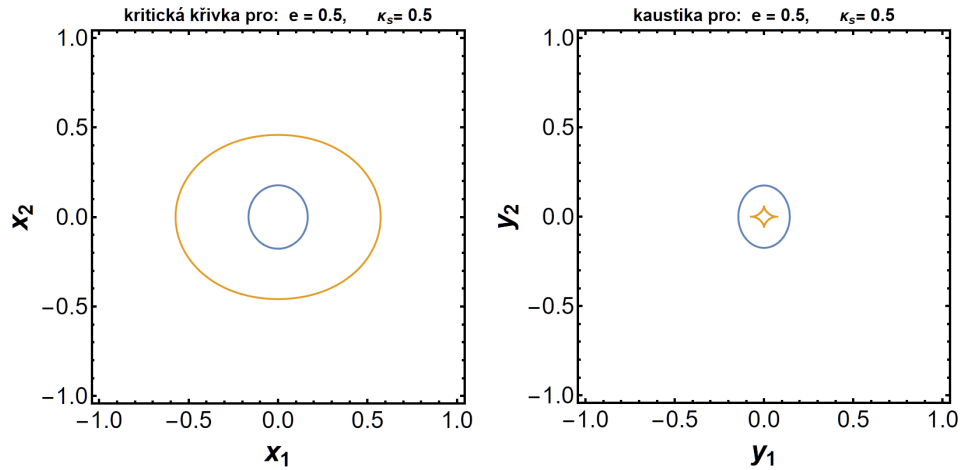
Pro vyšší excentricity se v dalším režimu tangenciální kritická křivka začíná na svislé ose prohýbat dovnitř a začíná mít nekonvexní tvar tzv. peanutu. Tento tvar lze pozorovat na Obrázku 3.5 pro $e = 0.8$. Pro zvyšující se excentricitu v tomto režimu se kasy tangenciální kritické křivky na svislé ose výrazně přibližují k radiální části. Chování tvaru radiální kaustiky pokračuje jako v předchozím režimu.

Následující hranicí režimů je moment, kdy přestává být konvexní zplošťující se radiální kritická křivka. V tomto momentu se na jejích průsečících s vodorovnou osou objevují inflexní body. Situace odpovídající $e = 0.9187$ je zobrazena na Obrázku 3.6. Na tomto obrázku je vzdálenost mezi částmi kritické křivky a kaustiky na svislé ose již velmi malá, stále se však nedotýkají. Souřadnice x_2 radiální části kritické křivky je tak podél této osy v absolutní hodnotě menší než pro tangenciální část, a souřadnice y_2 tangenciální části kaustiky je podél této osy v absolutní hodnotě menší než pro radiální část. Toto platí i v následujícím režimu.

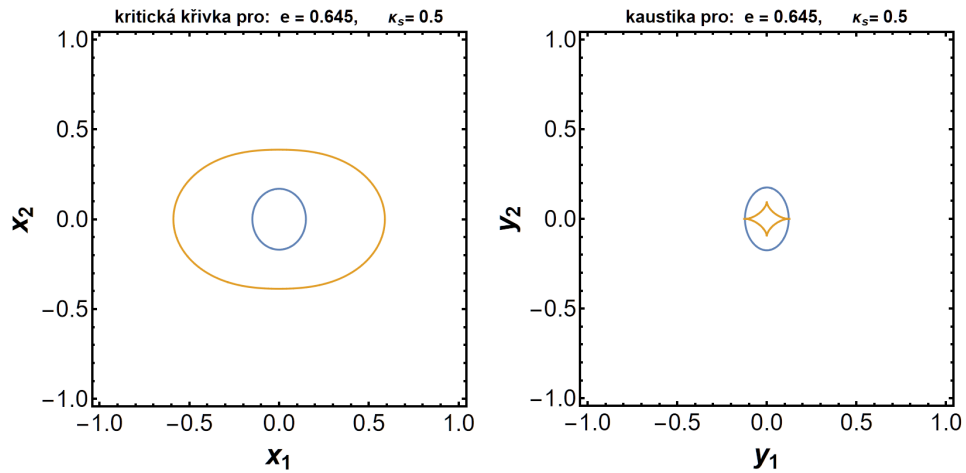
Ve velmi krátkém intervalu excentricity následujícího režimu radiální kritická křivka již má nekonvexní tvar peanutu, přičemž průhyb se postupně pomalu zvětšuje (na obrázcích je dobře viditelný až na Obrázku 3.8 pro $e = 0.96$). V ostatních ohledech pokračuje chování z předchozího režimu.

Na Obrázku 3.7 je zobrazena konfigurace při $e = 0.931$, která odpovídá hyperbolické umbilice, speciální metamorfóze kaustiky (Schneider, Ehlers a Falco (1992)). Jedná se o hranici režimů, kdy se na svislé ose dotknou obě části kritické křivky, respektive kaustiky. V obou případech mají nyní obě části společné právě dva body na svislé ose. Jedná se o speciální případ, kdy radiální a tangenciální kritické křivky nejsou celé hladké. Při přechodu přes umbiliku se na radiální části kaustiky v průsečících se svislou osou objevují dva kasy. Naopak kasy na této ose na tangenciální části mizí a pro vyšší excentricity je kaustika v těchto bodech hladká.

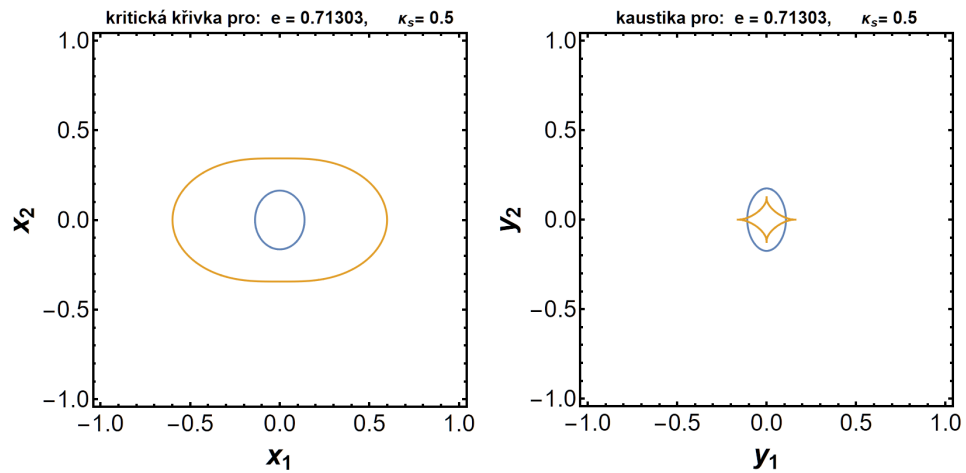
V režimu za hyperbolickou umbilikou jsou obě části kritické křivky opět hladké a nekonvexní (tedy tvaru peanutu). Pro zvyšující se excentricitu se tangenciální část protahuje ve směru x_1 a radiální se v obou směrech zmenšuje. Radiální část kaustiky je nyní zcela obsažena v tangenciální části, má dva kasy na svislé ose a s rostoucí excentricitou se rovněž v obou směrech zmenšuje. Tangenciální část kaustiky má stále dva kasy na vodorovné ose a podél této osy se nadále protahuje. Tento režim je zobrazen na Obrázku 3.8. V Kapitole 3.8a je zobrazena celá kritická křivka a kaustika, v Kapitole 3.8b je pak detail centrální části.



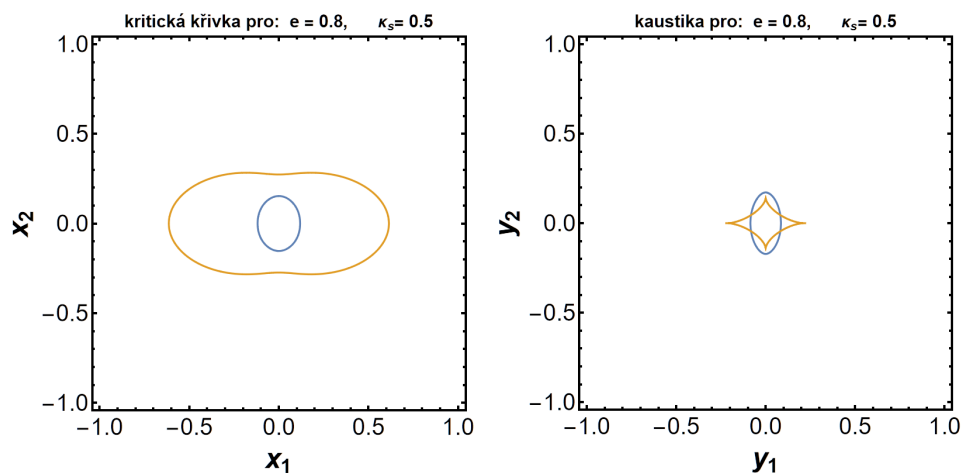
Obrázek 3.2 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.5$ a $\kappa_s = 0.5$, režim nízké excentricity. Oranžově zobrazeny tangenciální části, modře radiální části.



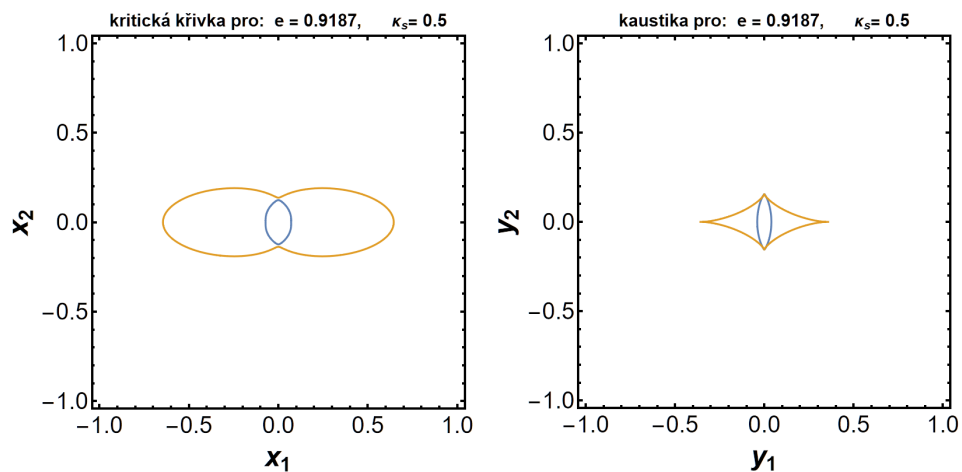
Obrázek 3.3 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.645$ a $\kappa_s = 0.5$, hranice cusp piercing. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



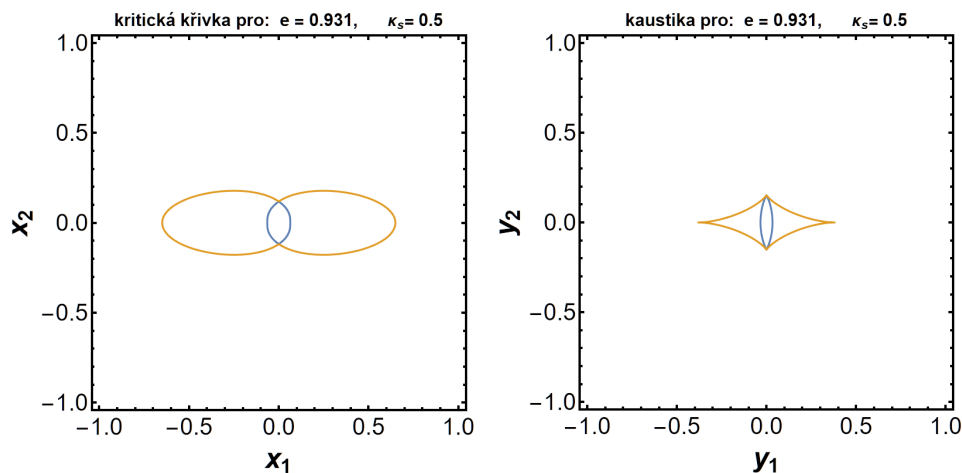
Obrázek 3.4 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.71303$ a $\kappa_s = 0.5$, hranice tangenciálního peanutu. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



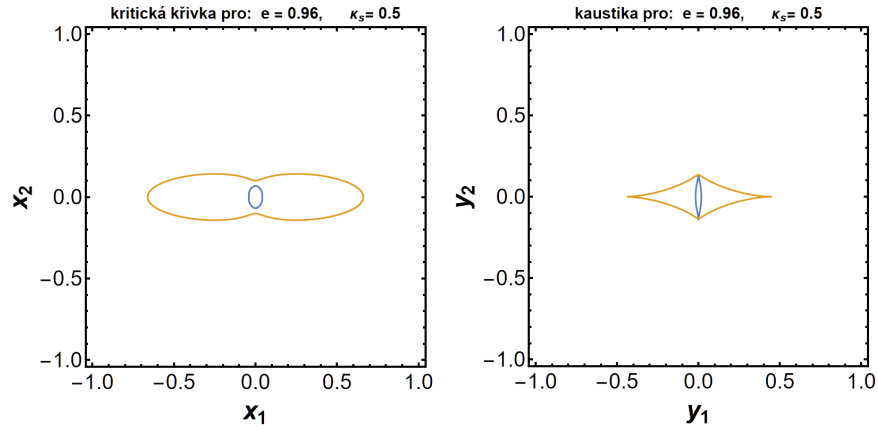
Obrázek 3.5 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.8$ a $\kappa_s = 0.5$, režim jedné nekonvexní kritické křivky. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



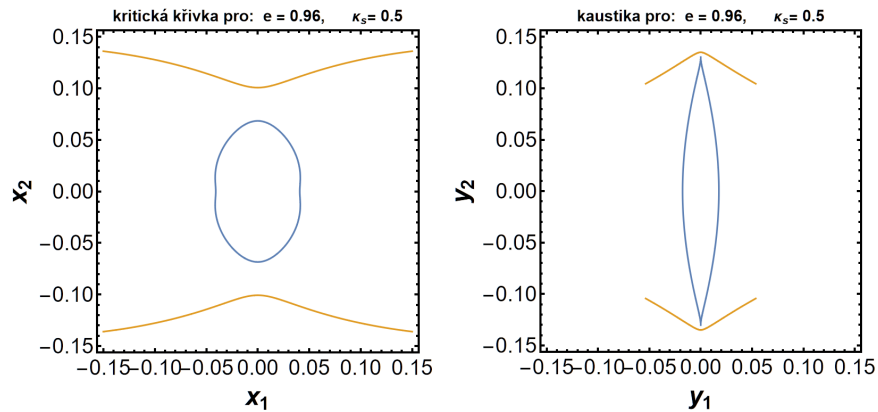
Obrázek 3.6 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.9187$ a $\kappa_s = 0.5$, hranice radiálního peanutu. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



Obrázek 3.7 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.931$ a $\kappa_s = 0.5$, hyperbolická umbilika. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



(a) Celkový tvar.



(b) Detail centrální části.

Obrázek 3.8 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $e = 0.96$ a $\kappa_s = 0.5$, režim vysoké excentricity. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.

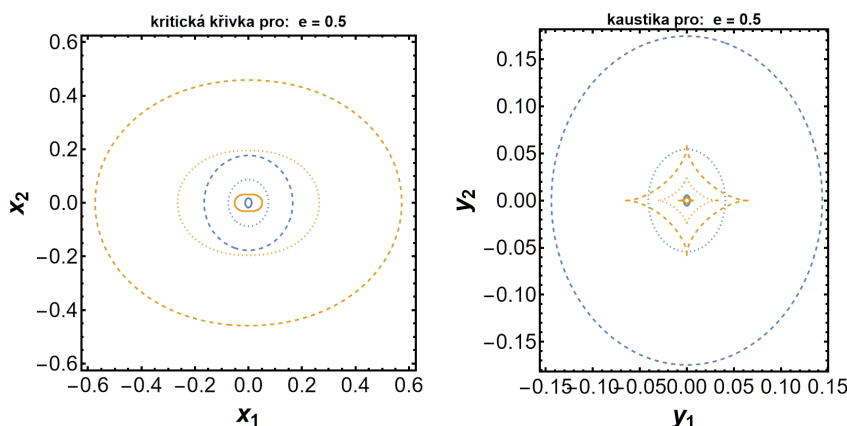
Kaustiku je užitečné studovat například kvůli informaci o počtu obrazů. Zdroj nacházející se v rovině zdroje vně kaustiky má pouze jeden obraz. Při každém překročení kaustiky se mění počet obrazů o sudý počet. V závislosti na poloze může mít i tři nebo pět obrazů podle toho, zda se nalézá uvnitř jedné části kaustiky a vně druhé části, či uvnitř obou částí kaustiky, radiální i tangenciální. Pro libovolnou kombinaci parametrů budou v rovině zdroje uzavřené oblasti s třemi obrazy a pěti obrazy.

V režimech nízké excentricity (Obrázek 3.2) a vysoké excentricity (Obrázek 3.8) je jedna část kaustiky zcela uzavřená v druhé. Vnitřní část kaustiky v těchto režimech ohraničuje oblast s pěti obrazy, zatímco oblast se třemi obrazy leží mezi kaustikami. Každý přechod přes kaustiku změní počet obrazů o dva. V ostatních výše popsaných režimech se radiální a tangenciální kaustika protínají ve čtyřech bodech, jak je zobrazeno např. v Obrázku 3.5. Zde se oblast odpovídající třem obrazům nalézá v částech ohraničených tangenciální kaustikou, které leží mimo radiální kaustiku, a v částech ohraničených radiální kaustikou ležících mimo tangenciální kaustiku. Oblast odpovídající pěti obrazům je v části ohraničené oběma kaustikami. Při přechodu přes body křížení kaustik se počet obrazů mění buďto o čtyři (přechod z oblasti pěti obrazů do oblasti jednoho obrazu), nebo o nula (přechod mezi dvěma oblastmi se třemi obrazy). Při přechodu přes zbytek kaustik se mění počet obrazů o dva. V hyperbolické umbilice (Obrázek 3.7) je v

části uzavřené radiální kaustikou oblast s pěti obrazy, v části uzavřené tangenciální kaustikou vně radiální pak oblast se třemi obrazy. Části kaustiky se dotýkají ve dvou bodech, při přechodu přes ně se opět počet obrazů mění o čtyři nebo o nula, na zbytku kaustiky o dva. Na hranici cusp piercingu (Obrázek 3.3) je oblast s pěti obrazy uzavřená tangenciální kaustikou, oblast se třemi uzavřená radiální kaustikou a leží vně tangenciální. Obě části kaustiky se dotýkají ve dvou bodech, podobně jako v umbilice při přechodu přes ně se mění počet obrazů o čtyři nebo o nula, na zbytku kaustiky o dva.

Z obrázků lze pozorovat, že se při změně excentricity a zachování konvergenčního parametru významně mění tvary kritických křivek a kaustik. Mění se i jejich velikosti (polohy průsečíků s osami a plochy jimi ohraničené), nicméně tato změna je méně výrazná.

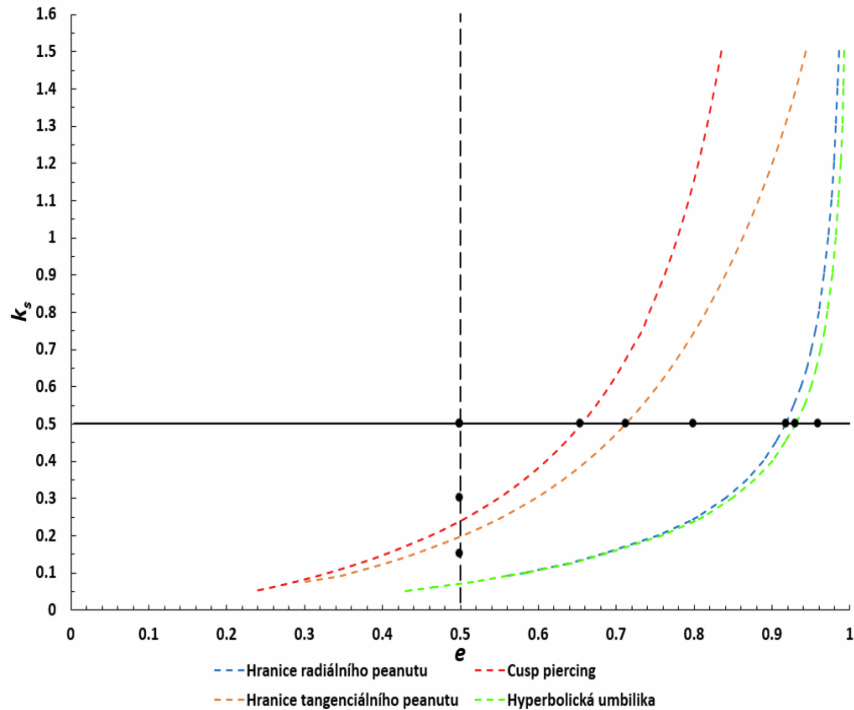
Pokud naopak zachováme konstantní excentricitu a měníme konvergenční parametr, mění se rovněž tvary kritické křivky a kaustiky, a můžeme sledovat jednotlivé režimy a hranice mezi nimi. Kromě toho však dochází k výrazné změně velikostí křivek. Ta je ilustrována na Obrázku 3.9, na němž jsou zobrazené kritické křivky (vlevo) a kaustiky (vpravo) pro konstantní hodnotu excentricity $e = 0.5$, ovšem různé hodnoty konvergenčního parametru κ_s .



Obrázek 3.9 Porovnání velikostí a tvarů kritických křivek (vlevo) a kaustik (vpravo) pro excentricitu $e = 0.5$ a tři různé hodnoty κ_s . Plnou čarou $\kappa_s = 0.15$, tečkovanou čarou pro $\kappa_s = 0.3$, přerušovanou čarou $\kappa_s = 0.5$. Kaustiky nejsou vyobrazeny ve stejném měřítku jako kritické křivky. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.

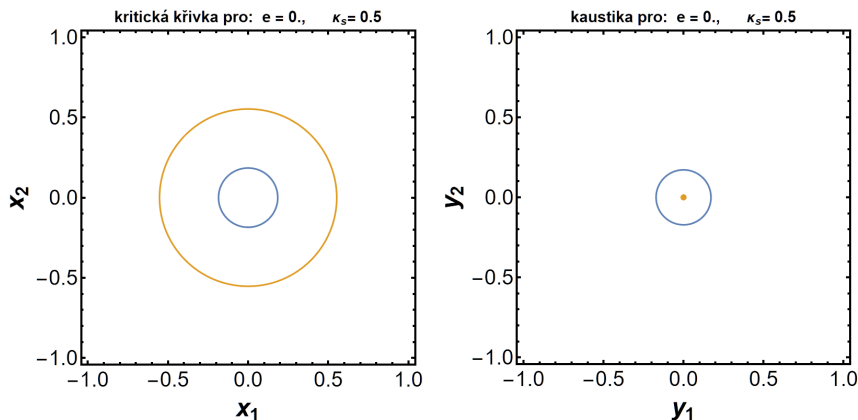
Velikosti a tvary kritické křivky a kaustiky se obecně mění při změně obou parametrů, při tom může docházet k přechodům mezi jednotlivými režimy. Hranice těchto režimů, jež byly popsány výše, jsou zobrazeny v grafu prostoru parametrů na Obrázku 3.10. Graf je vykreslen jako závislost hodnoty konvergenčního parametru, pro níž dochází ke změně režimu, na hodnotě excentricity. V grafu nejsou zobrazeny hodnoty κ_s menší než 0.05 a některé z hranic končí ještě na vyšších hodnotách. Toto omezení je dané přesností numerických metod, jimiž byly hranice hledány.

Kromě čtyř hranic režimů je v grafu černou vodorovnou úsečkou vyznačena trajektorie v prostoru parametrů e, κ_s , po níž jsme se pohybovali při popisu jednotlivých režimů v Obrázcích 3.2-3.8. Černá přerušovaná čára zase odpovídá trajektorii v prostoru parametrů při konstantní e , což odpovídá Obrázku 3.9. Černé tečky označují konkrétní případy z obrázků.



Obrázek 3.10 Hranice režimů v prostoru parametrů e a κ_s pro elipsoidální NFW model. Jednotlivě barevně vyznačené hranice jsou popsané v legendě pod grafem. Sedm černých teček na vodorovné černé čáře označuje kombinace parametrů odpovídající Obrázkům 3.2-3.8, tři černé tečky na svislé černé čáře poté kombinacím z Obrázku 3.9.

Speciálním případem je sférická limita elipsoidálního NFW modelu s nulovou excentricitou. Podobně jako v případě čočkování jediným hmotným bodem i zde je tangenciální kritická křivka kružnice okolo středu čočky a tangenciální kaustika má charakter jediného bodu ve středové poloze. Na rozdíl od bodové čočky zde však existuje i radiální kritická křivka a kaustika. Pokud se zdroj nachází vně kaustiky, má jeden obraz. Pokud se nachází uvnitř radiální kaustiky, ale mimo bodovou tangenciální kaustiku, má obrazy tři. V žádném případě nemá pět nebo více obrazů. Pokud se však zdroj nachází na tangenciální kaustice, zobrazí se na Einsteinův prstenec podél tangenciální kritické křivky.



Obrázek 3.11 Kritické křivky (vlevo) a kaustiky (vpravo) pro sférický NFW model s konvergenčním parametrem $\kappa_s = 0.5$. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.

3.2.2 Rozměry kritických křivek a kaustik

Při změně excentricity a konvergenčního parametru dochází obecně ke změně tvarů a velikostí kritických křivek a kaustik. Změny jejich rozměrů je možné ilustrovat sledováním jejich průsečíků s vodorovnou a svislou osou a plochy těmito křivkami uzavřené.

V Obrázku 3.12 jsou pro různé hodnoty κ_s zobrazeny velikosti kritických křivek v závislosti na excentricitě e , respektive zploštění $1 - \sqrt{1 - e^2}$. V prvním sloupci jsou zobrazeny kladné hodnoty souřadnic průsečíků kritických křivek s osami, plnými čarami s vodorovnou (dále pro zjednodušení používáme i zkrácené označení vodorovný rozměr) a dlouze přerušovanými se svislou (svislý rozměr). Zeleně jsou vyznačeny rozměry tangenciální části (tangenciální rozměr) a fialově radiální části (radiální rozměr). Dále jsou v těchto panelech vyneseny zeleně krátce přerušované čáry vyznačující souřadnice x_2 bodu na tangenciální kritické křivce s maximální souřadnicí x_2 (svislé maximum). Pokud má tangenciální kritická křivka konvexní tvar, je tato čára shodná s dlouze přerušovanou zelenou čarou vynášející souřadnici; odlišná je v případě, že má tangenciální kritická křivka nekonvexní tvar peanutu. V bodě dotyku dlouze přerušovaných čar obou barev dochází k hyperbolické umbilice, tedy dotyku radiální a tangenciální části na svislé ose. V druhém sloupci jsou vyneseny velikosti ploch uzavřených tangenciální (zelená čára), respektive radiální (fialová čára) kritickou křivkou (dále užíváme i označení tangenciální plocha a radiální plocha).

