MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Samuel Smerčiak

Chaos a intervalová dynamika

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V . . . . dne . . . .

Podpis autora

Chcel by som poďakovať vedúcemu práce doc. Mgr. Benjaminovi Vejnarovi, Ph.D. za veľkú trpezlivosť a ústretovosť, samozrejme mojej rodine za podporu a v neposlednom rade RNDr. Elene Zimmermannovej za inšpiráciu k matematike.

Název práce: Chaos a intervalová dynamika

Autor: Samuel Smerčiak

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V tejto práci sa zaoberáme predovšetkým Šarkovského vetou. Na úvod definujeme základné pojmy z teórie diskrétnych dynamických systémov a následne podáme dôkaz Šarkovského vety založený na skúmaní relácie pokrývania medzi prvkami delenia intervalu príslušného periodickej orbite. Ďalej sa zameriame na stabilitu Šarkovského vety vzhľadom k topológii rovnomernej konvergencie na priestore spojitých funkcií. Nakoniec poukážeme na možné rozšírenia Šarkovského vety s dôrazom na prípad trojuholníkových zobrazení.

Klíčová slova: dynamický systém, spojitá funkcia, usporiadanie

Title: Chaos and interval dynamics

Author: Samuel Smerčiak

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. Mgr. Benjamin Vejnar, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This bachelor thesis is mainly concerned with the Sharkovsky theorem. Initially, we define basic concepts from the theory of discrete dynamical systems, followed by a proof of the Sharkovsky theorem based on the examination of the covering relation between the elements of the partition of the interval corresponding to a periodic orbit. Next we concentrate on the stability of the Sharkovsky theorem with respect to the topology of uniform convergence on the space of continuous functions. Lastly, we indicate possible extensions of the Sharkovsky theorem, emphasizing the case of triangular maps.

Keywords: dynamical system, continuous mapping, ordering

Obsah

Úvod

Pojem chaos možno matematicky zachytiť viacerými spôsobmi, jednou z jeho intuitívnych koncepcií je však deterministický systém sledujúci jednoduché pravidlá, ktorý napriek tomu vykazuje nesmierne zložité správanie hraničiace až s náhodnosťou. V intervalovej dynamike túto úlohu preberá iterácia spojitých funkcií na intervale reálnych čísel, pričom aj triviálne príklady môžu skrývať prekvapujúco komplexné správanie. Svedčí o tom známy fakt, že bod minimálnej periódy tri spojitej funkcie zobrazujúcej uzavretý interval do seba už implikuje existenciu bodov všetkých minimálnych periód. Toto je spolu s ďalšími vlastnosťami výsledok slávneho článku „*Period Three Implies Chaos*“ [1] od dvojice Li a Yorke, publikovaného v roku 1975 bez vedomia autorov, že ide o špeciálny prípad staršieho výsledku O. M. Šarkovského [2] už z roku 1964. Šarkovskij vo svojej vete podrobne opísal vzťahy medzi periodickými bodmi rôznych periód pre spojitú funkciu na intervale.

Hlavným cieľom tejto práce je poskytnúť úvod ku Šarkovského vete a jej najbližším súvislostiam, pričom predpokladáme len základné znalosti z kurzov matematickej analýzy. V snahe splniť tento cieľ podáva Kapitola 2 dôkaz Šarkovského vety sledujúci kapitolu 7 z knihy „*Introduction to dynamical systems*“ [3] od autorov M. Brin a G. Stuck, pričom najskôr je ilustratívne ukázaný špeciálny prípad periódy tri a veľmi stručne sú diskutované aj ostatné dôsledky článku [1], ktoré autori súhrnne nazvali chaotickým správaním.

Ďalej v Kapitole 3 je pozornosť venovaná stabilite Šarkovského vety, čím sa myslí zachovanie vlastností plynúcich z vety aj pri malej zmene danej funkcie. V tejto kapitole sledujeme článok (Block [4]), resp. jeho upravenú verziu z knihy „*Sharkovsky ordering*“ (Blokh a Sharkovsky [5]).

Nakoniec sa v Kapitole 4 zameriame na možné zovšeobecnenia a rozšírenia Šarkovského vety, pričom hlavným výsledkom bude platnosť vety pre špeciálne typy zobrazení v $\mathbb{R}^n$, takzvané trojuholníkové zobrazenia. Toto ako prvý ukázal P. Kloeden v [6] a my podáme formuláciu jeho dôkazu z knihy [5].

Týmto samozrejme nie je téma Šarkovského vety ani zďaleka vyčerpaná a počas práce odkážeme niekoľko zdrojov, z ktorých možno čerpať ďalšie informácie. Charakter práce je čisto kompilačný a jej úlohou je čo najviac sprístupniť danú tematiku. Preto boli skoro všetky prebraté dôkazy rozšírené (Veta 1, Tvrdenie 8, Lemma 9, Tvrdenie 10, Dôsledok 11, Lemma 12 z knihy [3] a Veta 13, Veta 17 z knihy [5]), prípadne pozmenené a niekedy boli tiež opravené drobné chyby (Veta 1, Lemma 5, Lemma 9, Lemma 12 z knihy [3]). Umelá inteligencia bola v tejto práci použitá výhradne pri preklade abstraktu.

1 Diskrétne dynamické systémy

Definícia. *Diskrétny dynamický systém je dvojica (X, f), kde X je neprázdna množina a $f : X \to X$ je zobrazenie.*

Väčšinou študujeme také dynamické systémy, kde množina X nesie nejakú štruktúru, ktorú potom zobrazenie f zachováva. Teda napríklad X je merateľný priestor a f je merateľné zobrazenie, X je metrický priestor a f je izometria, X je topologický priestor a f je homeomorfizmus alebo X je hladká varieta a f je difeomorfizmus. Od druhej kapitoly sa budeme venovať intervalovej dynamike, konkrétne budeme uvažovať $X = I \subset \mathbb{R}$ kompaktný interval a spojitú funkciu $f : I \to I$.

Definícia. *Nech (X, f) je diskrétny dynamický systém. Pre $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n}$. Ak je f invertibilné, potom definujeme aj $f^{-n} = \underbrace{f^{-1} \circ ... \circ f^{-1}}_{n}$. Nakoniec položíme $f^0 = id$.*

Poznámka. Keďže $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, tak $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ tvoria grupu ak je f invertibilné a $\{f^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ tvoria semigrupu, ak nie je.

Definícia. *Pre $x \in X$ definujeme orbitu bodu x v zobrazení f ako množinu:*

$$\mathcal{O}_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{f^n(x)\}.$$

Definícia. *Nech (X, f) je diskrétny dynamický systém a $x \in X$.*

- *Bod x nazývame periodickým s periódou $p \in \mathbb{N}$, ak $f^p(x) = x$. Orbitu periodického bodu nazývame aj periodická orbita.*
- *Periodický bod s periódou 1 nazývame pevným bodom.*
- *Ak je bod x periodický, potom najmenšie $p \in \mathbb{N}$ také, že $f^p(x) = x$, nazývame minimálnou periódou bodu x.*
- *Ak je $f^q(x)$ periodický pre nejaké $q \in \mathbb{N}$, potom vravíme, že bod x je eventuálne periodický.*

Poznámka. V invertibilných dynamických systémoch je každý eventuálne periodický bod periodický.

Dôkaz. Nech $f^q(x)$ je periodický pre nejaké $q \in \mathbb{N}$, teda existuje $p \in \mathbb{N}$ také, že $f^p(f^q(x)) = f^q(x)$. Potom:

$$f^p(x) = f^{-q+p+q}(x) = f^{-q}(f^p(f^q(x))) = f^{-q}(f^q(x)) = x.$$

□

2 Šarkovského veta

Šarkovského veta je súčasťou intervalovej dynamiky, čo je štúdium dynamických systémov, ktorých nosná množina (tzv. stavový priestor) je podinterval reálnych čísel, na ktorom uvažujeme reálnu funkciu. Za predpokladu spojitosti funkcie táto veta popisuje vzťah medzi periodickými bodmi rôznych periód. Predtým, než podáme jej znenie, musíme však definovať alternatívne usporiadanie prirodzených čísel, nazývané Šarkovského usporiadanie.

Definícia. *Uvažujme množinu* $\mathbb{N}_{\mathrm{Sh}} = \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ *vytvorenú pridaním symbolu* 2^∞ *k prirodzeným číslam. Šarkovského usporiadanie tejto množiny je:*

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 2^\infty \prec \ldots \prec 5 \cdot 2^n \prec 3 \cdot 2^n \prec \ldots \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \ldots \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

Pre $\alpha \in \mathbb{N}_{\mathrm{Sh}}$ *definujeme* $\mathcal{S}(\alpha) = \{k \in \mathbb{N} : k \preceq \alpha\}$.

Definícia. *Pre zobrazenie* $f : X \to X$ *definujeme* $\mathrm{MinPer}(f)$ *ako množinu všetkých minimálnych periód periodických bodov* f.

Poznámka. Značením $C^0(I)$ budeme v celej práci rozumieť priestor spojitých reálnych funkcií na kompaktnom intervale $I \subset \mathbb{R}$. Ide o normovaný lineárny priestor, ak ho opatríme supremovou normou $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$. Táto norma prirodzeným spôsobom generuje úplnú metriku a tá topológiu, ktorú budeme nazývať topológia rovnomernej konvergencie. Značením $C^0(I, I)$ budeme rozumieť priestor spojitých funkcií $f : I \to I$, ktorý je topologickým podpriestorom $C^0(I)$.

Veta 1 (Šarkovskij [2])**.** *Pre každú funkciu* $f \in C^0([0,1], [0,1])$ *existuje* $\alpha \in \mathbb{N}_{\mathrm{Sh}}$ *tak, že platí* $\mathrm{MinPer}(f) = \mathcal{S}(\alpha)$.
Naopak, pre každé $\alpha \in \mathbb{N}_{\mathrm{Sh}}$ *existuje funkcia* $f \in C^0([0,1], [0,1])$ *taká, že platí* $\mathrm{MinPer}(f) = \mathcal{S}(\alpha)$.

Poznámka. Pridanie symbolu 2^∞ zaručí, že každá podmnožina $\mathbb{N}_{\mathrm{Sh}}$ má supremum. Ďalej poznamenajme, že Šarkovského veta platí pre každý interval $I \subset \mathbb{R}$, pre názornosť a jednoduchosť zápisu ju však budeme dokazovať pre $[0, 1]$.

Napriek nie príliš silnému predpokladu spojitosti dáva Šarkovského veta už úplny popis množín minimálnych periód, ktoré sú pre spojitú funkciu na intervale možné. Je zrejmé, že číslo 1 je v usporiadaní najmenšie, pretože každá funkcia $f \in C^0(I, I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdny kompaktný interval, má pevný bod (viď Lemma 4). Za povšimnutie však stojí umiestnenie čísla 3. Zo znenia vety teda špeciálne plynie, že ak má $f \in C^0(I, I)$ bod minimálnej periódy 3, už musí mať body všetkých min. periód. To je prekvapivé, hlavne z dôvodu, že príklady na funkcie splňujúce tento predpoklad sú triviálne a nie je na prvý pohľad vôbec zrejmé, že by sa v ich iterácii skrývala tak zložitá štruktúra.

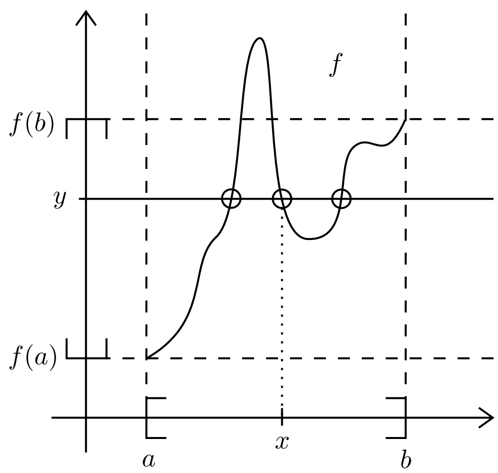
Špeciálny prípad periódy 3 nezávisle od Šarkovského dokázali v roku 1975 autori Li a Yorke v [1], pričom Šarkovskij svoju vetu publikoval už v roku 1964 v článku [2] v preklade pod názvom „*Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*“, avšak originálne v ruštine. To spolu s vtedajšou schizmou západného a východného sveta, ktorej sa bohužiaľ nevyhli ani vedecké kruhy, malo za výsledok, že Šarkovského práca sa dovtedy netešila nijakej veľkej pozornosti. Naopak článok [1] od dvojice Li-Yorke pod senzačným názvom „*Period Three Implies Chaos*“ sa stal slávnym. Tým upriamil pozornosť mnohých matematikov k intervalovej dynamike a v dôsledku toho aj ku teórii, ktorú rozvíjal Šarkovskij. Treba však spomenúť, že Li a Yorke ukázali aj iné dôsledky min. periódy 3 okrem bodov všetkých periód (viď Veta 6), ktoré súhrnne nazvali chaotickým správaním funkcie a z toho pramení názov ich článku.

O histórii Šarkovského vety možno nájsť mnoho ďalších príbehov. Napríklad dôvod, prečo Šarkovskij v názve použil práve slovo „*coexistence*”, je vo fráze o koexistencii kapitalizmu a komunizmu, častej v dobe jeho písania. Pozoruhodné sú aj symboly usporiadania použité v originálnom článku, ktoré sú v skutočnosti otočené písmená Y, pretože v dobe ručnej typografie vhodnejší symbol ešte nebol k dispozícii. Sám autor históriu svojho článku popisuje v [5], odkiaľ pochádzajú obe zmienené zaujímavosti.

Pôvodný dôkaz Šarkovského vety bol pomerne komplikovaný a technický, keď však veta vošla do povedomia matematikov, začali sa objavovať mnohé iné dôkazy. Medzi prvými boli (Štefan [7]) a (Straffin [8]). My budeme sledovať dôkaz z knihy „*Introduction to dynamical systems*”[3] od autorov M. Brin a G. Stuck. Dôkaz je založený na analýze relácie pokrývania medzi intervalmi a ukazuje sa, že nie je nutné použiť žiadne hlbšie vety, postačujúca bude veta o medzihodnote, ktorá je pre platnosť Šarkovského vety kľúčová. Kvôli jej častému používaniu ju budeme skrátene označovať aj IVT, z anglického „*Intermediate Value Theorem*”. Jej dôkaz je súčasťou každého základného kurzu matematickej analýzy, možno ho nájsť napríklad v (Jarník [9, str. 237]).

