Oponentský posudek bakalářské práce

M. Maleček: Spektrum cesàrovských operátorů

Práce se věnuje výpočtu spektra Cesàrova operátoru $(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ na klasických prostorech posloupností c_0, c a ℓ_p, $1 < p \leq \infty$. Tato úloha je značně netriviální a vyžaduje použití několika různých metod a ne vždy přímočarých nápaditých obratů. Problémem se zabývalo několik matematiků a jejich výsledky týkající se této problematiky jsou publikované v různých (i prestižních) časopisech. Cílem práce je přehledně zpracovat danou úlohu v jedné práci a dopracovat detaily.

Práce je napsána poměrně přehledně, její formální úroveň je velmi dobrá a jazyková úroveň je slušná. Po matematické stránce obsahuje nicméně řadu drobnějších chybiček a místy nedotažená vysvětlení. Mohla by též působit kompaktněji – bylo by šikovnější zformulovat některá lemmata tak, aby se dala přímo použít místo frází „podobně jako v důkazu… “, a někdy aplikovat již dokázané místo zbytečného technického dokazování znovu.

Dle mého názoru předložená práce rozhodně splňuje požadavky, aby byla uznána jako bakalářská práce oboru Obecná matematika.

Chyby (různého stupně závažnosti).

1) str. 7: Místo $\frac{1}{1-2\lambda}$ má být $\frac{2}{1-2\lambda}$.
2) str. 9: $\|e^n\| \leq 1$, nikoli $\|e^n\| = 1$.
3) str. 11: Proč je v tom nekonečném součinu absolutní hodnota? (Jaká je definice absolutní konvergence součinu?)
4) str. 12: Důsledek pro spektrum C – na jakém prostoru (c_0, ℓ_∞, obojí)?
5) str. 13: Ve znění Lemmatu 3.7 chybí definice a.
6) str. 13: Důkaz Lemmatu 3.7 – co když $x = 0$? Co když $\left|\frac{2a}{k} - \frac{a^2+b^2}{k^2}\right| = 0$?
7) str. 15–16: Ověřujeme omezenost norem, nikoli náležení do ℓ_1!
8) str. 15, formule (3.1): Místo $s-1$ má být $s-2$.
9) str. 16: Rovnost platí pro $s \geq t$!
10) str. 18, důkaz Věty 3.12: 1 *není* vlastním číslem C'!
11) str. 18: Výpočet dole je divný – potřebujeme rozklad prvku $(\lambda I - C)x$!
12) str. 20 nahoře: Místo $1-p$ a $1-q$ má být $p-1$ a $q-1$.
13) str. 23: Pro jaká n platí ta rovnost z Taylora?
14) str. 23 dole: Má být $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.
15) str. 23–24: Ten důkaz není správně, protože n_1 závisí na m_0!
16) str. 27: Místo $n \leq k$ má být $k \leq n$ (!)
17) str. 28: Co je to C^*? (Není to konzistentní s předchozím značením.)

Nedostatečná vysvětlení.

1) str. 3: X je prostor nějakých nebo všech posloupností? Co to znamená přirozeně reprezentovat *nekonečnou* maticí?
2) str. 8: Jak je to s jednoznačností x?
3) str. 9, důkaz Lemmatu 3.1: Nejprve je třeba ukázat, že $(Ax)_s \in \mathbb{C}$.
4) str. 9: Je linearita A opravdu zřejmá?
5) str. 10 dole: Proč je $C^T y$ prvek ℓ_1?
6) str. 12: „je známo o γ… “ – proč to tu není rozvedeno?
7) str. 15: Proč je A ta inverze? (Používá se opačná implikace – když existuje inverze, tak…)
8) str. 18: Spojitost D neplyne ihned z Lemmatu 3.9. Je třeba něco říci (asi o projekcích).
9) str. 19: Proč tam lze dát C' místo C?
10) str. 22, důkaz Lemmatu 4.4: Proč je $C^T y$ prvek ℓ_q?
11) str. 22, důkaz Věty 4.5: Chybí „Tedy $\|C^*\| \geq \frac{1}{\alpha}$.“
12) str. 26 dole: Jak je to tedy s tou normou $\|Ex\|_p$ (a s tou „absolutní hodnotou“)?
13) str. 28: Proč je spojitost F_n zřejmá?
14) str. 28: Rozvést konvergenci $F_n y \to F y$.

15) str. 29: Lze ty nekonečné sumy přeskupovat?
16) str. 29: Proč $\|(I - C)(I - C^*)\| = \|I - C\|^2$?

Zbytečně opakované/komplikované důkazy.

1) str. 17: Většina důkazu Věty 3.10 již ihned plyne ze znalosti pro ℓ_∞.
2) str. 17: Věta 3.11 plyne ihned z Věty 3.4.
3) str. 23–24: Důkaz je zbytečně komplikovaně veden přes Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Stačí přímočaře použít absolutní stejnoměrnou konvergenci Taylorovy řady např. na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.
4) str. 24: Lze ušetřit některé výpočty použitím rozvoje pro $(1 + x)^{\frac{q}{2}}$.

Kromě toho práce obsahuje řadu překlepů a neobratností, jejichž seznam je autorovi k dispozici.

11.6.2024
Michal Johanis