Radiální vodorovný rozměr se zde při růstu zploštění od nuly postupně zmenšuje a blíží nule, které dosáhne až v limitě zploštění rovného jedné. Radiální svislý rozměr se pro větší hodnoty κ_s rovněž po celou dobu zmenšuje, nejprve mírně až do umbiliky, následně strměji. Pro dostatečně velké κ_s je pak svislý rozměr před umbilikou menší, než vodorovný, tedy naopak, než je tomu u menších hodnot κ_s . Pro malé κ_s se radiální svislý rozměr až do umbiliky mírně zvětšuje, a po ní až strměji klesá. Nuly dosáhne v limitě zploštění rovného jedné, stejně jako vodorovný radiální rozměr.

Tangenciální svislý rozměr se před umbilikou při růstu zploštění od nuly zmenšuje. Za umbilikou se pro malé κ_s nejprve mírně zvětšuje do lokálního maxima, a následně se postupně zmenšuje a blíží nule, které dosáhne až v limitě zploštění rovného jedné. Pro větší κ_s se za umbilikou rovnou zmenšuje. Průběh tangenciálního vodorovného rozměru rovněž závisí na velikosti κ_s . Pro nižší hodnoty pro celý interval zploštění rozměr roste do konečné hodnoty. Pro vyšší hodnoty nejprve roste do maxima, a následně klesá do konečné kladné hodnoty. Pro dostatečně vysoké hodnoty pak pro celý interval zploštění rozměr klesá do konečné kladné hodnoty. Této hodnotě odpovídá délka hlavní poloosy elipsy s konvergencí $\kappa = 1/2$.

Radiální plocha u NFW modelu pro celý interval zploštění klesá až do nuly (v limitě zploštění rovné jedné), kdy jsou oba radiální rozměry nulové. Tangenciální plocha pro větší hodnoty κ_s rovněž pro celý interval zploštění klesá až do nuly. Pro malé κ_s však nejprve klesá, poté stoupá, a následně opět klesá až do nuly. Nulová je plocha v limitě zploštění rovné jedné. V této limitě je svislý tangenciální rozměr nulový a vodorovný konečný kladný. Tangenciální kritická křivka se tedy nesmrskne do bodu jako radiální, nýbrž do úsečky.

V Obrázku 3.13 jsou pro různé hodnoty κ_s zobrazeny velikosti kaustik včetně ploch oblastí s více obrazy v závislosti na excentricitě e , respektive zploštění. V prvním sloupci jsou zobrazeny rozměry kaustik, v druhém sloupci pak plochy

kaustik. Značení čar je stejné jako v Obrázku 3.12. Navíc je v druhém sloupci zobrazena šedou čarou celková plocha uzavřená kaustikou. Ve třetím sloupci jsou vyneseny velikosti ploch oblastí více obrazů (šedá čára). Pokud se zdroj nachází v oblasti tří obrazů (velikost její plochy znázorněna modrou čarou), je zobrazován do tří obrazů, pokud se nachází v oblasti pěti obrazů (velikost plochy růžovou čarou), je zobrazován do pěti obrazů. Šedá čára tedy zobrazuje součet ploch tří a pěti obrazů. Pro vysoké a nízké hodnoty e a κ_s je oblast s pěti obrazy natolik malá, že ji lze zanedbat a šedá čára téměř splývá s modrou. Pro plochy oblastí se třemi a pěti, respektive více obrazy budeme dále pro zjednodušení používat i označení plocha tří obrazů a plocha pěti obrazů, respektive plocha více obrazů (nejedná se o velikost těchto obrazů).

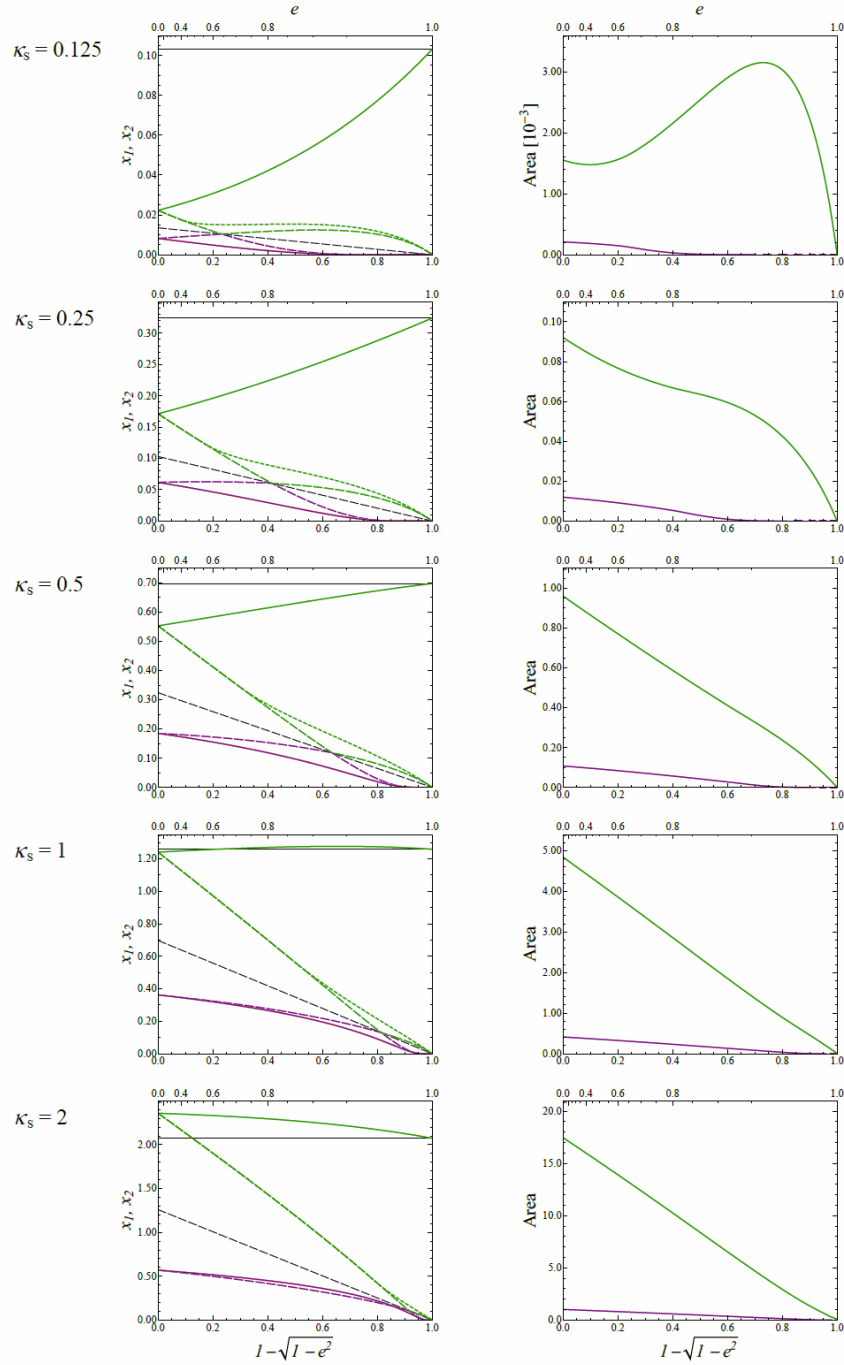
V průsečíku plných čar v prvním sloupci Obrázku 3.13 dochází ke cusp piercingu, tedy dotyku částí kaustiky na vodorovné ose. Cusp piercing a hyperbolickou umbiliku lze také nalézt v tomto obrázku v druhém sloupci, kde se jedná respektive o levý a pravý bod, ve kterém šedá čára navazuje na čáry značící plochy uzavřené jednotlivými částmi kaustiky.

Vodorovný radiální rozměr kaustiky se zmenšuje z konečné kladné hodnoty k nule, které dosáhne až v limitě jednotkového zploštění. Svislý radiální rozměr kaustiky se pro velké hodnoty κ_s rovněž zmenšuje až k nule. Pro malé κ_s se však nejprve zvětšuje, a až poté zmenšuje. V umbilice rovněž dochází k protnutí s tangenciálním svislým rozměrem kaustiky. Ten se nejprve zvětšuje z nulové hodnoty až do maxima, a následně zmenšuje do nuly (v limitě jednotkového zploštění). Zda toto maximum leží před, na, či za umbilikou, závisí na κ_s . Vodorovný tangenciální rozměr kaustiky roste v celém intervalu zploštění z nulové hodnoty do konečné kladné hodnoty.

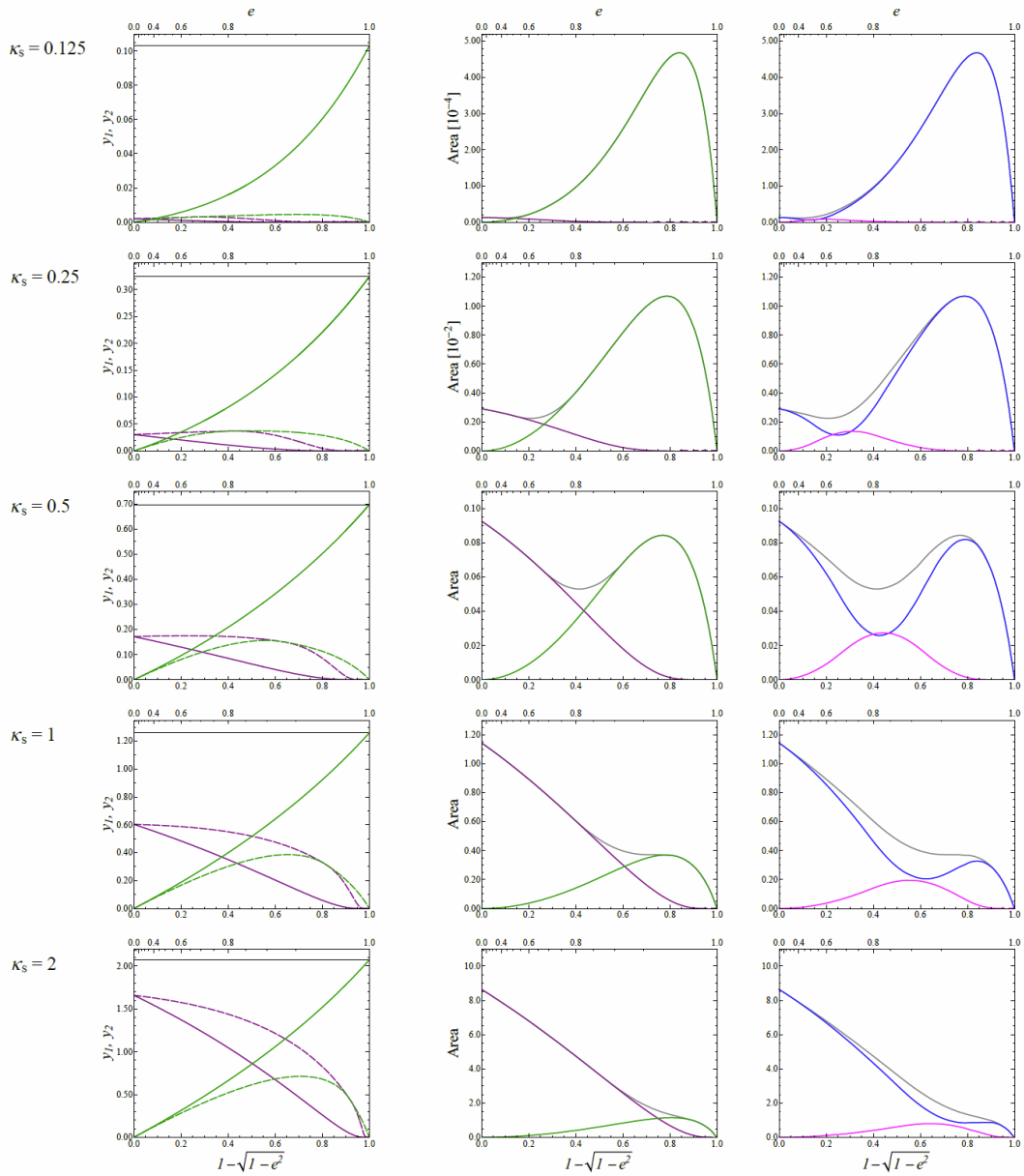
Radiální plocha kaustiky pro nulové zploštění má konečnou kladnou velikost, která pro rostoucí zploštění postupně klesá k nule v limitě jednotkového zploštění. Tangenciální plocha kaustiky nejprve roste z nulové velikosti až do maxima, a následně prudce klesá do nuly v limitě jednotkového zploštění.

Plocha tří obrazů začíná na stejné hodnotě jako radiální plocha kaustiky a plocha pěti obrazů na stejné, jako tangenciální. Z počátku se plocha tří obrazů zmenšuje a plocha pěti obrazů zvětšuje. Pro nízké κ_s je v krátkém intervalu plocha pěti obrazů větší, než plocha tří obrazů. Po dosažení maxima se plocha pěti obrazů zmenšuje k nule v limitě jednotkového zploštění. Plocha tří obrazů se po dosažení lokálního minima zvětšuje až do maxima (pro nízké κ_s jde o globální maximum, pro vysoké κ_s pouze o lokální), a následně klesá k nule v limitě jednotkového zploštění.

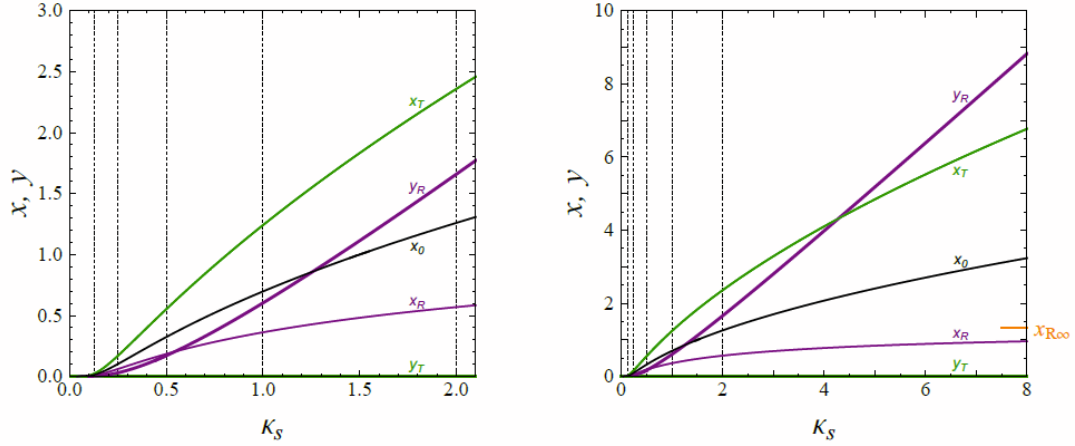
Obrázek 3.14 zobrazuje velikost poloměrů obou částí kritických křivek a kaustik v závislosti na κ_s pro limitní případ s nulovou excentricitou, kdy jsou kritické křivky a radiální kaustika kružnicemi. V limitě $\kappa_s \rightarrow \infty$ se poloměr radiální kritické křivky asymptoticky blíží poloměru tzv. radiální hraniční křivky, který má hodnotu $x_{R\infty} \approx 1.32$.



Obrázek 3.12 Rozměry kritických křivek v závislosti na zploštění, respektive excentricitě pro různé hodnoty κ_s . V levém sloupci jsou vyznačeny jejich vodorovné (plné čáry) a svislé (dlouze přerušované čáry) rozměry, tedy kladné hodnoty souřadnic průsečíků křivek s vodorovnou osou a svislou osou. Zelenou barvou jsou vyznačeny tangenciální rozměry, fialovou barvou radiální rozměry. Zelená krátce přerušovaná čára vyznačuje svislé maximum, tedy hodnotu souřadnice x_2 bodu na tangenciální kritické křivce s maximální souřadnicí x_2 . Černá přerušovaná čára vyznačuje délku vedlejší poloosy elipsy s jednotkovou konvergencí, na které dochází k hyperbolické umbilice, a černá plná čára délku hlavní poloosy elipsy s konvergencí $\kappa = 1/2$, ke které konverguje vodorovný tangenciální rozměr v limitě jednotkového zploštění. V pravém sloupci jsou vyznačeny velikosti ploch uzavřených tangenciální (zelená barva) a radiální (fialová barva) částí kritické křivky. Obrázek převzat z Heyrovský a Karamazov (2024), Obrázek 12.



Obrázek 3.13 Rozměry kaustik v závislosti na zploštění, respektive excentricitě pro různé hodnoty κ_s . V levém sloupci jsou vyznačeny vodorovné (plné čáry) a svislé (přerušované čáry) rozměry kaustiky, tedy kladné hodnoty souřadnic průsečíků kaustik s vodorovnou osou a svislou osou. Zelenou barvou jsou vyznačeny tangenciální rozměry kaustiky, fialovou barvou pak radiální rozměry kaustiky. Černá plná čára značí délku hlavní poloosy elipsy s konvergencí $\kappa = 1/2$, ke které konverguje i vodorovný tangenciální rozměr kaustiky v limitě jednotkového zploštění. V prostředním sloupci jsou vyznačeny velikosti ploch uzavřených tangenciální (zelená barva) a radiální (fialová barva) částí kaustiky. Šedá čára vyznačuje celkovou plochu uzavřenou kaustikou a je totožná se zelenou či fialovou v případech, kdy je jedna část kaustiky zcela uzavřená uvnitř druhé. V pravém sloupci jsou vyznačeny velikosti ploch tří obrazů (modrá barva) a pěti obrazů (růžová barva). Šedá čára opět vyznačuje celkovou plochu uzavřenou kaustikou. Obrázek převzat z Heyrovský a Karamazov (2024), Obrázek 14



Obrázek 3.14 Poloměry kritických křivek (tangenciální x_T a radiální x_R) a kaustik (tangenciální y_T a radiální y_R) pro sférický NFW model jako funkce konvergenčního parametru: vlevo pro κ_s od 0 do 2.1, vpravo od 0 do 8. Černá čára vyznačuje poloměr x_0 kruhu s jednotkovou konvergencí. V pravém obrázku je u pravého kraje oranžově vyznačen poloměr hraniční křivky. Svislé přerušované čáry vyznačují hodnoty κ_s , pro které jsou vykreslovány velikosti kritických křivek a kaustik v Obrázcích 3.12 a 3.13. Obrázek převzat z Heyrovský a Karamazov (2024), Obrázek 11

3.2.3 Kontury částí jakobiánu

Pro zkoumání změn kritických křivek NFW modelu v závislosti na konvergenčním parametru při konstantní excentricitě navrhli Heyrovský a Karamazov (2024) novou metodu založenou na analýze kontur tangenciální a radiální části jakobiánu, tedy výrazu v druhé, resp. první závorce předposledního výrazu v rovnici 3.14. Tyto kontury odpovídají příslušným kritickým křivkám s různými hodnotami konvergenčního parametru, jak je vidět na Obrázku 3.15, v němž jsou současně vykresleny kritické křivky se stejnou hodnotou $e = 0.9$, avšak rozdílnými hodnotami κ_s (v horním panelu tangenciální, ve spodním radiální). Lze tak dobře pozorovat, jak se v závislosti na κ_s mění tvar kritické křivky, podle průsečíků s inflexní křivkou (vyznačená tyrkysově) lze sledovat počet a polohu jejích inflexních bodů, podle průsečíků s kaspovou křivkou (vyznačená červeně) počet a polohu bodů odpovídajícím kaspům na kaustice.

V rozsahu parametrů ilustrovaném na Obrázku 3.10, do nějž spadá i situace vyobrazená na Obrázku 3.15, má tangenciální kritická křivka buďto žádný nebo čtyři inflexní body. Inflexní body se na ní objevují při přechodu přes hranici tangenciálního peanutu (na Obrázku 3.15 této hranici odpovídá zelená přerušovaná křivka odpovídající $\kappa_s = 1.195$), a jsou na křivce přítomny po pro všechny režimy, v nichž má nekonvexní tvar (na obrázku kontury s větším κ_s), a to s výjimkou hyperbolické umbiliky (na obrázku černá přerušovaná křivka odpovídající $\kappa_s = 0.398$), během níž na křivce inflexní body nejsou.

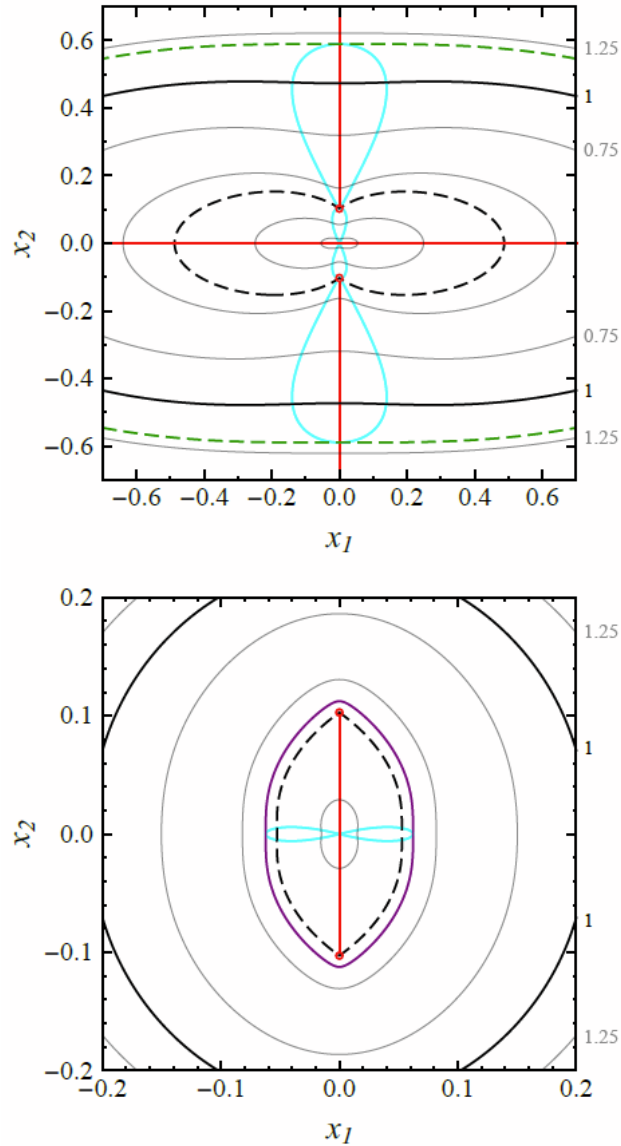
Radiální kritická křivka má v tomto rozsahu parametrů rovněž žádný nebo čtyři inflexní body. Inflexní body se na ní objevují při přechodu přes hranici radiálního peanutu (na Obrázku 3.15 této hranici odpovídá fialová křivka odpovídající $\kappa_s = 0.432$), a jsou na křivce přítomny po pro všechny režimy, v nichž má nekonvexní tvar (na obrázku kontury s větším κ_s), a to včetně hyperbolické umbiliky.

Inflexní body leží na obou částech kritické křivky vždy mimo osy.

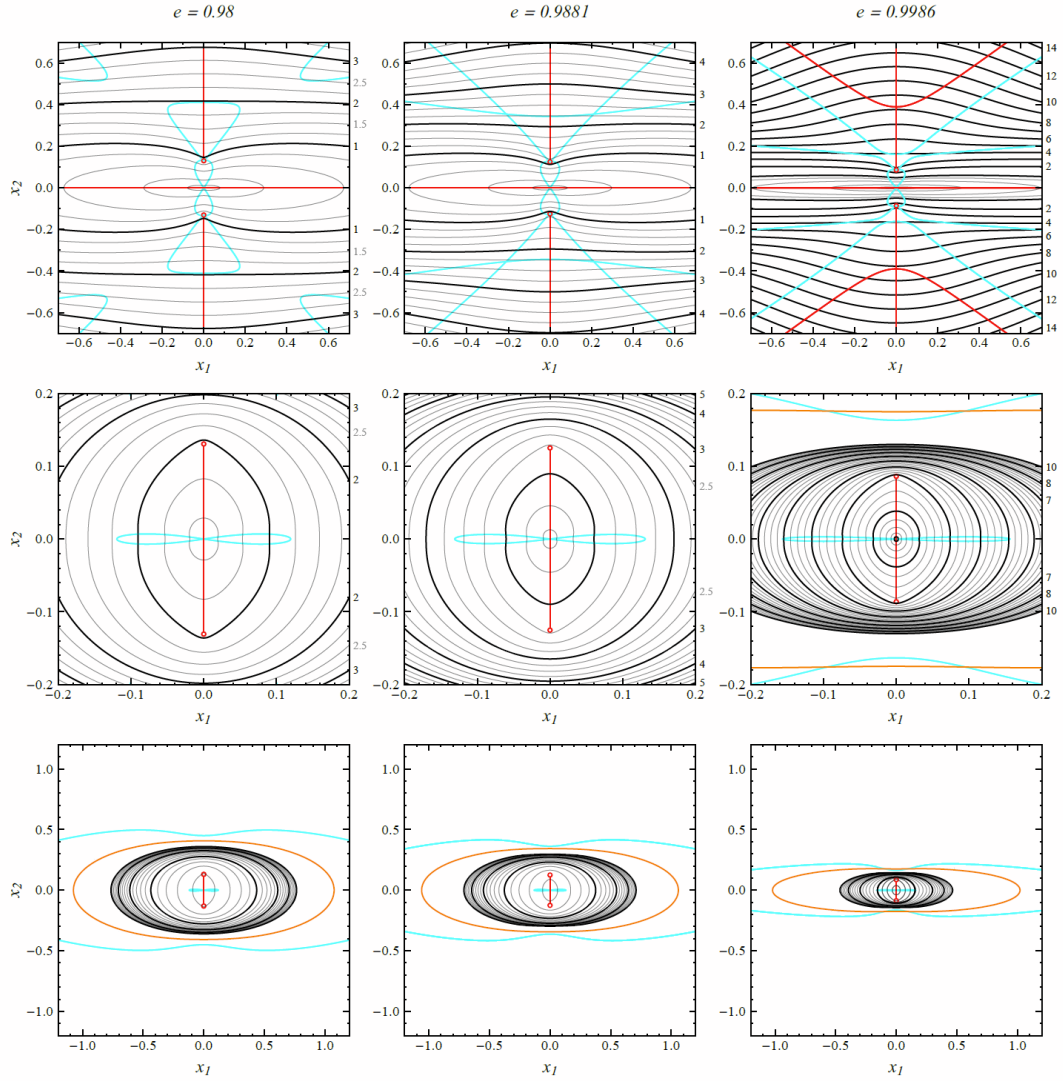
V daném rozsahu parametrů jsou na tangenciální kritické křivce dva nebo nebo čtyři body odpovídající kaspům. Leží vždy na osách. Body ležící na vodorovné ose odpovídají kaspům pro všechny hodnoty konvergenčního parametru. Pro body ležící na svislé ose je hranicí hyperbolická umbilika. Při přechodu přes ni se objevují dva kasy tangenciální kaustiky. Pro danou excentricitu odpovídají kaspům body kritických křivek odpovídajících většímu κ_s , než jaké odpovídá umbilice.