Značenie. Ak $a, b \in \mathbb{R}$, potom $[a, b]$ značí uzavretý interval medzi a a b bez ohľadu na to, či platí $a \leq b$ alebo $b \leq a$. V prípade $a = b$ nazveme interval degenerovaným.

Veta 2 (Veta o medzihodnote, IVT)**.** *Nech $f \in C^0(I)$, kde $I = [a, b]$ je interval. Potom pre každé $y \in [f(a), f(b)]$ existuje $x \in I$ také, že $f(x) = y$.*



Obr. 2.1: Spojitá funkcia nadobúda medzihodnôt.

Pred tým, ako sa pustíme do dôkazu Šarkovského vety, budeme potrebovať niekoľko elementárnych tvrdení o spojitých funkciách na intervale. Tie vzápätí použijeme k dôkazu špeciálneho prípadu minimálnej periódy tri.

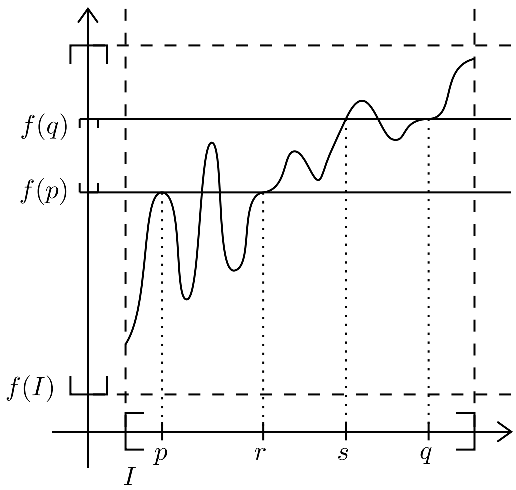
Nasledujúce lemma znie triviálne a jeho dôkaz je síce skutočne jednoduchý, ale uvádzame ho podrobnejšie, ako je zvyčajné, pretože už tu sa ukazuje nevyhnutnosť IVT. Okrem toho unáhlenosť pri voľbe intervalu J v tomto dôkaze môže viesť k častej chybe (viď [3], str. 163, dôkaz Lemmatu 7.3.2).

Lemma 3. *Nech $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Potom pre každý kompaktný interval $Q \subset f(I)$ existuje kompaktný podinterval $J \subset I$ taký, že $f(J) = Q$.*

Dôkaz. Uvažujme $I, f(I)$ aj Q nedegenerované, inak je tvrdenie zrejmé. Keďže $f(I) \supset Q$, tak existujú body $p, q \in I$ také, že $[f(p), f(q)] = Q$, kde $f(p) < f(q)$. Predpokladajme $p < q$, inak je postup analogický. Označme r posledný prvok $[p, q]$ taký, že $f(r) = f(p)$. Musí existovať vďaka existencii p a je menší ako q, inak by $f(p) = f(r) = f(q)$ a Q by bol degenerovaný. Ďalej označme s prvý prvok intervalu $(r, q]$, ktorý spĺňa $f(s) = f(q)$, pričom jeho existenciu zaručuje q.

Teda máme uz. interval $J = [r, s]$, pričom $[f(r), f(s)] = Q$. Tvrdíme, že platí aj $f(J) = f([r, s]) = Q$. Vďaka IVT sa musia nadobúdať všetky hodnoty medzi $f(r)$ a $f(s)$, takže $f(J) \supset Q$. Ostáva teda ukázať $f(J) \subset Q$. Body nad r nemôžu byť po zobrazení menšie ako $f(r) = f(p)$, pretože r je posledné s touto hodnotou. Skutočne, existencia bodu $x \in (r, s)$ takého, že $f(x) < f(r)$, by z IVT dávala bod $x_0 \in [x, s] : f(x_0) = f(r)$. Z rovnakého dôvodu nemôže hodnota funkcie f na $[r, s]$ vystúpať nad $f(s)$, teda máme dohromady $f([r, s]) \subset [f(r), f(s)] = Q$. Teda $f([r, s]) = f(J) = Q$.

$\square$



Obr. 2.2

Nasledujú dva jednoduché dôsledky IVT, ktoré nám umožnia nachádzať pevné body spojitých funkcií a za následok aj iné periodické body, pretože tie su pevnými bodmi zložených funkcií.

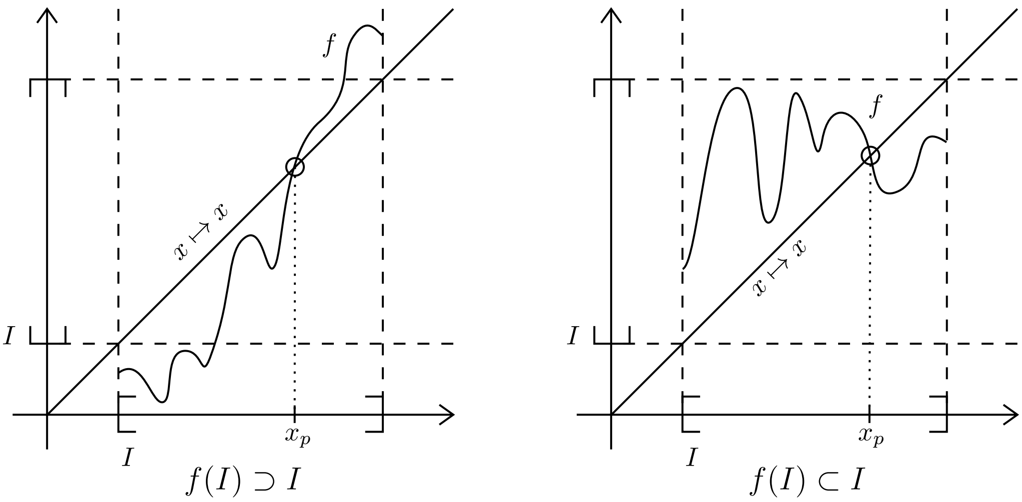
Lemma 4. *Nech $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdny kompaktný interval a $f \in C^0(I)$.*

1. *Ak $f(I) \supset I$, potom I obsahuje pevný bod funkcie f.*
2. *Ak $f(I) \subset I$, potom I obsahuje pevný bod funkcie f.*

Dôkaz. 1. Označme $I = [a, b]$, kde $a \leq b$. Potom teda $\exists \tilde{a} \in I : f(\tilde{a}) = a$. Naviac $a \leq \tilde{a}$, lebo $\tilde{a} \in I = [a, b]$. Rovnako $\exists \tilde{b} \in I : f(\tilde{b}) = b$ a platí $b \leq \tilde{b}$. Teda $f(\tilde{a}) - \tilde{a} \leq 0$ a $f(\tilde{b}) - \tilde{b} \geq 0$. Odtiaľ z IVT už plynie existencia bodu $x_p \in \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]$ splňujúceho $f(x_p) - x_p = 0$.

2. Opäť označme $I = [a, b]$, $a \leq b$ a nech pre spor f nemá pevný bod v I. Potom musí platiť $f(a) > a$. Naviac aj $f(x) > x \quad \forall x \in I$, pretože ak by $\exists x_0 \in I : f(x_0) \leq x_0$, potom buď x_0 je pevný bod alebo $f(x_0) < x_0$. Prvá možnosť je vylúčená a ak by platila druhá, potom z IVT a nerovností $f(a) - a > 0$ a $f(x_0) - x_0 < 0$ dostávame $\exists x_p \in [a, x_0] : f(x_p) - x_p = 0$. Teda špeciálne $f(b) > b$, čo je v spore s $f(I) \subset I$.

□



Obr. 2.3

Definícia. *Nech $f \in C^0(I)$. Ak $I_1, I_2 \subset I$ sú intervaly a $f(I_1) \supset I_2$, povieme, že I_1 f-pokrýva I_2 a píšeme $I_1 \to I_2$.*

Lemma 5. *Nech $m \in \mathbb{N}$ a $\{I_k\}_{1 \leq k \leq m}$ je konečná postupnosť neprázdnych kompaktných intervalov takých, že $I_k \to I_{k+1}$ pre $1 \leq k < m$. Potom existuje bod $x \in I_1$ tak, že $f^k(x) \in I_{k+1} \quad \forall 1 \leq k < m$.*

Ďalej ak $I_n = I_1$ pre nejaké $n \geq 2$, potom I obsahuje periodický bod $x \in I_1$ s periódou $n - 1$ (nie nutne minimálnou) taký, že $f^k(x) \in I_{k+1} \quad \forall 1 \leq k < n$.

Dôkaz. Keďže $f(I_1) \supset I_2$, tak z Lemmatu 3 máme kompaktný interval $J_1 \subset I_1$ taký, že $f(J_1) = I_2$. Ďalej indukciou vytvoríme postupnosť intervalov.

Predpokladajme, že už máme postupnosť uz. intervalov $J_1 \supset J_2 \supset ... \supset J_n$ v I_1 takú, že $f^k(J_k) = I_{k+1}$ pre $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, kde $n \leq m - 2$. Potom platí:

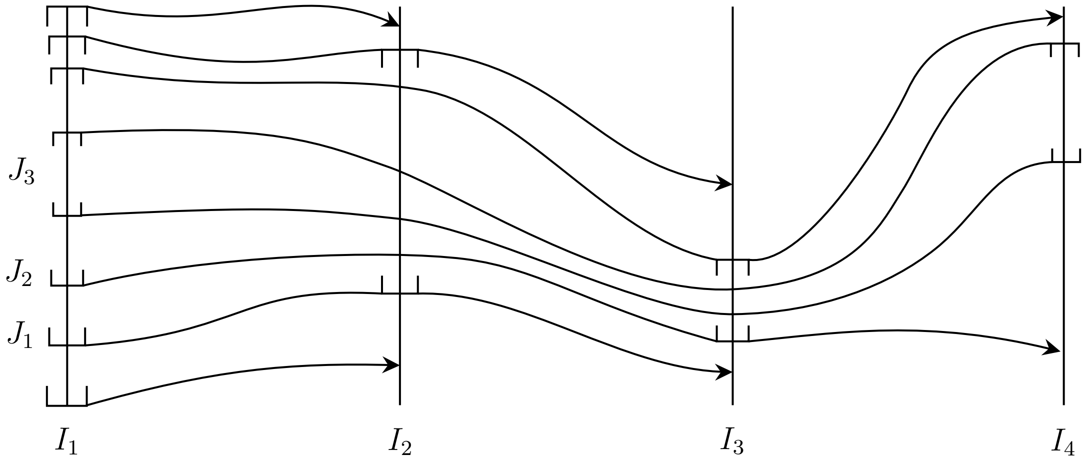
$$f^{n+1}(J_n) = f(f^n(J_n)) = f(I_{n+1}) \supset I_{n+2},$$

teda podľa Lemmatu 3 existuje $J_{n+1} \subset J_n$ tak, že $f^{n+1}(J_{n+1}) = I_{n+2}$.

Dostávame postupnosť uzavretých neprázdnych intervalov $\{J_n\}_{n=1}^{m-1}$ splňujúcich $J_1 \supset J_2 \supset ... \supset J_{m-1}$, teda platí $\bigcap_{n<m} J_n = J_{m-1} \neq \emptyset$. Teda existuje bod x v tomto prieniku a keďže $\forall 1 \leq k < m : x \in J_k$, tak $\forall 1 \leq k < m : f^k(x) \in I_{k+1}$.

Ostáva prípad, keď pre nejaké $n \geq 2$ platí $I_n = I_1$. Potom už vieme, že $\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{n-1} J_k = J_{n-1}$(keďže ide o postupnosť vnorených intervalov) a tiež, že platí $f^{n-1}(J_{n-1}) = I_n = I_1 \supset J_{n-1}$. Teda podľa Lemmatu 4 musí existovať bod $x \in J_{n-1} \subset I_1$, ktorý je pevný pre f^{n-1}. Pre funkciu f je to teda periodický bod s periódou $n-1$. Naviac keďže $x \in J_{n-1} = \bigcap_{k=1}^{n-1} J_k = J_{n-1}$, tak platí aj $f^k(x) \in I_{k+1} \quad \forall 1 \leq k < n$ podľa doteraz už dokázaného.

$\square$



Obr. 2.4: Prvé tri prvky vnorenej postupnosti intervalov $\{J_n\}_{n=1}^{m-1}$.

Práve dokázané lemma nám dáva priamy spôsob nachádzania periodických bodov pomocou vlastnosti pokrývania intervalov. Táto závislosť sa dá prehľadne vystihnúť v podobe grafu, kde vrcholy sú jednotlivé intervaly a hrany odpovedajú relácii pokrývania. Takéto grafy si teraz zadefinujeme.

Definícia. *Delenie intervalu I je konečná postupnosť $\{I_k\}$ uzavretých podintervalov intervalu I takých, že ich vnútrajšky sú po dvoch disjunktné a ich zjednotenie je celé I.*

Definícia. *Markovov graf funkcie f príslušný deleniu $\{I_k\}$ intervalu I je orientovaný graf s vrcholmi I_k, v ktorom vedie hrana z I_i do I_j práve vtedy, keď $I_i \to I_j$ (teda $f(I_i) \supset I_j$).*

Teraz už máme dostatočné nástroje na to, aby sme priamo dokázali špeciálny prípad Šarkovského vety pre periódu tri. Ako už bolo spomenuté, ten nezávisle na všeobecnejších výsledkoch Šarkovského publikovali autori Li a Yorke vo svojom článku „*Period Three Implies Chaos*"[1] a to ako súčasť nasledujúcej vety.

Veta 6 (Li a Yorke [1])**.** *Nech $f \in C^0(I, I)$ a existuje bod v intervale I s minimálnou periódou 3. Potom platí:*

1. *Pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje bod v intervale I s minimálnou periódou k.*
2. *Existuje $S \subset I$ nespočetná podmnožina neobsahujúca periodické body a splňujúca:*
   i) Pre každé $x, y \in S$ také, že $x \neq y$ platí:

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0.$$

   ii) Pre $x \in S$ a každý periodický bod $p \in I$ platí:

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0.$$

Dôkaz. (*Veta 6, 1. časť*)

Nech x je daný bod s minimálnou periódou 3. Existuje 6 možných zoradení bodov orbity $x, f(x), f^2(x)$ na reálnej osi, ale iným označením môžeme vždy dosiahnuť, že $x < f(x)$ aj $x < f^2(x)$. Teda ostávajú dva prípady, $x < f(x) < f^2(x)$ alebo $x < f^2(x) < f(x)$. Uvažujme ten prvý, druhý sa ukáže analogicky.

Označme ďalej $I_1 = [x, f(x)]$ a $I_2 = [f(x), f^2(x)]$. Potom príslušný Markovov graf je jeden z grafov:

Obr. 2.5

To je preto, lebo $I_1 = [x, f(x)]$ musí kvôli IVT pokrývať $[f(x), f^2(x)] = I_2$ a interval $I_2 = [f(x), f^2(x)]$ musí z rovnakého dôvodu pokrývať $[f^2(x),f^3(x)] = [f^2(x), x]$, čo je nadmnožina I_1 aj I_2. Ostávajú teda iba dve možnosti, buď I_1 f-pokrýva I_1, alebo nie. Bez ohľadu na to, ktorý graf je správny, môžeme pre $k \geq 2$ uvažovať postupnosť:

$$I_1 \to I_2 \to I_2 \to ... \to I_2 \to I_1$$

intervalov dĺžky $k + 1$, ktorá odpovedá ceste v Markovovom grafe dĺžky k. Vďaka Lemmatu 5 máme preto existenciu periodického bodu y s periódou k (nie nutne minimálnou!), ktorý iteráciou f prechádza postupne intervaly $I_1, I_2, I_2, ..., I_2, I_1$.

Ak by bola minimálna perióda bodu y menšia ako k, potom by muselo $y \in I_1 \cap I_2 = f(x)$. Keďže $f(x)$ je bod s minimálnou periódou 3, tak musí byť $k > 3$. Avšak pre $k > 3$ nemôže sledovať bod $f(x)$ itinerár $I_1, I_2, I_2, ..., I_2, I_1$. Dostávame sa teda do sporu.

□

Dôkaz druhej časti vynecháme, možno ho nájsť v pôvodnom článku [1], kde toto správanie funkcie nazvali autori chaotickým a tak sa po prvý raz vyskytol pojem chaosu, zatiaľ bez formálnej definície. Tých sa následne objavilo veľké množstvo, niektoré z nich a vzťahy medzi nimi sú popísané v (Kolyada [10]) alebo v (Ruette [11]). Intuitívne môžeme systém vnímať ako chaotický, ak na jednej strane nie je náhodný a riadi sa jasnými pravidlami, avšak na druhej strane je jeho vývoj komplikovaný a citlivý na počiatočné podmienky.

Pre príklad ukážeme dve najznámejšie definície a vzťah medzi nimi. Jedna je inšpirovaná práve Vetou 6. Funkciu $f \in C^0(I)$ nazveme chaotickou v Li-Yorkovom zmysle (resp. Li-Yorke-chaotickou), ak spĺňa podmienky v časti 2 Vety 6. Vidíme, že každé dva rôzne prvky množiny S musia mať trajektórie, ktoré sa síce ľubovoľne priblížia, avšak iteráciou sa po čase znovu musia vzdialiť o nejakú pevnú konštantu. Ďalej bod *ii*) vraví, že body z množiny S nemôžu byť ani tzv. asymptoticky periodické, keďže iteráciou ich môžeme od periodických bodov vždy oddialiť o pevnú konštantu. Tieto podmienky možno však zjednodušiť, pretože v (Kuchta a Smítal [12]) bolo ukázané, že $f \in C^0(I)$ je chaotická v Li-Yorkovom zmysle, práve keď existujú dva body $x, y \in I$ také, že:

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0.$$

Napriek tomu, že správanie Li-Yorke-chaotickej funkcie f na množine S je zreme verné svojmu pomenovaniu, v mnohých prípadoch môže byť množina S príliš malá (napríklad aj nulovej Lebesgueovej miery), aby sme funkciu považovali za chaotickú na celom intervale I. Riešením tohto problému je celá rada alternatívnych definícií. Uvedieme ešte jednu, ktorá je nazývaná Devaneyho podľa Roberta L. Devaneyho, ktorý ju zaviedol vo svojej knihe „*An introduction to chaotic dynamical systems*“ [13]. Najskôr však budeme potrebovať dva nové pojmy.

Definícia. *Funkciu $f \in C^0(I)$ nazveme (topologicky) tranzitívnou, ak pre všetky neprázdne otvorené $U, V \subset I$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Definícia. *Povieme, že funkcia $f \in C^0(I)$ je citlivo závislá na počiatočných podmienkach, ak $\exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists y \in U\ \exists n \in \mathbb{N} : |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.*

Vlastnosť tranzitivity je v istom zmysle podmienkou ireducibility a hovorí o tom, že dynamický systém nemožno rozdeliť na menšie časti a tie skúmať osobitne. Citlivá závislosť na počiatočných podmienkach vystihuje charakteristickú vlastnosť spájanú s chaosom a to veľké rozdiely v trajektóriách aj pre body, ktoré začínajú veľmi blízko seba. Avšak chaotické systémy sa vyznačujú aj oblasťami s pravidelným správaním. To zaručí tretia podmienka, ktorou je hustota periodických bodov. Dohromady teda funkciu $f \in C^0(I)$ nazveme chaotickou v Devaneyho zmysle, ak je tranzitívna, citlivo závislá na počiatočných podmienkach a periodické body sú husté v I.

Definíciu Devaneyho možno ľahko rozšíriť aj pre funkciu na metrickom priestore a rovnako existujú aj rozšírenia Li-Yorkovej definície. Avšak ak sa obmedzíme len na interval, dostávame naviac nasledujúce implikácie, ktoré sú výberom zo širšieho prehľadu z [10], kde sa porovnávajú rôzne definície chaosu.

$$\begin{tikzcd}
\text{Tranzitivita} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, bend right] & \text{Hustota periodických bodov} \\
\text{Citlivá závislosť na p.p.} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Li-Yorke chaos}
\end{tikzcd}$$

Obr. 2.6

2.1 Dôkaz Šarkovského vety

V dôkaze časti Vety 6 sme videli, že pre periodický bod a jemu príslušné delenie I_1, I_2 nie je Markovov graf jednoznačne určený. Ak vyšetrujeme periodické body a zaujíma nás len správanie funkcie f na nejakej periodickej orbite P, môžeme definovať iný typ grafu, ktorý bude už pre dané usporiadanie orbity jednoznačne daný a nebude závisieť na správaní f vnútri intervalov delenia. Definujeme najskôr iný typ pokrývania intervalov, pričom odteraz do konca kapitoly uvažujeme $f \in C^0([0,1], [0,1])$. Všetky úvahy však možno viesť pre ľubovoľný kompaktný interval $I \subset \mathbb{R}$.

Definícia. *Nech* $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *je periodická orbita bodu s minimálnou periódou* $n > 1$*, kde* $x_1 < x_2 < ... < x_n$*. Označme* $I_k = [x_k, x_{k+1}]\,, k = 1, ..., n-1$*. Ďalej definujeme pre body* $x_i < x_j$*:*

$$\widehat{f}([x_i, x_j]) = \bigcup_{k=i}^{j-1} [f(x_k), f(x_{k+1})].$$

Teda špeciálne platí $\widehat{f}(I_k) = [f(x_k), f(x_{k+1})]$*. Ak* $\widehat{f}(I_i) \supset (I_j)$*, tak povieme, že* I_i $\widehat{f}$*-pokrýva* I_j*.*

Značenie. Odteraz budeme značením $I_i \to I_j$ rozumieť $\widehat{f}$-pokrýva a nie f-pokrýva ako doteraz (pričom prvé implikuje druhé).

Definícia. *Nech* $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *je periodická orbita s minimálnou periódou* $n > 1$*, kde* $x_1 < x_2 < ... < x_n$ *a* $I_k = [x_k, x_{k+1}]$*. Potom* P*-graf funkcie* f *je orientovaný graf s vrcholmi* I_k *a obsahuje hranu z* I_i *do* I_j *práve vtedy, keď* $\widehat{f}(I_i) \supset I_j$ *(teda* I_i $\widehat{f}$*-pokrýva* I_j*).*

Poznámka. Keďže podľa IVT platí $[f(x_k), f(x_{k+1})] \subset f([x_k, x_{k+1}]))$, tak P-graf je podgrafom Markovovho grafu. Ďalej P-graf je jednoznačne určený usporiadaním prvkov orbity a nezávisí na správaní f vnútri intervalov delenia.

Lemma 7. *Každý* P*-graf funkcie* f *obsahuje triviálnu kružnicu, teda existuje vrchol* I_j *taký, že platí* $I_j \to I_j$*.*

Dôkaz. Označme $j = \max\{i \in \{1, ..., n\} : f(x_i) > x_i\}$ (toto maximum existuje vďaka $n > 1$ a $x_1 < x_2 < ... < x_n$, teda $f(x_1) \neq x_1$). Potom $f(x_j) > x_j$, ale keďže j je maximálne také, tak $f(x_{j+1}) < x_{j+1}$, teda $f(x_{j+1}) \leq x_j$. Teda $[f(x_j), f(x_{j+1})] \supset [x_j, x_{j+1}]$.

□

Značenie. Vrcholy P-grafu budeme odteraz číslovať tak, aby $I_1 = [x_j, x_{j+1}]$, kde $j = \max\{i : f(x_i) > x_i\}$ je index z predchádzajúceho Lemmatu 7, teda vždy vedie hrana z I_1 do I_1. Tým zmeníme číslovanie vrcholov a od teraz už nemusí preto platiť $I_k = [x_k, x_{k+1}]$.

Ďalej sa budeme v pár krátkych tvrdeniach zaoberať štruktúrou P-grafov pre jednotlivé periodické body, z čoho už nakoniec priamo vyplynie prvá časť Šarkovského vety.

Tvrdenie 8. *Každý vrchol* P*-grafu je dosiahnuteľný z vrcholu* I_1 *nejakou cestou.*

Dôkaz. Keďže sme ho tak definovali, tak $I_1 \to I_1$, teda $\widehat{f}(I_1) \supset I_1$. Z definície $\widehat{f}$ je zrejmé, že zachováva množinové náležanie a teda aj $\widehat{f}^{\,2}(I_1) \supset \widehat{f}(I_1)$. Dostávame teda postupnosť intervalov $I_1 \subset \widehat{f}(I_1) \subset \widehat{f}^{\,2}(I_1) \subset ... \subset P$. Hraničné body týchto intervalov tvoria nerastúcu (pre počiatočné body), resp. neklesajúcu (pre koncové) postupnosť bodov z P, teda existujú ich príslušné limity. Tieto postupnosti musia byť od určitého indexu konštantné, pretože P je periodická orbita a teda konečná. Preto pre nejaké $k \geq 1$ je $\widehat{f}^{\,k}(I_1)$ interval, ktorý je invariantný pre f, lebo jeho hranice sa už aplikovaním funkcie f neposúvajú.

Invariantná podmnožina orbity však už musí byť celá orbita (inak by sa hodnoty mimo nikdy nenabudli) a keďže máme invariantnosť množiny $\widehat{f}^k(I_1) \cap P \subset P$, tak $\widehat{f}^k(I_1) \cap P = P$. Preto už musí byť aj $\widehat{f}^k(I_1) = [x_1, x_n]$. To znamená, že existuje cesta dĺžky k do každého vrcholu P-grafu.

□

Lemma 9. *Nech P-graf nemá žiadnu hranu z I_k do I_1 pre akékoľvek $k \neq 1$. Potom n (počet prvkov P) je párne a f má periodický bod minimálnej periódy 2.*

Dôkaz. Označme $J_0 = [x_1, x_j]$ a $J_1 = [x_{j+1}, x_n]$, kde $j = \max\{i : f(x_i) > x_i\}$, pričom pripúšťame aj interval degenerovaný do bodu napr. v prípade $j = 1$. Potom keďže $f(x_j) > x_j$, tak musí už platiť $f(x_i) > x_j \quad \forall i \in \{1, ..., j\}$, lebo inak by $\widehat{f}(J_0) \supset I_1$, čo je spor s predpokladom. Teda musí byť $\widehat{f}(J_0) \subset J_1$. Podobne sa ukáže $\widehat{f}(J_1) \subset J_0$.

Avšak $\widehat{f}(J_0) \cup \widehat{f}(J_1) \supset P$ (lebo J_0 a J_1 spolu obsahujú už všetky prvky orbity), teda platí $\widehat{f}(J_0) = J_1$ a $\widehat{f}(J_1) = J_0$. Vďaka Lemmatu 5 preto existuje periodický bod periódy dva, zrejme aj minimálnej.

Nakoniec rovnosti $\widehat{f}(J_0) = J_1$ a $\widehat{f}(J_1) = J_0$ nám dávajú aj $f(\{x_1, ..., x_j\}) = \{x_{j+1}, ..., x_n\}$ a $f(\{x_{j+1}, ..., x_n\}) = \{x_1, ..., x_j\}$. To spolu s faktom, že f je prosté na svojej periodickej orbite, už dáva $|\{x_1, ..., x_j\}| = |\{x_{j+1}, ..., x_n\}|$ a teda:

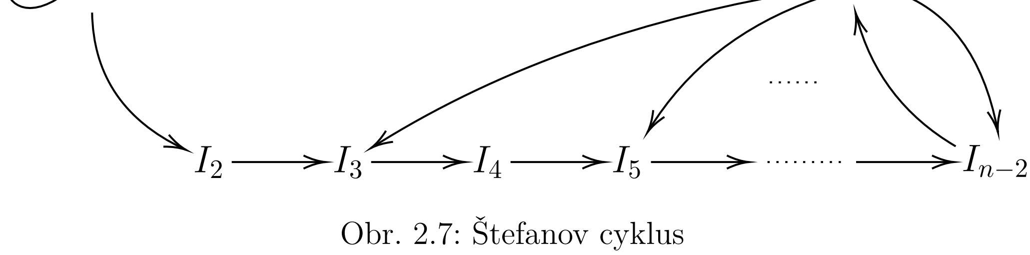
$$n = |P| = 2|\{x_1, ..., x_j\}| = 2j.$$

□

Nasledujúce kľúčové tvrdenie popisuje charakteristický typ P-grafu, kedy má funkcia bod nepárnej min. periódy a žiadne iné body menších nepárnych periód. Tento graf (resp. príslušný cyklus) je niekedy nazývaný Štefanov cyklus podľa P. Štefana, ktorý tvrdenie ukázal v [7], kde podal kratší a prehľadnejší dôkaz Šarkovského vety. Z jeho štruktúry už budeme vedieť relatívne ľahko vyhľadávať cesty daných dĺžok a následne získavať existenciu periodických bodov.