Na radiální kritické křivce neleží buďto žádný bod odpovídající kaspům, nebo dva, přičemž oba se poté nacházejí na svislé ose. Hranicí, při níž se objevují na kaustice dva kasy, je hyperbolická umbilika. Pro danou excentricitu odpovídají kaspům body kritických křivek odpovídajících menšímu κ_s , než jaké odpovídá umbilice.

Pro extrémní hodnoty obou parametrů (mimo rozsah ilustrovaný na Obrázku 3.10) se objevují nové, složitější režimy (Heyrovský a Karamazov (2024)). U tangenciální kaustiky může přibýt počet kaspů, přičemž tyto nové kasy již neleží na osách. Tangenciální kritická křivka se může prohýbat na více místech, a může tedy mít více inflexních bodů. Nový průhyb a další inflexní body se objevují i na radiální kritické křivce. Pro radiální kritickou křivku byla navíc touto analýzou objevena radiální hraniční křivka. Jedná se o limitu kontur pro $\kappa_s \rightarrow \infty$. Tyto extrémní případy jsou znázorněny na Obrázku 3.16. Ne všechny z těchto režimů lze očekávat u reálných systémů, metoda analýzy pomocí kontur částí jakobiánu však umožňuje nalezení i těchto nestandardních a neočekávaných případů.



Obrázek 3.15 Kontury tangenciální (horní panel) a radiální (dolní panel) části jakobiánu pro hodnotu excentricity $e = 0.9$. Kontury jsou vykresleny od středu pro hodnoty κ_s od 0.25 do 1.25, v horním panelu je navíc nejmenší $\kappa_s = 0.125$. Většina z nich je zobrazena šedou plnou čarou. Černou plnou čarou je zobrazena kontura $\kappa_s = 1$, černou přerušovanou čarou pak kontura $\kappa_s \approx 0.398$, v níž dochází k hyperbolické umbilice. V horní části je zelenou přerušovanou čarou zobrazena kontura $\kappa_s \approx 1.195$ odpovídající hranici tangenciálního peanutu, v dolním panelu fialovou plnou čarou kontura $\kappa_s \approx 0.432$ odpovídající hranici radiálního peanutu. Tyrkysově je vyznačená inflexní křivka, tvořená inflexními body všech kontur. Červeně je vyznačená kaspová křivka, tvořená obrazy kaspů na všech konturách. Obrázek převzat z Heyrovský a Karamazov (2024), Obrázek C.1.



Obrázek 3.16 Kontury tangenciální (horní řada) a radiální (střední řada detail a dolní řada celkový pohled) části jakobiánu pro tři různé vysoké hodnoty excentricity. Ve druhé a třetí řadě je oranžově vyznačena radiální hraniční křivka. Ostatní značení stejné jako na Obrázku 3.15 Obrázek převzat z Heyrovský a Karamazov (2024), Obrázek C.2.

3.3 Omezený NFW model

Pro účely přesnějšího popisu skutečných čoček může být vhodné využít modifikovanou verzi NFW modelu, tzv. omezený NFW model (TNFW). Jeho definice je přejata z Heyrovský (2023).

Integrací rozložení hmoty v elipsoidálním, respektive sférickém NFW modelu přes objem lze spočítat celkovou hmotu uzavřenou v daném objemu. V případě integrace přes celý prostor však celková hmota těchto modelů diverguje do nekonečna, což nepředstavuje fyzikálně vhodný výsledek. Z tohoto důvodu lze zavést verze NFW modelů omezené na kouli nebo elipsoid dostatečné velikosti, jejichž celková hmota již není nekonečná.

Pro omezený elipsoidální NFW model je rozložení hmoty dané vztahem 3.1, ale pouze pro \hat{a} menší než \hat{a}_T ; pro větší je $\rho_{TNFW}(\hat{a}) = 0$. Zavedeme $c_T = \hat{a}_T/\hat{a}_s$. Poté lze vyjádřit konvergenci jako:

$$\kappa_{TENFW}(a) = \begin{cases} \frac{2\kappa_s}{1-a^2} \left(\mathcal{F}_T(a) - \frac{\sqrt{c_T^2-a^2}}{c_T+1} \right), & \text{je-li } a < c_T, \\ 0, & \text{je-li } a \geq c_T. \end{cases} \quad (3.15)$$

kde a je poloosa daná vztahem 3.4 a funkce $\mathcal{F}_T(a)$ má tvar:

$$\mathcal{F}_T(a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(1-a^2)(c_T^2-a^2)}}{a^2+c_T}}{\sqrt{1-a^2}}, & \text{je-li } a < 1, \\ \sqrt{\frac{c_T-1}{c_T+1}}, & \text{je-li } a = 1, \\ \frac{\operatorname{arctan} \frac{\sqrt{(a^2-1)(c_T^2-a^2)}}{a^2+c_T}}{\sqrt{a^2-1}}, & \text{je-li } 1 < a \leq c_T. \end{cases} \quad (3.16)$$

V Heyrovský (2023) lze dále nalézt analyticky spočtené složky úhlu odklonu paprsků a rozbor vybraných vlastností modelu.

V rámci této práce není TNFW model dále studován. Uveden je zde jakožto vhodný protějšek izotermálnímu modelu z Kapitoly 5.

4 Nesingulární izotermální elipsoid

V této kapitole budeme ve stylu předchozí kapitoly studovat chování a vlastnosti nesingulárního izotermálního elipsoidu (NIE) v závislosti na hodnotě dvou nezávislých parametrů, poměru os f a poloměru jádra b_c eliminujícího centrální singularitu hustoty. Speciálním případem NIE modelu je nesingulární izotermální sféra (NIS), jednodušší model s poměrem os rovným jedné závislý pouze na poloměru jádra.

Vynulováním poloměru jádra uvedené nesingulární modely přecházejí v jednodušší modely singulární - singulární izotermální elipsoid (SIE) a singulární izotermální sféru (SIS). Centrální singularita hustoty i konvergence těchto modelů je silnější než u NFW modelů, jsou proto v centrální oblasti méně vhodnou aproximací rozložení hmoty.

U uvedené modelů NIE, NIS, SIE a SIS v nekonečnu diverguje jejich celková hmotnost podobně jako u NFW modelu. Tento problém je odstraněn u omezeného NIE modelu, který je popsán v Kapitole 5.

Sférické izotermální modely patří mezi první zkoumané nebodové modely gravitačních čoček (Gott; Gunn, 1974; Turner; Ostriker; Gott, 1984). Eliptické izotermální modely jako první představili Kassiola a Kovner (1993). Definice izotermálních modelů a výrazy pro jejich plošnou hustotu, konvergenci, úhel odklonu a shear byly v této práci převzaty z článku Kormann, Schneider a Bartelmann (1994), v němž byly tyto modely detailněji popsány. Ve výrazech pro plošnou hustotu jsou využity délkové souřadnice v rovinách čočky a zdroje $\boldsymbol{\xi} = D_l \boldsymbol{\theta}$ a $\boldsymbol{\eta} = D_s \boldsymbol{\beta}$. Poté však budeme pracovat s jejich přeškálovanými verzemi \boldsymbol{x} v rovině čočky a \boldsymbol{y} v rovině zdroje, pro něž platí transformační vztahy:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta_0},$$

kde ξ_0 a η_0 jsou délkové konstanty definované jako:

$$\xi_0 = 4\pi \frac{v^2 D_l D_{ls}}{c^2 D_s}, \quad \eta_0 = \frac{D_s}{D_l} \xi_0,$$

kde c je rychlost světla a v představuje konstantní disperzi rychlosti modelu. Souřadnice \boldsymbol{x} a \boldsymbol{y} tedy zároveň odpovídají úhlům θ a β vyjádřeným v jednotkách úhlu ξ_0/D_l .

Čočková rovnice má v těchto souřadnicích tvar

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha}_0(\boldsymbol{x}). \quad (4.1)$$

obdobný tvar jako v případě NFW modelu 3.7. V této rovnici odpovídá úhel $\boldsymbol{\alpha}_0$ redukovanému úhlu odklonu, vyjádřenému v jednotkách úhlu ξ_0/D_l :

$$\boldsymbol{\alpha}_0(\boldsymbol{x}) = \frac{D_l D_{ls}}{D_s \xi_0} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.2)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je úhel odklonu.

4.1 Definice NIE modelu

NIE model je definovaný plošnou hustotou:

$$\Sigma_{NIE}(\zeta) = \frac{v^2}{2G} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\zeta^2 + \zeta_c^2}} = \frac{\Sigma_{0NIE}}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\zeta_c^2}}}, \quad (4.3)$$

kde centrální plošná hustota je rovna:

$$\Sigma_{0NIE} = \frac{\sqrt{f}v^2}{2G\zeta_c}, \quad (4.4)$$

a $\zeta = \sqrt{\xi_2^2 + f^2\xi_1^2}$, přičemž f představuje poměr hlavní a vedlejší osy průmětu elipsoidu¹. Parametr ζ_c představuje parametr modelu délkový poloměr jádra. Při studiu NIE budeme používat bezrozměrné verze:

$$b = \frac{\zeta}{\xi_0} = \sqrt{x_2^2 + f^2x_1^2}, \quad b_c = \frac{\zeta_c}{\xi_0}, \quad (4.5)$$

kde b je vedlejší poloosa elipsy procházející bodem x a b_c je poloměr jádra. Model je tak parametrizovaný hodnotami f a b_c .

Konvergence má tvar:

$$\kappa_{NIE}(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{b^2 + b_c^2}} = \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{x_2^2 + f^2x_1^2 + b_c^2}}. \quad (4.6)$$

Pro vyjádření úhlu odklonu a shearu zavádějí Kormann, Schneider a Bartelmann (1994) pět pomocných funkcí:

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{f}}{f^4(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2f^2(1 - f^2)b_c^2(x_2^2 - x_1^2) + (1 - f^2)^2b_c^4} \cdot \left[\frac{\kappa_{NIE}(\mathbf{x})}{\sqrt{f}}(x_2^2 + f^4x_1^2) - \frac{1 + f^2}{2}\sqrt{b^2 + b_c^2} + fb_c \right], \quad (4.7)$$

$$Q_{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{(\sqrt{1 - f^2}\sqrt{b^2 + b_c^2} \pm x_2)^2 + f^4x_1^2}{(f(x_1^2 + x_2^2) \pm \sqrt{1 - f^2}b_cx_2)^2 + (1 - f^2)b_c^2x_1^2}, \quad (4.8)$$

$$R(\mathbf{x}) = x_2^2 + f^4x_1^2 - (1 - f^2)(b^2 + b_c^2) - 2if^2\sqrt{1 - f^2}\sqrt{b^2 + b_c^2}x_1, \quad (4.9)$$

$$S(\mathbf{x}) = f^2(x_1^2 + x_2^2) - (1 - f^2)b_c^2 - 2if\sqrt{1 - f^2}b_cx_1, \quad (4.10)$$

v nichž i představuje imaginární jednotku.

Za pomocí těchto funkcí lze zapsat složky přeškálovaného úhlu odklonu $\alpha_0 =$

¹Oproti článku Kormann, Schneider a Bartelmann (1994) jsme v tomto textu zaměnili souřadnice x_1 a x_2 , respektive y_1 a y_2 , aby měl elipsoid stejnou orientaci hlavní osy, jako v případě elipsoidálního NFW modelu.

α_{NIE} a shearu:

$$\alpha_{1NIE}(\mathbf{x}) = -\frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{1-f^2}}(\arg R(\mathbf{x}) - \arg S(\mathbf{x})), \quad (4.11)$$

$$\alpha_{2NIE}(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{f}}{4\sqrt{1-f^2}} \ln \frac{Q_+(\mathbf{x})}{Q_-(\mathbf{x})}, \quad (4.12)$$

$$\gamma_{1NIE}(\mathbf{x}) = (f^2(x_2^2 - x_1^2) - (1-f^2)b_c^2)P(\mathbf{x}), \quad (4.13)$$

$$\gamma_{2NIE}(\mathbf{x}) = 2f^2x_1x_2P(\mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Velikost shearu je dána obecným vztahem:

$$\gamma_{NIE}(\mathbf{x}) = \sqrt{\gamma_{1NIE}(\mathbf{x})^2 + \gamma_{2NIE}(\mathbf{x})^2}. \quad (4.15)$$

Čočkovou rovnicí lze zapsat:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_{NIE}(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

a její jakobián má tvar:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J}_{NIE}(\mathbf{x}) &= |1 - \kappa_{NIE}(\mathbf{x})|^2 - \gamma_{NIE}(\mathbf{x})^2 \\ &= (1 - \kappa_{NIE}(\mathbf{x}) + \gamma_{NIE}(\mathbf{x}))(1 - \kappa_{NIE}(\mathbf{x}) - \gamma_{NIE}(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pro zkoumání některých vlastností NIE modelu je vhodné přepsat vztahy tak, aby konvergence, úhel odklonu a shear byly vyjádřeny v souřadnicích v jednotkách poloměru jádra b_c . Konvergence má poté následující podobu:

$$\kappa_{NIE}(\mathbf{x}') = \frac{\sqrt{f}}{2b_c\sqrt{x_2'^2 + f^2x_1'^2 + 1}}. \quad (4.18)$$

Souřadnice \mathbf{x}' , respektive b' jsou škálované v jednotkách b_c . Platí tedy $\mathbf{x} = b_c\mathbf{x}'$ a $b = b_cb'$. Pomocné funkce přepíšeme do podoby:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}') &= \frac{\sqrt{f}}{b_c^3(f^4(x_1'^2 + x_2'^2)^2 - 2f^2(1-f^2)(x_2'^2 - x_1'^2) + (1-f^2)^2)} \\ &\quad \cdot \left(\frac{-f^2x_1'^2 - 1 - f^2 - f^2x_2'^2}{2\sqrt{x_2'^2 + f^2x_1'^2 + 1}} + f \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$Q_{\pm}(\mathbf{x}') = \frac{(\sqrt{1-f^2}\sqrt{b'^2+1} \pm x_2')^2 + f^4x_1'^2}{b_c(f(x_1'^2 + x_2'^2) \pm \sqrt{1-f^2}x_2')^2 + (1-f^2)x_1'^2}, \quad (4.20)$$

$$R(\mathbf{x}') = b_c^2(x_2'^2 + f^4x_1'^2 - (1-f^2)(b'^2 + 1) - 2if^2\sqrt{1-f^2}\sqrt{b'^2+1}x_1'), \quad (4.21)$$

$$S(\mathbf{x}') = b_c^2(f^2(x_1'^2 + x_2'^2) - (1-f^2) - 2if\sqrt{1-f^2}x_1'), \quad (4.22)$$

Složky nového přeškálovaného úhlu odklonu a shearu lze nyní zapsat jakožto:

$$\alpha'_{1NIE}(\mathbf{x}') = -\frac{1}{b_c} \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{1-f^2}}(\arg R(\mathbf{x}') - \arg S(\mathbf{x}')), \quad (4.23)$$

$$\alpha'_{2NIE}(\mathbf{x}') = \frac{1}{b_c} \frac{\sqrt{f}}{4\sqrt{1-f^2}} \ln \frac{Q_+(\mathbf{x}')}{Q_-(\mathbf{x}')}, \quad (4.24)$$

$$\gamma'_{1NIE}(\mathbf{x}') = b_c^2(f^2(x_2'^2 - x_1'^2) - (1-f^2))P(\mathbf{x}'), \quad (4.25)$$

$$\gamma'_{2NIE}(\mathbf{x}') = b_c^2 2f^2x_1'x_2'P(\mathbf{x}'). \quad (4.26)$$

Velikost shearu je dána vztahem:

$$\gamma_{NIE}(\mathbf{x}') = \sqrt{\gamma_{1NIE}(\mathbf{x}')^2 + \gamma_{2NIE}(\mathbf{x}')^2}. \quad (4.27)$$

Čočkovou rovnicí lze zapsat jako:

$$\mathbf{y}'(\mathbf{x}') = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\alpha}'_{NIE}(\mathbf{x}'), \quad (4.28)$$

a její jakobián má tvar:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J}_{NIE}(\mathbf{x}') &= |1 - \kappa_{NIE}(\mathbf{x}')|^2 - \gamma_{NIE}(\mathbf{x}')^2 \\ &= (1 - \kappa_{NIE}(\mathbf{x}') + \gamma_{NIE}(\mathbf{x}'))(1 - \kappa_{NIE}(\mathbf{x}') - \gamma_{NIE}(\mathbf{x}')). \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.2 Vlastnosti NIE modelu

Úhel odklonu, konvergence, shear a jakobián jsou pro NIE funkce závislé na souřadnicích \boldsymbol{x} a dvou parametrech - poměru os f a poloměru jádra b_c . Nyní vyšetříme vybrané vlastnosti NIE modelu v závislosti na hodnotě těchto dvou parametrů, obdobně jako v Kapitole 3.2 pro elipsoidální NFW model. K numerickému řešení rovnic a grafické simulaci byl i zde využit software Wolfram Mathematica (verze 13.2).

Podobně jako v případě NFW byly zkoumány tvary kritických křivek a kaustik, jednotlivé režimy čočkování a hranice mezi nimi. Následně byly zkoumány jejich rozměry a počet obrazů. Na závěr byly studovány kontury částí jakobiánu s identifikací počtu inflexních bodů na kritických křivkách a kaspů na kaustikách.

Hodnota poměru os f se může pohybovat v intervalu $(0;1]$. Poloměr jádra b_c může nabývat libovolné nezáporné hodnoty, má ho ovšem smysl diskutovat pouze v intervalu $[0;0.5]$, neboť pro vyšší hodnoty již neexistuje kritická křivka ani kaustika při jakékoliv hodnotě f . Speciální případy $f = 1$ (sférický) a $b_c = 0$ (singulární) jsou diskutovány v Kapitole 4.2.3.

4.2.1 Kritické křivky a kaustiky

Položením jakobiánu daného vztahem 4.17 rovným nule a numerickým řešením této rovnice pro \boldsymbol{x} lze nalézt body tvořící kritickou křivku. Následně je lze čočkovou rovnicí 4.16 promítnout do kaustiky obdobně jako pro NFW model.

Při zachování konstantního b_c a proměnném f lze postupně sledovat jednotlivé režimy podobně, jako to bylo popsáno v Kapitole 3.2.1 pro NFW model. Poměr os a excentricita spolu souvisejí vztahem $f = \sqrt{1 - e^2}$, a tedy pro odpovídající průběh je třeba f postupně snižovat. Na Obrázcích 4.1-4.7 je ilustrována sekvence vybraných režimů pro $b_c = 0.3$.

Podobně jako pro NFW model i pro NIE je pro všechny hodnoty poměru os radiální kritická křivka zcela obsažená v tangenciální. Jedinou výjimku z toho tvoří hranice režimů hyperbolická umbilika, kdy obě části kritické křivky mají společně dva body. Pro dostatečně vysoké hodnoty f se objevují některé stejné režimy a hranice jako v případě NFW modelu. Na Obrázku 4.1 je pro $f = 0.95$ vidět tangenciální kaustika se 4 kaspý zcela obsažená v zploštělé radiální kaustice.

Hranicí tohoto režimu je cusp piercing vedoucí do následného režimu, v němž tangenciální kaustika protíná radiální. Dalším předělem režimů je hranice tangenciálního peanutu, kdy se tangenciální kritická křivka začíná prohýbat podél svislé osy a vytvářet nekonvexní tvar peanutu.

Následující hranicí je pro NIE hyperbolická umbilika znázorněná na Obrázku 4.2 pro $f = 0.7114$ (jde tak o první ze systematických rozdílů od NFW modelu; ty jsou souhrnně diskutovány v Kapitole 6). Vlastnosti této umbiliky odpovídají obecnému popisu u NFW modelu. Zde připomínáme, že při přechodu přes hyperbolickou umbiliku zanikají dva kaspý tangenciální kaustiky ležící na svislé ose, a naopak se objevují dva kaspý radiální kaustiky.

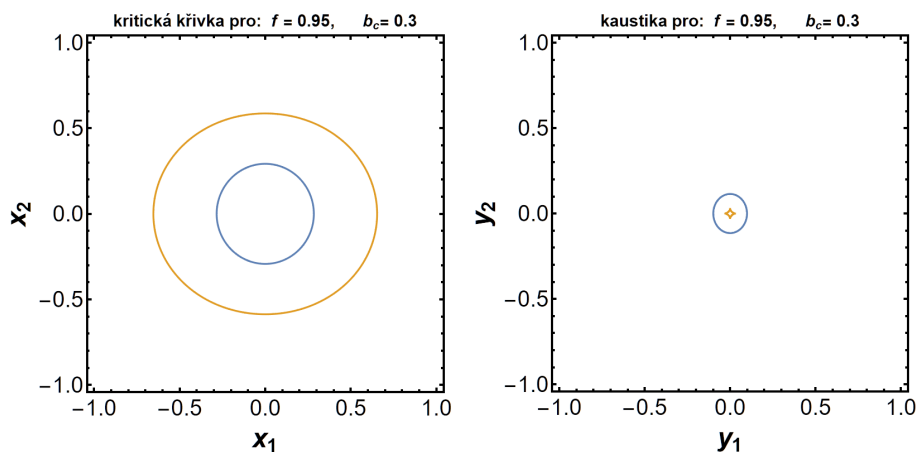
Při následném zmenšování parametru f (pro $f = 0.65$ znázorněno na Obrázku 4.3) se tangenciální kritická křivka a kaustika nadále protahují ve vodorovném směru, zatímco radiální kritická křivka a kaustika se v obou směrech postupně zmenšují, až zcela vymizí. Vymizení radiální části kritické křivky a kaustiky (též

zkráceně radiální vymizení) představuje další hranici režimů, která v popisované sekvenci nastává při $f = 0.6175$ (Obrázek 4.4).

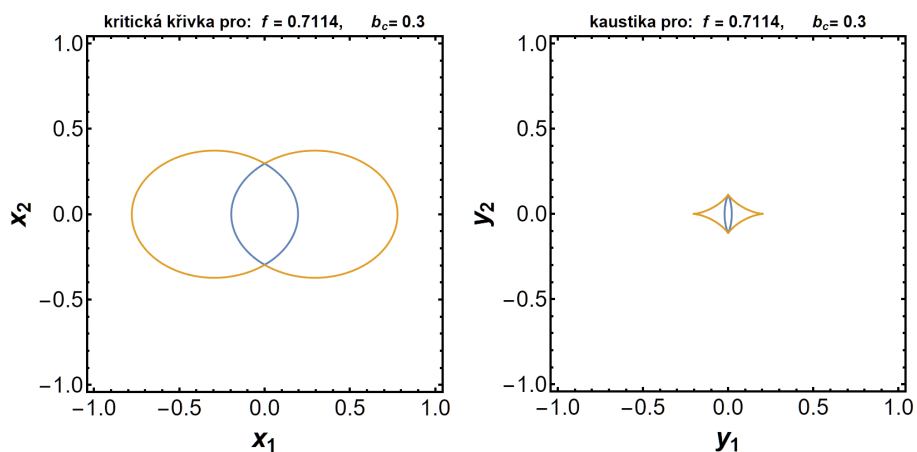
V následujícím režimu zbývá již pouze nekonvexní tangenciální kritická křivka tvaru peanutu, která se pro snižující se f postupně protahuje podél vodorovné osy, zatímco její průhyb se postupně zmenšuje. Podél vodorovné osy se protahuje i tangenciální kaustika. Další hranice nastává v okamžiku, kdy tangenciální kritická křivka přestává mít tvar peanutu, a začíná být opět konvexní (zobrazeno na Obrázku 4.5 pro $f = 0.35$).

Kritická křivka a kaustika se ve vodorovném směru zvětšují do bodu obratu, odkud se pro snižující se f zmenšují (Obrázek 4.6 pro $f = 0.112$), až zcela vymizí (též zkráceně radiální vymizení; Obrázek 4.7 pro $f = 0.1$). Jedná se o poslední hranici režimů. Pro menší hodnoty poměru os (při daném poloměru jádra) již žádná kritická křivka ani kaustika neexistují.