Tvrdenie 10 (Štefan [7]). *Nech $n > 1$ je nepárne, f má periodický bod minimálnej periódy n a nemá periodické body menšej nepárnej periódy ako n okrem pevných bodov. Potom existuje očíslovanie vrcholov P-grafu také, že graf obsahuje nasledujúce hrany a už žiadne iné:*

1. $I_1 \to I_1$ *a* $I_{n-1} \to I_1$,
2. $I_i \to I_{i+1} \quad \forall i = 1, ..., n-2$,
3. $I_{n-1} \to I_{2i-1} \quad \forall i = 1, ..., (n-1)/2$.



Obr. 2.7: Štefanov cyklus

Dôkaz. Prípad $n = 3$ plynie z dôkazu Vety 6, nech teda $n > 3$. Podľa Lemmatu 9 nepárnosť n implikuje hranu z I_m do I_1 pre nejaké $m \neq 1$ a podľa Tvrdenia 8 je I_m dosiahnuteľné z I_1 cestou, teda dohromady dostávame existenciu netriviálnej kružnice s počiatkom v I_1. Voľme najkratšiu takú kružnicu a po očíslovaní vrcholov môžeme predpokladať, že máme kružnicu:

$$I_1 \to I_2 \to ... \to I_k \to I_1,$$

kde $1 < k \leq n - 1$. Táto kružnica implikuje existenciu periodického bodu s periódou k. Keďže sme volili najkratšiu možnú kružnicu, tak intervaly vnútri nej sa neopakujú. Preto ak by mal bod menšiu periódu ako k, tak by musel ležať zároveň v I_1 a v nejakom druhom intervale. Tento prienik je však buď prázdny, alebo obsahuje iba nejaký bod orbity P, ktorý je min. periódy n. Preto je daná perióda k už aj minimálna. Ďalej cesta $I_1 \to I_1 \to I_2 \to ... \to I_k \to I_1$ nám dáva periodický bod s periódou $k + 1$. Ak by bol pevný, musel by ležať v $I_1 \cap I_2$ a ostatné min. periódy menšie ako $k + 1$ vylúčime rovnako ako vyššie. Keďže jedno z k, $k + 1$ musí byť nepárne, tak minimalita nepárnej periódy n už zaručuje $k = n - 1$. Zatiaľ teda máme existenciu hrán z bodov 1 a 2.

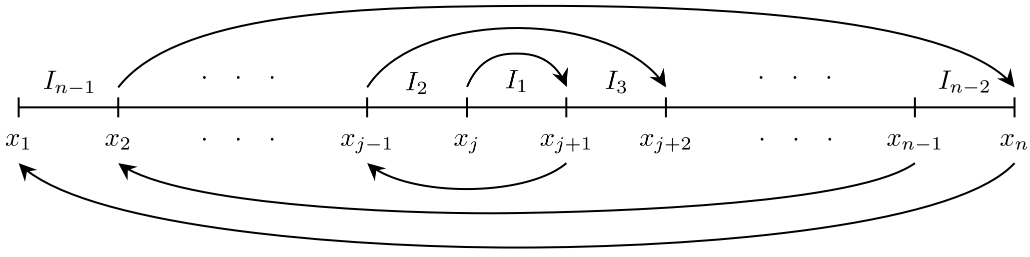
Ďalej označme ako zvyčajne $I_1 = [x_j, x_{j+1}]$. Kvôli minimalite danej kružnice I_1 pokrýva intervaly I_1 a I_2, ale už žiadny iný, lebo inak by sme ju mohli viesť z I_1 týmto intervalom a tak ju skrátiť. Ďalej z rovnakého dôvodu pre $1 \leq i < n - 2$ nemôže I_i pokrývať nejaký I_k pre $k > i + 1$, lebo by sme kružnicu mohli opäť skrátiť. Nakoniec zrejme nemôže I_i pre $1 < i \leq n - 2$ pokrývať I_1.

Odtiaľ plynie, že $\widehat{f}(I_1) = [x_j, x_{j+2}]$ alebo $\widehat{f}(I_1) = [x_{j-1}, x_{j+1}]$ (keby I_2 nesusedí s I_1, tak I_1 pokrýva aspoň tri intervaly a to je spor). Predpokladajme $\widehat{f}(I_1) = [x_{j-1}, x_{j+1}]$, druhý prípad je analogický. Teda $I_2 = [x_{j-1}, x_j]$ a potom nutne $f(x_j) = x_{j+1}$ a $f(x_{j+1}) = x_{j-1}$.

Ďalej platí $I_2 \to I_3$, ale vieme, že I_2 už nesmie pokrývať žiadny interval nad I_3 a ani I_1. Keďže $f(x_j) = x_{j+1}$ už je dané, tak jediná možnosť je $f(x_{j-1}) = x_{j+2}$. Pokračovaním analogickými úvahami zisťujeme, že intervaly sú na reálnej osi usporiadané nasledovne:

$$\underbrace{I_{n-1}, I_{n-3}, ..., I_2,}_{\textit{párne indexy}} \underbrace{I_1, I_3, ..., I_{n-4}, I_{n-2}}_{\textit{nepárne indexy}}$$

Platí teda $I_{n-1} = [x_1, x_2]$ a $I_{n-2} = [x_{n-1}, x_n]$. Nakoniec ešte z konštrukcie vyššie platí $f(x_2) = x_n$ a $f(x_n) = x_1$, teda pre x_1 nemáme inú možnosť ako $f(x_1) = x_j$. Tým je dokončený diagram na Obr. 2.8 nižšie. Vidíme, že $\widehat{f}(I_{n-1}) = [x_j, x_n]$ a preto I_{n-1} pokrýva každý interval s menším nepárnym indexom ako n. Zároveň z tohto usporiadania je zrejmé, že nie sú možné iné hrany ako zo znenia tvrdenia. $\square$



Obr. 2.8

Dôsledok 11. *Ak má f periodický bod nepárnej minimálnej periódy $n > 1$, potom má periodický bod s minimálnou periódou q pre každé $q > n$ a rovnako pre každé párne $q = 2k < n$.*

Dôkaz. Označme m najmenšiu nepárnu periódu f okrem pevných bodov, teda $m \leq n$. Potom z predchádzajúceho tvrdenia existuje v P-grafe nasledujúca cesta:

$$I_1 \underbrace{\rightarrow I_1 \rightarrow \ldots \rightarrow}_{\textit{cesta dĺžky } q-m} I_1 \underbrace{\rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \ldots \rightarrow I_{m-2} \rightarrow}_{\textit{cesta dĺžky } m} I_{m-1}$$

s ľubovoľnou dĺžkou $q > m$. To implikuje existenciu periodického bodu $x \in I_1$ s periódou q, avšak nie nutne minimálnou. Vieme však, že tento bod musí sledovať itinerár danej cesty. Ak by minimálna perióda bola nejaké $q - m + l$ pre $2 \leq l \leq m - 1$, tak by muselo platiť $x = f^{q-m+l}(x) \in I_l$, teda $x \in I_1 \cap I_l$. Tento prienik je buď prázdny, alebo bod orbity P, čo by viedlo k tomu, že x má minimálnu periódu m a teda ku sporu.

Podobne, ak by mal x minimálnu periódu l pre $1 \leq l \leq q - m + 1$ potom by muselo $f^{l+(q-m-l)+2}(x) \in I_2$. Avšak zároveň platí:

$$f^{l+(q-m-l)+2}(x) = f^{(q-m-l)+2}(f^l(x)) = f^{(q-m-l)+2}(x) \in I_1,$$

keďže $l \geq 1$. Teda $x \in I_1 \cap I_2$ a preto $x \in P$, čo vedie ku sporu. Dané periódy sú teda nutne aj minimálne.

Ďalej pre $q = 2k < n$ cesta:

$$I_{m-1} \rightarrow I_{m-2k} \rightarrow I_{m-2k+1} \rightarrow \ldots \rightarrow I_{m-2} \rightarrow I_{m-1}$$

implikuje existenciu periodického bodu periódy $2k$ a opäť už ide o minimálnu periódu, pričom dôkaz je rovnaký ako v prvom prípade.

□

Lemma 12. *Ak má f bod párnej minimálnej periódy n, potom má bod minimálnej periódy 2.*

Dôkaz. Zrejme môžeme predpokladať $n > 2$. Označme m najmenšiu párnu minimálnu periódu funkcie f a uvažujme teraz P-graf nejakého bodu s touto min. periódou. Pre spor nech $m > 2$. Potom z Lemmatu 9 existuje interval I_k, $k \neq 1$ pokrývajúci I_1 v tomto P-grafe. V dôkaze Tvrdenia 10 sme nepárnosť n využili iba na ukázanie existencie takéhoto intervalu. Sledovaním toho dôkazu teda znovu dostávame P-graf v podobe Štefanovho cyklu s tým rozdielom, že teraz interval I_{m-1} bude pokrývať všetky intervaly s menším párnym indexom, na rozdiel od nepárneho. Špeciálne teda existuje cesta $I_{m-1} \rightarrow I_{m-2} \rightarrow I_{m-1}$, ktorá už dáva bod periódy 2 a rovnakým spôsobom ako v predošlých dôkazoch sa ukáže, že aj minimálnej. Teda prichádzame do sporu.

□

Týmto sme dokončili všetky pomocné tvrdenia a dôkaz prvej časti Šarkovského vety už pozostáva len z ich kombinácie. Rozoberieme zvlášť dva prípady podľa toho, či má prirodzené číslo v rozklade nepárneho činiteľa alebo nie.

Dôkaz. (*Šarkovského veta, 1. časť*)

Nech $f \in C^0([0,1],[0,1])$, označme n najväčšiu minimálnu periódu periodického bodu funkcie f vzhľadom k Šarkovského usporiadaniu. Vďaka Lemmatu 4 je číslo n dobre definované s výnimkou prípadu, kedy f má body min. period 2^k $\forall k \in \mathbb{N}$. To je však prípad funkcie typu 2^∞ a vidíme, že veta tam teda platí. Ostávajú dve možnosti:

1. $n = 2^k, \quad k \geq 1.$

Máme periodický bod minimálnej periódy $n = 2^k$, chceme pre každé $q = 2^l, 0 \leq l < k$ nájsť periodický bod minimálnej periódy q. Prípad $l = 0$ je zrejmý, nech teda $l \geq 1$. Potom funkcia $f^{\frac{q}{2}} = f^{2^{l-1}}$ má periodický bod párnej periódy 2^{k-l+1} (pretože $2^{k-l+1} \cdot 2^{l-1} = 2^k$) a preto podľa Lemmatu 12 má periodický bod minimálnej periódy 2. Tento bod je pevným bodom pre $f^q = f^{\frac{q}{2}+\frac{q}{2}}$, teda má periódu q pre f. Jeho min. perióda pre f preto musí deliť q, teda máme možnosti $1, 2, ..., 2^k = q$. Keďže však nie je pevným bodom pre $f^{\frac{q}{2}}$, tak pre f musí byť jeho min. perióda $2^k = q$.

2. $n = p \cdot 2^k, \quad k \geq 0, p > 1$ je nepárne.

Funkcia f^{2^k} má teda bod periódy p, nutne aj minimálnej, pretože inak by $p \cdot 2^k$ nebola min. perióda tohto bodu pre f. Z Dôsledku 11 teraz plynie, že f^{2^k} má aj body min. period q pre všetky $q > p$ a tiež $q < p$ párne. Tieto body sú bodmi periódy $q \cdot 2^k$ pre funkciu f. Ak je q párne, potom $q \cdot 2^k$ musí byť aj minimálna perióda, lebo inak by $q/2$ bola perióda pre funkciu f^{2^k}. Ak je $q > p$ nepárne, označme min. periódu m, táto musí deliť periódu $q \cdot 2^k$, preto máme možnosti:

i) $m = 2^l$ pre $l \leq k$,
ii) $m = r \cdot 2^l,$ kde $r|q$ je nepárne a $l \leq k$,
iii) $m = r,$ kde $r|q$ je nepárne,

V prvom prípade by bod pre f^{2^k} mal periódu jedna, čo je spor s $q > p > 1$. V druhom prípade je potom bod periodický pre f aj s periódou $r \cdot 2^k$, teda nutne $r = q$ a teda $m = q \cdot 2^l$ pre nejaké $l \leq k$. Keby $l < k$, tak máme spor s výberom čísla n, pretože platí $m \succ n$. Nakoniec v treťom prípade môžeme použiť Dôsledok 11, aby sme zaručili existenciu bodu s min. per $q \cdot 2^k$ pre f.

Máme teda body min. periódy $q \cdot 2^k$ pre $q > p$ nepárne a tiež pre všetky q párne. Ak vezmeme $q > p$ nepárne, dostávame body min. period $p \cdot 2^k, (p+1) \cdot 2^k, ...$ Ak vezmeme q párne, môžeme dostať body min. period $2^{k+1}, 2^{k+2}, ..., 5 \cdot 2^{k+1}, 3 \cdot 2^{k+1}$. Ostávajú teda periódy $1, 2, ..., 2^k$, tie však dostaneme použitím prvej časti, keďže už sme našli špeciálne bod min. periódy 2^{k+1}.

□

Dôkaz. (*Šarkovského veta, 2. časť*)

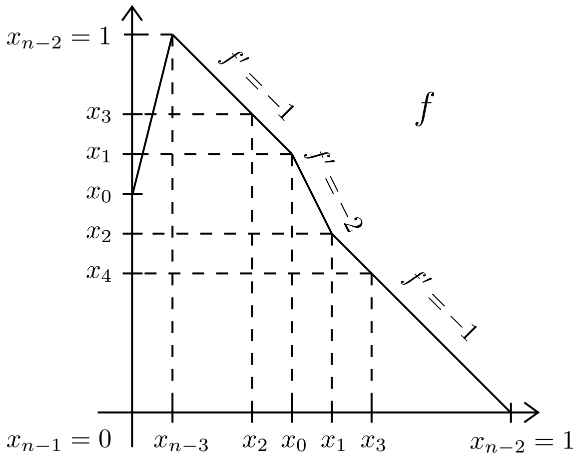
Nech $\alpha \in \mathbb{N}_{\mathrm{Sh}}$, budeme rozlišovať tri prípady:

1. $\alpha \in \mathbb{N},$ α je nepárne,
2. $\alpha \in \mathbb{N},$ α je párne,
3. $\alpha = 2^\infty$.

Prípad 1 Označme $n = \alpha$ a vyberme body $0 = x_{n-1} < ... < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < ... < x_{n-2} = 1$, ďalej s cieľom sledovať Štefanov cyklus označme $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_2, x_0], ..., I_{n-2} = [x_{n-4}, x_{n-2}], I_{n-1} = [x_{n-1}, x_{n-3}]$. Teraz definujeme zobrazenie f nasledovne:

- $f(x_i) = x_{i+1} \quad i = 0, ..., n-2$ a $f(x_{n-1}) = x_0$,
- f je lineárne na každom $I_i,$ $i = 0, ..., n-1$.

Potom f je zrejme dobre definovaná spojitá funkcia a x_0 je jej periodický bod s periódou n. Podľa už dokázanej časti Šarkovského vety máme teda $\mathrm{MinPer}(f) \supset \mathcal{S}(n)$. Ostáva teda ukázať, že body s menšou nepárnou periódou neexistujú. Funkcia f vyzerá nasledovne.



Obr. 2.9

Vidíme, že odpovedajúci P-graf bude Štefanov cyklus z Tvrdenia 10. Bude naviac zhodný s Markovovým grafom, pretože v tomto prípade hrany v grafe neodpovedajú len relácii pokrývania, ale dokonca presne popisujú obrazy intervalov v zobrazení f. Konkrétne platí $f(I_1) = I_1 \cup I_2$, $f(I_i) = I_{i+1}$ $\forall i = 2, 3, ..., n-2$ a $f(I_{n-1}) = I_1 \cup I_3 \cup ... \cup I_{n-2}$. To nám umožní vylúčiť existenciu periodických bodov, pretože dokážeme sledovať možné itineráry bodov. Nech teda existuje bod $x \in [0, 1]$ s minimálnou periódou $k < n$. Potom:

1. Ak $x \in I_2$, potom vidíme, že jediná cesta späť do I_2 je cez všetky intervaly $I_3, I_4, ..., I_{n-1}, I_1$, teda menšia perióda ako n je vylúčená.
2. Ak $x \in I_i$ pre nejaké $i > 2$, potom sa naskýta jediný itinerár kratší ako n a to $I_i, I_{i+1}, ..., I_{n-1}, I_{2j+1}, I_{2j+2}, ..., I_i$, kde $j \in \mathbb{N}$. Táto cesta bude však vždy párnej dĺžky a preto k je nutne párne.
3. Ostáva možnosť $x \in I_1$, kedy prichádza do úvahy len itinerár $I_1, ..., I_1$, ktorý môže byť ľubovoľnej dĺžky. Keďže platí $I_1 \to I_1$, tak musí existovať pevný bod $x_p \in \operatorname{int} I_1$ (nemôže byť krajný bod, lebo tie patria orbite min. per. n). Ďalej na $\operatorname{int} I_1$ zrejme platí $|f'| = 2 > 1$. Ukážeme, že kvôli tomu f zväčšuje vzdialenosti bodov a preto sa body neustále posúvajú od pevného x_p (takýto pevný bod sa nazýva odpudzujúci, resp. repulzívny). Pre $x, y \in \operatorname{int} I_1, x \neq y$ platí pre nejaké $\xi \in \operatorname{int} I_1$:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}|x - y| = |f'(\xi)||x - y| = 2|x - y| > |x - y|,$$

kde sme najskôr použili Lagrangeovu vetu a potom sme na rovnosť pridali absolútnu hodnotu. Teda ak by celá orbita bodu x ležala v $\operatorname{int} I_1$, potom platí: $\left|x_p - f^k(x)\right| = \left|f^k(x_p) - f^k(x)\right| > \left|f^{k-1}(x_p) - f^{k-1}(x)\right| > ... > |x_p - x|$, čo je spor s $x = f^k(x)$. Ak by naopak orbita neležala celá v $\operatorname{int} I_1$, tak jediná možnosť je, že po niekoľko iteráciách preskočí do I_2 a potom už musí prejsť všetky ostatné intervaly, aby sa mohla vrátiť späť do I_1. Teda ani v tomto prípade nemôže byť perióda menšia ako n.

Dohromady dostávame, že f má body všetkých min. periód okrem nepárnych menších ako n, s výnimkou 1. Teda $\mathrm{MinPer}(f) = \mathcal{S}(n) = \mathcal{S}(\alpha)$.
Prípad 2 Nech $\alpha \in \mathbb{N}$ je párne, označme $n = \alpha$. Pre $f \in C^0([0,1])$ definujme funkciu $\mathcal{D}(f)$ nasledovne:

$$\mathcal{D}(f)(x) = \begin{cases} 2/3 + f(3x)/3, & x \in [0,1/3]\,, \\ (2+f(1))(2/3-x), & x \in [1/3,2/3]\,, \\ x - 2/3, & x \in [2/3,1]\,. \end{cases}$$

Teda celý graf funkcie f zúžime na $[0,1/3]$ a zdvihneme o $2/3$, odtiaľ pokračujeme lineárne do bodu $(2/3,0)$ a odtiaľ lineárne do $(1,1/3)$, príklad pre $f = id$ je na Obr. 2.10. Operátor $\mathcal{D} : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ sa nazýva zdvojovací, pretože, ako ukážeme, platí $\mathrm{MinPer}(\mathcal{D}(f)) = 2\mathrm{MinPer}(f) \cup \{1\}$. Označme $\mathcal{D}(f) = g$ a $I_1 = [0,1/3]\,, I_2 = [1/3,2/3]\,, I_3 = [2/3,1]$. Pre $x \in I_1$ máme $g^2(x) = f(3x)/3$, teda $g^{2k}(x/3) = f^k(3x)/3$ pre $k \in \mathbb{N}$. Teda $g^{2k}(x) = x \iff f^k(3x) = 3x$. Ak máme bod $x \in [0,1]$ minimálnej periódy $k \in \mathbb{N}$ pre f, potom $x/3 \in I_1$, preto platí $g^{2k}(x/3) = f^k(x)/3 = x/3$. To znamená, že bod $x/3$ má periódu $2k$ pre g, naviac minimálnu, inak by sme zo vzťahu vyššie a min. periódy k bodu x pre f vyvodili spor. Teda $2\mathrm{MinPer}(f) \subset \mathrm{MinPer}(g)$.

Ďalej na intervale I_2 platí $|g'| \geq 2$ a preto kvôli podobnému argumentu ako v prípade 1 nemôže existovať periodická orbita obsiahnutá v I_2, s výnimkou jediného pevného bodu. Ak však už orbita zasiahne I_1 alebo I_3, už sa nemôže vrátiť do I_2, pretože $g(I_1 \cup I_2) \cap I_2 = \emptyset$. Preto v I_2 neexistuje periodický bod okrem jediného pevného bodu.

Nakoniec $g(I_3) = I_1$ a teda každý periodický bod v I_3 musí navštíviť I_1. Naviac keďže $g(I_3) = I_1$ a $g(I_1) = I_3$, tak prípustné sú iba itineráre párnej dĺžky $I_3, I_1, I_3, I_1, ..., I_3$. Ak $x \in I_3$ je bod minimálnej periódy $2k, k \in \mathbb{N}$ pre g, potom $y = g(x) \in I_1$ je bod z rovnakej orbity. Keďže pre $y \in I_1$ platí $g^{2k}(y) = y \iff f^k(3y) = 3y$, tak potom $3y$ je bod minimálnej periódy k pre f. Keďže sme iné periodické body už vylúčili, máme aj $\mathrm{MinPer}(g) \subset 2\mathrm{MinPer}(f) \cup \{1\}$.

Nakoniec keďže $\alpha = n$ je párne, môžeme písať $n = p \cdot 2^k$, kde $p \in \mathbb{N}$ je nepárne a $k \in \mathbb{N}$. Vďaka prípadu 1 už vieme ku p nájsť funkciu f tak, aby $\mathrm{MinPer}(f) = \mathcal{S}(p)$. Potom $\mathrm{MinPer}(\mathcal{D}^k(f)) = 2^k\mathrm{MinPer}(f) \cup \{2^{k-1}, 2^{k-2}, ..., 1\} = \mathcal{S}(n)$.
Prípad 3 Nech $\alpha = 2^\infty$. Označme potom $g_k = \mathcal{D}^k(id_{[0,1]})$, teda bude platiť $\mathrm{MinPer}(g_k) = \{2^k, 2^{k-1}, ..., 1\}$. Dostávame postupnosť funkcií $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, ukážeme, že rovnomerne konverguje ku funkcii $g_\infty : [0,1] \to [0,1]$ a platí $g_\infty = g_k$ na $[2/3^k, 1]$. Z definície zdvojovacieho operátoru vidíme, že $g_1 = g_k\ \forall k \in \mathbb{N}$ na intervale $[2/3, 1]$, pretože tam sa aplikovaním operátoru predpis už nemení. Keďže aplikovaním oprátoru sa graf prechádzajúcej funkcie objaví na intervale $[0,1/3]$ a predpis na intervale $[1/3,1]$ je pre všetky g_k, $k \in \mathbb{N}$ rovnaký (lebo od $k = 1$ už platí $g_k(1) = 1/3$), tak sa hranica intervalu, na ktorom sú už prvky postupnosti invariantné voči $\mathcal{D}$, bude posúvať k nule. Konkrétne indukciou ukážeme, že platí: $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall l \geq k : g_l = g_k$ na $[2/3^k, 1]$.

Predpokladajme, že $g_l = g_k\ \forall l \geq k$ na $[2/3^k, 1]$. Špeciálne je teda g_{k+1} na $[2/3^k, 1]$ rovná g_k. Všimneme si (viď Obr. 2.10), že g_{k+1} pozostáva na intervale $[0,1/3]$ z grafu funkcie g_k (aj keď zmenšeného a posunutého). Rovnako funkcia g_{l+1} pre $l \geq k$ má na intervale $[0,1/3]$ príslušne upravený graf funkcie g_l. Keďže z indukčného predpokladu platí $g_l = g_k$ na $[2/3^k, 1]$, tak musí byť aj $g_{k+1} = g_{l+1}$

na $(1/3) \cdot [2/3^k, 1] = [2/3^{k+1}, 1/3]$. Dohromady máme teda rovnosť g_{l+1} a g_{k+1} na $[2/3^{k+1}, 1]$, pričom $l \geq k$ bolo voľné.

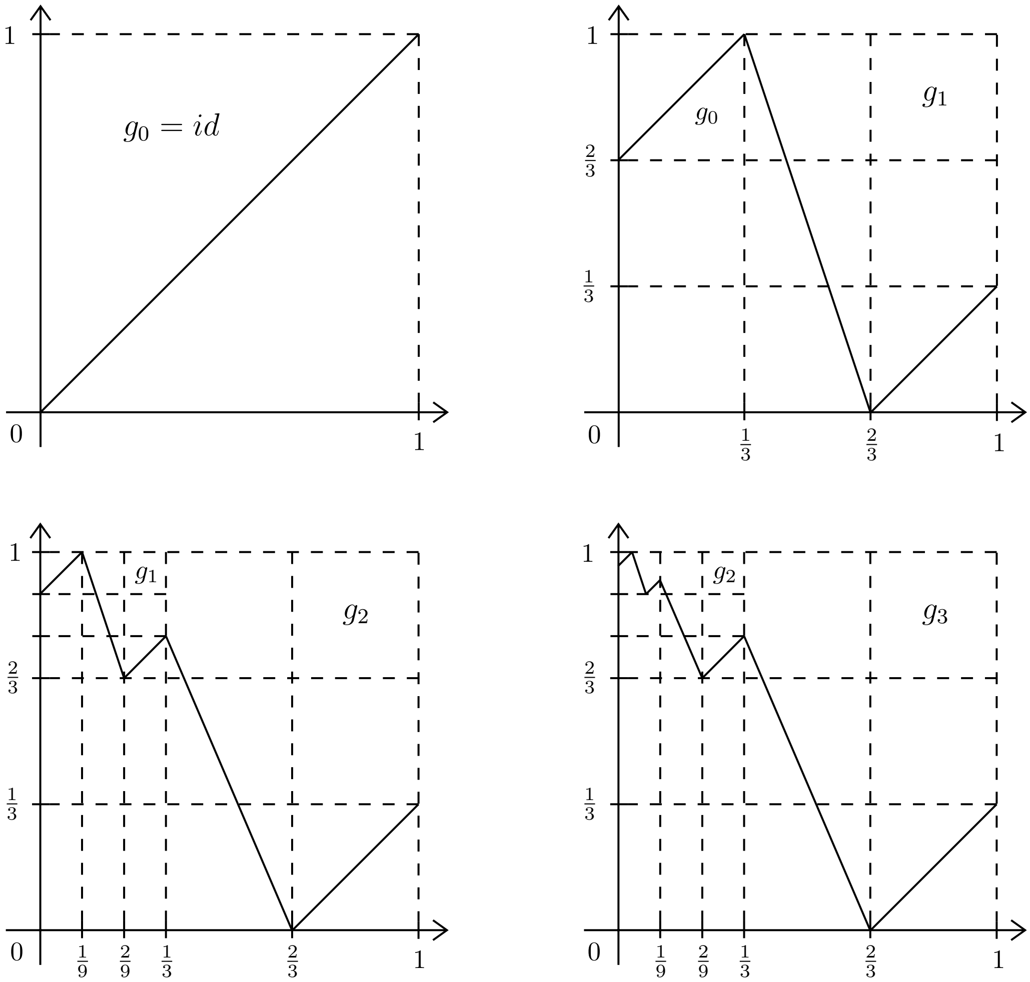
To nám zatiaľ dáva bodovú konvergenciu, pretože vďaka $[2/3^k, 1] \xrightarrow{k\to\infty} [0,1]$ pre $x \in [0,1]$ existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $g_l(x) = g_k(x)\ \forall l \geq k$, teda $\lim_{l\to\infty} g_l(x) = g_k(x) =: g_\infty(x)$. Odtiaľ už aj $g_\infty = g_k$ na $[2/3^k, 1]$ pre $k \in \mathbb{N}$.