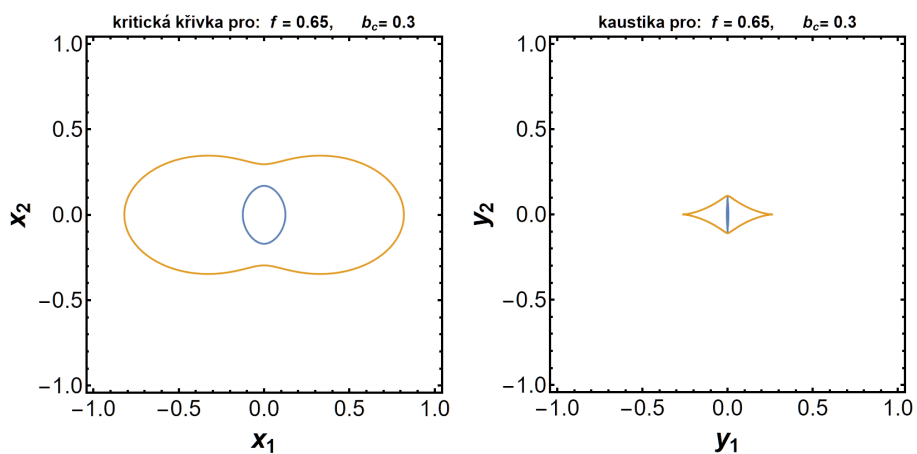
Podobně jako pro NFW model je i pro NIE užitečné studovat plochy uzavřené kaustikami kvůli informaci o počtu obrazů. Zdroj nacházející se v rovině zdroje vně kaustiky má pouze jeden obraz. V závislosti na poloze může mít i tři nebo pět obrazů podle toho, zda se nalézá uvnitř jedné části kaustiky a vně druhé části, či uvnitř obou částí kaustiky, radiální i tangenciální. V některých režimech je přítomná pouze tangenciální kaustika. V těchto případech může mít zdroj pouze jeden nebo tři obrazy. V režimu, v němž mizí i tangenciální kaustika, má zdroj pouze jeden obraz, ať se nachází kdekoliv.



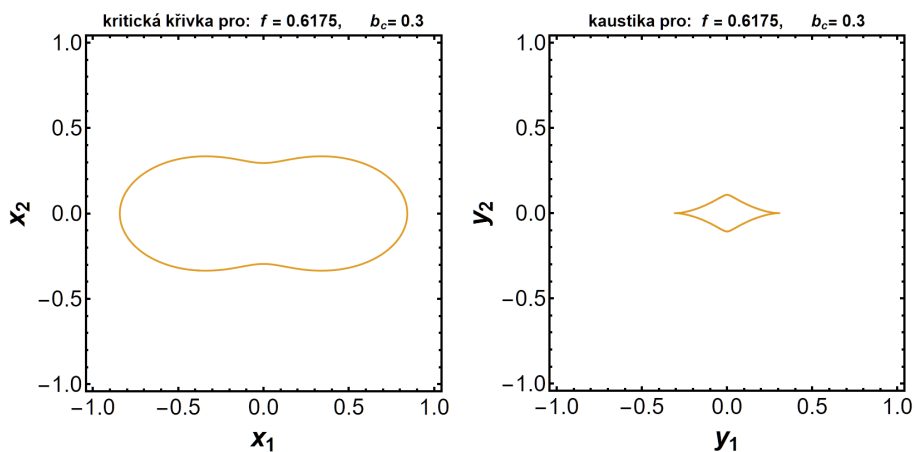
Obrázek 4.1 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $f = 0.95$ a $b_c = 0.3$, režim vysokého f . Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



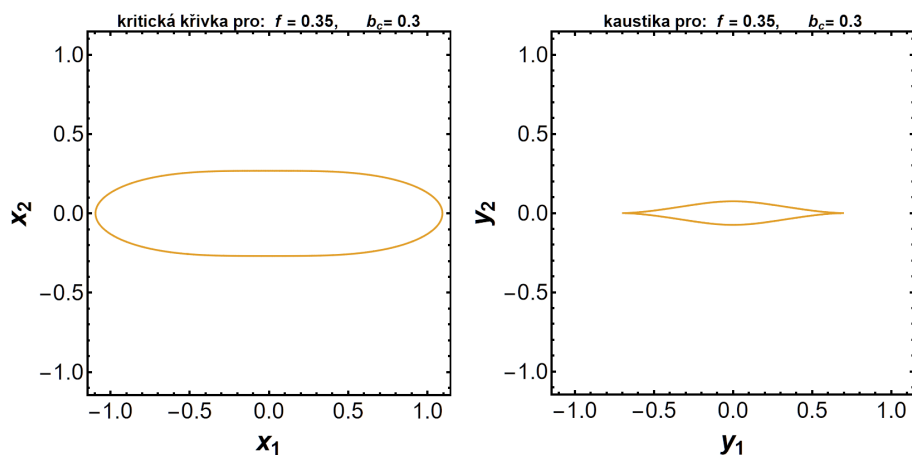
Obrázek 4.2 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $f = 0.7114$ a $b_c = 0.3$, hyperbolická umbilika. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.



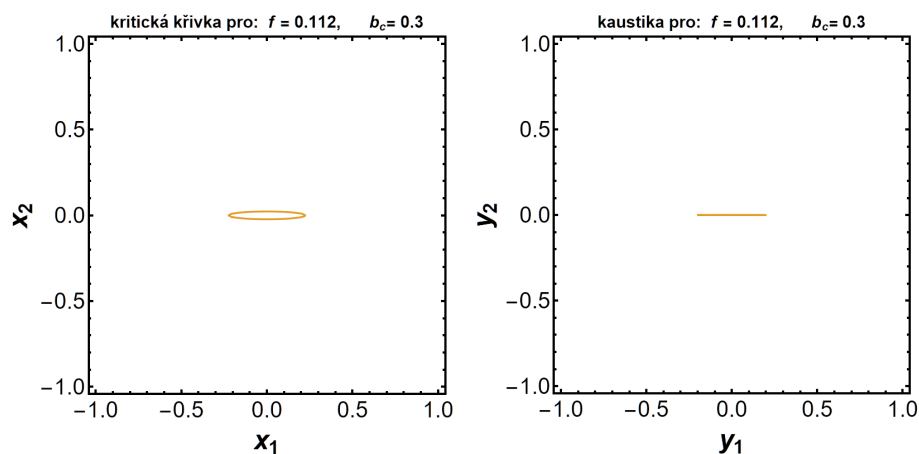
Obrázek 4.3 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $f = 0.65$ a $b_c = 0.3$, režim mezi hyperbolickou umbilikou a vymizením radiálních částí. Barevné značení jako na Obrázku 3.2.



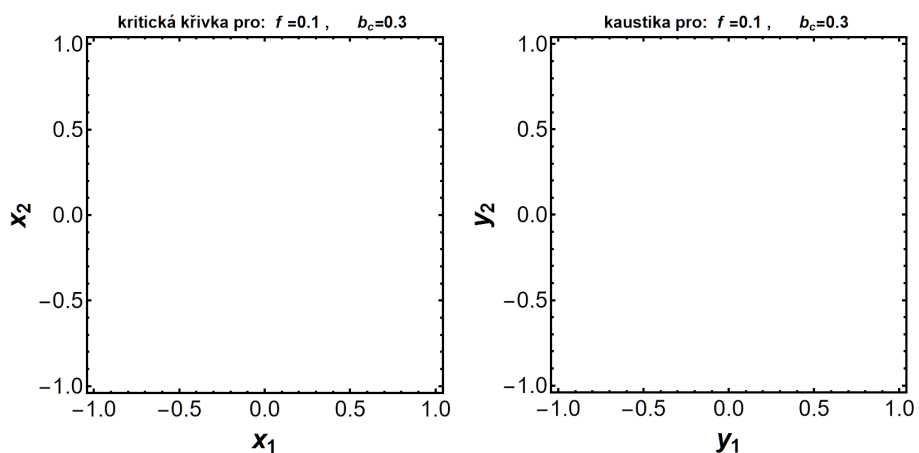
Obrázek 4.4 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $f = 0.6175$ a $b_c = 0.3$, vymizení radiální kritické křivky a kaustiky. Barevné značení jako na Obrázku 3.2.



Obrázek 4.5 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $f = 0.35$ a $b_c = 0.3$, druhá hranice tangenciálního peanutu. Barevné značení jako na Obrázku 3.2.

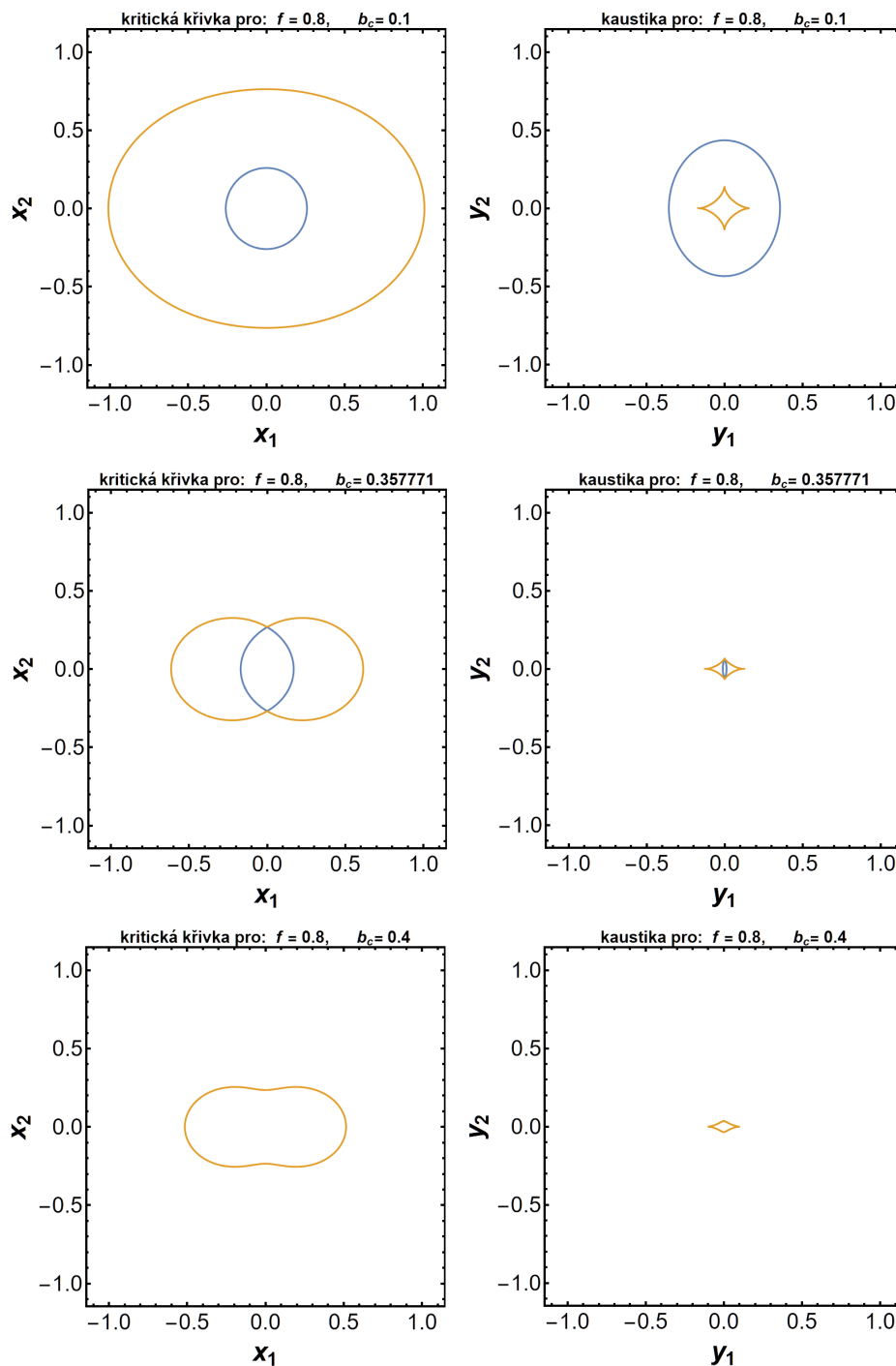


Obrázek 4.6 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro $f = 0.112$ a $b_c = 0.3$. Tangenciální kritická křivka a kaustika těsně před vymizením. Barevné značení jako na Obrázku 3.2.



Obrázek 4.7 Pro nižší poměry os (zde $f = 0.1$) při $b_c = 0.3$ kritické křivky a kaustiky neexistují.

Při změně poloměru jádra za konstantního poměru os u NIE dochází ke změně jak tvarů kritických křivek a kaustik, tak i jejich velikosti, jak je pro tři různé hodnoty b_c ilustrováno na Obrázku 4.8.



Obrázek 4.8 Změny tvaru a velikosti kritických křivek (vlevo) a kaustik (vpravo) při změně b_c (hodnoty uvedeny v jednotlivých řádcích nad panely) a konstantním $f = 0.8$. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.

Poloměr jádra má při studiu prostoru parametrů smysl vyšetřovat pouze v konečném intervalu. Pro libovolný poměr os při dostatečně velkém b_c dojde k vymizení kritických křivek a kaustik. Čím je parametr f větší, tím větší je hodnota b_c , při níž dojde k tangenciálnímu vymizení. Pro ně Kormann, Schneider a Bartelmann (1994) odvodili analytickou podmínku:

$$b_c = \frac{\sqrt{f}}{1+f}, \quad (4.30)$$

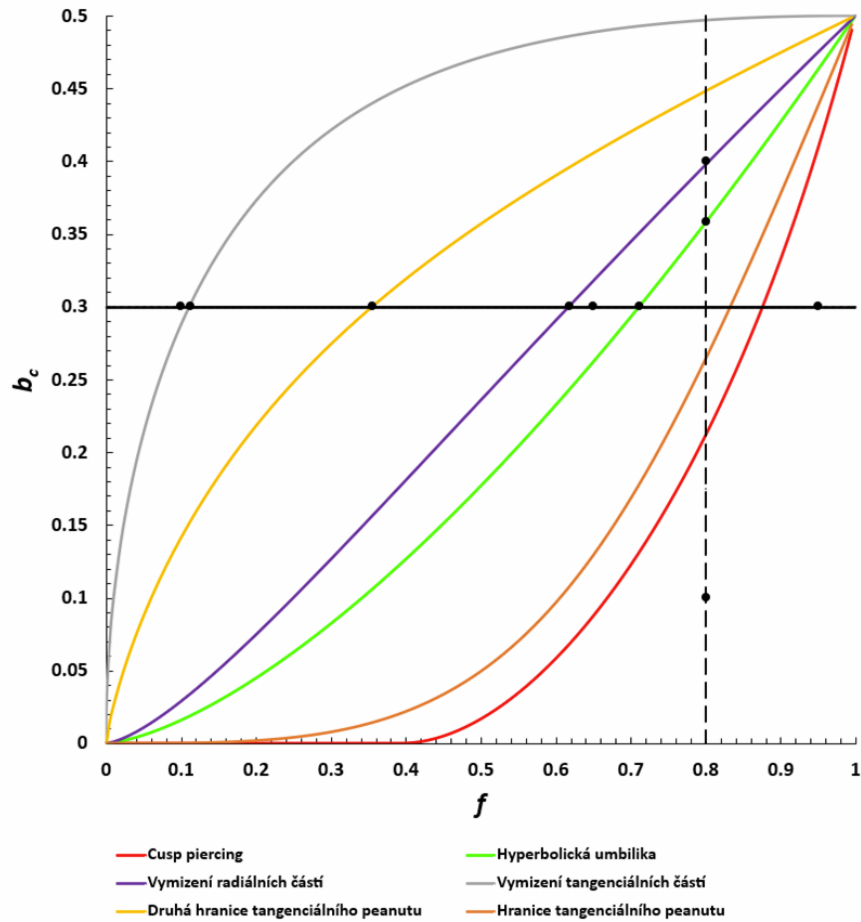
pro vymizení radiální kritické křivky pak analytickou podmínku:

$$b_c = \frac{\sqrt{f^3}}{1+f}. \quad (4.31)$$

Analytickou podmínku uvádějí rovněž pro hyperbolickou umbiliku:

$$b_c = \frac{\sqrt{f^3}}{2}. \quad (4.32)$$

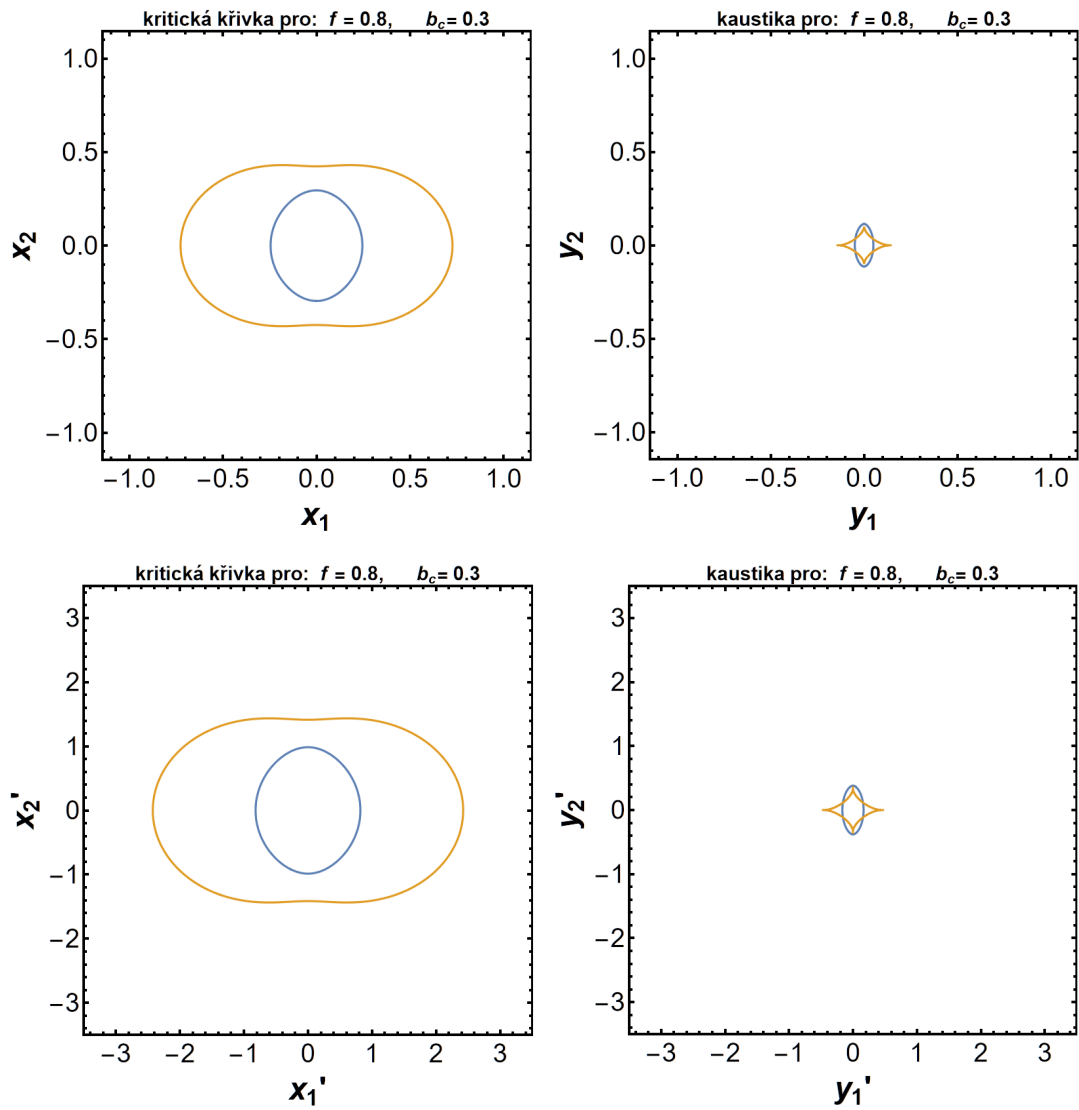
Na Obrázku 4.9 je zobrazen graf prostoru parametrů zobrazující hranice režimů pro NIE jako závislosti hodnoty poloměru jádra na poměru os. Nalezené hranice hyperbolické umbilky a vymizení jednotlivých částí jsou replikací výsledku z práce Kormann, Schneider a Bartelmann (1994). Doplněné jsou o dvě hranice tangenciálního peanutu a hranici cusp piercingu. Všech šest hranic pro hodnotu $f = 1$ odpovídající izotermální sféře se nalézá na hodnotě poloměru jádra $b_c = 0.5$. Model v tomto sférickém případě zůstává v intervalu $b_c = [0; 0.5)$ stále ve stejném režimu. Při dosažení $b_c = 0.5$ dochází k vymizení kritických křivek a kaustik. S klesající hodnotou f hodnoty b_c na všech hranicích klesají, přičemž se hranice navzájem rozcházejí. Všechny hranice se společně sejdou až pro $f = 0$, pro který mají hodnotu $b_c = 0$. Mezi těmito dvěma hraničními body se žádné z hranic navzájem neprotínají, nedotýkají ani nepropojují. Pro libovolný poloměr jádra v intervalu $(0; 0.5)$ bude NIE v intervalu poměru os $(0; 1)$ postupně procházet (v opačném pořadí) sekvencí režimů popsaných výše (v Obrázku 4.9 je tento průchod pro $b_c = 0.3$). Tyto režimy se postupně v daném pořadí střídají i pro změnu parametru b_c při libovolné hodnotě f z intervalu $(0; 1)$.



Obrázek 4.9 Hranice režimů v prostoru parametrů f a b_c pro NIE. Jednotlivé barevně vyznačené hranice jsou popsány v legendě pod grafem. Sedm černých teček ležících na vodorovné černé čáře označuje kombinace parametrů odpovídající Obrázkům 4.1-4.7. Tři černé tečky ležící na svislé černé čáře pak označují kombinace parametrů z Obrázku 4.8.

Na Obrázcích 4.1-4.8 jsou zobrazeny kritické křivky a kaustiky v souřadnicích \boldsymbol{x} , respektive \boldsymbol{y} v jednotkách škálového parametru ξ_0 . Kritické křivky a kaustiky však lze za využití vztahů 4.18-4.29 vyjádřit v souřadnicích \boldsymbol{x}' , respektive \boldsymbol{y}' , které jsou převedené do jednotek poloměru jádra b_c . Přejdem do těchto souřadnic dochází pro dané dvojice parametrů f a b_c pouze k přeškálování kritických křivek a kaustik, dochází tedy k číselné změně velikosti, nikoliv však tvaru (vizte Obrázek 4.10). Prostor parametrů z Obrázku 4.9 je tak na zvolených souřadnicích nezávislý a hranice režimů čokování v závislosti na parametrech probíhají stejně.

Rozdíl nastává při sledování změn rozměrů. Při změně f za konstantního b_c nadále dochází ke změnám stejného charakteru jako při původním škálování, ovšem jelikož jsou souřadnice \boldsymbol{x}' a \boldsymbol{y}' v jednotkách b_c , dochází při změně tohoto parametru k významným změnám velikostí.



Obrázek 4.10 Porovnání velikostí kritických křivek (vlevo) a kaustik (vpravo) v souřadnicích \mathbf{x} a \mathbf{y} (nahore) a \mathbf{x}' a \mathbf{y}' (dole) pro $f_0.8$ a $b_c = 0.3$. Barevné značení stejné jako na Obrázku 3.2.

4.2.2 Rozměry kritických křivek a kaustik

Při změně poměru os a poloměru jádra dochází obecně ke změně tvarů a velikostí kritických křivek a kaustik. Změny jejich rozměrů v závislosti na parametrech modelu f a b_c je možné ilustrovat sledováním jejich průsečíků s vodorovnou a svislou osou a plochy těmito křivkami uzavřené.

V Obrázku 4.11 jsou pro různé hodnoty b_c zobrazeny v levých dvou sloupcích rozměry kritických křivek v závislosti na poměru os f , respektive zploštění $1 - f$. Rovněž jsou v něm zobrazeny v pravých dvou sloupcích rozměry kaustik včetně ploch oblastí s více obrazy. Rozměry jsou v jednotkách škálového parametru ξ_0 (respektive ξ_0^2 pro plochy). V přeškálovaných souřadnicích \mathbf{x}' , \mathbf{y}' v jednotkách b_c mají všechny grafy stejný tvar, pouze hodnoty na svislé ose jsou přeškálovány.

V prvním sloupci jsou zobrazeny souřadnice průsečíků kritických křivek s osami, plnými čarami s vodorovnou a dlouze přerušovanými se svislou (dále podobně jako v Kapitole 3.2.2 pro zjednodušení používáme i označení vodorovný a svislý rozměr). Zeleně jsou vyznačeny rozměry tangenciální části a fialově radiální části (tangenciální a radiální rozměr). Dále jsou v těchto panelech vyneseny zeleně krátce přerušovaně čáry vyznačující souřadnice x_2 bodu na tangenciální kritické křivce s maximální souřadnicí x_2 (svislé maximum). Pokud má tangenciální kritická křivka konvexní tvar, je tato čára shodná s dlouze přerušovanou zelenou čarou vynášející souřadnici; odlišná je v případě, že má tato křivka nekonvexní tvar peanutu. V bodě dotyku dlouze přerušovaných čar obou barev dochází k hyperbolické umbilice, tedy dotyku radiální a tangenciální části na svislé ose. V druhém sloupci jsou vyneseny velikosti ploch uzavřených tangenciální (zelená čára), respektive radiální (fialová čára) kritickou křivkou (tangenciální a radiální plocha).

Při růstu zploštění od nuly (tedy od sférického případu) se začínají okamžitě zmenšovat svislý tangenciální a vodorovný radiální rozměr. Naopak se zvětšuje vodorovný tangenciální rozměr. Tyto změny jsou tím prudší, čím větší je b_c ; o to větší jsou tedy "úhly" mezi křivkami vyznačujícími velikosti vodorovného a svislého rozměru pro obě části. Svislý radiální rozměr se zvětšuje, ovšem jen velmi mírně (nehledě na b_c). Tento trend je pozorovatelný až do hyperbolické umbiliky, v níž jsou svislé rozměry obou částí kritické křivky totožné. Chování těchto rozměrů se v umbilice prohodí, za umbilikou tedy svislý radiální rozměr prudce klesá až do nuly, které dosáhne současně s vodorovným rozměrem (vymizení radiální části, zkráceně užíváme i radiální vymizení). Naopak svislý tangenciální rozměr nadále velmi mírně stoupá až do lokálního maxima, načež začne klesat. V Obrázku 4.11 si lze všimnout, že na sebe zelená dlouze přerušovaná čára vyjadřující svislý tangenciální rozměr před umbilikou (respektive po umbilice) a fialová dlouze přerušovaná čára vyjadřující svislý radiální rozměr po umbilice (respektive před umbilikou) hladce navazují.

Ještě před umbilikou se objevuje hranice tangenciálního peanutu. V té se z křivky vyjadřující svislý tangenciální rozměr odděluje zelená krátce přerušovaná čára vyjadřující svislé maximum. Svislé maximum postupně klesá po celou dobu, co má tangenciální kritická křivka tvar peanutu až do druhé hranice peanutu, kdy začíná být opět totožné se svislým rozměrem. Společně následně klesají až do nuly. Vodorovný tangenciální rozměr se s rostoucím zploštěním zvětšuje až do svého maxima, jehož dosáhne pro o něco větší hodnotu zploštění, než pro kterou nastává druhá hranice tangenciálního peanutu. Následně vodorovný rozměr velmi prudce klesá do nuly, které dosáhne současně se svislým rozměrem (vymizení tangenciální

části, zkráceně užíváme i tangenciální vymizení).