Podobnou úvahou a následnou indukciou ako vyššie zistíme, že $g_2([0, 1/3]) = [1-1/3, 1], g_3([0, 1/3^2]) = [1-1/3^2, 1], ..., g_k([0, 1/3^{k-1}]) = [1-1/3^{k-1}, 1]$. To nám dáva odhad na rozdiel funkcií z postupnosti v supremovej norme. Konkrétne nech $\epsilon > 0$, voľme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $1/3^{n_0-1} < \epsilon$. Potom už pre $m \geq n \geq n_0$ platí:

$$\|g_n - g_m\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g_n - g_m| = \sup_{[0,2/3^n]} |g_n - g_m| \leq \sup_{[0,2/3^{n-1}]} |g_n - g_m| \leq$$

$$\leq 1 - (1 - 1/3^{n-1}) = 1/3^{n-1} < 1/3^{n_0-1} < \epsilon,$$

keďže platí $g_m = g_n = g_\infty$ na $[2/3^n, 1]$ a $g_n([0, 1/3^{n-1}]) = g_m([0, 1/3^{n-1}]) = [1 - 1/3^{n-1}, 1]$. Tým sme overili Bolzano-Cauchyho podmienku pre rovnomernú konvergenciu postupnosti funkcií $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Už však vieme, že ich bodová limita je g_∞, lebo sme ju tak definovali. Teda máme $g_k \rightrightarrows g_\infty$. Keďže všetky prvky postupnosti sú naviac spojité, tak rovnomerná konvergencia dáva aj spojitosť g_∞.



Obr. 2.10: Postupnosť $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ z prípadu 3.

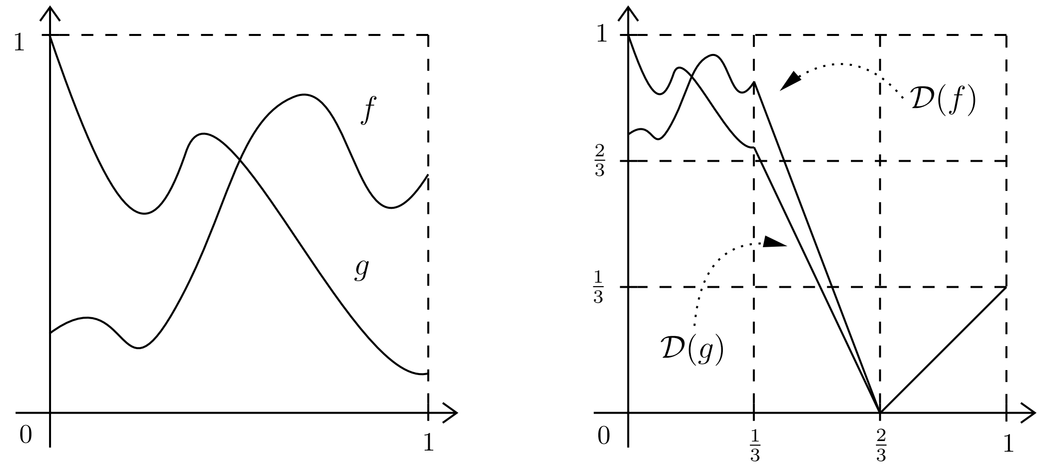
Z konštrukcie funkcie g_∞ sa zdá, že by mala byť invariantná voči operátoru $\mathcal{D}$. Ak by tomu tak bolo, potom keďže g_∞ má pevný bod ako každá funkcia z $C^0([0,1],[0,1])$ a keďže operátor $\mathcal{D}$ je zdvojovací, tak pre každé $k \in \mathbb{N}$ dostávame $\mathrm{MinPer}(g_\infty) = \mathrm{MinPer}(\mathcal{D}^k(g_\infty)) \supset \mathcal{S}(2^k)$. Teda $\mathcal{S}(2^\infty) \subset \mathrm{MinPer}(g_\infty)$.

Invariantnosť vyplýva z rovnosti $\mathcal{D}(g_\infty) = \mathcal{D}(\lim_{k\to\infty} g_k) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{D}(g_k) = \lim_{k\to\infty} g_{k+1} = g_\infty$, kde však potrebujeme spojitosť operátoru $\mathcal{D}$ kvôli jeho zámene s limitou. Ľahko sa však ukáže, že $\mathcal{D}$ je dokonca kontrakcia s konštantou $1/3$ na metrickom priestore $C^0([0,1])$ (viď Obr. 2.11), teda nutne spojitý.

Naopak, nech x je periodický bod funkcie g_∞ s minimálnou periódou p. Ak $0 \notin \mathcal{O}(x)$, potom vďaka konečnosti $\mathcal{O}(x)$ pre dostatočne veľké $k \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{O}(x) \subset [2/3^k, 1]$, takže x môže byť len jeden z periodických bodov g_k, lebo na tom intervale máme rovnosť $g_\infty = g_k$. Preto $p \in \mathcal{S}(2^\infty)$.

Ak $0 \in \mathcal{O}(x)$, predpokladajme pre spor $p \succ 2^\infty$. Potom existuje $q \in \mathbb{N}$ tak, že $p \succ q \succ 2^\infty$. Podľa už dokázanej časti Šarkovského vety má funkcia g_∞ periodický bod y s minimálnou periódou q. Musí platiť $0 \notin \mathcal{O}(y)$, pretože inak by perióda y bola p. Teda podľa už ukázaného má y párnu periódu, lebo $\mathcal{O}(y)$ je obsiahnutá v nejakom intervale $[2/3^k, 1]$ a to je spor s $q \succ 2^\infty$. Teda aj $\mathrm{MinPer}(g_\infty) \subset \mathcal{S}(2^\infty)$. Dohromady dostávame $\mathrm{MinPer}(g_\infty) = \mathcal{S}(2^\infty)$.

□



Obr. 2.11: Operátor $\mathcal{D}$ je kontrakcia.

Poznámka. Pre alternatívny a omnoho kratší dôkaz prípadu 3 možno použiť fakt, že operátor $\mathcal{D}$ je kontrakcia na úplnom metrickom priestore $C^0([0,1])$ a Banachovu vetu o pevnom bode. To nám už ihneď dá $\exists g_\infty = \lim_{k\to\infty} \mathcal{D}^k(id)$ a $\mathcal{D}(g_\infty) = g_\infty$.

Na záver kapitoly si ukážeme, že nie je dôležitá len perióda orbity, ale aj jej konkrétna štruktúra. V nasledujúcom príklade máme bod minimálnej periódy 4, čo by zo Šarkovského vety zaručovalo len min. periódy 1 a 2, avšak v tomto prípade vieme ukázať, že existujú body všetkých min. period. Toto nie je ojedinelý prípad, pretože štruktúra orbity, ktorá takúto vlastnosť zaručí, existuje pre orbitu s ľubovoľným počtom prvkov väčším ako 2.

Príklad. (Katok a Hasselblatt [14, str. 505, príklady 15.3.1, 15.3.2]) Nech funkcia $f \in C^0(I, I)$ má orbitu $\{x = f^4(x) < f(x) < f^2(x) < f^3(x)\}$. Ukážte, že f má body všetkých minimálnych periód. Ukážte, že pre $n \geq 3$ existuje $\sigma \in \pi_n$ permutácia n-prvkovej množiny taká, že periodická orbita $\{x_1 < ... < x_n\}$, ktorá realizuje túto permutáciu, už implikuje body všetkých min. periód.

Riešenie. V prvej časti označíme intervaly klasicky $I_1 = [x, f(x)]$, $I_2 = [f(x), f^2(x)]$ a $I_3 = [f^2(x), f^3(x)]$. Ľahko overíme existenicu kružnice $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_1$, ktorá zaručuje existenicu bodu $y \in I_1$ periódy 3. Ak by bola minimálna perióda tohto bodu 1, muselo by platiť $y \in I_1 \cap I_2 = f(x)$ a ak by bola 2, nemohol by byť nepárnej periódy tri. Keďže min. perióda bodu $f(x)$ je 4, v oboch prípadoch máme spor. Stačí teda použiť Šarkovského vetu.

V druhej časti stačí uvažovať permutáciu $\sigma = (x_1\ x_2\ ...\ x_n) \in\ \pi_n$, ktorá spĺňa $\sigma(x_i) = x_{i+1}, \quad i = 1, ..., n-1$ a nakoniec $\sigma(x_n) = x_1$. Periodická orbita, ktorá ju realizuje, bude teda spĺnať $f(x_i) = x_{i+1}, \quad i = 1, ..., n-1$ a tiež $f(x_n) = x_1$. Úlohu trojcyklu, ktorú v prvom prípade hral $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_1$, môže teraz nahradiť napríklad $I_{n-1} \to I_{n-3} \to I_{n-2} \to I_{n-1}$, kde $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.

■

3 Stabilita Šarkovského vety

Z hľadiska aplikácií je pri štúdiu vlastností funkcie dôležitá ich stabilita, čím sa myslí fakt, že pri malej zmene (perturbácii) si danú vlastnosť funkcia zachováva. To je nevyhnutné pre prax z dôvodu, že merania nikdy nemajú nekonečnú presnosť.

Mohli by sme teda klásť otázku, či sa štruktúra periodických cyklov popísaná Šarkovského vetou pre danú funkciu $f \in C^0(I, I)$ zachováva aj na funkcie, ktoré sú k f dostatočne blízko (tým máme na mysli okolie f v topológii rovnomernej konvergencie v topologickom priestore $C^0(I, I)$). Zvyčajne je pre stabilitu vyžadovaná hladkosť funkcie, avšak L. Block vo svojom článku [4] ukázal, že Šarkovského usporiadanie si zachováva istú formu stability napriek tomu, že pracuje len so spojitosťou.

Tú vystihol v nasledujúcej vete, ktorú dokážeme sledovaním dôkazu v [5], kde je prehľadnejšie podaný pôvodný dôkaz z [4].

Veta 13 (Block [4])**.** *Nech $f \in C^0(I, I)$ je funkcia, ktorá má bod minimálnej periódy n. Existuje okolie U funkcie f v $C^0(I, I)$ také, že všetky $g \in U$ majú per. bod min. periódy k, kde k je bezprostredný predchodca čísla n v Šarkovského usporiadaní.*

V dôkaze budeme potrebovať nasledujúce jednoduché lemma.

Lemma 14. *Nech $f \in C^0(I, I)$ má 4-periodickú orbitu $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, kde $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ takú, že $f(\{b_1, b_2\}) \neq \{b_3, b_4\}$. Potom f má per. bod min. periódy 3.*

Dôkaz. Označme $x = b_1$. Existuje 4! permutácií bodov orbity $x, f(x), f^2(x), f^3(x)$. Avšak predpoklady lemmatu nám dajú (až na orientáciu na reálnej osi a preznačenie bodu x) nasledujúce tri možnosti:

1. $x = f^4(x) < f(x) < f^2(x) < f^3(x)$,
2. $x = f^4(x) < f(x) < f^3(x) < f^2(x)$,
3. $x = f^4(x) < f^3(x) < f(x) < f^2(x)$.

Prvá možnosť je priamo orbita z príkladu na konci druhej kapitoly, kde sme už ukázali, že f má bod minimálnej periódy tri. Ostatné dva prípady sa ukážu celkom analogicky.

□

Dôkaz. (Veta 13)
Krok 1 Budeme potrebovať nasledujúce pozorovanie, ktoré hovorí, že ak nejaký bod sleduje svojím itinerárom štruktúru Štefanovho cyklu pre nepárne $2n + 1$, tak to už implikuje existenciu periodického bodu s min. periódou $2n + 1$.

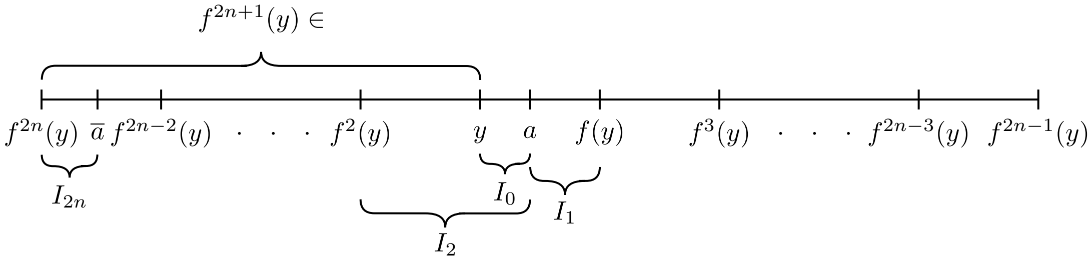
Pozorovanie. *Ak máme bod $y \in I$ a nepárne číslo $2n+1$ také, že platí:*

$$f^{2n}(y) < f^{2n-2}(y) < ... < f^2(y) < y < f(y) < ... < f^{2n-3}(y) < f^{2n-1}(y)$$

a naviac $f^{2n+1}(y) < y$, potom už f má bod minimálnej periódy $2n+1$.

Dôkaz. Keďže $f^2(y) < y < f(y)$, tak existuje pevný bod $a \in (y, f(y))$ (v skutočnosti v $[y, f(y)]$, ale z nerovností vyššie vieme, že y a $f(y)$ nie sú pevné body). Označme $I_j = [a, f^j(y)]$ pre $j = 0, 1, ..., 2n-1$, využívajúc značenie spred Vety 2. Ďalej platí $f(f^{2n-2}(y)) = f^{2n-1}(y) > a > y > f^{2n+1}(y) = f(f^{2n}(y))$, teda $\exists \bar{a} \in (f^{2n}(y), f^{2n-2}(y))$ tak, že $f(\bar{a}) = a$. Označíme $I_{2n} = [f^{2n}(y), \bar{a}]$.

Teraz platí $I_j \to I_{j+1} \quad \forall j = 0, 1, ..., 2n-1$, pretože jeden koncový bod intervalu I_j je pevný bod a, ktorý sa stáva opačným koncovým bodom I_{j+1}, pričom druhý koncový bod I_j sa stane druhým koncovým bodom I_{j+1}. Keďže $f^{2n+1}(y) < y$, tak máme aj $I_{2n} \to I_0$.