Plochy ohraničené oběma částmi kritické křivky se při růstu zploštění od nuly zmenšují, radiální jen velmi mírně, tangenciální strměji, a to až do umbiliky. Za umbilikou radiální plocha klesá prudce až do nuly (radiální vymizení). Tangenciální naopak mírně stoupá až do lokálního maxima, načež velmi prudce klesá do nuly (tangenciální vymizení).

Ve třetím sloupci Obrázku 4.11 jsou zobrazeny rozměry kaustik, ve čtvrtém poté tangenciální a radiální plocha kaustik. Značení čar v třetím a čtvrtém sloupci pro rozměry kaustik je stejné, jako v prvním a druhém pro rozměry kritických křivek. Ve čtvrtém sloupci jsou rovněž vyneseny velikosti ploch oblastí více obrazů (šedá tečkovaná čára), které jsou totožné s celkovými velikostmi ploch kaustiky, dále poté velikosti ploch oblastí tří obrazů (modrá tečkovaná čára) a pěti obrazů (růžová tečkovaná čára). V průsečíku plných čar v třetím sloupci dochází ke cusp piercingu, tedy dotyku částí kaustiky na vodorovné ose. Cusp piercing a hyperbolickou umbiliku lze také nalézt ve čtvrtém sloupci, kde se jedná respektive o levý a pravý bod, ve kterém šedá čára navazuje na čáry značící plochy uzavřené jednotlivými částmi kaustiky.

Rozměry kaustik mají pro NIE v závislosti na zploštění obdobný průběh pro všechny hodnoty b_c (a liší se primárně v celkové škále rozměrů). Při růstu zploštění od nuly se zmenšuje vodorovný radiální rozměr kaustiky z konečné kladné hodnoty (nulové zploštění) do nulové hodnoty (radiální vymizení). Vodorovný tangenciální rozměr kaustiky se zvětšuje z nulové hodnoty (nulové zploštění) až do maximální hodnoty (obdobně jako u kritické křivky, která ovšem nezačínala od nuly), a následně strmě klesá k nulové hodnotě (tangenciální vymizení). V intervalu růstu zelená plná čára znázorňující tento rozměr protíná fialovou plnou čáru znázorňující vodorovný radiální rozměr kaustiky. Pro toto zploštění dochází ke cusp piercingu.

Svislý tangenciální rozměr kaustiky se rovněž zvětšuje z nulové hodnoty (ovšem po celou dobu je menší, než vodorovný), a to až do hyperbolické umbiliky, za níž klesá zpět k nulové hodnotě (tangenciální vymizení). V umbilice se zelená přerušovaná čára, jež ho znázorňuje, protíná s fialovou přerušovanou čarou znázorňující svislý radiální rozměr kaustiky (přitom v umbilice mají tyto křivky stejnou derivaci). Ten začíná v kladné hodnotě (stejně jako vodorovný), nejprve se velmi mírně zvětšuje, a za umbilikou se prudce zmenšuje do nulové hodnoty (radiální vymizení).

Radiální plocha kaustiky pro nulové zploštění má konečnou kladnou velikost, která pro rostoucí zploštění postupně klesá k nule při radiálním vymizení. Tangenciální plocha kaustiky nejprve roste z nulové velikosti až do maxima, a následně prudce klesá do nuly v tangenciálním vymizení.

Plocha tří obrazů² začíná na stejné hodnotě jako radiální plocha kaustiky a plocha pěti obrazů na stejné, jako tangenciální. Z počátku se plocha tří obrazů zmenšuje a plocha pěti obrazů zvětšuje. Pro vysoké b_c je v krátkém intervalu plocha pěti obrazů větší, než plocha tří obrazů. Po dosažení maxima se plocha pěti obrazů zmenšuje k nule. Toho dosáhne v radiálním vymizení. Plocha tří obrazů se po dosažení lokálního minima zvětšuje až do globálního maxima, a následně klesá k nule v tangenciálním vymizení.

Aby byl pro NIE možný vliv změny b_c pozorovat lépe, jsou rozměry v Obrázcích 4.12 a 4.13 vykresleny pro konstantní f jako funkce b_c (rozdělení obrázků i značení

²Použito zkrácené označení zavedené v Kapitole 3.2.2. Nejedná se o velikost obrazů.

je v souladu s Obrázkem 4.11). Tyto rozměry jsou v Obrázku 4.12 v jednotkách škálového parametru ξ_0 . V přeškálovaných souřadnicích v jednotkách b_c jsou ty samé případy zobrazeny v Obrázku 4.13. V obrázcích lze nalézt stejné hranice režimů, jako v Obrázku 4.11.

Nyní popíšeme průběhy rozměrů a ploch v Obrázku 4.12. Vodorovný a svislý tangenciální rozměr začínají pro libovolný poměr os při zvyšování poloměru jádra od nuly na konečných hodnotách. Tyto hodnoty jsou obecně jiné (pro vodorovný rozměr je to více než jedna, pro svislý pak méně), čím více se však poměr os blíží jedné (NIS, konkrétně pro $b_c = 0$ SIS), tím více se tyto počáteční hodnoty blíží jedné. V této limitě se k sobě příslušné čáry přibližují v celém svém průběhu. Pro rostoucí b_c oba rozměry klesají. Zelená plná čára je po celou dobu hladká. Zelená přerušovaná je hladká až do hyperbolické umbiliky, kde se dotýká fialové přerušované čáry. Následně nadále hladce klesá, avšak pod jiným sklonem. V tangenciálním vymizení oba tangenciální rozměry dosáhnou nuly.

Radiální rozměry začínají oba v nule, nejdříve oba stoupají, a následně klesají do nuly v radiálním vymizení. Fialová plná čára je po celou dobu hladká, přerušovaná pouze před a po umbilice. Podobně jako v Obrázku 4.11 i v 4.12 lze v umbilice pozorovat vystřídání derivací dotýkajících se čar.

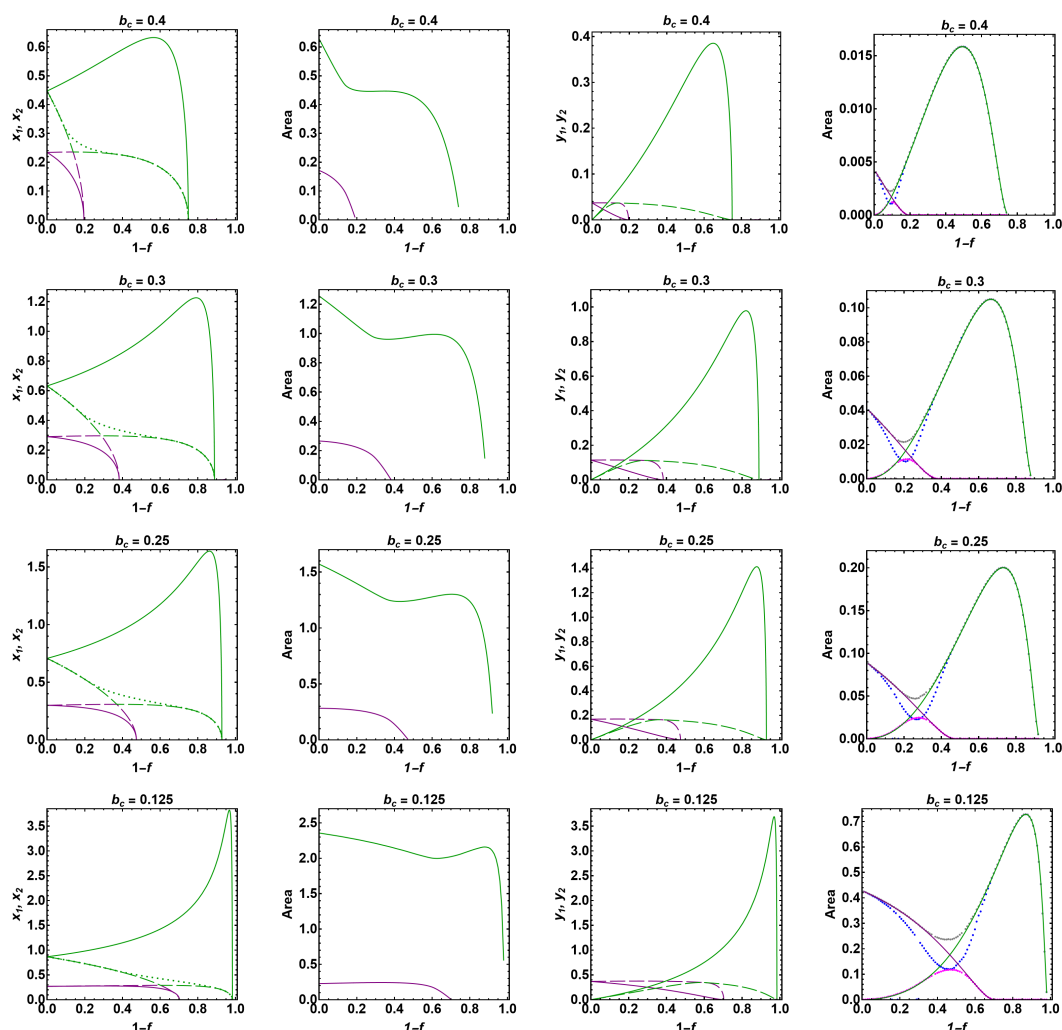
Tangenciální plocha začíná pro libovolný poměr os vždy na hodnotě π , z níž následně klesá do nuly pro tangenciální vymizení. Radiální nejprve stoupá a následně klesá do nuly v radiálním vymizení. Obě křivky jsou po celou dobu hladké.

Rozměry kaustik začínají všechny na konečné kladné hodnotě, a následně se zvyšujícím se b_c tyto rozměry klesají až do nuly (tangenciální a radiální vymizení), přičemž všechny křivky jsou po celou dobu hladké. Na hranici cusp piercingu dochází k protnutí plných čar, v hyperbolické umbilice k protnutí přerušovaných. Velikosti počátečních hodnot závisí na poměru os. Čím více se f blíží jedné, tím jsou počáteční tangenciální rozměry kaustik menší a počáteční radiální rozměry kaustik se blíží jedné (svislý shora a vodorovný zdola).

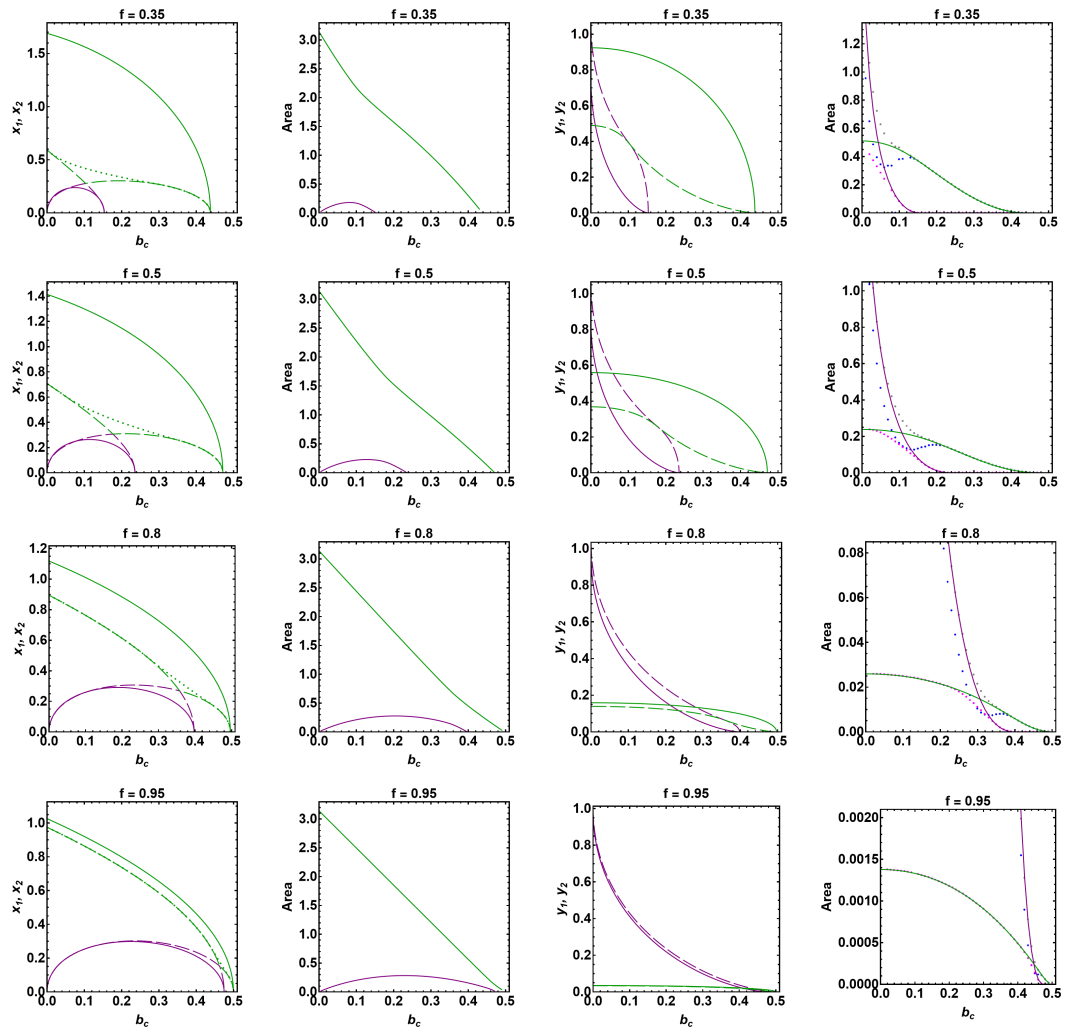
Rovněž i plochy kaustik začínají na konečných hodnotách a následně klesají až k nule. Tangenciální plocha kaustiky je přitom na počátku totožná s plochou pěti obrazů a radiální plocha kaustiky totožná s plochou více obrazů. Plochy více a pěti obrazů se od ploch kaustik oddělí na hranici cusp piercingu, neboť poté již tangenciální kaustika neleží celá v radiální, a opět navážou v hyperbolické umbilice (šedá tečkovaná čára na zelenou a růžová tečkovaná na fialovou). Modrá tečkovaná čára má od počátku o něco nižší hodnoty, než zelená, a naváže na ni až momentě radiálního vymizení, kdy radiální plocha kaustiky a plocha pěti obrazů klesnou k nule. Jedná se o jedinou z čar, která po celou dobu nutně neklesá (pro nižší hodnoty f před radiálním vymizením krátce stoupá). Tangenciální plocha kaustiky společně s plochou tří obrazů, respektive plochou více obrazů klesají následně společně k nule v tangenciálním vymizení.

V Obrázku 4.13 jsou průběhy rozměrů a ploch dramaticky odlišné. V limitě $b_c \rightarrow 0$ rostou všechny rozměry a plochy nade všechny meze. Naopak pro zvyšující se poloměr jádra všechny rozměry a plochy klesají postupně až k nule (radiální a tangenciální vymizení). Čáry se protínají, dotýkají, rozpojují a spojují ve stejných hranicích, jako v Obrázcích 4.11 a 4.12. Rozměry kritických křivek a kaustik v souřadnicích \mathbf{x}' a \mathbf{y}' je vhodné uvést mj. v kontextu s analýzou kontur částí jakobiánu v Kapitole 4.2.4, jelikož ilustrují, jak jsou velikosti těchto kontur závislé

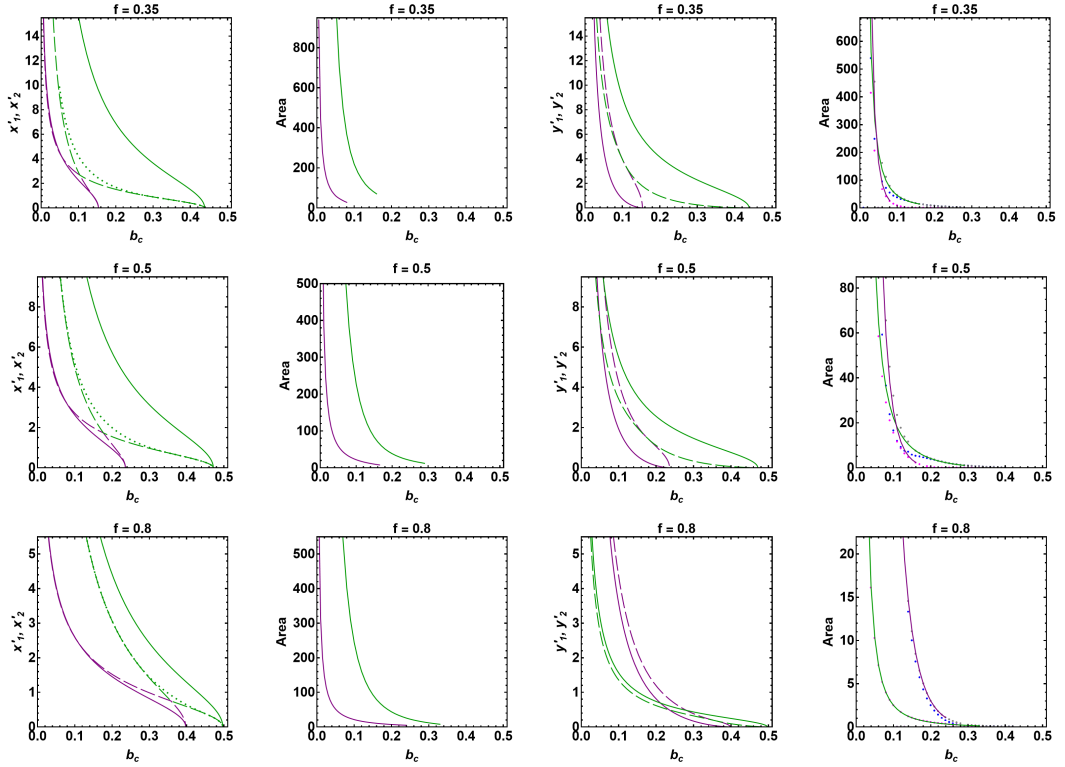
na poloměru jádra.



Obrázek 4.11 Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na zploštění, respektive poměru os pro různé hodnoty b_c . V prvním sloupci jsou vyznačeny vodorovné rozměry (plné čáry) a svislé rozměry (dlouze přerušované čáry) kritických křivek. Zelenou barvou jsou vyznačeny tangenciální rozměry, fialovou barvou pak radiální rozměry. Zelená krátce přerušovaná čára vyznačuje souřadnice svislé maximum. V třetím sloupci jsou vyznačeny rozměry kaustiky (stejně značení jako pro rozměry kritických křivek). V druhém sloupci jsou vyznačeny velikosti ploch uzavřených tangenciální (zelená barva) a radiální (fialová barva) částí kritické křivky. V čtvrtém sloupci jsou vyznačeny velikosti ploch uzavřených tangenciální (zelená barva) a radiální (fialová barva) částí kaustiky. Rovněž jsou zde jsou vyznačeny velikosti ploch tří obrazů (modrá krátce přerušovaná čára) a pěti obrazů (růžová krátce přerušovaná čára). Šedá krátce přerušovaná čára vyznačuje celkovou plochu uzavřenou kaustikou a je totožná se zelenou či fialovou v případech, kdy jedna část kaustiky je zcela uzavřená uvnitř druhé.



Obrázek 4.12 Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na poloměru jádra pro různé hodnoty f . V jednotlivých sloupcích vyznačeny stejné veličiny, jako v Obrázku 4.11 (zde v závislosti na b_c namísto f). Stejně je i barevné značení a typ čar (plné, přerušované atd.).



Obrázek 4.13 Velikost kritických křivek a kaustik v závislosti na poloměru jádra pro různé hodnoty f . Souřadnice vyjádřeny v jednotkách b_c . V jednotlivých sloupcích vyznačeny stejné veličiny, jako v Obrázku 4.11 (zde v závislosti na b_c namísto f). Stejně je i barevné značení a typ čar (plné, přerušované atd.).

4.2.3 Limitní případy NIE

Speciálním případem NIE, kdy je poměr os f roven jedné, je nesingulární izotermální sféra (NIS). Gravitační čočka zde má sférickou symetrii a přeškalovaný úhel odklonu α_{NIE} přechází na jednodušší vztah:

$$\alpha_{NIS}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + b_c^2} - \frac{b_c}{x}, \quad (4.33)$$

v němž $x = |\mathbf{x}|$ představuje vzdálenost od středu čočky.

Podobně jako ve sférickém NFW modelu i zde existují radiální a tangenciální kritické křivky, přičemž obě jsou kružnice se středem ve středu čočky. Pro jejich poloměry Kormann, Schneider a Bartelmann (1994) uvádějí:

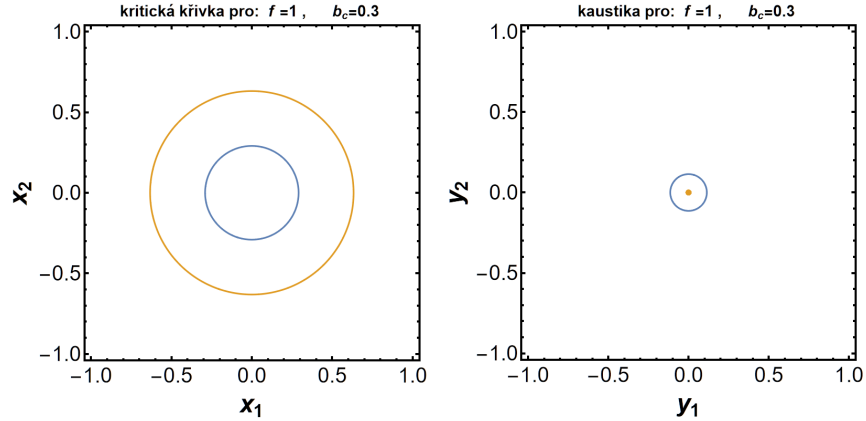
$$x_r^2 = \frac{1}{2}(2b_c - b_c^2 - b_c \sqrt{b_c^2 + 4b_c}), \quad (4.34)$$

$$x_t^2 = 1 - 2b_c. \quad (4.35)$$

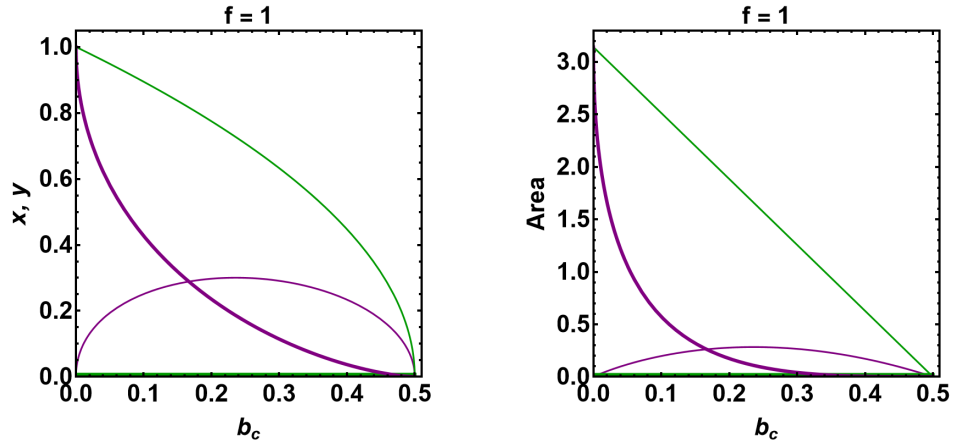
Při dosazení vztahů 4.33-4.35 do čočkové rovnice 4.16 lze spočít, že se tangenciální kritická křivka promítne do jediného bodu uprostřed, a radiální kaustika bude mít tvar kružnice o poloměru:

$$y_r = \frac{\sqrt{2b_c^2 + 2\sqrt{b_c(2 + b_c - \sqrt{b_c(4 + b_c)})}} + \sqrt{2b_c(-4 + \sqrt{b_c(4 + b_c)})}}{2\sqrt{-b_c(-2 + b_c + \sqrt{b_c(4 + b_c)})}}. \quad (4.36)$$

Obrázek 4.14 zobrazuje kritickou křivku a kaustiku pro NIS s poloměrem jádra $b_c = 0.3$. Obrázek 4.15 zobrazuje rozměry kritické křivky a kaustiky pro NIS v závislosti na b_c a velikosti ploch odpovídajících třem obrazům. Jelikož je tangenciální kaustika bodová, 5 obrazů nevzniká při žádné poloze zdroje. Protože jsou kritické křivky a radiální kaustika kružnicemi, jejichž poloměr lze v závislosti na b_c vyjádřit analyticky, lze analyticky vyjádřit i velikosti ploch ($\text{poloměr}^2 \times \pi$).



Obrázek 4.14 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) pro NIS s $b_c = 0.3$. Oranžově tangenciální část, modře radiální.



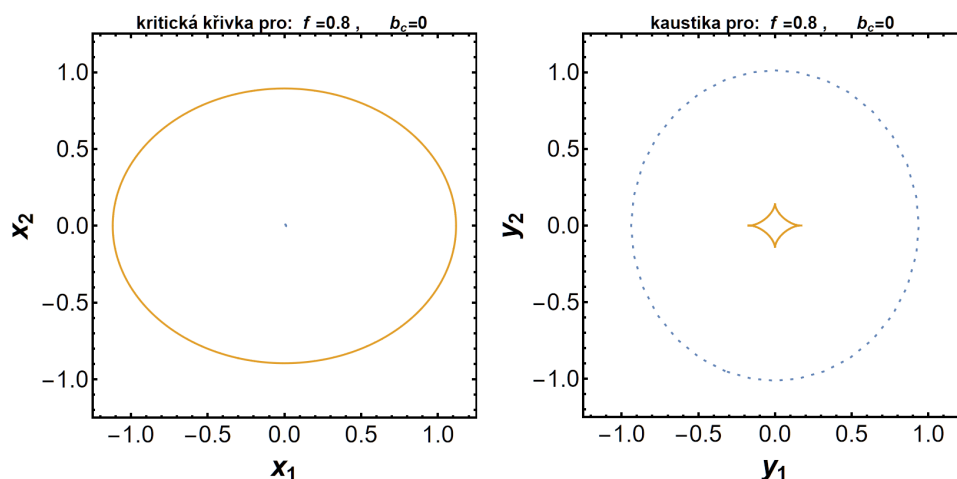
Obrázek 4.15 Rozměry kritických křivek a kaustik pro NIS. Vlevo jsou vyznačeny poloměry kritických křivek (tenkou čarou) a kaustik (tlustou čarou) v závislosti na hodnotě poloměru jádra. Vpravo je vynesena závislost ploch uzavřených kritickou křivkou (tenkou čarou) a kaustikou (tlustou čarou) na poloměru jádra. Zeleně vyznačena tangenciální část, fialově radiální.