Obr. 3.1

Môžeme teda uvažovať kružnicu:

$$I_0 \to I_1 \to ... \to I_{2n-1} \to I_{2n} \to I_0$$

dĺžky $2n+1$, ktorá implikuje existenciu bodu z periódy $2n+1$ (nie nutne minimálnej) takého, že $f^j(z) \in I_j \quad \forall j$. Tento bod nemôže byť pevný, pretože napr. intervaly I_1 a I_{2n} sú disjunktné a vieme, že jeho trajektória nimi prechádza. Keďže má z nepárnu periódu $2n+1$, tak jeho minimálna perióda je buď rovná $2n+1$, alebo je menší deliteľ čísla $2n+1$ a je teda nepárna, pričom zo Šarkovského vety už máme aj existenciu bodu minimálnej periódy $2n+1$.

$\square$

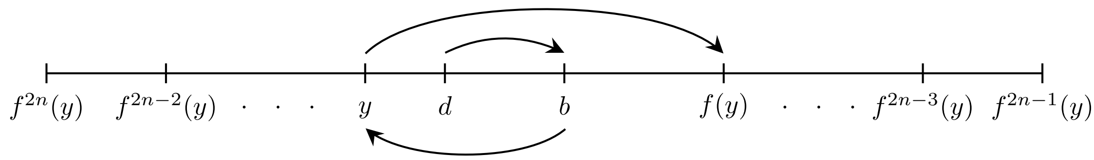
Naviac keďže všetky nerovnosti vyššie boli ostré, tak existuje nejaké okolie U funkcie f v C^0 topológii na $C^0(I, I)$ také, že všetky $g \in U$ dané nerovnosti spĺňajú (lebo sa na I líšia od f maximálne o nejaké pevné dostatočne malé $\epsilon > 0$) a teda majú bod minimálnej periódy $2n+1$.

Krok 2 Teraz už môžeme dokázať vetu pre číslo $N = 2n+1$ nepárne. Bez ujmy na obecnosti vďaka Šarkovského vete môžeme predpokladať, že f nemá už žiadne body menších nepárnych min. periód (lebo ak ukážeme vetu pre tento prípad, tak vo všeobecnom prípade môžeme uvažovať najmenšiu nepárnu min. periódu funkcie, použiť špeciálny prípad a následne Šarkovského vetu).

V tomto prípade sledovaním dôkazu Štefanovho Tvrdenia 10 môžeme predpokladať existenciu bodu y s min. periódou $2n+1$ splňujúceho:

$$f^{2n}(y) < f^{2n-2}(y) < ... < f^2(y) < y < f(y) < ... < f^{2n-3}(y) < f^{2n-1}(y).$$

Keďže $f^2(y) < y < f(y)$, tak existuje $b \in (y, f(y))$ také, že $f(b) = y$. Ďalej $f^2(b) = f(y) > b > y = f(b)$, teda existuje $d \in (f(b), b)$ tak, že $f(d) = b$. Teda sme medzi body orbity y a $f(y)$ vložili ďalšie body d a b tak, aby trajektória stále sledovala štruktúru Štefanovho cyklu.



Obr. 3.2

Ľahko overíme, že bod d spĺňa podmienky kladené na bod y v kroku 1 pre nepárne číslo $N + 2 = 2n + 3$. Teda podľa 1 existuje okolie U funkcie f tak, že funkcie $g \in U$ majú bod min. periódy $N + 2$. Tým je veta pre tento prípad dokázaná.

Krok 3 Ak f má bod min. periódy $2^r(2l + 1)$, kde $r \geq 1, l \geq 1$, potom f^{2^r} má bod periódy $2l + 1$ (nutne už aj minimálnej, inak by $2^r(2l + 1)$ nebola min. perióda bodu pre f). Teda podľa predchádzajúceho kroku existuje okolie U funkcie f^{2^r} také, že všetky $g \in U$ majú bod min. periódy $2l + 3$. Nájdeme dostatočne malé okolie V funkcie f také, že ak $h \in V$, potom $h^{2^r} \in U$. To môžeme, pretože topológia C^0 je generovaná supremovou normou $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$. Ak platí $|f(x) - h(x)| < \epsilon \quad \forall x \in I$, tak už platí:

$$|f^{2^r}(x) - h^{2^r}(x)| = |f(\underbrace{f^{2^r-1}(x)}_{\in I}) - h(\underbrace{h^{2^r-1}(x)}_{\in I})| < \epsilon \quad \forall x \in I.$$

Vidíme, že ak je h v okolí f, tak je h^{2^r} v okolí f^{2^r}, dokonca tej istej veľkosti. Teda existuje okolie V funkcie f také, že pre $h \in V$ platí $h^{2^r} \in U$, teda h^{2^r} má bod minimálnej periódy $2l + 3$, teda h má bod periódy $2^r(2l + 3)$, nie nutne minimálnej. Minimálna perióda k tohto bodu musí však deliť $2^r(2l+3)$, preto pre $k < 2^r(2l + 3)$ máme tieto možnosti:

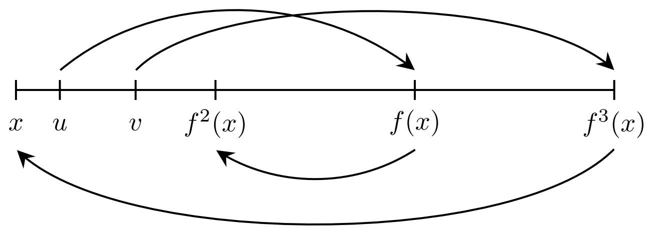
1. $k = 2^m$ pre $m \leq r$,
2. $k = 2n + 3$; $2n + 3 | 2l + 3$ pre $n \leq l$,
3. $k = 2^m(2n+3)$; $2n+3|2l+3$, kde buď $m < r$ & $n \leq l$ alebo $m \leq r$ & $n < l$.

V prvom prípade je spor s minimalitou periódy $2l + 3$ pre h^{2^r}. Vo zvyšných prípadoch neprídeme k sporu, avšak minimálna perióda k nám zo Šarkovského vety zaručí existenciu bodu min. periódy $2^r(2l+3)$ pre funkciu h (pretože $2^r(2l+3) \prec k$ v oboch prípadoch).

Krok 4 Ostáva ukázať prípad, kedy f má bod min. periódy $2^n, n \geq 1$. Pre $n = 1$ je to zrejmé, pretože každá $g \in C^0(I, I)$ má pevný bod vďaka Lemmatu 4. Najskôr uvažujme $n = 2$, teda f má bod min. periódy 4. Vďaka už dokázanej časti môžeme naviac predpokladať, že nemá bod min. periódy tri. Teda podľa Lemmatu 14 máme $f(\{b_1, b_2\}) = \{b_3, b_4\}$, kde $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ je daná orbita.

Označme $x = b_1$ a predpokladajme usporiadanie $x < f^2(x) < f(x) < f^3(x)$, iné možnosti sa ukážu analogicky. Vďaka Lemmatu 3 $\exists u, v \in [x, f^2(x)]$ tak, že

$f([u,v]) = [f(x), f^3(x)]$, $f(u) = f(x)$ a $f(v) = f^3(x)$. Potom platí $f^2(u) = f^2(x) > u$ a $f^2(v) = x < v$. Ďalej $f(y) \geq f(u) = f(x) > f^2(x) \geq v \quad \forall y \in [u,v]$, teda $f([u,v]) \cap [u,v] = \emptyset$.



Obr. 3.3

Keďže nerovnosti boli ostré, tak $\exists U$ okolie f také, že pre $g \in U$ platí $g^2(u) > u, g^2(v) < v$ a $g(y) \geq g(u) > v \quad \forall y \in [u,v]$, teda aj $g([u,v]) \cap [u,v] = \emptyset$. Máme $g^2([u,v]) \subset [u,v]$, preto existuje pevný bod pre g^2 v (u,v) (body u a v vylučujú nerovnosti), označme ho z. Zároveň platí $g(z) \notin [u,v]$, čo znamená, že z nie je pevný pre g a pre funkcie v U máme teda bod min. periódy 2.

Nech nakoniec f má bod min. periódy $2^n, n \geq 2$. Potom $f^{2^{n-2}}$ má bod minimálnej periódy 4 (pre periódy môžeme uvažovať len mocniny dvojky, teda menšia by viedla vždy ku sporu). Podobne ako v kroku 3 sa ukáže, že existuje okolie U funkcie f také, že ak $g \in U$, tak $g^{2^{n-2}}$ má bod min. periódy 2 (pričom pre minimálnu periódu k stačí teraz uvažovať len prvú z možností). Teda všetky $g \in U$ majú bod min. periódy 2^{n-1}.

$\square$

Vo Vete 13 sme pre funkcie na okolí ustúpili z požiadavku na minimálnu periódu o jeden prvok v Šarkovského usporiadaní. Vo všeobecnosti tvrdenie bez tohto ústupku neplatí. Avšak množina funkcií, pre ktoré takáto verzia vety platí, je v istom zmysle dostatočne bohatá. Toto je jeden z dôsledkov článku (Grinč, Hric a Snoha [15]). Uvedieme niektoré tvrdenia z [15], avšak bez dôkazov, ktoré by vyžadovali niekoľko úvodných pomocných tvrdení.

Definícia. *Funkciu $f \in C^0(I,I)$ nazveme typu $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{Sh}}$ (značíme type$(f) = n$), ak platí* $\mathrm{MinPer}(f) = \mathcal{S}(n)$. *Ďalej definujme množiny:*

$$\begin{aligned} T(n) &= \{f \in C^0(I,I) : type(f) = n\}, \\ T_{\preceq}(n) &= \{f \in C^0(I,I) : type(f) \preceq n\}, \\ T_{\prec}(n) &= \{f \in C^0(I,I) : type(f) \prec n\}. \end{aligned}$$

Definícia. *Povieme, že $f \in C^0(I,I)$ je typovo stabilná, ak existuje okolie U funkcie f tak, že pre $g \in U$ platí type$(f) \preceq$ type(g). Ďalej definujeme množiny:*

$$\begin{aligned} T_S(n) &= \{f \in T(n) : f \text{ je typovo stabilná}\}, \\ T_N(n) &= T(n)/T_S(n). \end{aligned}$$

Nasledujúca veta je výberom niektorých výsledkov z [15]. Pripomíname, že množina A je v topologickom priestore X hustá, ak jej uzáverom je celé X a množina N je v X riedka, ak jej doplnok je hustá množina.

Veta 15. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:*

1. *$T_S(n)$ je hustá v $T_{\preceq}(n)$,*
2. *$T_N(n) \cup T_{\prec}(n)$ je riedka v $T_{\preceq}(n)$,*
3. *$T_S(2^\infty) = \emptyset$.*

Vďaka bodu 1. teda k funkcii f typu n nájdeme ľubovoľne blízko funkciu g rovnakého typu, ktorá je typovo stabilná. Pre túto funkciu g už teda bude platiť Veta 13 bez nutnosti klesnúť v Šarkovského usporiadaní. Konkrétne g má bod min. periódy n a keďže existuje okolie U, kde $\mathit{type}(g) \preceq \mathit{type}(h) \quad \forall h \in U$, tak špeciálne každá $h \in U$ má bod min. periódy n.
Poznamenajme ešte, že tretí bod Vety 15 je dôsledkom článku (Jiménez López a Snoha [16]), kde autori kladne odpovedajú na otázku kladenú L. Blockom a W. A. Coppelom v [17]: Existuje funkcia $f \in C^0(I, I)$ typu 2^∞ a jej okolie obsahujúce funkciu typu menšieho než 2^∞? Ukazuje sa, že dokonca každé okolie každej funkcie typu 2^∞ obsahuje po častiach monotónnu funkciu typu menšieho než 2^∞.

4 Rozšírenia Šarkovského vety

Ďalšou prirodzenou otázkou pre matematické zákonitosti je možnosť ich rozšírenia na iné podmienky. Pôvodná Šarkovského veta uvažuje spojité funkcie na intervale reálnych čísel. Nie je ťažké nájsť protipríklady, ak za nosnú množinu zoberieme $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Stačí uvažovať rotáciu o uhol $\frac{2\pi}{3}$, pri ktorej je počiatok pevným bodom a všetky ostatné body majú minimálnu periódu tri, teda žiadne iné periódy neexistujú. To je zrejme v rozpore so Šarkovského usporiadaním.

Napriek tomu existujú čiastočné rozšírenia Šarkovského vety do vyšších dimenzií, musíme však uvažovať špeciálne typy zobrazení, pretože sa ukazuje, že Šarkovského usporiadanie je z veľkej miery jednodimenzionálny fenomén. Jednou možnosťou sú tzv. trojuholníkové zobrazenia, pre ktoré ukážeme analógiu Šarkovského vety sledujúc článok [6].

Najskôr však uvedieme niekoľko iných príkladov možných rozšírení. Ďalšou triedou funkcií v $\mathbb{R}^n$ sú funkcie $F = (f_1, ..., f_n)$ pozostávajúce z tzv. cyklicky permutujúcich zobrazení f_i. To sú funkcie tvaru:

$$f_i(x_1, ..., x_i) = f_i(x_{i+1}); \quad i = i \bmod n, \quad i = 1, ..., n.$$

Pre takéto F má potom n-tá iterácia $F^n = G = (g_1, ..., g_n)$ tvar:

$$g_i(x_1, ..., x_n) = f_i \circ ... \circ f_n \circ f_1 \circ ... \circ f_{i-1}; \quad i = 1, ..., n,$$

čo je zloženie funkcií jednej reálnej premennej. Vďaka tomu je štruktúra periodických bodov podobná tej zo Šarkovského vety, ako ukázali F. Balibrea a A. Linero v [18].

Namiesto zvyšovania dimenzie definičného oboru môžeme však tiež zmeniť predpoklady kladené na funkcie. Napríklad P. Szuca v [19] ukázal, že spojitosť nie je nutná a Šarkovského veta platí aj pre funkcie, ktorých graf je súvislá G_δ podmnožina $\mathbb{R}^2$. Pre úplnosť uveďme, že podmnožina topologického priestoru je súvislá, ak nie je disjunktným zjednotením dvoch neprázdnych otvorených množín a je typu G_δ, ak je spočetným zjednotením otvorených množín. Toto uvoľnenie už aj tak nie príliš silného predpokladu spojitosti (vzhľadom na silný záver Šarkovského vety) je obzvlášť prekvapujúce, pretože v tejto triede funkcií sa dokonca nachádzajú funkcie nespojité na množine kladnej Lebesgueovej miery.