Další speciální limitou NIE je singulární izotermální elipsoid (SIE), který lze získat položením hodnoty b_c k nule. Jak je patrné z Obrázku 4.12, při přibližování poloměru jádra nule se zmenšuje velikost radiální části kritické křivky až do bodu pro $b_c = 0$, zatímco radiální kaustika se zvětšuje ke konečné velikosti.

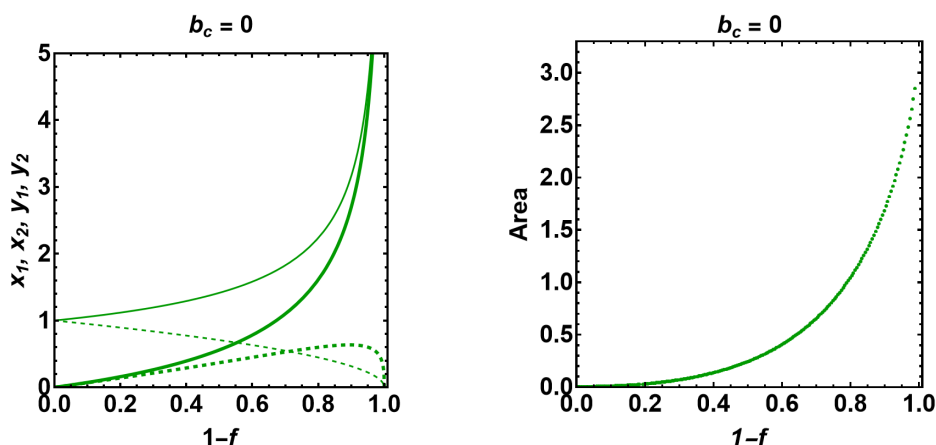
S nenulovou velikostí tak zbývá pouze tangenciální část kritické křivky, jejíž tvar se mění v závislosti na poměru os, zůstává však neustále konvexní (pro $f = 0.8$ zobrazeno na Obrázku 4.16). Pro žádnou hodnotu f však zcela nevymizí, a nezávisle na ní má oblast uzavřená kritickou křivkou plochu π . Tangenciální

kaustika má tvar čtyřcípé astroidy se čtyřmi kaspami. Pro f blížící se jedné se zmenšuje až do bodu, naopak pro zmenšující se f kaustika roste a její rozměr ve vodorovném směru výrazně převládá nad rozměrem ve směru svislém.

Radiální část kritické křivky má nulovou velikost. Kaustika nemá radiální část, její místo však zaujímá tzv. pseudokaustika, která je limitou radiální kaustiky pro $b_c \rightarrow 0$. Tvar pseudokaustiky se mění v závislosti na f . Při přechodu polohy zdroje přes pseudokaustiku se nemění počet obrazů o dva, ale pouze o jeden. Podrobnější analýzu pseudokaustik v SIE včetně diskuze jejich rozměrů lze nalézt v práci Kormann, Schneider a Bartelmann (1994). Závislost velikosti kritické křivky a kaustiky na f je zobrazena v Obrázku 4.17.



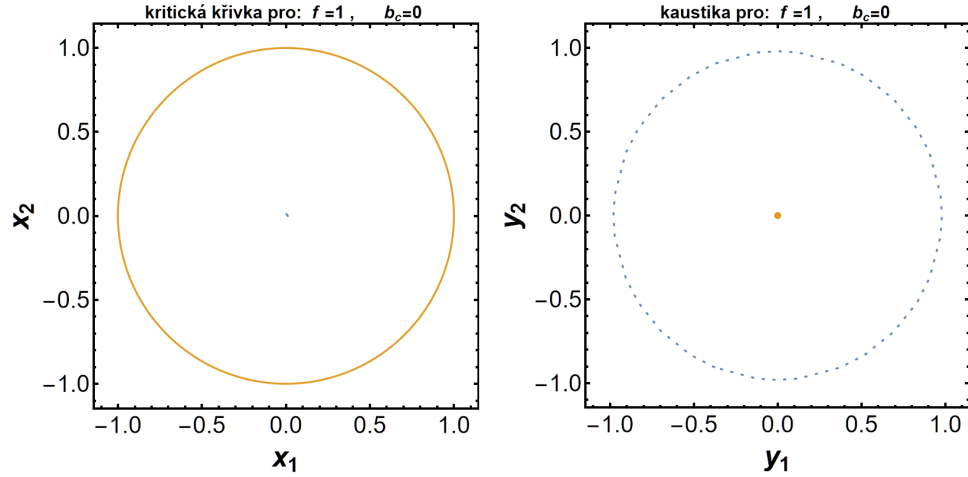
Obrázek 4.16 Kritická křivka (vlevo; oranžově tangenciální část, modře radiální), tangenciální kaustika (vpravo, oranžově) a radiální pseudokaustika (vpravo, modře) pro SIE s poměrem os $f = 0.8$



Obrázek 4.17 Rozměry kritických křivek a kaustik pro SIE. Vlevo jsou vyznačeny souřadnice průsečíků tangenciální kritické křivky (tenkou čarou) a tangenciální kaustiky (tlustou čarou) s vodorovnou (plnou čarou) a svislou (dlouze přerušovanou čarou) osou v závislosti na hodnotě zploštění. Vpravo závislost velikosti plochy uzavřené tangenciální kaustikou na zploštění.

Kombinací limit NIS a SIE lze získat singulární izotermální sféru (SIS), pro kterou tedy platí $f = 1$ a $b_c = 0$. Gravitační čočka má sférickou symetrii a není již

závislá na žádných parametrech. Má nenulovou pouze tangenciální část kritické křivky, kterou je kružnice o poloměru 1, a má pouze tangenciální část kaustiky, kterou je bod uprostřed. Radiální část kritické křivky je nulová (jako u obecnějšího SIE) a namísto radiální části kaustiky má pseudokaustiku, která má tvar kružnice o poloměru jedna. SIS je zobrazena na Obrázku 4.18.



Obrázek 4.18 Kritická křivka (vlevo; oranžově tangenciální část, modře radiální), tangenciální kaustika (vpravo, oranžově) a radiální pseudokaustika (vpravo, modře) pro SIS.

4.2.4 Kontury částí jakobiánu

Obdobně jako v Kapitole 3.2.3 pro NFW model i pro NIE je užitečné využít analýzy kontur tangenciální a radiální části jakobiánu. Tyto kontury odpovídající příslušným kritickým křivkám s různými hodnotami poloměru jádra jsou vykresleny v Obrázku 4.19, v němž jsou současně vykresleny kritické křivky se stejnou hodnotou $f = 0.8$, avšak rozdílnými hodnotami b_c .

Dále jsou v obrázku vykresleny inflexní křivky (tyrkysově) a kaspové křivky (červeně). Ty představují nástroj sloužící k identifikaci vlastností kritických křivek z konturových grafů, který zavedli Heyrovský a Karamazov (2024) a využili pro vykreslení Obrázků 3.15 a 3.16. Zde je tento nástroj využit pro vykreslení 4.19.

Inflexní body ležící na křivce zadané obecnou rovnicí $j(\mathbf{x}) = 0$ splňují rovnici:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial j}{\partial x_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial j}{\partial x_1} \frac{\partial j}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial j}{\partial x_1} \right)^2 = 0. \quad (4.37)$$

Pokud se za funkci j dosadí tangenciální, respektive radiální část jakobiánu, získáme tak podmínku pro inflexní křivku v konturách tangenciální, respektive radiální části jakobiánu. Tangenciální část jakobiánu označíme j_T a radiální j_R . Poté lze vyjádřit vztahy určující kaspové křivky pro tangenciální (první dvě

rovnice) a radiální kontury (druhé dvě rovnice):

$$(\gamma - \gamma_1) \frac{\partial j_T}{\partial x_2} + \gamma_2 \frac{\partial j_T}{\partial x_1} = 0, \quad (4.38)$$

$$\gamma_2 \frac{\partial j_T}{\partial x_2} + (\gamma + \gamma_1) \frac{\partial j_T}{\partial x_1} = 0, \quad (4.39)$$

$$(\gamma + \gamma_1) \frac{\partial j_R}{\partial x_2} - \gamma_2 \frac{\partial j_R}{\partial x_1} = 0, \quad (4.40)$$

$$\gamma_2 \frac{\partial j_R}{\partial x_2} + (-\gamma + \gamma_1) \frac{\partial j_R}{\partial x_1} = 0, \quad (4.41)$$

příčemž splněné musejí být vždy obě rovnice současně.

Sledováním průsečíků kontur s inflexní křivkou lze sledovat počet a polohu inflexních bodů na kritické křivce s příslušným b_c , podle průsečíků s kaspovou křivkou lze stanovit počet a poloha bodů na kritické křivce s příslušným b_c odpovídajícím kaspům na kaustice.

Tangenciální kritická křivka má buďto žádný nebo čtyři inflexní body. Inflexní body se na ní objevují při přechodech přes hranice tangenciálního peanutu (na Obrázku 4.19 těmito hranicím odpovídají zelená přerušovaná křivka odpovídající $b_c = 0.26405$ a hnědá přerušovaná křivka odpovídající $b_c = 0.44816$), a jsou na křivce přítomny pro všechny režimy, v nichž má nekonvexní tvar (na obrázku kontury ležící mezi hranicemi tangenciálního peanutu), a to s výjimkou hyperbolické umbiliky (na obrázku černá přerušovaná křivka odpovídající $b_c = 0.3577$), během níž na křivce inflexní body nejsou. Inflexní body leží na křivce vždy mimo osy.

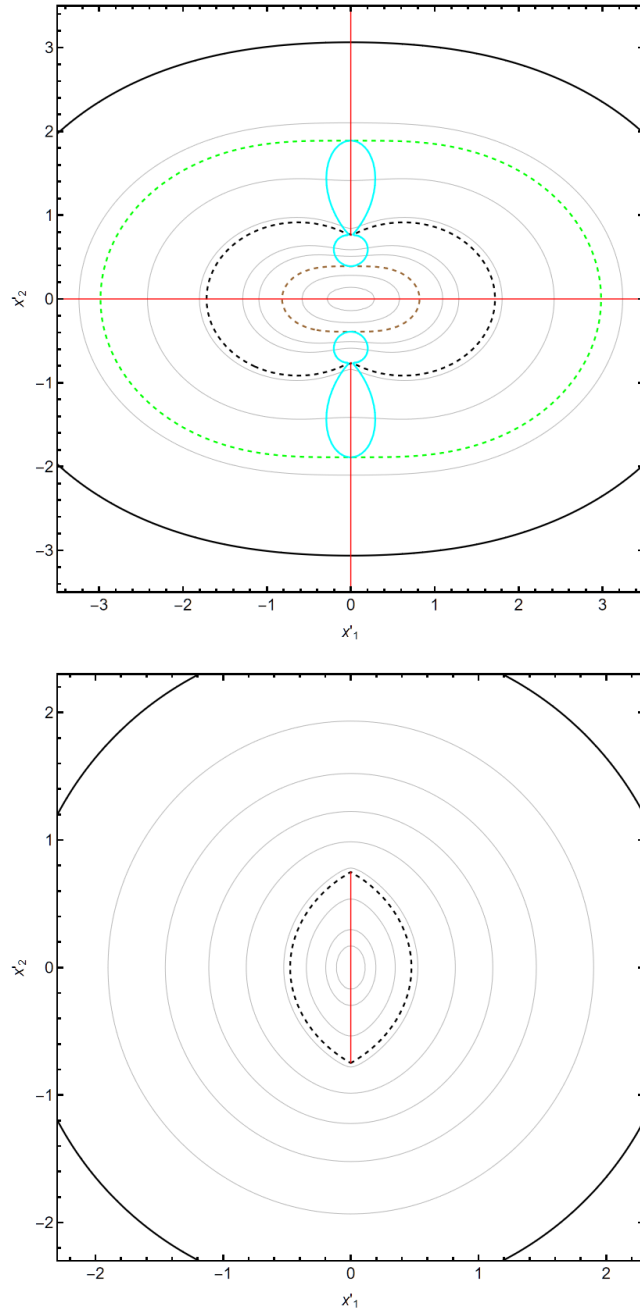
Radiální kritická křivka pro všechny kombinace parametrů konvexní tvar, a nikdy na ní neleží inflexní body.

Na tangenciální kritické křivce se nacházejí dva nebo čtyři body odpovídající kaspům. Leží vždy na osách. Body ležící na vodorovné ose odpovídají kaspům pro všechny hodnoty poloměru jádra. Pro body ležící na svislé ose je hranicí hyperbolická umbilika. Při přechodu přes ni se objevují dva kasy tangenciální kaustiky. Pro daný poměr os odpovídají kaspům body kritických křivek odpovídajících menšímu b_c , než jaké odpovídá umbilice.

Na radiální kritické křivce neleží buďto žádný bod odpovídající kaspům, nebo dva, přičemž oba se poté nacházejí na svislé ose. Hranicí, při níž se objevují na kaustice dva kasy, je hyperbolická umbilika. Pro daný poměr os odpovídají kaspům body kritických křivek odpovídajících většímu b_c , než jaké odpovídá umbilice.

Obrázek 4.19 je vykreslen v přeškálovaných souřadnicích x'_1 a x'_2 , které jsou v jednotkách poloměru jádra b_c .

Na rozdíl od NFW modelu pro NIE nebyly nalezeny jiné režimy, než jsou ty popsané v Kapitole 4.2.1. Rovněž se u něj nevyskytuje žádná hraniční křivka. S rostoucím b_c se kritické křivky zmenšují postupně až do bodu, kdy vymizí. Naopak se zmenšujícím se b_c rostou jejich velikosti nade všechny meze.



Obrázek 4.19 Kontury tangenciální (horní panel) a radiální (dolní panel) části jakobiánu pro hodnotu poměru os $f = 0.8$. Kontury jsou vykresleny pro hodnoty b_c od 0.2 do 0.49 pro tangenciální a od 0.1 do 0.395 pro radiální část. Černou plnou čarou je nahoře zobrazena kontura $b_c = 0.2$ a dole $b_c = 0.1$, černou přerušovanou čarou pak kontura $b_c \approx 0.3577$, v níž dochází k hyperbolické umbilice. Zelenou přerušovanou čarou zobrazena kontura $b_c \approx 0.26405$, v níž tangenciální kritická křivka je na první hranici tvaru peanutu, a hnědou přerušovanou čarou zobrazena kontura $b_c \approx 0.44816$, v níž tangenciální kritická křivka je na druhé hranici tvaru peanutu. Zbytek kontur zobrazen šedou plnou čarou (vně umbiliky zobrazeny kontury s krokem 0.05, uvnitř umbiliky speciálně kontury 0.4, 0.42, 0.47, 0.49 pro tangenciální část a 0.375, 0.39 a 0.395 pro radiální část). Tyrkysově je vyznačená inflexní křivka, tvořená inflexními body všech kontur. Červeně je vyznačená kaspová křivka, tvořená obrazy kaspů na všech konturách.

5 Omezený nesingulární izotermální elipsoid

V této kapitole se zaměříme na omezený nesingulární izotermální elipsoid (TNIE). Jedná se o úpravu NIE modelu diskutovaného v Kapitole 4, jehož nedostatkem byla nekonečná celková hmotnost. TNIE představuje díky konečné hmotnosti vhodnější aproximaci reálných čochujících galaxií nebo kup galaxií ve vesmíru. Příslušná úprava však model zesložítuje. Zatímco NIE byl obecně závislý na dvou nezávislých parametrech, vlastnosti TNIE budou zkoumány v závislosti na hodnotě parametrů tří.

Jelikož je TNIE úpravou NIE, využíváme pro jeho zavedení definice a vztahy představené v Kapitole 4. Při zkoumání vlastností TNIE pak klademe důraz především na popis odlišností v chování oproti NIE.

5.1 Definice

TNIE na rozdíl od omezeného NFW modelu nemá ostrou prostorovou hranici, za níž by hustota byla nulová, nýbrž ho lze získat jakožto lineární kombinaci dvou NIE (Kassiola a Kovner (1993)). NIE model je parametrizovaný dvěma parametry, poměrem os a poloměrem jádra. TNIE je sestaven jako rozdíl dvou NIE, přičemž první má daný poměr os f a poloměr jádra b_c , a druhý má daný stejný poměr os f , avšak jiný poloměr jádra b_l , přičemž platí $b_l > b_c$. Pro elipsy s vedlejší poloosou větší než tento parametr klesá konvergence rychleji k nule, místo poloměru jádra tedy b_l představuje limitní poloměr.

Například konvergenci prvního NIE lze zapsat jako $\kappa_{NIE1}(\mathbf{x}) = \kappa_{NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\}$ a druhého NIE jako $\kappa_{NIE2}(\mathbf{x}) = \kappa_{NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}$, přičemž složená závorka explicitně vyjadřuje závislost na daných parametrech. Konvergenci TNIE lze poté vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}) &= \kappa_{TNIE}(\mathbf{x})\{f, b_c, b_l\} = \kappa_{NIE1}(\mathbf{x}) - \kappa_{NIE2}(\mathbf{x}) \\ &= \kappa_{NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\} - \kappa_{NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Obdobně jako konvergenci lze díky linearitě definičních vztahů zapsat i složky úhlu odklonu a shearu:

$$\alpha_{1TNIE}(\mathbf{x}) = \alpha_{1NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\} - \alpha_{1NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}, \quad (5.2)$$

$$\alpha_{2TNIE}(\mathbf{x}) = \alpha_{2NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\} - \alpha_{2NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}, \quad (5.3)$$

$$\gamma_{1TNIE}(\mathbf{x}) = \gamma_{1NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\} - \gamma_{1NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}, \quad (5.4)$$

$$\gamma_{2TNIE}(\mathbf{x}) = \gamma_{2NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\} - \gamma_{2NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}. \quad (5.5)$$

Velikost shearu, která lineární není, lze vyjádřit jako:

$$\gamma_{TNIE}(\mathbf{x}) = \sqrt{\gamma_{1TNIE}(\mathbf{x})^2 + \gamma_{2TNIE}(\mathbf{x})^2} \quad (5.6)$$

Čočkovou rovnicí lze zapsat jako:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_{TNIE}(\mathbf{x}), \quad (5.7)$$

a její jakobián má standardní tvar:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J}_{TNIE}(\mathbf{x}) &= |1 - \kappa_{TNIE}(\mathbf{x})|^2 - \gamma_{TNIE}(\mathbf{x})^2 \\ &= (1 - \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}) + \gamma_{TNIE}(\mathbf{x}))(1 - \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}) - \gamma_{TNIE}(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Podobně jako u NIE lze i u TNIE modelu vyjádřit vztahy tak, aby konvergence, úhel odklonu a shear byly v souřadnicích v jednotkách poloměru jádra b_c .

Například konvergenci $\kappa_{NIE1}(\mathbf{x}) = \kappa_{NIE}(\mathbf{x})\{f, b_c\}$ lze přímočaře převést na $\kappa_{NIE1}(\mathbf{x}') = \kappa_{NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c\}$ stejně jako v případě NIE, tedy na vztah 4.18. V případě $\kappa_{NIE2}(\mathbf{x}) = \kappa_{NIE}(\mathbf{x})\{f, b_l\}$ je však třeba v jednotkách poloměru jádra b_c vyjádřit nejen souřadnice \mathbf{x} , nýbrž i b_l . Bude tak platit:

$$\kappa_{NIE2}(\mathbf{x}') = \kappa_{NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c \cdot b_l'\} = \frac{\sqrt{f}}{2b_c \sqrt{x_2'^2 + f^2 x_1'^2 + b_l'^2}}, \quad (5.9)$$

přičemž tento výraz je závislý již na všech třech parametrech TNIE modelu:

$$\begin{aligned} \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}') &= \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c, b_l'\} = \kappa_{NIE1}(\mathbf{x}') - \kappa_{NIE2}(\mathbf{x}') \\ &= \kappa_{NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c\} - \kappa_{NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c \cdot b_l'\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Obdobně jako konvergenci lze zapsat i složky úhlu odklonu a shearu:

$$\alpha'_{1TNIE}(\mathbf{x}') = \alpha'_{1NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c\} - \alpha'_{1NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c \cdot b_l'\}, \quad (5.11)$$

$$\alpha'_{2TNIE}(\mathbf{x}') = \alpha'_{2NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c\} - \alpha'_{2NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c \cdot b_l'\}, \quad (5.12)$$

$$\gamma_{1TNIE}(\mathbf{x}') = \gamma_{1NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c\} - \gamma_{1NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c \cdot b_l'\}, \quad (5.13)$$

$$\gamma_{2TNIE}(\mathbf{x}') = \gamma_{2NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c\} - \gamma_{2NIE}(\mathbf{x}')\{f, b_c \cdot b_l'\}. \quad (5.14)$$

Velikost shearu lze vyjádřit jako:

$$\gamma_{TNIE}(\mathbf{x}') = \sqrt{\gamma_{1TNIE}(\mathbf{x}')^2 + \gamma_{2TNIE}(\mathbf{x}')^2} \quad (5.15)$$

Čočkovou rovnicí lze zapsat jako:

$$\mathbf{y}'(\mathbf{x}') = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\alpha}'_{TNIE}(\mathbf{x}'), \quad (5.16)$$

a její jakobián má tvar:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J}_{TNIE}(\mathbf{x}') &= |1 - \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}')|^2 - \gamma_{TNIE}(\mathbf{x}')^2 \\ &= (1 - \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}') + \gamma_{TNIE}(\mathbf{x}'))(1 - \kappa_{TNIE}(\mathbf{x}') - \gamma_{TNIE}(\mathbf{x}')). \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.2 Vlastnosti

Úhel odklonu, konvergence, shear a jakobián jsou pro TNIE funkce závislé na souřadnicích \boldsymbol{x} a třech parametrech - poměru os f , poloměru jádra b_c a limitním poloměru b_l . Nyní budeme vyšetřovat vybrané vlastnosti TNIE modelu v závislosti na hodnotách těchto parametrů obdobně jako v Kapitolách 3.2 a 4.2 pro elipsoidální NFW model a NIE. K numerickému řešení rovnic a grafické simulaci byl využit opět software Wolfram Mathematica (verze 13.2).

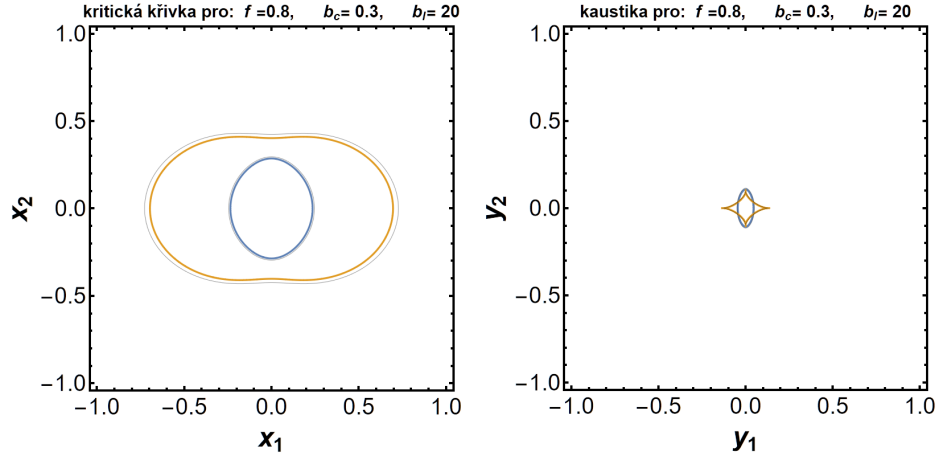
Stejně jako u NIE se i pro TNIE poměr os se pohybuje v intervalu $(0;1]$. poloměr jádra může nabývat libovolné nezáporné hodnoty, lze však opět čekat vymizení kritických křivek a kaustik pro jeho vyšší hodnoty. Limitní poloměr může nabývat libovolné hodnoty $b_l > b_c$. Čím větší je poměr b_l/b_c , tím je model větší a hmotnější. V limitě $b_l/b_c \rightarrow \infty$ pak TNIE přechází na NIE.

5.2.1 Prostor parametrů

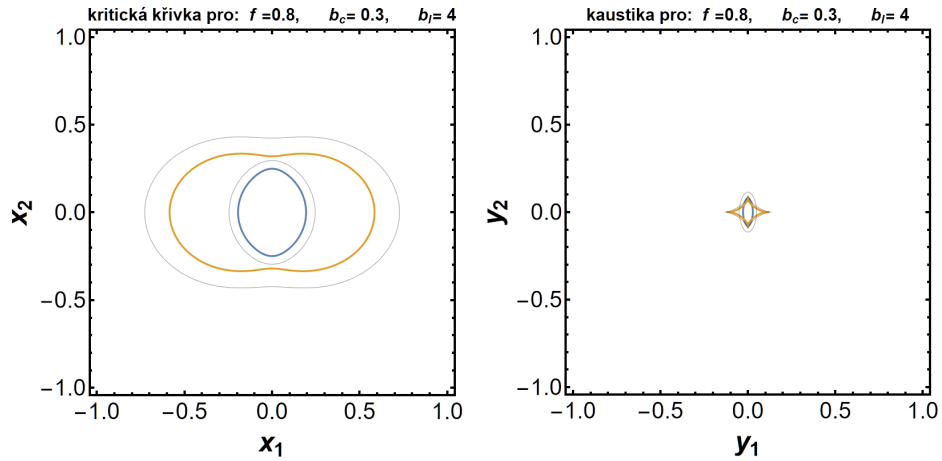
Kritické křivky a kaustiky lze pro TNIE vykreslit obdobně, jako pro předchozí modely, tedy položením jakobiánu daného vztahem 5.8 rovným nule, a numerickým řešením této rovnice pro \boldsymbol{x} a následně promítnutím nalezených bodů čočkovou rovnicí 5.7.