Naskytá sa aj otázka, či je Šarkovského veta závislá na štruktúre reálnych čísel, alebo je možné uvažovať aj iné topologické priestory. H. Schirmer ukázala v [20] neúplnú verziu pre každý lineárne usporiadaný topologický priestor $\mathbb{L}$, ktorý je naviac súvislý. Na týchto priestoroch pre minimálne periódy spojitých funkcií platí Šarkovského usporiadanie, avšak nie je ostré, teda neplatí druhá časť Šarkovského vety. Ukazuje sa, že toto usporiadanie je ostré, práve keď na $\mathbb{L}$

existuje spojitá funkcia s bodom minimálnej periódy, ktorá nie je mocninou dvojky, čo bolo dokázané v (Baldwin [21]).

Keďže sme v dôkaze Šarkovského vety hojne používali vetu o medzihodnote, ktorá je ekvivalentná úplnosti reálnych čísel, tak by sa mohlo zdať, že nemá zmysel uvažovať nosnú množinu diskrétnu. Opak sa ukazuje pravdou, pretože Šarkovského usporiadanie spĺňajú aj funkcie definované na konečných podmnožinách prirodzených čísel, ako ukazuje článok (Bernhardt [22]). Triedu funkcií však musíme obmedziť na tzv. spojité substitučné systémy, ktorých definícia má za snahu priblížiť ich vlastnosti spojitosti reálnych funkcií a za následok spĺňajú tiež analogickú verziu IVT.

Týmto nie sú možné rozšírenia Šarkovského vety ani zďaleka vyčerpané, ide len o malý prehľad najpriamejších nahradení predpokladov. Mnohé iné príklady je možné nájsť napríklad v knihe [5], alebo v článku (Blokh a Misiurewicz [23]).

4.1 Trojuholníkové zobrazenia

Trojuholníkové zobrazenia sú špeciálnou triedou funkcií v $\mathbb{R}^n$, ktorých i-tá zložka závisí len na prvých i premenných. Analógiu Šarkovského vety pre spojité troj. zobrazenia dokázal ako prvý P. Kloeden v [6]. My podáme verziu tohto dôkazu, ktorú možno nájsť v [5], kde je preformulovaný z pôvodného jazyka diferenčných rovníc. Druhá časť dôkazu je mierne pozmenená kvôli zrozumiteľnosti.

Definícia. *Označme $I = [0, 1]$ a $I^n = [0, 1]^n$ jednotkovú kocku v $\mathbb{R}^n$. Potom trojuholníkovým zobrazením máme na mysli funkciu $F = (f_1, ..., f_n) : I^n \to I^n$, kde $f_i(x_1, ..., x_n) = f_i(x_1, ..., x_i)$; $i = 1, ..., n$.*

Značenie. Ak $F = (f_1, ..., f_n) : I^n \to I^n$ je truholníkové zobrazenie, budeme značiť $F_k = (f_1, ..., f_k) : I^k \to I^k$. Zrejme F_k je tiež troj. zobrazenie a platí $F_1 = f_1$ a $F_n = F$.

Lemma 16. *Ak F_k pre $1 \leq k \leq n - 1$ má bod minimálnej periódy q, potom F_{k+1} má tiež bod min. periódy q.*

Dôkaz. Označme $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k) \in I_k$ daný bod zobrazenia F_k min. periódy q. Ďalej označme $F_{k+1}^q = (h_1, ..., h_{k+1})$, kde $h_i = h_i(x_1, ..., x_i)$ sú nejaké spojité (ako zloženia spojitých) funkcie. Musí platiť $h_i(\beta_1, ..., \beta_i) = (\beta_1, ..., \beta_i) \quad \forall i = 1, ..., k$, lebo $(\beta_1, ..., \beta_i)$ je per. bod zobrazenia $(f_1, ..., f_i)$ periódy q.
Pre poslednú súradnicu máme $h_{k+1}(\beta, x_{k+1}) = (\beta, H_{k+1}(x_{k+1}))$ pre nejakú spojitú reálnu funkciu $H_{k+1} : I \to I$. Vieme, že spojitá H_{k+1} na jednodimenzionálnom intervale I s oborom hodnôt obsiahnutým v I musí mať pevný bod, označme ho $\gamma \in I$. Potom zrejme bod $(\beta_1, ..., \beta_k, \gamma) \in I^{k+1}$ je hľadaný bod minimálnej periódy q pre zobrazenie F_{k+1}.

□

Veta 17 (Kloeden [6]). *Nech $F = F_n : I^n \to I^n$ je spojité trojuholníkové zobrazenie. Ak F má bod minimálnej periódy p, potom má aj bod minimálnej periódy q pre každé $q \prec p$.*

Dôkaz. Použijeme indukciu podľa n, pričom prípad $n = 1$ platí vďaka Šarkovského vete. Predpokladajme tvrdenie pre n, dokazujeme ho pre zobrazenie F_{n+1}.

Nech teda $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{n+1})$ je bod min. periódy $p = 2^l(2r+1)$, $l \geq 0, r \geq 0$ pre zobrazenie F_{n+1}. Potom aj pre F_n musí byť bod $\bar{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ periódy p, nie však nutne minimálnej. Avšak minimálna perióda q tohto bodu $\bar{\beta}$ musí nutne deliť p. Preto platí $q = 2^{\bar{l}}(2\bar{r}+1)$; $0 \leq \bar{l} \leq l, 0 \leq \bar{r} \leq r$, kde $2\bar{r}+1$ delí $2r+1$. Zvlášť budeme uvažovať prípad, kedy q má nepárny člen v prvočíselnom rozklade a zvlášť prípad, keď je to mocnina dvojky.

1. $r > 0$.

Keďže $0 \leq \bar{l} \leq l$, $0 \leq \bar{r} \leq r$, tak máme $q = 2^{\bar{l}}(2\bar{r}+1) \succeq 2^l(2r+1) = p$. Z indukčného predpokladu máme body minimálnej periódy t pre každé $t \prec q$ pre zobrazenie F_n a vďaka Lemmatu 16 teda aj pre zobrazenie F_{n+1}. Špeciálne dostávame body min. periódy t pre F_{n+1} pre všetky $t \preceq p$.

2. $r = 0$.

Máme teda $q = 2^{\bar{l}}$ $0 \leq \bar{l} \leq l$. Rovnako ako v prvom prípade dostaneme body minimálnych periód $1 \preceq ... \preceq 2^{\bar{l}}$ pre zobrazenie F_{n+1}. Ostávajú teda periódy $2^{\bar{l}+1} \preceq ... \preceq (2r+1)2^l$.

Pre bod $\bar{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ min. periódy q pre F_n uvažujme interval $I_{\bar{\beta}} = \{\bar{\beta}\} \times I = \{(\beta_1, ..., \beta_n, x) : x \in I\}$. Keďže $F_n^q(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$, tak $F_{n+1}^q = (f_1^q, ..., f_{n+1}^q)$ zobrazuje $I_{\bar{\beta}}$ do seba samého. Funkcia $f_{n+1}|_{I_{\bar{\beta}}}$ závisí len na poslednej premennej, môžeme ju teda uvažovať ako funkciu jednej reálnej premennej. Naviac keďže $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{n+1})$ je bod min. periódy p pre F_{n+1}, tak β_{n+1} musí byť bod min. periódy p pre $f_{n+1}|_{I_{\bar{\beta}}}$, pričom minimalitu zaručuje fakt, že p aj q sú mocniny dvojky a $\bar{\beta}$ má min. per. q pre F_n. Odtiaľ už β_{n+1} je bod min. per. $p/q = (2r+1)2^{l-\bar{l}}$ pre funkciu $f_{n+1}^q|_{I_{\bar{\beta}}}$. Pre tú ale platí Šarkovského veta, preto máme aj body min. periódy t pre všetky $t \preceq p/q$. Pre pevné t označme takýto bod $\gamma_t \in I$. Nakoniec každý bod γ_t je bodom periódy $q \cdot t$ pre $f_{n+1}|_{I_{\bar{\beta}}}$, nie však už nutne minimálnej.

Uvažujme teraz body $(\beta_1, ..., \beta_n, \gamma_t) \in I_{\bar{\beta}}$. Keďže $F_n^q(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$ a q delí $q \cdot t$, tak sú tieto body periodickými bodmi periódy $q \cdot t$ pre F_{n+1}. Musí už ísť aj o minimálnu periódu, pretože tá vďaka prvým n súradniciam musí byť násobkom čísla q a vďaka poslednej súradnici to nemôže byť menší násobok ako t (pretože γ_t je bod min. per. t pre $f_{n+1}^q|_{I_{\bar{\beta}}}$).

Dostali sme teda per. body zobrazenia F_{n+1} s minimálnou periódou $q \cdot t = 2^{\bar{l}}t$ pre každé $t \preceq p/q = (2r+1)2^{l-\bar{l}}$. Tým sú pokryté periódy $2^{\bar{l}} \preceq ... \preceq (2r+1)2^l$ a dôkaz je ukončený.

$\square$

Literatúra

[1] T. Y. Li a James A. Yorke. „Period three implies chaos“. In: *Amer. Math. Monthly* 82.10 (1975), s. 985–992. ISSN: 0002-9890,1930-0972. DOI: 10.2307/2318254. URL: https://doi.org/10.2307/2318254.

[2] O. M. Šarkovskij. „Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself“. In: *Ukrain. Mat. Ž.* 16 (1964), s. 61–71. ISSN: 0041-6053.

[3] Michael Brin a Garrett Stuck. *Introduction to dynamical systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002, s. xii+240. ISBN: 0-521-80841-3. DOI: 10.1017/CBO9780511755316. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511755316.

[4] Louis Block. „Stability of periodic orbits in the theorem of Šarkovskii“. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 81.2 (1981), s. 333–336. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: 10.2307/2044221. URL: https://doi.org/10.2307/2044221.

[5] Alexander M. Blokh a Oleksandr M. Sharkovsky. *Sharkovsky ordering.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2022, s. viii+109. ISBN: 978-3-030-99123-4; 978-3-030-99125-8. DOI: 10.1007/978-3-030-99125-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-99125-8.

[6] Peter E. Kloeden. „On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering“. In: *Bull. Austral. Math. Soc.* 20.2 (1979), s. 171–177. ISSN: 0004-9727. DOI: 10.1017/S0004972700010819. URL: https://doi.org/10.1017/S0004972700010819.

[7] P. Štefan. „A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line“. In: *Comm. Math. Phys.* 54.3 (1977), s. 237–248. ISSN: 0010-3616,1432-0916. URL: http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103900868.

[8] Philip D. Straffin Jr. „Periodic points of continuous functions“. In: *Math. Mag.* 51.2 (1978), s. 99–105. ISSN: 0025-570X,1930-0980. DOI: 10.2307/2690145. URL: https://doi.org/10.2307/2690145.

[9] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet I.* cze. Praha: Academia, 1974. URL: http://eudml.org/doc/202395.

[10] S. F. Kolyada. „Li-Yorke sensitivity and other concepts of chaos“. In: *Ukraïn. Mat. Zh.* 56.8 (2004), s. 1043–1061. ISSN: 0041-6053. DOI: 10.1007/s11253-005-0055-4. URL: https://doi.org/10.1007/s11253-005-0055-4.

[11] Sylvie Ruette. *Chaos on the interval.* Zv. 67. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, s. xii+215. ISBN: 978-1-4704-2956-0. DOI: 10.1090/ulect/067. URL: https://doi.org/10.1090/ulect/067.

[12] M. Kuchta a J. Smítal. „Two-point scrambled set implies chaos". In: *European Conference on Iteration Theory (Caldes de Malavella, 1987)*. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989, s. 427–430. ISBN: 981-02-0041-2.

[13] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Second. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989, s. xviii+336. ISBN: 0-201-13046-7.

[14] Anatole Katok a Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Zv. 54. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, s. xviii+802. ISBN: 0-521-34187-6. DOI: 10.1017/CBO9780511809187. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511809187.

[15] Martin Grinč, Roman Hric a Ľubomír Snoha. „The structure of the space $C(I,I)$ from the point of view of Sharkovsky stratification". In: *Topology* 39.5 (2000), s. 937–946. ISSN: 0040-9383. DOI: 10.1016/S0040-9383(99)00042-7. URL: https://doi.org/10.1016/S0040-9383(99)00042-7.

[16] Víctor Jiménez López a Ľubomír Snoha. „All maps of type 2^∞ are boundary maps". In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 125.6 (1997), s. 1667–1673. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: 10.1090/S0002-9939-97-03452-7. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03452-7.

[17] L. S. Block a W. A. Coppel. *Dynamics in one dimension*. Zv. 1513. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1992, s. viii+249. ISBN: 3-540-55309-6. DOI: 10.1007/BFb0084762. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0084762.

[18] Francisco Balibrea a Antonio Linero. „Periodic structure of σ-permutations maps on I^n". In: *Aequationes Math.* 62.3 (2001), s. 265–279. ISSN: 0001-9054,1420-8903. DOI: 10.1007/PL00000152. URL: https://doi.org/10.1007/PL00000152.

[19] Piotr Szuca. „Sharkovskiĭ's theorem holds for some discontinuous functions". In: *Fund. Math.* 179.1 (2003), s. 27–41. ISSN: 0016-2736,1730-6329. DOI: 10.4064/fm179-1-3. URL: https://doi.org/10.4064/fm179-1-3.

[20] Helga Schirmer. „A topologist's view of Sharkovsky's theorem". In: *Houston J. Math.* 11.3 (1985), s. 385–395. ISSN: 0362-1588.

[21] Stewart Baldwin. „Some limitations toward extending Šarkovskiĭ's theorem to connected linearly ordered spaces". In: *Houston J. Math.* 17.1 (1991), s. 39–53. ISSN: 0362-1588.

[22] Chris Bernhardt. „A Sharkovsky theorem for a discrete system". In: *J. Difference Equ. Appl.* 10.1 (2004), s. 29–40. ISSN: 1023-6198,1563-5120. DOI: 10.1080/1023619031000146977. URL: https://doi.org/10.1080/1023619031000146977.

[23] Alexander Blokh a Michał Misiurewicz. „Evolution of the Sharkovsky theorem". In: *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal* 76.1 (feb. 2024), s. 48–61. DOI: 10.3842/umzh.v76i1.7641. URL: https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/7641.