Při změně limitního poloměru dochází ke změnám velikostí a tvarů kritických křivek a kaustik podobně jako při změnách poměru os a poloměru jádra. Vliv změny b_l za konstantních ostatních parametrů je prezentován na Obrázcích 5.1-5.4. V obrázcích je pro srovnání černě vynesena kritická křivka a kaustika NIE se stejnými parametry $f = 0.8$ a $b_c = 0.3$. Souřadnice \boldsymbol{x} a \boldsymbol{y} jsou vyjádřeny v jednotkách škálového parametru ξ_0 , které byly užity i u NIE.

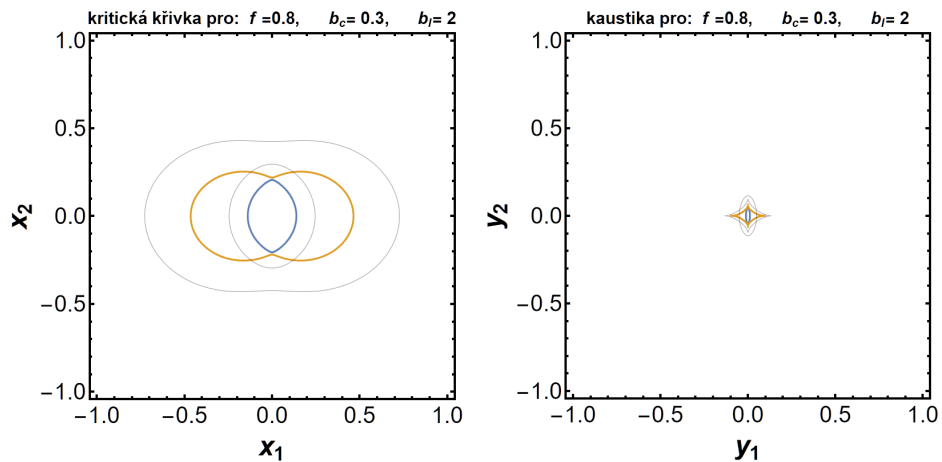
Na Obrázku 5.1 je model omezen vysokým limitním poloměrem $b_l = 20$ (vzhledem k hodnotě b_c) a kritická křivka a kaustika TNIE má téměř stejný tvar a velikost, jako pro NIE. Při snižování limitního poloměru se začne TNIE výrazněji lišit tvarem i velikostí. To je pro $b_l = 4$ zobrazeno na Obrázku 5.2. Pro $b_l = 2$ je na Obrázku 5.3 znázorněno, že TNIE přechází přes hranici hyperbolické umbiliky do odlišného režimu oproti NIE. Pro dostatečně nízký limitní poloměr dochází k vymizení jednotlivých částí kritických křivek a kaustik. Na Obrázku 5.4 je pro $b_l = 1$ zobrazen TNIE, jenž má pouze tangenciální kritickou křivku a kaustiku.



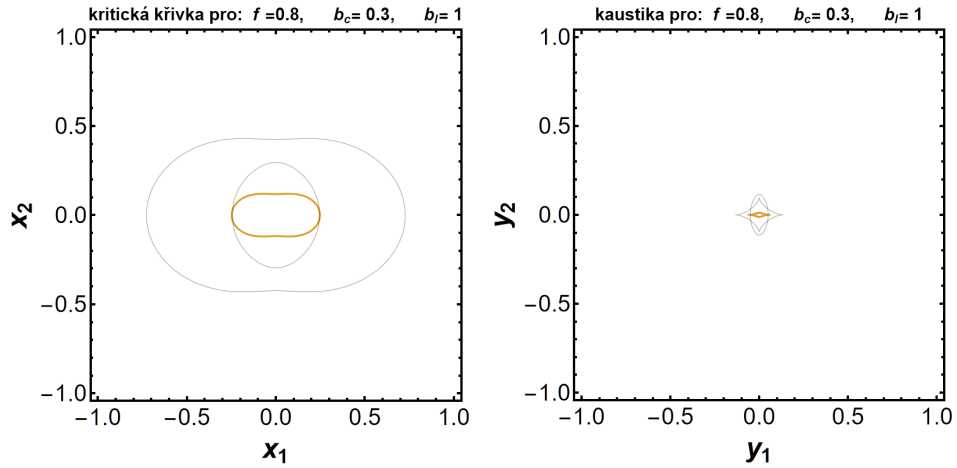
Obrázek 5.1 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) TNIE pro $b_l = 20$, $b_c = 0.3$ a $f = 0.8$. Oranžově je vyznačena tangenciální část, modře radiální. Černá čára znázorňuje kritickou křivku a kaustiku NIE se stejnými hodnotami parametrů b_c a f .



Obrázek 5.2 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) TNIE pro $b_l = 4$, $b_c = 0.3$ a $f = 0.8$. Barevné značení stejné jako na Obrázku 5.1.



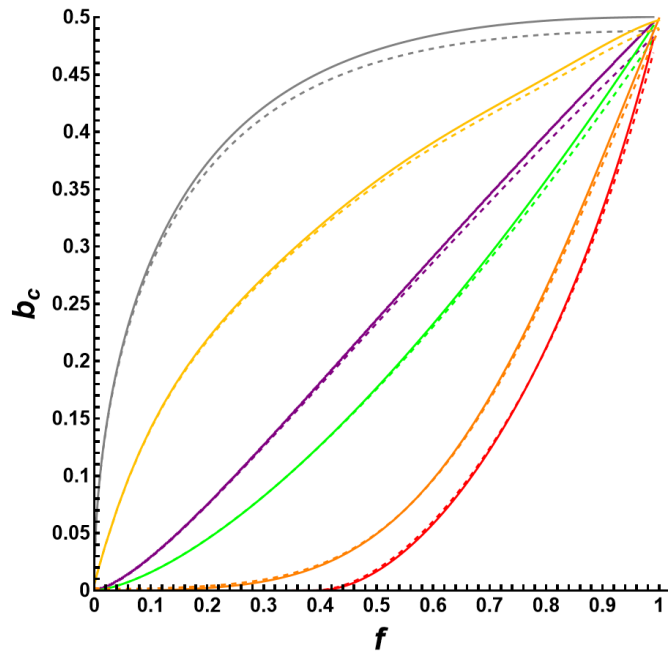
Obrázek 5.3 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) TNIE pro $b_l = 2$, $b_c = 0.3$ a $f = 0.8$. Barevné značení stejné jako na Obrázku 5.1.



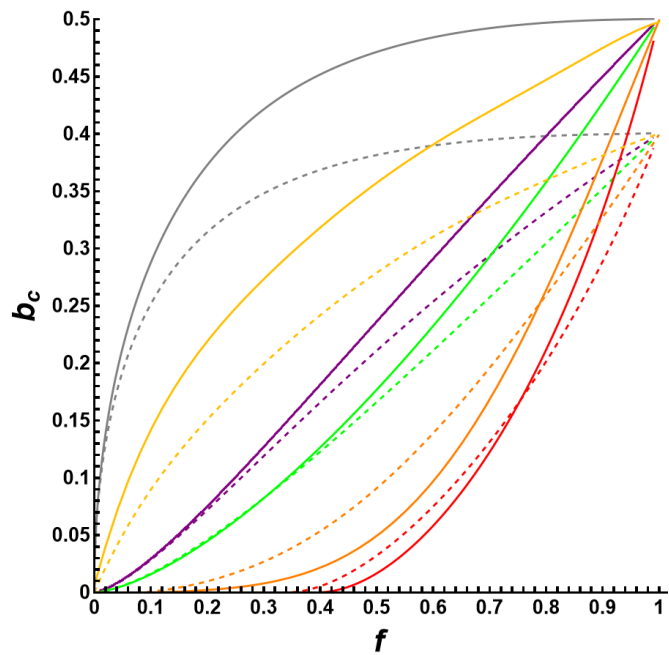
Obrázek 5.4 Kritická křivka (vlevo) a kaustika (vpravo) TNIE pro $b_l = 1$, $b_c = 0.3$ a $f = 0.8$. Barevné značení stejné jako na Obrázku 5.1.

Z Obrázků 5.1-5.4 je patrné, že pokud NIE s danými parametry f a b_c omezíme limitním poloměrem, obecně se mění velikost i tvar kritických křivek a kaustik, a může tak docházet i ke změně režimu čočkování. TNIE s danými f a b_c tak může být v režimu, kterému by odpovídal NIE s jinou hodnotou těchto parametrů. Omezení modelu tak způsobuje změnu v odpovídajícím prostoru parametrů f a b_c oproti prostoru parametrů NIE modelu (vizte Kapitola 4.2.1, Obrázek 4.9).

Způsob, jakým se mění hranice v odpovídajícím prostoru parametrů f a b_c pro různé hodnoty limitního poloměru je zobrazen na Obrázcích 5.5 a 5.6. Pro hodnoty f nastávají jednotlivé hranice režimů při jiných hodnotách b_c . Čím je model omezenější (tedy b_l menší), tím odlišnější tyto hodnoty jsou. Pro vyšší f je příslušná hodnota b_c u TNIE nižší pro všechny hranice, pro nižší f lze naopak pro cusp piercingu (červenou čarou) a hranici tangenciálního peanutu (jež je zobrazena oranžovou čarou) zřetelně pozorovat, že u TNIE je příslušná hodnota b_c vyšší. Obecná struktura prostoru parametrů však zůstává stejná. Všech šest hranic má jeden společný bod odpovídající parametrům $f = 0$ a $b_c = 0$, a druhý společný bod pro poměr os $f = 1$, u nějž se hodnota b_c liší pro různé b_l . Mezi těmito body se hranice neprotínají, nedotýkají, ani se nepropojují.



Obrázek 5.5 Deformace prostoru parametrů pro $b_l = 20$. Přerušovanou čarou hranice režimů pro TNIE, plnou čarou pro NIE. Barevné schéma odpovídá Obrázku 4.9.



Obrázek 5.6 Deformace prostoru parametrů pro $b_l = 2$. Přerušovanou čarou hranice režimů pro TNIE, plnou čarou pro NIE. Barevné schéma odpovídá Obrázku 4.9.

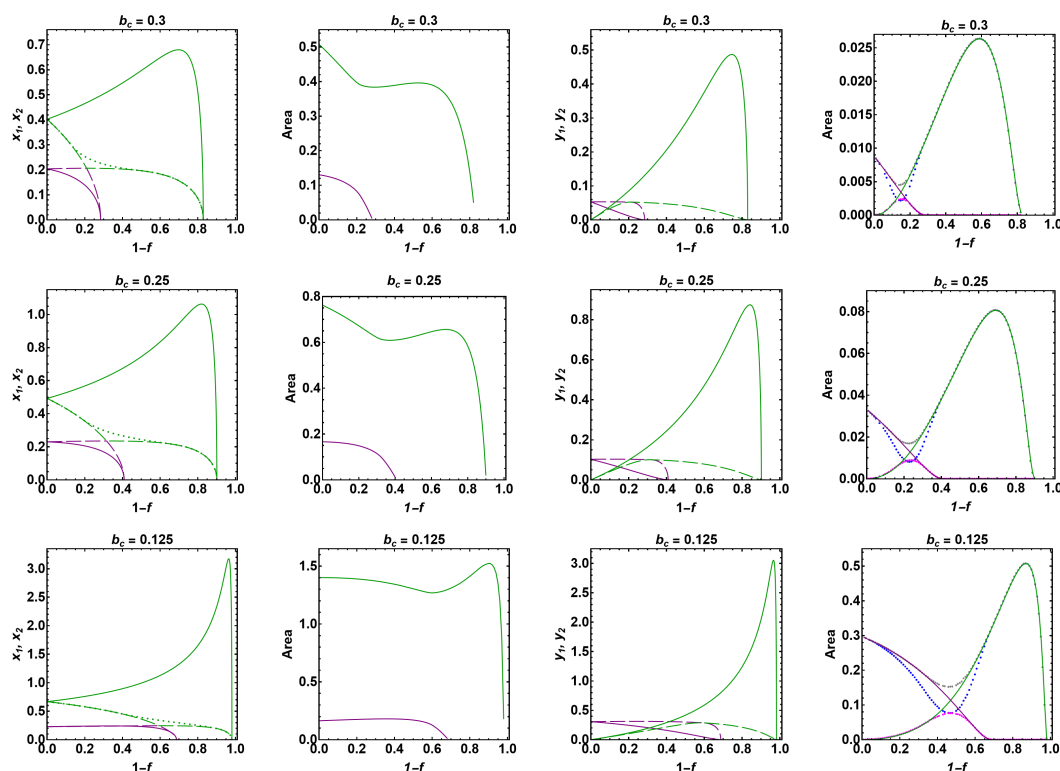
5.2.2 Rozměry kritických křivek a kaustik

Při změně parametrů dochází obecně ke změně velikostí kritických křivek a kaustik, podobně jako pro NIE. Mění se jejich průsečíky s vodorovnou a svislou osou, a mění se plocha těmito křivkami uzavřená. Rozměry kritických křivek a kaustik jsou pro TNIE zobrazeny v Obrázcích 5.7 a 5.8.

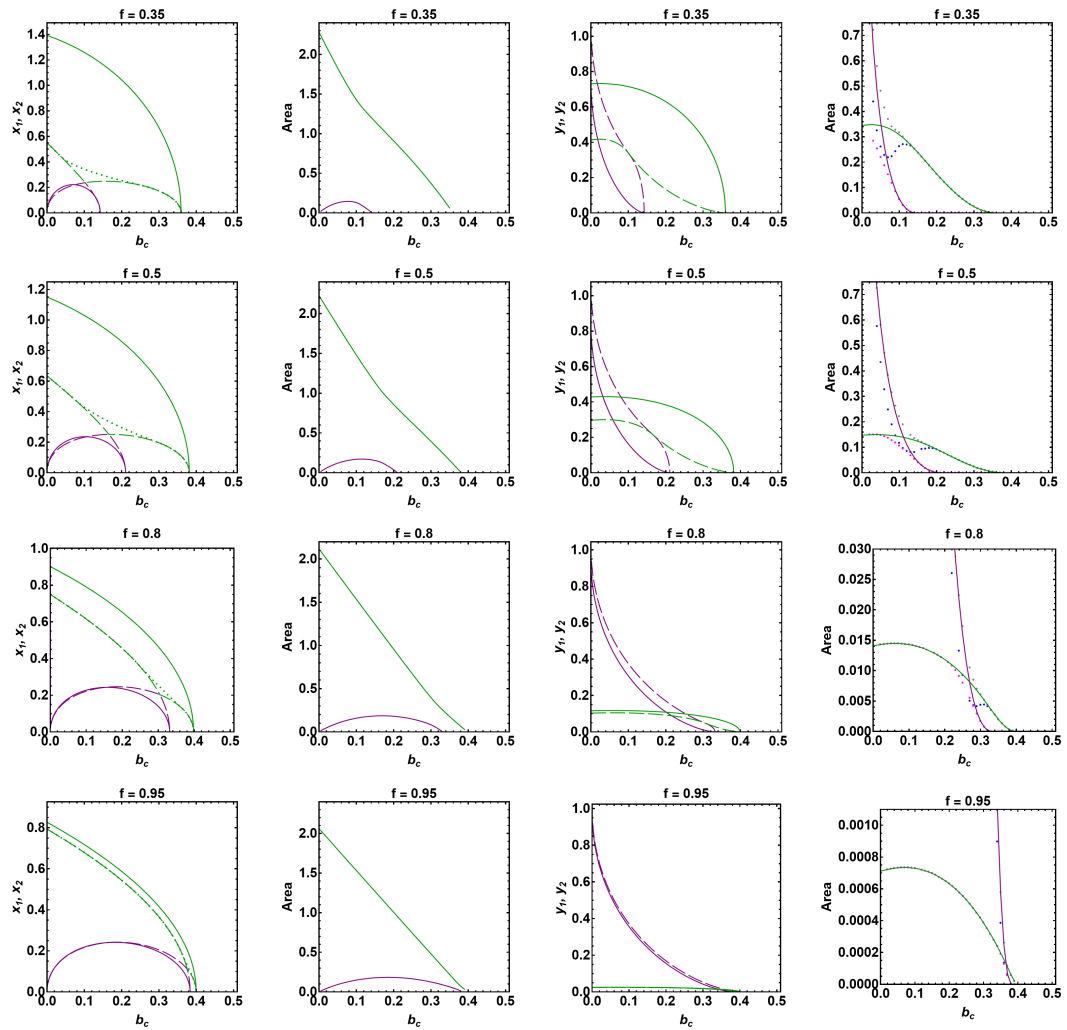
V Obrázku 5.7 jsou pro různé hodnoty b_c zobrazeny rozměry kritických křivek v závislosti na poměru os f , respektive zploštění $1 - f$. Rovněž jsou v něm zobrazeny rozměry kaustik včetně ploch oblastí s více obrazy. Tyto rozměry jsou v jednotkách škálového parametru ξ_0 , respektive ξ_0^2 . Uvedeny jsou výsledky pro nižší tři b_c z Obrázku 4.11 pro NIE (pro hodnotu čtvrtou hodnotu $b_c = 0.4$ již u TNIE neexistují kritické křivky a kaustiky), zde vše pro limitní poloměr $b_l = 2$.

V Obrázku 5.8 jsou pro různé hodnoty f zobrazeny rozměry kritických křivek v závislosti na poloměru jádra b_c . Rovněž jsou v něm zobrazeny rozměry kaustik včetně ploch oblastí s více obrazy. Uvedeny jsou výsledky pro stejné hodnoty f jako v Obrázku 4.12 pro NIE, zde vše pro limitní poloměr $b_l = 2$.

Rozměry kritických křivek a kaustik pro TNIE vykazují velmi podobné chování jako pro NIE. Jejich průběhy prezentované v Obrázcích 5.7 a 5.8 odpovídají Obrázkům 4.11 a 4.12, pouze jsou oproti nim deformované způsobem odpovídajícím deformaci prostoru parametrů, kdy v TNIE mají pro dané f kritické křivky a kaustiky ty samé režimy pro nižší b_c , a podobně pro dané b_c mají ty samé režimy pro nižší f . Navíc jsou pro TNIE škály rozměrů celkově menší než pro NIE. Pro kaustiky je tento efekt výraznější než pro kritické křivky (nejvýrazněji pak lze pozorovat v prvním řádku Obrázku 5.7).



Obrázek 5.7 Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na zploštění, respektive poměru os pro limitní poloměr $b_l = 2$ a různé hodnoty b_c . Struktura obrázku a značení (barvy a typy čar) kopíruje Obrázek 4.11.



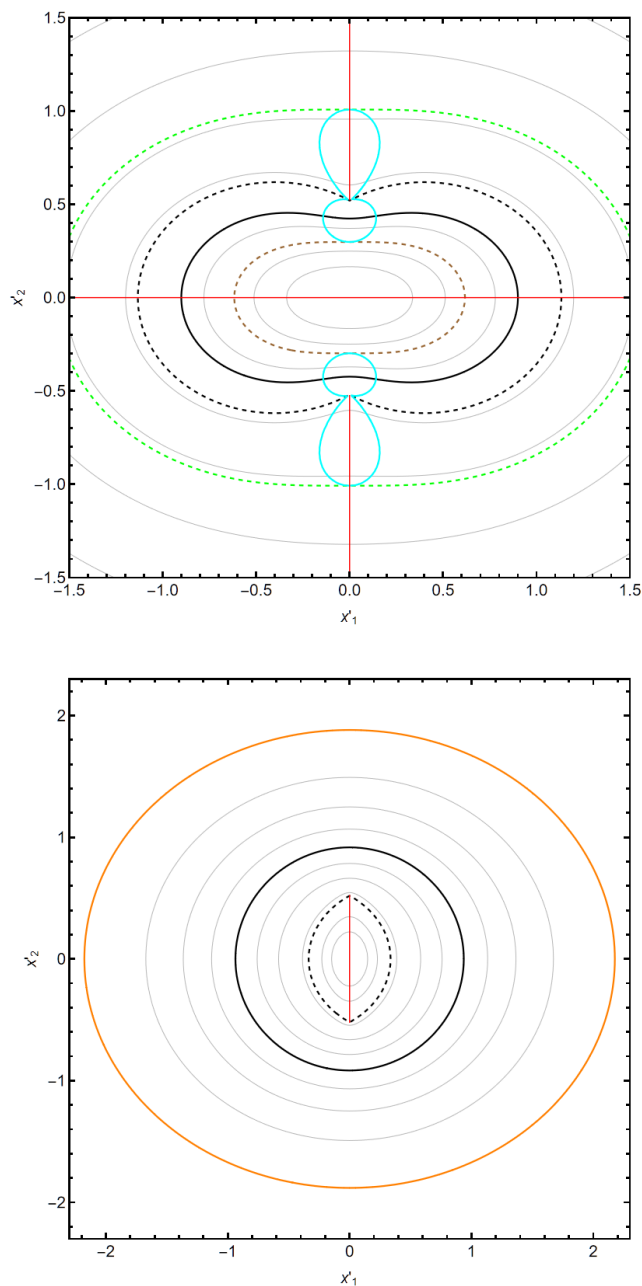
Obrázek 5.8 Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na poloměru jádra pro limitní poloměr $b_l = 2$ a různé hodnoty f . Struktura obrázku a značení (barvy a typy čar) kopíruje Obrázek 4.12.

5.2.3 Kontury částí jakobiánu

Obdobně jako pro předchozí modely v Kapitolách 3.2.3 a 4.2.4 i pro TNIE vykreslíme kontury tangenciální a radiální části jakobiánu. V přeškálovaných souřadnicích x'_1, x'_2 a s limitním poloměrem b'_l odpovídají tyto kontury tangenciální a radiální kritickým křivkám s různými hodnotami poloměru jádra b_c . Na Obrázku 5.9 jsou současně vykresleny kontury tangenciální (horní panel) a radiální (dolní panel) kritické křivky se stejnou hodnotou $f = 0.8$ a $b'_l = 2$, avšak rozdílnými hodnotami b_c . Lze tak dobře pozorovat, jak se v závislosti na b_c mění tvar kritické křivky, podle průsečíků s inflexní křivkou (vyznačená tyrkysově) lze sledovat počet a polohu jejích inflexních bodů, podle průsečíků s kaspovou křivkou (vyznačená červeně) počet a polohu bodů odpovídajících kaspům na kaustice.

Obecné chování tangenciálních kontur je podobné jako pro NIE. Dochází však k posunu hranic režimů v prostoru parametrů. To je způsobeno tím, že kontury odpovídají kritickým křivkám pro různé b_c za konstantního b'_l . Každá kontura má tedy jinou hodnotu limitního poloměru b_l . Analýzou kontur TNIE byly pro tangenciální kritickou křivku pro $b'_l = 2$ potvrzeny pouze stejné režimy jako u NIE. Pro zmenšující se b_c rostou velikosti kontur tangenciální části jakobiánu nade všechny meze.

Pro radiální kontury jakobiánu rovněž dochází k posunu hranic ze stejných důvodů. Ani v tomto případě nebyly nalezeny nové režimy, nicméně se u TNIE vyskytuje radiální hraniční křivka, ke které se radiální kritické křivky přibližují v limitě $b_c \rightarrow 0$.



Obrázek 5.9 Kontury tangenciální (horní panel) a radiální (dolní panel) části jakobiánu pro $f = 0.8$ a $b'_l = 2$. Kontury jsou vykresleny pro hodnoty b_c od 0.1 (vnější šedá) do 0.24 (nejmenší šedá) pro tangenciální a od 0.25 (vnější šedá) do 0.195 (nejmenší šedá) pro radiální část. Černou plnou čarou je zobrazena kontura $b_c = 0.2$ pro tangenciální část a $b_c = 0.1$ pro radiální, černou přerušovanou čarou kontura $b_c \approx 0.1804$, v níž dochází k hyperbolické umbilice, zelenou přerušovanou čarou kontura $b_c \approx 0.1463$ odpovídající hranici tangenciálního peanutu a hnědou přerušovanou čarou zobrazena kontura $b_c \approx 0.2226$ odpovídající druhé hranici tangenciálního peanutu. Zbytek kontur je zobrazen šedou plnou čarou (vně umbiliky zobrazeny kontury s krokem 0.025, uvnitř umbiliky speciálně kontury 0.21, 0.23, 0.24 pro tangenciální část a 0.19, 0.195 pro radiální část). Oranžově je vykreslena radiální hraniční křivka. Tyrkysově je vyznačená inflexní křivka, tvořená inflexními body všech kontur. Červeně je vyznačená kaspová křivka, tvořená obrazy kaspů na všech konturách.

6 Diskuze vlastností analyzovaných modelů

V Kapitolách 3-5 jsou představeny a podrobně rozebrány tři modely gravitačních čoček s elipsoidální symetrií, NFW model, NIE a TNIE. Pro NFW model a NIE přitom platí, že jejich celková hmotnost diverguje, zatímco TNIE má již celkovou hmotnost konečnou. Všechny tři tyto modely lze využít pro studium gravitačního čočkování, např. galaxiemi a kupami galaxií, v některých vlastnostech se však vzájemně liší.

6.1 Prostor parametrů a kontury částí jakobiánu

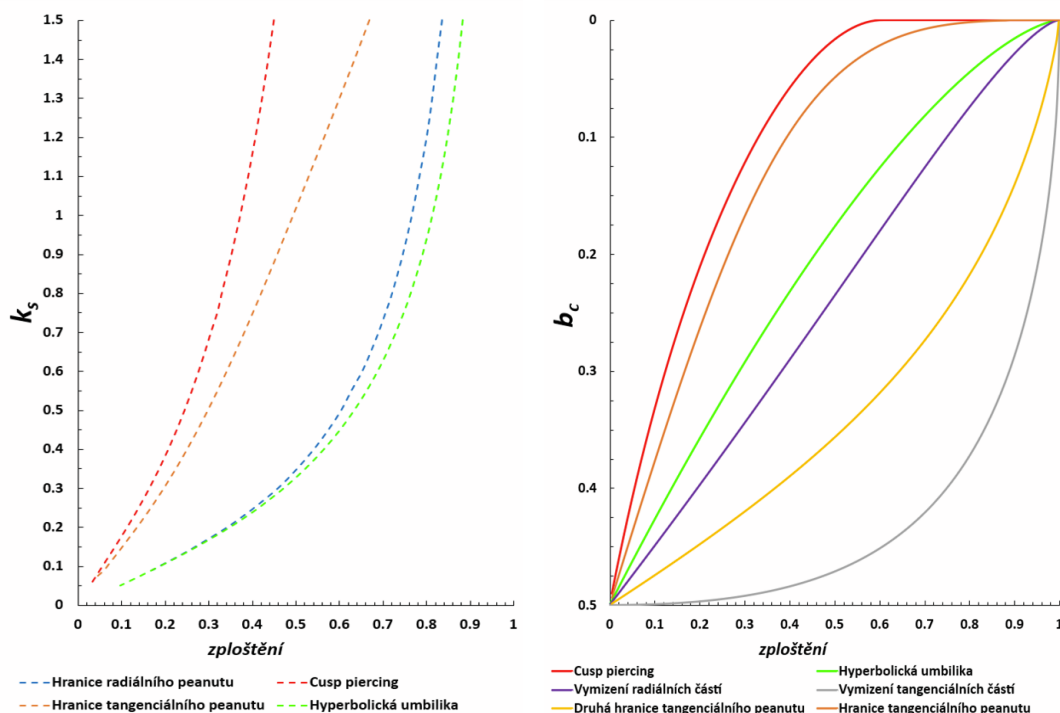
Pro všechny modely jsou studovány vlastnosti jejich kritických křivek a kaustik. Tvary a rozměry kritických křivek a kaustik závisí citlivě na veličinách parametrizujících dané modely. Pro NFW to je konvergenční parametr a excentricita, a pro NIE a TNIE poloměr jádra a poměr os. TNIE navíc závisí na limitním poloměru určujícím, jak je model omezený.

V závislosti na těchto parametrech je možné u tvarů kritických křivek a kaustik pozorovat různé režimy a jejich hranice. U NFW modelu i NIE lze nalézt hranice cusp piercingu, tangenciálního peanutu a hyperbolické umbiliky. Pro NIE je navíc možno pozorovat vymizení radiální i tangenciální části kritické křivky a kaustiky. Zároveň se u něj vyskytuje druhá hranice tangenciálního peanutu. Pro tento model tedy na rozdíl od NFW tangenciální kritická křivka pro každou hodnotu zploštění z intervalu $(0, 1)$ má tvar peanutu pouze pro konečný interval hodnot druhého z parametrů modelu.

U NFW modelu se však vyskytují jiné režimy, jež naopak není možno nalézt u NIE. Kromě tangenciální části kritické křivky může tvaru peanutu nabývat i radiální část. Obě části pak mají tvar peanutu pro oblast v prostoru parametrů ohraničenou pouze zdola excentricitou pro jakoukoli hodnotu konvergenčního parametru. Pro extrémní hodnoty excentricity a konvergenčního parametru se objevují i další komplikovanější režimy. Může docházet k zvýšení počtu kaspů, které již poté neleží všechny na hlavních osách. Tangenciální a radiální kritická křivka se kromě svislé, respektive vodorovné osy může prohýbat i v dalších bodech. To představuje rozdíl oproti NIE, jehož tangenciální kaustika může mít pouze dva nebo čtyři kasy ležící vždy na osách a radiální kaustika žádné nebo dva kasy, které rovněž leží na osách. Tangenciální kritická křivka NIE se může prohýbat pouze podél svislé osy a radiální má vždy pouze konvexní tvar.

V Obrázku 6.1 je zobrazeno srovnání prostorů parametrů pro NFW model (vlevo) a NIE (vpravo). Zakresleny jsou zde hranice režimů čočkování pro NFW model, respektive NIE jako závislosti konvergenčního parametru, respektive poloměru jádra daného modelu na zploštění. Z obrázku jsou patrné rozdílné závislosti parametrů κ_s a b_c na zploštění. Zatímco u NFW modelů pro nízká zploštění jsou hodnoty konvergenčního parametru na hranicích režimů nízké a rostou se zvyšujícím se zploštěním do libovolně vysokých hodnot (příčemž pro extrémní hodnoty a vysoká zploštění se objevují nové režimy, jejichž hranice zde nejsou vykresleny), u NIE dosahuje poloměr jádra nanejvýš hodnoty 0.5 u sférického

případu, než kritická křivka a kaustika zcela zmizí, a s rostoucím zploštěním jeho hodnoty odpovídající všem hranicím klesají. Pro extrémní zploštění se pak rozpětí b_c , pro něž existuje alespoň jedna část kritické křivky, limitně blíží nule.



Obrázek 6.1 Porovnání prostorů parametrů pro NFW model (vlevo) a NIE (vpravo). Plnými čarami jsou vykresleny hranice režimů pro NIE, přerušovanými pro NFW model. Jednotlivé barevně vyznačené hranice jsou popsány v legendách pod grafy.

Toto opačné chování lze vysvětlit studováním závislosti konvergencí, úhlů odklonu a shearů daných modelů na příslušných parametrech. Zatímco u NFW modelu jsou tyto veličiny konvergenčnímu parametru přímo úměrné, pro NIE tyto veličiny s rostoucím poloměrem jádra klesají. Při porovnávání modelů je tedy třeba brát ohled na to, že se tyto parametry chovají v obráceném smyslu. To je v souladu např. s chováním rozměrů kritických a kaustik z Obrázků 3.12, 3.13, 4.11 a 5.7, kde v prvních dvou lze pro NFW model pozorovat zvětšující kritické křivky a kaustiky s rostoucím κ_s , a v druhých dvou pro NIE a TNIE naopak se snižujícím se b_c .

Výše zmíněné režimy čočkování pro extrémní hodnoty parametrů u NFW modelu lze pozorovat na Obrázku 3.16 sledováním tvaru inflexních a kaspových křivek. V obrázku je mj. vykreslena radiální hraniční křivka, tedy limita radiálních kritických křivek pro $\kappa_s \rightarrow \infty$. Obdobně jsou kontury (pro různé hodnoty b_c) vykresleny pro NIE v Obrázku 4.19. U něj se radiální hraniční křivka nevyskytuje. Objeví se však, pokud dojde k omezení modelu, tedy úpravě modelu z NIE na TNIE. V Obrázku 5.9, jenž zobrazuje kontury pro TNIE, vykreslena je, a to jako limita radiálních kritických křivek pro $b_c \rightarrow 0$. Obecná struktura inflexních a kaspových křivek je pro NIE a TNIE podobná, liší se však od NFW modelu. Pro kaspové křivky je tato odlišnost pozorovatelná až pro extrémnější hodnoty parametrů NFW modelu, pro inflexní je zjevná již v oblasti prostoru parametrů diskutovaného v Kapitole 3.2.1, jak lze pozorovat v blízkosti počátku na Obrázku 3.15.

U TNIE lze nalézt stejné režimy čočkování a jejich hranice jako u NIE. Jeho prostor parametrů je však oproti NIE deformovaný v závislosti na limitním poloměru b_l , což je ilustrováno v Obrázcích 5.5 a 5.6. Pro dané f jsou příslušné hodnoty b_c jednotlivých hranic odlišné než u NIE. Čím nižší je hodnota b_l , tím odlišnější hranice jsou. Mimo tuto deformaci mají prostory parametrů pro NIE a TNIE podobnou obecnou strukturu.

6.2 Rozměry kritických křivek a kaustik

Výrazné rozdíly mezi NFW modelem, NIE a TNIE lze nalézt také při sledování změn rozměrů jejich kritických křivek a kaustik v závislosti na parametrech modelů. Při porovnání průběhů rozměrů v závislosti na zploštění pro různé konvergenční parametry u NFW modelu (popsáno v Kapitole 3.2.2 a graficky znázorněno na Obrázcích 3.12 a 3.13; detailnější rozbor vizte Heyrovský a Karamazov (2024)) a různé hodnoty poloměru jádra u NIE (popsáno v Kapitole 4.2.2 a graficky znázorněno na Obrázku 4.11) lze nalézt mnoho odlišností.

Pro oba modely platí, že při nulovém zploštění mají rozměry kritických křivek nenulovou hodnotu (pro nenulové hodnoty κ_s a b_c). Se zvyšujícím se zploštěním však průběhy nejsou totožné. Pro oba modely lze nalézt hranici tangenciálního peanutu, v níž se začínají lišit hodnoty svislých tangenciálních rozměrů a svislých maxim modelů. Rovněž lze pro oba modely nalézt hranice hyperbolické umbiliky, kdy mají svislé rozměry tangenciální a radiální části stejnou hodnotu. U NIE však lze navíc nalézt i druhou hranici tangenciálního peanutu, v níž svislé maximum opět nabývá stejné hodnoty jako svislý tangenciální rozměr. Kromě toho lze pro NIE identifikovat hranice radiálního a tangenciálního vymizení, v nichž pro příslušné hodnoty zploštění radiální, respektive tangenciální rozměry dosáhnou nulové hodnoty. U NFW modelu radiální rozměry dosáhnou nulové hodnoty až v limitě jednotkového zploštění. U tangenciální části pak nulové hodnoty v této limitě dosáhne pouze svislý rozměr, zatímco vodorovný konverguje ke konečné kladné hodnotě.

Odlišnosti se projevují i u velikostí ploch uzavřených kritickými křivkami. Pro nulové zploštění radiální i tangenciální plochy obou modelů mají nenulovou velikost. Zatímco však pro NIE dosáhnou při zvyšování zploštění tyto plochy nulových hodnot v radiálním, respektive tangenciálním vymizení, pro NFW model plochy dosáhnou nulové hodnoty až v limitě jednotkového zploštění.

Na průběhy rozměrů kritických křivek NIE v závislosti na zploštění za konstantního b_c má konkrétní hodnota poloměru jádra vliv jednak na celkové škálování (pro nižší b_c dosahují rozměry obecně vyšších hodnot), jednak v strmosti některých závislostí, v hodnotách zploštění pro jednotlivé stacionární body a pozorovatelné hranice režimů. U NFW modelu hodnota konvergenčního parametru rovněž ovlivňuje zmíněné vlastnosti (např. pro nižší κ_s dosahují rozměry obecně nižších hodnot), navíc ovšem může mít dramatičtější vliv na celkový průběh závislosti na zploštění. Jako příklad zde lze připomenout tangenciální plochu, která se pro $\kappa_s = 2$ s rostoucím zploštěním pouze zmenšuje, ovšem pro $\kappa_s = 0.125$ se nejprve zmenšuje, poté zvětšuje, a poté opět zmenšuje (první a poslední panel v pravém sloupci na Obrázku 3.12).

Při porovnání závislostí rozměrů kaustik na zploštění lze nalézt podobné odlišnosti jako u kritických křivek. Pro nulové zploštění mají radiální rozměry

kaustik obou modelů nenulovou hodnotu, tangenciální rozměry pak hodnotu nulovou. Pro NIE dosáhnou rozměry při zvyšujícím se zploštění nulových hodnot v radiálním, respektive tangenciálním vymizení. Pro NFW model radiální rozměry a svislý tangenciální dosáhnou nuly v limitě jednotkového zploštění, zatímco vodorovný tangenciální rozměr roste ke konečné hodnotě. Pro oba modely lze v závislostech rozměrů na zploštění nalézt hranice hyperbolické umbiliky a cusp piercingu.

Co se týče velikostí ploch ohraničených tangenciální a radiální kaustikou a ploch tří a pěti obrazů, je jejich průběh v závislosti na zploštění podobný u NFW modelu i NIE, ovšem i zde lze pozorovat odlišnosti. Pro NFW model dosahují plochy kaustiky a plochy pěti a tří obrazů nulové hodnoty až v limitě jednotkového zploštění, zatímco pro NIE již při nižším zploštění na hranici radiálního, respektive tangenciálního vymizení.

Na průběhy rozměrů kaustik modelů v závislosti na zploštění za konstantního b_c , respektive κ_s mají konkrétní hodnoty těchto parametrů vliv v ohledu celkového škálování, strmosti některých závislostí a v hodnotách zploštění pro jednotlivé jejich stacionární body a pozorovatelné hranice režimů obdobným způsobem, jako tomu je u rozměrů kritických křivek.

Rozměry kritických křivek a kaustik pro TNIE vykazují velmi podobné chování jako pro NIE. Jejich průběhy prezentované v Obrázcích 5.7 a 5.8 odpovídají Obrázkům 4.11 a 4.12, pouze jsou oproti nim deformované způsobem odpovídajícím deformaci prostoru parametrů. Navíc se pro TNIE závislosti rozměrů kritických křivek a kaustik na zploštění, respektive poloměru jádra při fixním poloměru jádra, respektive poměru os pohybují oproti NIE obecně v menších rozsazích.

6.3 Zhodnocení výsledků v aktuálním kontextu oboru

Pro NFW model byly v Kapitole 3 shrnuty. Ačkoliv se nejedná o originální výsledky, uvedení vlastností NFW modelu v této práci je klíčové pro možnost jejich porovnání s dalšími studovanými modely. Toto porovnání je pak užitečné kvůli pochopení jejich chování při analýze pozorovaných gravitačních čoček.

Pro NIE byly v Kapitole 4.2 jednak zreplikovány výsledky z práce Kormann, Schneider a Bartelmann (1994) s identifikací hranic cusp piercingu, hyperbolické umbiliky, radiálního a tangenciálního vymizení (Kormann, Schneider a Bartelmann (1994), Obrázek 9). V této práci byly navíc doplněny hranice tangenciálního peanutu relevantní pro geometrii pozorovaných obrazů, což umožnilo jemnější rozdělení prostoru parametrů (Obrázek 4.9) a podrobnější identifikaci režimů.

Kormann, Schneider a Bartelmann (1994) dále uvádějí pouze základní analýzu rozměrů kaustik a velikostí ploch odpovídající třem a pěti obrazům (znázorněno v jejich Obrázcích 10 a 11). V Kapitole 4.2.2 byla tato analýza rozšířena do podrobnější studie závislostí rozměrů na poměru os i poloměru jádra, která ilustruje obecně složitější chování modelu a umožňuje detailnější srovnání s NFW modelem.

Zcela novým výsledkem je pro NIE zkoumání kontur částí jakobiánu z Kapitoly 4.2.4. K tomu byla využita metoda, již navrhli Heyrovský a Karamazov (2024), a která umožňuje například lépe identifikovat počet a polohu inflexních bodů a kaspů.

Tato podrobnější analýza vlastností je užitečná především pro lepší porozumění NIE a jeho efektivnější využití, jednak přímo pro účely studia reálných gravitačních čoček a možnost přesnějšího popisu daných astrofyzikálních objektů, jednak kvůli zhodnocení vlastností dalších modelů čoček, jakým je například TNIE.

TNIE představuje úpravu NIE, popis vlastností je však pro něj výrazně složitější, jelikož je závislý na třech nezávislých parametrech místo dvou. V Kapitole 5.2 jsou uvedeny originální výsledky obdobné výsledkům pro modely NFW a NIE. Podobně detailně je proveden popis chování modelu v závislosti na poměru os a poloměru jádra, a velmi základně i na limitním poloměru (především Kapitola 5.2.1). Hlubší popis závislosti vlastností TNIE na limitním poloměru přesahuje rámec této práce. Jedná se tedy o jeden ze směrů, jímž by se budoucí výzkum omezeného nesingulárního izotermálního elipsoidu měl vydat. Další slibnou oblastí jsou alternativní způsoby omezování NIE. V Kapitole 3.3 je zmíněn omezený NFW model (Heyrovský (2023)), u něž je omezení provedeno jiným způsobem. Namísto kombinace více neomezených modelů se volí pevná hranice, za níž je hustota hmoty nulová. Pokud by byl omezený NIE vytvořen tímto způsobem, pravděpodobně by vykazoval jiné vlastnosti, než v této práci představený TNIE, a podobně pak i další modely vzniklé jiným mechanismem omezení. Jelikož celková hmotnost omezených variant modelů na rozdíl od neomezených nediverguje, jsou omezené modely fyzikálně vhodnější. Detailní porovnání omezeného NFW modelu s TNIE by bylo nejpřínosnějším rozšířením, s ohledem na dosavadní téměř výlučné využívání TNIE v algoritmech analýzy čočkování kupami galaxií (např. Mahler et al. (2023)).

7 Závěr

V této práci byly zkoumány vlastnosti a chování několika modelů gravitačních čoček s elipsoidální symetrií. Tyto modely jsou vhodné pro popis efektu čočkování prostorovým rozložením hmoty odpovídajícím například galaxiím a kupám galaxií.

Prvním zkoumaným modelem byla čočka s rozložením hmoty s Navarrovým-Frenkovým-Whiteovým hustotním profilem. Pro NFW model byly shrnuty nedávno publikované výsledky studia tvarů kritických křivek a kaustik a identifikace jednotlivých režimů čočkování a jejich hranic v prostoru dvou parametrů modelu. Následně byly uvedeny hlavní výsledky analýzy rozměrů kritických křivek a kaustik a kontur částí jakobiánu. NFW model představuje dobrou aproximaci pro čočkování halem temné hmoty, hlavní složkou hmoty galaxií i kup galaxií. Jeho nevýhodou je však celková hmotnost, která s rostoucí vzdáleností od středu diverguje. Z tohoto důvodu je zejména pro galaxie v kupách vhodnější upravená verze tohoto modelu, omezený NFW model, jehož celková hmotnost je již konečná. Tento model je zde uveden pro úplnost, jeho vlastnosti v této práci podrobněji zkoumány nebyly.

Dalším zkoumaným modelem byl nesingulární izotermální elipsoid. Pro ten byly nejdříve replikovány výsledky studia tvarů kritických křivek a kaustika, režimů čočkování a jejich hranic. Nově bylo studium prostoru parametrů doplněno o originální výsledky v podobě identifikace dvou hranic, mezi kterými je tangenciální kritická křivka nekonvexní. Pro NIE byla rozšířena dosavadní analýza rozměrů kritických křivek a kaustik a nově byl proveden rozbor kontur částí jakobiánu. Uvedeny jsou rovněž vlastnosti limitních případů, jmenovitě nesingulární izotermální sféry, singulárního izotermálního elipsoidu a singulární izotermální sféry.

Podobně jako u NFW modelu i u NIE celková hmotnost diverguje. Posledním zkoumaným modelem byl proto v praxi často používaný omezený nesingulární izotermální elipsoid. Pro ten byl proveden rozbor stejných vlastností jako pro NIE. V případě tohoto modelu se jedná o novou analýzu, která může v konfrontaci s podobným rozбором omezeného NFW modelu mít důležitý dopad na metodiku analýzy čočkujících kup galaxií.

Literatura

- BARTELMANN, M., 1996. Arcs from a universal dark-matter halo profile. *Astronomy and Astrophysics*. Roč. 313, s. 697. Dostupné z DOI: 10.48550/arXiv.astro-ph/9602053.
- DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C., 1920. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, roč. 220, s. 291. Dostupné z DOI: 10.1098/rsta.1920.0009.
- EINSTEIN, A., 1915. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie (On the General Theory of Relativity). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Roč. 6, s. 778.
- EINSTEIN, A., 1936. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*. Roč. 84, č. 2188, s. 506. Dostupné z DOI: 10.1126/science.84.2188.506.
- ESA/HUBBLE; NASA, 2014. *Seeing double* [online]. [cit. 2024-04-27]. Dostupné z: <https://esahubble.org/images/potw1403a/>.
- GOTT J. R., III; GUNN, J. E., 1974. The Double Quasar 1548+115a,b as a Gravitational Lens. *The Astrophysical Journal*. Roč. 190, s. L105. Dostupné z DOI: 10.1086/181517.
- HEYROVSKÝ, D., 2021. *Gravitational Lensing: From Planets to Galaxy Clusters* [online]. Habilitační práce. Univerzita Karlova, Praha [cit. 2024-04-13]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/175147>.
- HEYROVSKÝ, D., 2023. *The Truncated Ellipsoidal Navarro-Frenk-White Lens Model* [online]. [cit. 2024-04-13]. Dostupné z: <https://aas241-aas.ipostersessions.com/default.aspx?s=8D-AC-01-B0-A3-6E-14-B7-D8-3F-A0-96-7A-74-4B-9A>.
- HEYROVSKÝ, D.; KARAMAZOV, M., 2022. *Gravitational Lensing By an Ellipsoidal Navarro-Frenk-White Halo* [online]. [cit. 2024-04-13]. Dostupné z: <https://aas240-aas.ipostersessions.com/default.aspx?s=75-64-93-FA-02-8C-A2-E5-AE-01-58-70-BC-74-50-73>.
- HEYROVSKÝ, D.; KARAMAZOV, M., 2024. Gravitational lensing by an ellipsoidal Navarro-Frenk-White dark-matter halo: an analytic solution and its properties. *arXiv e-prints*, arXiv:2404.00169. Dostupné z DOI: 10.48550/arXiv.2404.00169.
- KASSIOLA, A.; KOVNER, I., 1993. Elliptic Mass Distributions versus Elliptic Potentials in Gravitational Lenses. *The Astrophysical Journal*. Roč. 417, s. 450. Dostupné z DOI: 10.1086/173325.
- KORMANN, R.; SCHNEIDER, P.; BARTELMANN, M., 1994. Isothermal elliptical gravitational lens models. *The Astrophysical Journal*. Roč. 284, s. 285.

- MAHLER, G.; JAUZAC, M.; RICHARD, J.; BEAUCHESNE, B.; EBELING, H.; LAGATTUTA, D.; NATARAJAN, P.; SHARON, K.; ATEK, H.; CLAEYSSSENS, A.; CLÉMENT, B.; ECKERT, D.; EDGE, A.; KNEIB, J.; NIEMIEC, A., 2023. Precision Modeling of JWST's First Cluster Lens SMACS J0723.3-7327. *The Astrophysical Journal*. Roč. 945, č. 1, s. 49. Dostupné z DOI: 10.3847/1538-4357/acaea9.
- NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M., 1996. The Structure of Cold Dark Matter Halos. *The Astrophysical Journal*. Roč. 462, s. 563. Dostupné z DOI: 10.1086/177173.
- SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. E., 1992. *Gravitational Lenses*. New York: Springer-Verlag. Druhé opravené vydání. ISBN 978-3-540-66506-9. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-662-03758-4.
- TURNER, E. L.; OSTRIKER, J. P.; GOTT J. R., III, 1984. The statistics of gravitational lenses : the distributions of image angular separations and lens redshifts. *The Astrophysical Journal*. Roč. 284, s. 1. Dostupné z DOI: 10.1086/162379.
- WALSH, D.; CARSWELL, R. F.; WEYMANN, R. J., 1979. 0957+561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*. Roč. 279, s. 381. Dostupné z DOI: 10.1038/279381a0.
- ZWICKY, F., 1937. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *The Astrophysical Journal*. Roč. 86, s. 217. Dostupné z DOI: 10.1086/143864.

Seznam obrázků

1.1	Snímek první objevené gravitační čočky	7
2.1	Obecná geometrie gravitačního čočkování	8
2.2	Gravitační čočkování bodovou čočkou	12
3.1	Schéma plochy s konstantní hustotou tříosého elipsoidálního rozložení hmoty	14
3.2	NFW kritická křivka a kaustika - režim nízké excentricity	19
3.3	NFW kritická křivka a kaustika - cusp piercing	19
3.4	NFW kritická křivka a kaustika - hranice tangenciálního peanutu	19
3.5	NFW kritická křivka a kaustika - režim jedné nekonvexní kritické křivky	20
3.6	NFW kritická křivka a kaustika - hranice radiálního peanutu	20
3.7	NFW kritická křivka a kaustika - hyperbolická umbilika	20
3.8	NFW kritická křivka a kaustika - režim vysoké excentricity	21
3.9	NFW kritická křivka a kaustika - porovnání pro různé κ_s	22
3.10	Prostor parametrů e a κ_s pro elipsoidální NFW model	23
3.11	Kritické křivky a kaustiky pro sférický NFW model	23
3.12	Rozměry kritických křivek pro NFW model	26
3.13	Rozměry kaustik pro NFW model	27
3.14	Poloměry kritických křivek a kaustik pro sférický NFW model	28
3.15	Kontury částí jakobiánu pro NFW model	30
3.16	Kontury částí jakobiánu pro NFW model - extrémní případy	31
4.1	NIE kritická křivka a kaustika - režim vysokého f	38
4.2	NIE kritická křivka a kaustika - hyperbolická umbilika	39
4.3	NIE kritická křivka a kaustika - režim mezi hyperbolickou umbilikou a vymizením radiální části	39
4.4	NIE kritická křivka a kaustika - vymizení radiální kritické křivky a kaustiky	39
4.5	NIE kritická křivka a kaustika - konec tangenciálního peanutu	40
4.6	NIE kritická křivka a kaustika - před vymizením tangenciální části	40
4.7	NIE kritická křivka a kaustika - vymizení tangenciální kritické křivky a kaustiky	40
4.8	NIE kritická křivka a kaustika - závislost na změně b_c při konstantním f	41
4.9	Prostor parametrů f a b_c pro neomezený NIE model	43
4.10	Porovnání velikostí kritických křivek a kaustik v souřadnicích \mathbf{x} a \mathbf{y} a \mathbf{x}' a \mathbf{y}'	44
4.11	Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na zploštění pro NIE model	48
4.12	Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na poloměru jádra pro NIE model	49
4.13	Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na poloměru jádra pro NIE model - v jednotkách poloměru jádra	50
4.14	Kritická křivka a kaustika pro NIS	51

4.15	Rozměry kritických křivek a kaustik pro NIS	51
4.16	Kritická křivka a kaustika pro SIE	52
4.17	Rozměry kritických křivek a kaustik pro SIE	52
4.18	Kritická křivka a kaustika pro SIS	53
4.19	Kontury částí jakobiánu pro NIE	55
5.1	TNIE kritická křivka a kaustika - vysoký limitní poloměr	59
5.2	TNIE kritická křivka a kaustika - nižší limitní poloměr	59
5.3	TNIE kritická křivka a kaustika - nízký limitní poloměr	59
5.4	TNIE kritická křivka a kaustika - velmi nízký limitní poloměr	60
5.5	Prostor parametrů f a b_c pro TNIE model - vysoký limitní poloměr	61
5.6	Prostor parametrů f a b_c pro TNIE model - nízký limitní poloměr	61
5.7	Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na zploštění pro TNIE model	62
5.8	Rozměry kritických křivek a kaustik v závislosti na poloměru jádra pro TNIE model	63
5.9	Kontury částí jakobiánu pro TNIE	65
6.1	Porovnání prostorů parametrů pro NFW model a NIE	67